

# الباب السابع

## التكامل

التكامل غير المحدود :

التكامل هو عملية عكسية لعملية التفاضل إذ أنها تحتوي على إيجاد الدالة الأصلية من دالتها المشتقة . فلو أخذنا الدالة الآتية :

$$ص = د (س)$$

فإن تفاضل هذه الدالة بالنسبة إلى س هو :

$$د = \frac{ص}{س}$$

وقد سبق أن عاملنا  $\frac{ص}{س}$  كنهاية النسبة  $\Delta$  ص إلى  $\Delta$  س كلها اقترنت

$\Delta$  س من الصفر . ومع ذلك يمكن أيضاً معاملة  $\frac{ص}{س}$  كنسبة عادية . وفي

هذه الحالة فإنه يمكن ضرب طرفي التعبير السابق بواسطة  $س$  وينتج أن :

$$ص = د (س) و س$$

وتعرف  $ص$  على أنها تفاضل الدالة  $ص = د (س)$  . وحيث أن

$ص = د (س)$  فإن التعبير

$$ص = دَ (س) و س$$

يمكن كتابته كالآتي :

$$و [ د (س) ] = دَ (س) و س$$

ونعرف الآن علامة التكامل } لتعني أنه عند ظهورها فيجب إيجاد الدالة التي يظهر تفاضلها بجانب علامة التكامل . أي أن :

$$و [ د (س) ] = د (س)$$

أو

$$و ص = ص$$

$$دَ (س) و س = د (س)$$

بعد أن أنشأنا معنى علامة التكامل فإنه يمكن تكامل التعبير ، ص = دَ (س) كالآتي :

$$و ص = دَ (س) و س$$

وبسبب تعريف معنى علامة التكامل فتصبح النتيجة

$$ص = د (س)$$

حيث أن :

$$و ص = ص$$

$$6 \quad \left. \begin{array}{l} \text{د} (س) \text{ و } س = \text{د} (س) \end{array} \right\}$$

وباخضار فقد (١) فاضلنا الدالة  $ص = \text{د} (س)$

(٢) أوجد المعامل التفاضلي للدالة

(٣) كاملنا المعامل التفاضلي للوصول إلى الدالة الأصلية

ويطلق على التكامل الذي سبق مناقشته التكامل غير المحدود . نخذ

مثلا الدالة :

$$\text{د} (س) = س^٤$$

وبمفاضلة هذه الدالة بالنسبة إلى  $س$  نحصل على :

$$\frac{س}{س} = [ \text{د} (س) ] = ٤ س^٣$$

وبضرب الطرفين بواسطة  $س$  فإن المتفاضل يمكن إيجاده :

$$س [ \text{د} (س) ] = ٤ س^٣ س$$

وبتكامل الطرفين في التعبير السابق نحصل على :

$$\int س [ \text{د} (س) ] = \int ٤ س^٣ س$$

وبالنسبة إلى الطرف الأيمن فإن التكامل لتفاضل الدالة  $\text{د} (س)$  يساوي

الدالة نفسها بسبب تعريفنا السابق لعلامة التكامل . أي أن :

$$\int س [ \text{د} (س) ] = \text{د} (س)$$

وبالنسبة إلى الطرف الأيسر فإن التكامل يساوى س ، أى أن :

$$\int s^3 ds = \frac{s^4}{4}$$

ومن ثم فإن نتيجة التكامل هو التعبير الأصلي

$$D(s) = s^4$$

خذ مثلاً آخر الدالة الآتية :

$$D(s) = 10s$$

وبالتفاضل نجد أن :

$$\frac{d}{ds} [D(s)] = 10$$

ويمكن المتفاضل هو :

$$D(s) = 10s$$

ويوضع التكامل بالآتي :

$$\int s [D(s)] = \int 10s ds$$

ويأجرأ عملية التكامل يكون لدينا

$$D(s) = 10s$$

ويلاحظ أنه في المثالين السابقين نبدأ عادة بالدالة ثم نفاضلها وإيجاد التفاضل ثم نكاملها للوصول إلى الدالة الأصلية . ومن الطبيعي أن التكامل

بهذه الصورة سهل وبسيط للغاية . إذ عادة عندما يتطلب إجراء عملية التكامل فإنه لا يكون لدينا إلا المعامل التفاضلي .

خذ مثلا مشكلة إيجاد الثابتة التي معاملها التفاضلي هو :

$$٢س^٢ + س - ٤$$

أى أن :

$$\frac{ص}{س} = ٢س^٢ + س - ٤$$

والمطلوب إيجاد ص .

