

الباب الثامن

المحددات

من المعروف أن هناك طرقاً مختلفة لحل المعادلات الخطية الآتية ومنها
طريقة الحذف ، إلا أن هناك طريقة أخرى لحل المعادلات باستعمال نظرية
المحددات وهي موضوع دراستنا في هذا الباب .

افترض أولاً أننا نريد حل معادلة ذات مجهول واحد بطريقة الحذف
السابق الإشارة إليهما . فإذا كان لدينا المعادلة الآتية :

$$(1) \quad a_1x + b_1 = 0$$

فإن :

$$(2) \quad \frac{a_1}{a_1} = \frac{b_1}{0}$$

على أن يكون a_1 لا تساوي صفراً .

أما إذا كان لدينا معادلتين ذات مجهولين :

$$(3) \quad a_1x + b_1 = 0 \quad a_2x + b_2 = 0$$

$$(4) \quad a_1x + b_1 = 0 \quad a_2x + b_2 = 0$$

نقد سبق أن رأينا أنه يمكن حل هاتين المعادلتين كالاتي :

يضرب المعادلة (3) في (4) والمعادلة (4) في (3) ينتج أن .

$$a_1a_2x + a_1b_2 = a_2a_1x + a_2b_1$$

$$a_1a_2x + a_1b_2 = a_2a_1x + a_2b_1$$

وبالطرح فإن :

$$11a_2 - 11a_1 - 2a_1 = 2a_2 - 2a_1$$

أى :

$$11a_2 - 2a_1 = 2a_2 - 2a_1$$

$$(5) \quad \therefore \text{س} = \frac{2a_2 - 2a_1}{11a_2 - 2a_1}$$

وبالمثل لإيجاد س₃ : بضرب المعادلة (3) في (1) والمعادلة (4) في (1) ،
يقتج أن :

$$11a_2 - 11a_1 = 2a_2 + 2a_1$$

$$11a_2 - 11a_1 = 2a_2 + 2a_1$$

وبالطرح فإن :

$$11a_2 - 11a_1 - 2a_2 - 2a_1 = 2a_2 + 2a_1 - 2a_2 - 2a_1$$

أو :

$$9a_2 - 13a_1 = 0$$

أى :

$$9a_2 - 13a_1 = 0$$

$$(6) \quad \therefore \text{س} = \frac{2a_2 - 2a_1}{9a_2 - 13a_1}$$

مع ملاحظة أن المقام واحد في المعادلتين (5) و (6) وهو
 $(9a_2 - 13a_1)$ لا يساوى صفراً .

كما نجد أن المقام في المعادلتين (٥) ، (٦) نتج من الضرب التصالي كالاتي :

$$\begin{array}{ccc} & ٢١١ & ١١١ \\ & \diagdown & \diagup \\ ١٢١ & ٢١١ & - & ٢٢١ & ١١١ = \\ & \diagup & \diagdown \\ & ٢٢١ & ١٢١ \end{array}$$

(شكل ٤٧)

ويمكن حل المعادلتين السابقتين باستعمال المحددات والرمز :

$$(٧) \quad \begin{vmatrix} ٢١١ & ١١١ \\ ٢٢١ & ١٢١ \end{vmatrix}$$

يسمى محددًا . والكميات ١١١ ، ٢١١ ، ١٢١ ، ٢٢١ هي مكونات أو عناصر المحدد . ويسمى المحدد المشار إليه بالمحدد من الرتبة الثانية حيث أنه يتكون من صفين (أفقيين) وعمودين (رأسيين) وقيمة أو مفسكوك هذا الرمز هي $(١٢١ \ ١١١ - ٢٢١ \ ١٢١)$ ، أي أن :

$$(٨) \quad ١٢٢١١ - ٢٢١١١ = \begin{vmatrix} ٢١١ & ١١١ \\ ٢٢١ & ١٢١ \end{vmatrix}$$

ولذلك نقول أن المحدد يمثل عدد ، وهذا العدد يمكن الحصول عليه بفك المحدد كما هو موضح بعاليه حيث يسمى الطرف الأيسر من (٨) بمفسكوك المحدود بالطرف الأيمن .