الخطوة الأولى هي إيجاد التفاضل عن طريق ضرب الطرفين في التعبير

بواسطة  $س$  لتعطى :

$$ص = (٢س^٣ + س^٢ - ٤س)$$

ويمكن تكامل الطرفين كالآتى :

$$\int ص = \int (٢س^٣ + س^٢ - ٤س)$$

أو

$$ص = \int (٢س^٣ + س^٢ - ٤س)$$

ومن معلوماتنا في التفاضل فإنه يمكن تكامل الطرف الأيسر كالآتى :

$$ص = ٢س^٤ + \frac{س^٣}{٣} - ٤س$$

ولإيضاح أن التكامل كان صحيحاً فإنه يمكن حساب المعامل التفاضلي  
هذه الدالة لمعرفة ما إذا كنا سنحصل على المعامل التفاضلي الأصلي .

وحساب التفاضل نجد أن :

$$\left( \frac{s^2}{2} + s \right) \frac{s}{s} = \frac{صص}{s}$$

$$4 - s + 2s^2 = \frac{صص}{s}$$

ومن ثم يثبت أن التكامل كان صحيحاً .

وبذلك نكون قد شرحتنا معنى التكامل وكيفية إجراء عملية التكامل  
إلا أننا لم نتعرض الآن للحقيقة أن تفاضل الثابت يساوى صفراً . إذ أنه  
إذا كان تفاضل دالة تحتوي على كمية ثابتة فإنها ستساوى صفراً في التعبير  
الخاص بالمعامل التفاضلي بهرف النظر عن قيمة الكمية الثابتة . ومن ثم  
عند إيجاد تفاضلي دالة وتكاملها فإنه ليس من الضروري أن الدالة الأصلية  
النتيجة تكون صحيحة حيث أن الثوابت في الدالة الأصلية ستفقد في  
عملية التفاضل . وطبقاً لذلك فإنه يجب في إجراء عملية التكامل أن نأخذ  
في الاعتبار إمكانية وجود هذه الثوابت بإضافة ما يسمى بثابت التكامل .  
وسنشير إلى ثابت التكامل بالرمز  $C$  . ولإيضاح هذه الإجراءات نأخذ المثال  
السابق وتصحيح عملنا بإضافة ثابت التكامل . وفي المثال السابق كان لدينا :

$$\frac{ص}{س} = ٣س^٢ + س - ٤$$

أو

$$ص = (٣س^٢ + س - ٤) س$$

وبتكامل هذه الدالة وإضافة ثابت التكامل النتيجة السابقة نجد أن :

$$\int ص = \int (٣س^٢ + س - ٤) س$$

$$ص = ٣س^٣ - \frac{س^٢}{٢} + س - ٤$$

لاحظ أن الثابت غير محدد القيمة وليست هناك طريقة لتحديد قيمته طالما ليس هناك أية شروط أخرى محددة . أما إذا كان في مشكلة معينة هناك شروط أخرى في المشكلة تستلزم أن  $ص$  تأخذ قيمة محددة فإنه يكون لدينا تكامل معين عندما نستبدل  $ص$  بهذه القيمة .

ولمراجعة التكامل السابق إجرائه بأخذ تفاضل الدالة :

$$ص = ٣س^٣ - \frac{س^٢}{٢} + س - ٤$$

بالتفاضل :

$$\frac{ص}{س} = ٣س^٢ + س - ٤ + صفر$$

أو

$$\frac{u}{s} = 3s^2 + s - 4$$

وبذلك نكون قد أسقطنا الثابت  $u$  عند إجراء التفاضل ونكون النتيجة هو المعامل التفاضلي الذي بدأنا به .

وسنوضح الآن عدداً من خواص التكامل وكذا بعض قواعده .

$$1 - \int u \, dv = [u \, v] - \int v \, du$$

حيث  $u$  تمثل كمية ثابتة .