ومن المعروف أن العنصرين أو المكونين ١١١ ، ٢٢١ يكونان القطر الرئيسي للمحدد . ولذلك يمكن القول أن قيمة المحدد من الرتبة الثانية عبارة عن حاصل ضرب العناصر في القطر الرئيسي ناقصا حاصل ضرب العناصر في القطر الآخر .

$$\text{مثال : } ٨ = ٦ \times ٢ - ٥ \times ٤ = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix}$$

$$\text{مثال : } ٢٠ - = ٦ \times \text{صفر} - (٥) \times ٤ = \begin{vmatrix} \text{صفر} & ٤ \\ ٥ & -٦ \end{vmatrix}$$

من معادلتين خطيتين في مجزوين باستخدام المحررات :

من الواضح أنه يمكن كتابة المعادلتين (٥) ، (٦) كالآتي :

$$(٩) \quad \begin{vmatrix} ٢١ & ١١ \\ ٢٢ & ١٢ \end{vmatrix} = ١$$

$$(١٠) \quad \begin{vmatrix} ١ & ١١ \\ ٢ & ١٢ \end{vmatrix} = ٦$$

أى معنى ذلك أن حل المعادلتين (٥) ، (٦) يمكن كتابتهما كما هو موضح في (٩) ، (١٠) . ويلاحظ أن عناصر المحدد في مقامى المعادلتين (٩) ، (١٠) عبارة عن معاملات s_1 ، s_2 في المعادلتين الأصليتين (٣) ، (٤) . أما عناصر المحدد في بسط المعادلة (٩) فهي عبارة عن عناصر المقام فيما عدا العمود الأول على اليمين فنضع بدلا منه b_1 ، b_2 ، وكذلك الحال بالنسبة لعناصر المحدد في بسط المعادلة (١٠) فهي عبارة عن عناصر المقام فيما عدا العمود الثانى فنضع بدلا منه b_1 ، b_2 .

مثال :

حل المعادلتين الآتيتين باستخدام المحددات :

$$7 = 3س + 2ص$$

$$9 = 3ص + 4س$$

الحل

$$\frac{9 \times 3 - 1 \times 7}{4 \times 3 - 1 \times 2} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = س$$

$$س = \frac{20}{10} =$$

$$\frac{28 - 9 \times 2}{12 - 1 \times 2} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = ص$$

$$ص = \frac{10}{10} =$$

مثال :

إذا كان هناك معمل تكرير بترول A و B ينتجون منتجات مشتركة بالنسبة الموضحة بعد لكل ساعة تشغيل .

	B	A
كبروسين	٤	٣
بنزين	٢	٥

وأن الكميات المطلوبة هي :

كبروسين	١٧
بنزين	١٩
بآلاف البراميل	

ماهى عدد الساعات الواجب تشغيلها فى A و B مع بعضهما حتى يمكن إنتاج الطلب المذكور بدون أية زيادة فى الإنتاج .

الحل :

يمكن وضع هذه المشكلة فى صورة معادلتين كالتالى :

$$17 = 4B + 3A$$

$$19 = 2B + 5A$$

حتى يمكن إيجاد قيمتى A و B أى عدد ساعات تشغيل المعلمين ،

$$\frac{19 \times 4 - 2 \times 17}{0 \times 4 - 2 \times 3} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 17 \\ 2 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}} = \text{ب}$$

$$\text{ب} = \frac{42 - 34}{11 - 6} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{19 \times 4 - 2 \times 17}{0 \times 4 - 2 \times 3} = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 2 \\ 19 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}} = \text{ب}$$

$$\text{ب} = \frac{28 - 34}{14 - 6} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

هل نريد معادلات خطية في متغيرين باستخدام المحاور:

إذا كان المحمد يتكون من ثلاثة صفوف (أفقية) وثلاثة أعمدة (رأسية) ، فيقال أنه محدد من الرتبة الثالثة . والصورة العامة لهذا المحدد هي :

$$\begin{vmatrix} ٣١١ & ٢١١ & ١١١ \\ ٣٢١ & ٢٢١ & ١٢١ \\ ٣٣١ & ٢٣١ & ١٣١ \end{vmatrix}$$

ولستطيع إيجاد قيمة لهذا المحدد بنفسه في صورة عناصر الصف أو العمود . والعنصر الأقل أهمية في محدد من الرتبة الثالثة هو المحدد من الرتبة الثانية الذي يمكن الحصول عليه باستبعاد الصف أو العمود الذي على العنصر المعين .

افترض أننا نرغب في فك المحدد الموضح بعاليه في صورة العناصر الموجودة في العمود الأول ، أي ١١١ ، ١٢١ ، ١٣١ .

فتلا المحدد التابع للعنصر ١١١ هو المحدد الذي يمكن الحصول عليه باستبعاد الصف الأول والعمود الأول . أي أنه .

$$\begin{vmatrix} ٣٢١ & ٢٢١ \\ ٣٣١ & ٢٣١ \end{vmatrix}$$

والمحدد التابع للعنصر ١٢١ يمكن الحصول عليه باستبعاد الصف الثاني والعمود الأول . أي أنه :

$$\begin{vmatrix} ٣١١ & ٢١١ \\ ٣٣١ & ٢٣١ \end{vmatrix}$$

والمحدد التابع للعنصر a_{31} يمكن الحصول عليه باستبعاد الصف الثالث والعمود الأول .