أى أن تكامل دالة مضروبة في كمية ثابتة يساوى الكمية الثابتة مضروبة في تكامل الدالة .

$$2 - \int (u \pm v) \, dx = \int u \, dx \pm \int v \, dx$$

$$= \int u \, dx + \int v \, dx$$

أى أن تكامل مجموع أى عدد من الدوال يساوى مجموع تكاملات هذه الدوال كل على حدة .

$$3 - \int (u - v) \, dx = \int u \, dx - \int v \, dx$$

$$= \int u \, dx - \int v \, dx$$

أى أن تكامل الفرق هو فرق التكاملات

$$\int y \, dx = \int (y_1 + y_2) \, dx \quad - ٤$$

$$\int \frac{d(s)}{1+s} = \int [d(s)] \cdot \frac{1}{1+s} \quad - ٥$$

$$\int \frac{[d(s)]}{d(s)} = \int 1 \, dx \quad - ٦$$

أى أنه إذا كان لدينا كسر وكان بسطه مساوياً المشتقة الأولى بالنسبة إلى  $s$  لمقامه فإن تكامل الكسر بالنسبة إلى  $s$  يساوى لو المقام.

$$\int \frac{d(s)}{d(s)} = \int 1 \, dx \quad - ٧$$

$$\int \frac{d_1(s)}{1+s} = \int [d(s)] \cdot \frac{1}{1+s} \quad - ٨$$

$$\int \frac{1}{(1+s)^2} = \int (1+s)^{-2} \, dx \quad - ٩$$

إذا كانت  $n \neq -1$

$$\int \frac{1}{(1+s)^n} = \int \frac{1}{1+s} \, dx \quad - ١٠$$

$$- ١١ - \quad \left\{ \text{هـ اس} + \text{ب} = \frac{1}{1} \text{هـ اس} + \text{ب} \right\}$$

وإليك أمثلة تطبيقاً لهذه القواعد :

تطبيق القاعدة الأولى :

$$\left\{ \text{هـ و س} = \text{هـ و س} \right\}$$

$$\left\{ ١٠ \text{س} ١٠ \text{و س} = ١٠ \text{س} ١٠ \text{و س} \right\}$$

$$\text{ح} + \frac{١٠ \text{س}}{١٠} \times ١٠ =$$

$$\text{ح} + ١٠ \text{س} =$$

تطبيق القاعدة الثانية :

$$\left\{ (\text{هـ س}^٢ + ٢ \text{لوس}) \text{و س} = \text{هـ} \left\{ \text{س}^٢ \text{و س} + ٢ \right\} \text{لوس} \text{و س} \right\}$$

$$\left\{ (\text{س}^٢ + \text{س} + \text{هـ}) \text{و س} = \text{هـ} \left\{ \text{س}^٣ \text{و س} + \text{هـ} \right\} \text{لوس} \text{و س} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \text{س}^٤ + \frac{1}{4} \text{س}^٣ + \text{هـ س} + \text{ح}$$

$$\left\{ (\text{س}^٢ - ١) \text{و س} = \text{هـ} \left\{ \text{س}^٢ - ١ \right\} \text{لوس} \text{و س} \right\}$$

$$= ٨ \left\{ \text{س}^٢ \text{و س} - ١٢ \right\} \text{س}^٢ \text{و س} + ٦ \left\{ \text{س} \text{و س} - \text{س} \right\} \text{و س}$$

$$س + ح = \frac{س^2}{2} \times 6 + \frac{س^2}{3} \times 12 - \frac{س^3}{4} \times 8 =$$

$$= 2س^3 - 4س^3 + 3س^3 - س + ح$$

تطبيق القاعدة الثالثة :

$$\left[ هس - س^2 - \frac{1}{صس} \right]$$

$$= \left[ هس و س - س^2 و س \right] - \frac{وس}{صس}$$

$$= هس - \frac{س^3}{3} - 2 \frac{وس}{صس} + ح$$

تطبيق القاعدة الرابعة :

$$\left[ وس = س^2 و س = س + ح \right]$$

تطبيق القاعدة الخامسة :

$$\left[ س^6 و س = س + \frac{س^7}{6} \right]$$

$$\left[ س^8 و س = س + \frac{1}{8} س^9 \right]$$

$$\left[ س^9 و س = س + \frac{1}{9} س^{10} \right]$$

$$ح + \frac{س - ٥ + ١}{١ + ٥ -} =$$

$$ح + \frac{س - ٤}{٤ -} =$$

$$\frac{١}{٤س} - ح =$$

$$6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{س} و س = س' و س \end{array} \right.$$

$$ح + \frac{س' + ١}{١ + ١} =$$

$$ح + \frac{س' + ١}{١ + ١} =$$

تطبيق القاعدة السادسة :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{س' و س}{س} = لوس + ح \end{array} \right.$$

$$6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{٤}{س} و س = ٤ لوس + ح \end{array} \right.$$

تطبيق القاعدة السابعة :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{١}{١} و س = س' و س + ح \end{array} \right.$$

تطبيق القاعدة الثامنة:

$$\left. \begin{aligned} & 10س + \frac{10س}{10لو} = 10س و س \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & 1س(س - 2س) (س - 3س) (1 - 2س) و س \end{aligned} \right\}$$

$$= \frac{1س(س - 2س)}{1لو} + \dots$$

لاحظ في هذا المثال أن د (س) = س - 3س - س و [د (س)] = (س - 3س) (1 - 2س)

تطبيق القاعدة التاسعة:

$$\left. \begin{aligned} & 7(7 - 4س) \frac{1}{4 \times 6} = 7(7 - 4س) و س \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow + \frac{7(7 - 4س)}{24} =$$

$$\left. \begin{aligned} & 5(5 - 8س) \frac{1}{5 \times 4} = 5(5 - 8س) و س \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow + \frac{5(5 - 8س)}{20} =$$

$$\left. \int (3s - 5)^{-2} ds \right| = \left. \int \frac{ds}{(5 - 3s)^2} \right| \quad 6$$

$$\Rightarrow +1 - (5 - 3s) \frac{1}{3 \times 1 -} =$$

$$\Rightarrow + \frac{1}{(5 - 3s)^3} =$$

تطبيق القاعدة العاشرة :

$$\Rightarrow + (1 - 5s) \frac{1}{1 - 5s} = \frac{ds}{1 - 5s} \quad 6$$

$$\Rightarrow + (s - 5) \frac{1}{1 -} = \frac{ds}{s - 5} \quad 6$$

$$\Rightarrow - = - \text{لو } (s - 5)$$

تطبيق القاعدة الحادية عشر :

$$\left. \int 2s^2 - 5s = \frac{1}{3} s^3 - \frac{5}{2} s^2 \right| \quad 6$$

$$\Rightarrow + s^3 \frac{1}{3} \times 3 = s^3 \quad 6$$

$$\Rightarrow + s^3$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{هـ} - \text{و} - \text{س} = \frac{1}{1} \\ & \text{هـ} - \text{و} - \text{س} + \text{ح} \end{aligned} \right\}$$

$$= - \text{هـ} - \text{و} - \text{س} + \text{ح}$$

تفسير وتطبيقات النظام في المحدودة :

أن التفسير الهندسي للتكامل غير المحدود ينبع مباشرة من التفسير الذي سبق أن أوضحناه لتفاضل الدالة . لقد سبق أن أوضحنا أنه عند إيجاد المعامل التفاضلي لدالة تحتوي على متغير مستقل واحد فإن المعامل التفاضلي يفسر هندسياً على أنه تعبير يوضح ميل الدالة الأصلية لأي قيمة للمتغير المستقل . وبالعكس عند تكامل دالة ، فإننا نجد دالة التي ميلها عند أي نقطة قد أعطى بمعرفة الدالة التي كاملناها .

ولنأخذ مثالا لإيجاد تكامل الدالة  $s + 3$  . فإذا أخذنا ص لتمثل الدالة التي معاملها التفاضلي هو  $s + 3$  فإن :

$$s + 3 = \frac{v}{s}$$

$$v = (s + 3) s$$

وبتكامل الطرفين يكون لدينا

$$\int v = \int (s + 3) s$$

$$v = \frac{s^2}{2} + 3s + \text{ح}$$

ولذلك فإن  $ص = \left(\frac{س}{٢}\right) + ٣س + ح$  لها معاملها التفاضلي الذي بدأنا به . ولكن هذه الدالة لا تحدد بطريقة وحيدة أى منحني ولكنها تعرف مجموعة من المنحنيات التي تعتمد على قيمة ح . ومن ثم يجب معرفة معلومات إضافية قبل تحديد قيمة ح .

لتوضح هذه الفكرة فلنأخذ المثال التالي . افترض أننا أجرينا تحليلاً لإمكانات الإنتاج والأفراد . وقد قدر أنه بالاستثمارات الحالية في المعدات وعدد العمال الحالي فإن الإنتاج السكى لليوم الواحد هو ٥٠٠٠ وحدة . وقد قدر أيضاً أنه بدون أى زيادة فى الاستثمار فى المعدات فإن الإنتاج الحدى للعمال الإضافين يعطى بمعرفة الدالة .

$$\beta = ١٠٠ - ٥س$$

حيث :

$\beta =$  الإنتاج الحدى للعامل الإضافى الذى ترتيبه س .

$س =$  عدد العمال الإضافين .