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

وقيمة المحدد من الرتبة الثالثة هي :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} a_{31}$$

أى أن مفكوك هذا المحدد هو :

$$a_{11} + (a_{22} a_{12} - a_{23} a_{11}) a_{31} - (a_{22} a_{23} - a_{31} a_{21}) a_{11} - (a_{22} a_{13} - a_{31} a_{21})$$

مثال :

احسب قيمة المحدد :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل :

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 5 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 8 & 7 & 7 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc|c} 0 & 5 & 8 \\ 8 & 7 & 7 \end{array} \right| = \text{المحدد} \\ & = (15 + 0) \cdot 6 + (21 + 16) \cdot 4 - (0 - 40) \cdot 1 = \\ & = 90 + 148 - 40 = \\ & = 198 \end{aligned}$$

ولحل ثلاث معادلات في ثلاثة مجاهيل باستعمال المحددات سنتبع طريقة مشابهة لحل معادلتين ذات مجهولين . إذ سنقوم أولاً بتكوين المحدد للمعاملات المجاهيل في المعادلات ، وهذا يعطى مقام المحدد عند إيجاد قيمة كل مجهول . وللحصول على قيمة المجهول الأول وليكن س_١ ، مثلاً . نقوم بتكوين بسط المحدد وهو عبارة عن عناصر المقام فيما عدا العمود الأول على اليمين فنضع بدلاً منه الثوابت الموجودة في الطرف الأيسر للمعادلات الثلاثة المطلوب إيجاد (قيمة المجاهيل بها) ثم نقوم بقسمة المحدد في البسط على المحدد في المقام .

وللحصول على قيمة المجهول الثاني وليكن س_٢ ، نقوم بتكوين بسط المحدد وهو عبارة عن عناصر المقام فيما عدا العمود الثاني فنضع بدلاً منه الثوابت الموجودة في الطرف الأيسر للمعادلات الثلاثة ، ثم نقسم المحدد في البسط على المحدد في المقام لنتج قيمة س_٢ .

وكذلك الحال بالنسبة للمجهول الثالث س_٣ . تكون المحدد في البسط وهو عبارة عن عناصر المقام فيما عدا العمود الثالث فنضع بدلاً منه الثوابت الموجودة في الطرف الأيسر للمعادلات الثلاثة ، ثم نقسم المحدد في المقام لنتج قيمة س_٣ .

أى أننا لو كان لدينا المعادلات الثلاثة الآتية :

$$(11) \begin{aligned} a_1 &= s_1 a_{11} + s_2 a_{21} + s_3 a_{31} \\ a_2 &= s_1 a_{12} + s_2 a_{22} + s_3 a_{32} \\ a_3 &= s_1 a_{13} + s_2 a_{23} + s_3 a_{33} \end{aligned}$$

فإذا رمزنا لقيمة المحدد للمعادلات بالرمز m فإن :

$$(12) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = m$$

ولذلك فإن :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = s_1 m$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

أى أن :

$$(13) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \frac{1}{m} = s_1$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱۱۴ \\ \hline ۱۲۴ \\ \hline ۱۳۴ \\ \hline \hline ۱۱۴ \\ \hline ۱۲۴ \\ \hline ۱۳۴ \\ \hline \end{array} = ۶ \text{ س } ۲$$

ای آن :

(۱۴)

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱۱۴ \\ \hline ۱۲۴ \\ \hline ۱۳۴ \\ \hline \hline ۱۱۴ \\ \hline ۱۲۴ \\ \hline ۱۳۴ \\ \hline \end{array} = \frac{۱}{۳}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱۱۴ \\ \hline ۱۲۴ \\ \hline ۱۳۴ \\ \hline \hline ۱۱۴ \\ \hline ۱۲۴ \\ \hline ۱۳۴ \\ \hline \end{array} = ۶ \text{ س } ۳$$

ای آن :

(۱۵)

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱۱۴ \\ \hline ۱۲۴ \\ \hline ۱۳۴ \\ \hline \hline ۱۱۴ \\ \hline ۱۲۴ \\ \hline ۱۳۴ \\ \hline \end{array} = \frac{۱}{۳}$$

(١٦)

مع ملاحظة أن م لا تساوى صفراً

مثال :

حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات :

$$٢س + ٣ص + ٦ع = ١$$

$$س + ص - ع = \text{صفر}$$

$$٥س + ٢ص + ٦ع = ٢$$

الحل :

$$\begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ١ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{vmatrix} = م$$

$$\begin{vmatrix} ٦ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} \cdot ٥ + \begin{vmatrix} ٦ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} \cdot ١ - \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} \cdot ٢ =$$

$$[(٦ \times ٢) - (١ \times ٣)] \cdot ٥ - [(١ -) \times ٢ - ١ \times ٢] \cdot ٢ =$$

$$[(٦ \times ٢) - (١ -) \times ٣] \cdot ٥ +$$

$$(٦ - ٢ -) \cdot ٥ + (١٢ - ٣) \cdot ١ - ٢ + ٢) \cdot ٢ =$$

$$٤٥ - ٩ + ٨ =$$

$$٢٨ =$$

وطبقاً للمعادلة (١٣) فإن :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 1 & \\ 1 & -1 & 0 & \\ 1 & 2 & 2 & \end{array} \right| \frac{1}{28} = \text{س}$$

نفاك المحدد أولاً :

$$\left| \begin{array}{cc|c} 6 & 2 & \\ 1 & -1 & \end{array} \right| 2 + \left| \begin{array}{cc|c} 6 & 3 & \\ 1 & 2 & \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \\ 1 & 2 & \end{array} \right| 1 =$$

$$(9 -) 2 + \text{صفر} - (2 + 1) 1 =$$

$$18 - 3 =$$

$$15 =$$

$$\frac{15}{28} = \text{س} \therefore$$

$$\frac{1}{2} =$$

وطبقاً للمعادلة (١٤) فإن :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & \\ 6 & -1 & 0 & \\ 2 & 1 & 0 & \end{array} \right| \frac{1}{28} = \text{ص}$$

نفاك المحدد أولاً :

$$\left| \begin{array}{cc|c} 6 & 1 & \\ 6 & -1 & \end{array} \right| 0 + \left| \begin{array}{cc|c} 6 & 2 & \\ 2 & 1 & \end{array} \right| 1 - \left| \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \\ 1 & 2 & \end{array} \right| 2 =$$

$$(1-)\cdot + (11-)\cdot - (2)\cdot =$$

$$0 - 11 + 4 =$$

$$10 =$$

$$\frac{10}{30} = \text{ص} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{3} =$$

وطبقا للمعادلة (١٥) فإن :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 0 & 2 & 0 & \end{array} \right| \frac{1}{30} = \text{ع}$$

نفسك المحدد أولا :

$$\left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right| =$$

$$(1-)\cdot + (4)\cdot - (2)\cdot =$$

$$0 - 4 - 4 =$$

$$0 - =$$

$$\frac{0}{30} = \text{ع} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{3} =$$

بعضه نظريات المبرهنات :

النظرية الأولى :

لا تتغير قيمة المحدد إذا حولت صفوف المحدد إلى أعمدة والأعمدة

إلى صفوف .

مثال :

$$(\begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 22 & 21 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 22 & 11 \\ 12 & 21 \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 22 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 & 11 \\ 12 & 21 \end{vmatrix}$$

النظرية الثانية :

إذا احتوى المحدد على عمودين أو صفين متطابقين فإنه يساوى صفراً .

مثال :

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(2-)\ 3 + (3)1 - (3)3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} 3 +$$

= صفر

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$(٧)٢ + (٣ \text{ صفر}) - (٧-)٢ = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} ٢ +$$

$$= \text{صفر}$$

والنظرية القائلة:

إذا احتوت عناصر أو مكونات أى صف أو عمود فى المحدد على عامل مشترك فإن قيمة المحدد تساوى حاصل ضرب العامل المشترك فى قيمة محدد ينتج من المحدد الأسمى بعد قسمة مكونات الصف أو العمود على العامل المشترك .

مثال:

$$\begin{vmatrix} ٨ & ٢ & ١ \\ ٧ & ٣ & ٥ \\ ٥ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢٤ & ٦ & ٣ \\ ٧ & ٢ & ٥ \\ ٥ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

والنظرية الرابعة:

لا تتغير قيمة المحدد مقداراً وإنما تتغير إشارة بإحلال عمودين متجاورين أو صفين متجاورين محل إحداهما الآخر .

مثال :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

أو

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

المنظريته الخامسة :

إذا كان كل عنصر أو مكون في أى صف أو عمود يشتمل على حطين
فإن المحدد يمكن بيانه حينئذ كمجموع محددين آخرين :

مثال :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k \\ a_{21} & a_{22} & l \\ a_{31} & a_{32} & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k \\ a_{21} & a_{22} & l \\ a_{31} & a_{32} & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k \\ a_{21} & a_{22} & l \\ a_{31} & a_{32} & c \end{vmatrix}$$