افترض الآن أننا نرغب فى معرفة الإنتاج السكى الذى ينتج فى حالة استخدام ١٠٠ عامل إضافى إلى القوة العاملة . فإذا رجعنا إلى الإنتاج السكى بالرمز  $\phi$  فإنه من العبارة السابقة فإن :

$$\frac{\phi}{س} = ١٠٠ - ٥س$$

$$\phi = س(١٠٠ - ٥س)$$

وبالتكامل لإيجاد  $\phi$  يكون لدينا

$$\phi = \left[ 100 - 5 \left( \frac{1}{3} \right) \right] S$$

$$\phi = 100S - 5 \left( \frac{2}{3} S \right)$$

$$\phi = 100S - \frac{10}{3} S$$

وفي هذه المشكلة يمكن تحديد قيمة  $S$  من الحقائق السابقة . وحيث أن الإنتاج الكلي يساوى ٥٠٠٠ وحدة عندما يكون عدد العمال الإضافيين يساوى صفراً فإنه يمكن إيجاد قيمة  $S$  كالآتي :

$$\phi = 100(\text{صفر}) - \frac{10}{3}(\text{صفر}) = 5000$$

أو

$$5000 = S$$

ومن ثم فإن الدالة التي تعرض العلاقة بين الإنتاج الكلي وعدد العمال الإضافيين هي :

$$\phi = 100S - \frac{10}{3} S + 5000$$

ولإيجاد الإنتاج الكلي في حالة استخدام ١٠٠ عامل إضافي فإننا نضع ١٠٠ بدلا من  $S$  في هذه المعادلة كالآتي :

$$\phi = 100(100) - \frac{10}{3}(100) + 5000$$

$$\phi = 10000 - 1000 + 5000$$

$$= 11667$$

ولنأخذ مثالا آخر لا يوضح التعويض الجبرى عند إيجاد التكامل.  
لتفرض أننا نرغب فى إيجاد:

$$\int \frac{s + 3}{s + 1} ds$$

فإنه يمكن تبسيط هذا التكامل باستخدام التعويض

$$e = s + 1$$

6

$$1 = \frac{e}{s}$$

أو

$$e = s + 1$$

وبالتعويض فى التكامل الأصيل

$$\int \frac{s + 3}{s + 1} ds = \int \frac{e + 2}{e} ds$$

$$= \int (1 + \frac{2}{e}) ds$$

$$= s + 2 \ln |e| + C$$

وبوضع (s + 1) بدلا من e يكون لدينا

$$\int \frac{s + 3}{s + 1} ds = s + 2 \ln |s + 1| + C$$

وبستخدم التكامل الجزئي لحل بعض المشاكل وقد سبق أن أوضحنا المعادلة الخاصة بالمعامل التفاضلي لحاصل ضرب دالتين وهي :

$$\frac{u}{v} (v) \phi = [ (v) \phi (v) ] \frac{u}{v}$$

$$+ [ (v) \phi ] \frac{u}{v}$$

وإذا ضربنا هذا التعبير بواسطة  $v$  ينتج أن :

$$v [ (v) \phi (v) ] = [ (v) \phi ] v + [ (v) \phi ] v$$

وبتكامل الطرفين :

$$\int v [ (v) \phi (v) ] = \int [ (v) \phi ] v + \int [ (v) \phi ] v$$

أو

$$\int v [ (v) \phi (v) ] = \int [ (v) \phi ] v + \int [ (v) \phi ] v$$

وبإعادة ترتيب هذه المعادلة يكون لدينا

$$\int v [ (v) \phi (v) ] - \int [ (v) \phi ] v = \int [ (v) \phi ] v$$

وتمثل هذه المعادلة الأخيرة التكامل الجزئي .

وكمثال لاستخدام التكامل الجزئي افترض التكامل الآتي :

$$\int x \ln x \, dx$$

فترض أن :

$$د(س) = لو س$$

6

$$و[\Phi(س)] = س و س$$

ومن ثم فإن :

$$و[د(س)] = \frac{1}{س} و س$$

6

$$\frac{س^2}{2} \Phi(س) =$$

وبالتعويض في معامل التكامل الجزئي يكون لدينا

$$\int س لو س و س = \frac{س^2}{2} لو س - \int \frac{س^2}{2} = \frac{1}{س} و س$$

$$= \frac{س^2}{2} لو س - \int \frac{س^2}{2} و س$$

$$= \frac{س^2}{2} لو س - \frac{س^2}{4} + \dots$$

التكامل المحدود :

ولإيضاح معنى التكامل المحدود فلنأخذ المثال التالي :  
افترض أن الإيراد الحدى على الاستثمار فى إمكانيات الإنتاج المستويات  
المختلفة للاستثمار يمكن تعريفه بالمعادلة الآتية .

$$س = ٢٠٠٠ /$$

$$س = ٣ هـ$$

حيث :

س = مستوى الاستثمار

س = الإيراد الحدى للجنيه لمستوى الاستثمار س

وتفسير هذه العلاقة أنه لكل مستوى من مستويات المصاريف الكلية  
الموضحة بقيمة س فإن كل جنيه إضافي صرف على إمكانيات الإنتاج سيستنتج  
عنه إيراد إضافي يساوى ر .

وحيث أن الدالة هي دالة إيراد حدى فهي عبارة عن تفاضل  
دالة الإيراد الكلى . لاحظ أنه بالرغم من أن شكل دالة الإيراد الكلى  
حدد بمعرفة دالة الإيراد الحدى فإن الموقع (رأسيا) لدالة الإيراد الكلى لم يحدد .

افترض أننا نرغب فى معرفة التغير الذى سيطرأ على الإيراد الكلى  
بزيادة الاستثمار من ١٥٠٠ جنيتها إلى ٣٠٠٠ جنيتها ومن الطرق التى يمكن  
استخدامها هو إيجاد تكامل دالة الإيراد الحدى لمعرفة دالة الإيراد الكلى .

ومن المعلومات المعطاة نعرف أن :

$$٢٠٠٠/س - ٣ه = \frac{س}{س}$$

حيث :

$$س = \text{الإيراد الكلي}$$

$$س = \text{مستوى الاستثمار}$$

ويكن إعادة كتابة هذا التعبير كالاتي :

$$س = ٣ه - ٢٠٠٠/س$$

وبتكامل الطرفين يكون لدينا

$$س = ٣ه - ٢٠٠٠/س$$

أو

$$س = ٦٠٠٠ - ٢٠٠٠/س$$

ولإيجاد الزيادة في الإيراد الكلي التي تنتج من زيادة س من ١٥٠٠ جنيها إلى ٣٠٠٠ جنيها فإننا نحتاج فقط لإيجاد قيمة دالة الإيراد الكلي عند س = ١٥٠٠ جنيها ثم طرحها من قيمة دالة الإيراد الكلي عند س = ٣٠٠٠ جنيها وهذه العملية يمكن إيضا حيا بالرموز كالاتي :

$$\frac{3000}{1000} \left[ \left( -6000 \text{ هـ} / - \text{س} + 2000 \right) \right]$$

ويعنى القوس الموضح بأعلاه ٣٠٠٠ وبأسفله ١٥٠٠ أن التعبير في داخل القوس نوجد قيمته لـ س = ٣٠٠٠ و س = ١٥٠٠ وأن قيمة التعبير عند س = ١٥٠٠ يطرح من قيمة التعبير عند س = ٣٠٠٠ . ويجراء هذه العملية يسكون لدينا :

$$\frac{3000}{1000} \left[ \left( -6000 \text{ هـ} / - \text{س} + 2000 \right) \right]$$

$$\left( -6000 \text{ هـ} / - \text{س} + 2000 \right) =$$

$$\left( -6000 \text{ هـ} / - \text{س} + 2000 \right) -$$

$$= \left( -6000 \text{ هـ} / - \text{س} + 2000 \right) - \left( -6000 \text{ هـ} / - \text{س} + 2000 \right)$$

$$= \left( -\frac{6000}{3} \text{ هـ} - \frac{6000}{4} \text{ هـ} \right)$$

$$= \left( -2000 \text{ هـ} - 1500 \text{ هـ} \right)$$

$$= -3500 \text{ هـ} \text{ خنيتها}$$

ويمثل المبلغ ١٤٩٤ جنيها الزيادة في الإيراد الكلي التي تنتج من زيادة س من ١٥٠٠ جنيها إلى ٣٠٠٠ جنيها . ويلاحظ أن هذا المبلغ مستقلا

عن قيمة حـ . حيث أن قيمتي حـ في التعبير السابق ألغى بعضهما الآخر عند إيجاد الفرق بين التعبيرين . وفي الرموز السابق استخدمنا أوضحنا أن

$$\text{الفرق بين التعبيرين ( - ٦٠٠٠ هـ - س / ٢٠٠٠ + حـ ) عند س =$$

$$= ٣٠٠٠ \text{ وقيمة التعبيرين ( - ٦٠٠٠ هـ - س / ٢٠٠٠ + حـ ) عند س =}$$

١٥٠٠ . وجب إيجاد هـ . ولكن نستطيع استخدام الرمز التالي لإيضاح نفس الاجراءات :

$$\left. \begin{array}{l} ٢٠٠٠ \\ ٣ \\ ١٥٠٠ \end{array} \right\} \text{ هـ} \quad \text{س} - ٢٠٠٠ \text{ س}$$

ويعرف هذا الرمز بالتكامل المحدود وتعرف الأرقام ٣٠٠٠ ، ١٥٠٠ في هذه الحالة بأنها الحد الأعلى والحد الأدنى . وبمعنى هذا الرمز أن الحالة بجانب علامة التكامل يجب تكاملها كما يجب تقييم الحد الأعلى والحد الأدنى لتغير التكامل وإيجاد الفرق . وبصفة عامة إذا كان :

$$د (س) = [ \text{حـ} + \phi (س) ] \frac{٥}{س}$$

فمن ثم

$$\int \frac{٥}{س} [ \text{حـ} + \phi (س) ] د (س) = \int \frac{٥}{س} د (س)$$

$$[\phi + (1) \phi] - [\phi + (2) \phi] =$$

$$(1) \phi - (2) \phi =$$

كما يمكن إعطاء معنى هندسي آخر لتعريف التكامل المحدود بأن ما فعلناه من إيجاد قيمة التكامل المحدود هو إيجاد المساحة تحت المنحنى .

د(س) = ٣ هـ - س / ٢٠٠٠ بين حدود س = ١٥٠٠ ، س = ٣٠٠٠ نذكر أن المشكلة هي إيجاد التغير في الإيراد الكلي عندما يزيد الاستثمار من ١٥٠٠ إلى ٣٠٠٠ وعند تعريف الإيراد الحدى على الاستثمار لكل مستوى من مستويات الاستثمار بالدالة ٣ هـ - س / ٢٠٠٠ . ويؤدي ذلك إلى النتيجة أنه بالإضافة إلى الطريقة السابقة فيمكن حل المشكلة بإضافة الإيراد من استخدام ١٥٠١ جنيه إلى الإيراد الناتج من استخدام ١٥٠٢ جنيه وهكذا إلى ٣٠٠٠ جنيه . ونحصل على الإيراد لكل هذه المستويات بواسطة الدالة ٣ هـ - س / ٢٠٠٠ وهذا يساوي إضافة المسافة للمستطيلات من الرسم البياني . ويمثل كل مستطيل اتساع يساوى واحد وارتفاع يساوى الإيراد الحدى لمستوى الاستثمار الموضح .

وإذا رمزنا إلى الإيراد الحدى ر عند ١٥٠١ بالرمز د(س<sub>١</sub>) وعند ١٥٠٢ بالرمز د(س<sub>٢</sub>) ، ، ، وعند ٣٠٠٠ بالرمز د(س<sub>١٥٠٠</sub>) واتساع المستطيلات بالرموز  $\Delta$  س<sub>١</sub> ،  $\Delta$  س<sub>٢</sub> ، ، ، ،  $\Delta$  س<sub>١٥٠٠</sub> فإن المساحة الكلية للمستطيلات يساوى :

$$1 = د(س_١) \Delta س_١ + د(س_٢) \Delta س_٢ + \dots + د(س_{١٥٠٠}) \Delta س_{١٥٠٠}$$

أو

$$1 = \frac{1000}{1} \approx d(s) \Delta (s)$$

ومن الواضح أن الزيادة  $\Delta$  كلما كانت صغيرة (ومن الأفضل أن تكون أقل من جنيهه) كلما كان التقريب للمساحة تحت المنحنى أقرب للحقيقة. أو أنه يمكن الحصول على تقريب أحسن وأفضل للمساحة عندما تكون الزيادات  $\Delta$  صغيرة بقدر الإمكان. أو بمعنى آخر يمكن الحصول على أحسن تقريب للمساحة عندما تكون .

$$1 = \frac{1000}{1} \approx d(s) \Delta (s) \leftarrow \Delta s$$

لاحظ في هذا التعبير أننا بدأنا من ١ حتى ١٠٠٠ بدلاً من ١ إلى ١٥٠٠ حيث يكون لدينا أكثر من ١٥٠٠ مستطيل . وبصنعة عامة فإن المساحة  $\Delta$  تحت المنحنى  $d(s)$  بين الحوين  $s = c$  و  $s = b$  تكون بالصورة الآتية :

$$1 = \frac{1000}{1} \approx d(s) \Delta (s) \leftarrow \Delta s$$

$$= \int_b^c d(s) ds$$

وبالنسبة للمشكلة تحت الدراسة

$$\left. \begin{aligned} & \text{س}^3 - \text{س}^2 = 2000 \text{ و} \\ & \text{س}^3 - \text{س}^2 = 1000 \end{aligned} \right\} = 1$$

$$1494 =$$

مثال آخر :

أوجد المساحة تحت المنحنى

$$\text{ص} = \text{د} (\text{س}) = \text{س}^2$$

$$\text{بين س} = 1 \text{ و} \text{س} = 2$$

الحل :

التكامل غير المحدود هو

$$\int \text{س}^2 \text{ و} \text{س} = \frac{\text{س}^3}{3} + \text{ح}$$

وللتحقيق

$$\text{س}^3 = \left( \frac{\text{س}^3}{3} + \text{ح} \right) \frac{\text{د}}{\text{س}}$$

ومن ثم فإن

$$\int_1^2 \left[ \frac{\text{س}^3}{3} \right] = \text{س}^3 \Big|_1^2$$

$$\frac{{}^4(1)}{4} - \frac{{}^4(3)}{4} =$$

$$20 = \frac{1}{4} - \frac{81}{4} =$$

وهي عبارة عن المساحة تحت المنحنى من  $s = 1$  إلى  $s = 3$

مثال آخر :

أوجد المساحة تحت المنحنى  $v = s = 1$  ،  $s = 2$

الحل :

$$\int_1^2 \left[ \frac{s^2}{2} \right] ds =$$

$$\frac{s^3}{6} - \frac{s^2}{2} =$$

$$\frac{3}{2} =$$

وهي التكاملات المحدودة غير الحقيقية أو غير المناسبة لأن المساحة تحت المنحنى بين الحدود لا يمكن إيجادها باستمرار التكامل الآتي :

$$\int \left( \frac{1}{s-2} \right) ds \quad \text{و } s \text{ صفر}$$

وفي هذا التكامل د (س)  $= \left( \frac{1}{س - ٢} \right)^2$  ويمكن تفسير التكامل على أن المساحة تحت المنحنى د (س) بين الحدود س = صفر و س = ٤ . ويلاحظ أنه من المستحيل إيجاد المساحة تحت المنحنى بين هذه الحدود حيث أن قيمة الدالة تقترب من مالا نهاية كلما اقتربت س من ٢ أى س  $\leftarrow ٢$  . ولذلك فإنه بالحدين س = صفر و س = ٤ فهو تكامل غير حقيقى حيث أن الدالة غير متصلة عند س = ٢ . وبتغيير الحدود حتى لا تحتوى على س = ٢ فيمكن تغيير التكامل غير الحقيقى إلى تكامل حقيقى . إذ يمكن إيجاد المساحة تحت أى جزء من المنحنى مادامت س = ٢ لا تقع في حدود النهايات .

وهكذا نجد أن عدم الاستمرار أو الاتصال في الدوال المراد تكاملها قد تؤدي إلى تكاملات غير حقيقية . وقد تنتج التكاملات غير الحقيقية نتيجة وجود حدود لا نهائية بدلا من حدود نهائية .

اقترحه النظام :

$$\int_{١}^{\infty} \frac{٣}{س} ds$$

وفي هذا التكامل نجد أن د (س)  $= \frac{٣}{س}$  ويمكن تفسير هذا

التكامل ليعنى أننا نريد إيجاد المساحة تحت المنحنى د (س)  $= \frac{٣}{س}$  بين س = ١ و س =  $\infty$  ولكن تزداد المساحة بدون حدود كلما اقتربت س من مالا نهاية .

ويمكن إيضاح ذلك بتقييم التكامل المحدود كالاتي :

$$\int_1^{\infty} \left[ \frac{3}{s} - \frac{3}{s-1} \right] ds = \frac{3}{s} - \frac{3}{s-1} \Big|_1^{\infty}$$

ولذلك نستنتج أن  $\int_1^{\infty} \left( \frac{3}{s} \right) ds$  هو تكامل غير حقيقي حيث

أنه لم يتمكن من إيجاد المساحة تحت المنحنى في الحدود المطلوبة . ويشبه التكامل التالي السابق ولكنه تكامل حقيقي .

$$\int_1^{\infty} \left[ \frac{3}{s} - \frac{3}{s-2} \right] ds = \frac{3}{s} - \frac{3}{s-2} \Big|_1^{\infty}$$

$$\frac{3}{1} + \frac{3}{\infty} - \frac{3}{1} = 3$$

وقد وجدنا في هذه المرحلة المساحة تحت المنحنى د (س) =  $\frac{3}{s}$

بين س = ١ إلى س = ٢٠ لتساوي ٣ .