طريقتان لحساب ميل فلك البروج
(من إخراج محمد بن الصباح)

للدكتور عبد المجيد نصير
(عضو المجمع)

مقدمة :

فلك البروج هو الدائرة العظمى على الكرة السماوية . التي تمثل فلك الشمس في سنة كاملة . وهي تتقاطع مع خط الاستواء السماوي في نقطتين، هما نقطة الاعتدال الربيعي (نقطة الشرق) ونقطة الاعتدال الخريفي . ويكون فلك الشمس اليومي . يوم الاعتدال الربيعي ، هو على وجه التقريب . خط الاستواء السماوي . وكذلك الامر في يوم الاعتدال الخريفي ؛ وهما يومان يتساوى فيهما الليل والنهار . وبعد انقضاء يوم الاعتدال الربيعي ، تتقدم الشمس يوما شمالا على فلك البروج ، ويكون مدارها لأي يوم من أيام السنة دائرة صغرى موازية لدائرة خط الاستواء السماوي . وتقطع هذه الدائرة الصغرى الافق في نقطة تبعد قليلا او كثيرا عن نقطة الشرق . ومقدار القوس الافقي بين نقطة المشرق ونقطة تقاطع الدائرة الصغرى مع الافق تسمى مطلع المشرق . ونرمز لها بالرمز ( ) .

والقوس θ يعتمد على خط الطول الشمسي λ ، الذي يحدد موضع الشمس بالنسبة الى فلك البروج ، وعلى ϕ التي تقيس خط العرض على الارض بالنسبة الى من يرصد الحركة . اما الفرق بين دائرتي خط الاستواء وفلك البروج فرمزه ϵ ويسمى ميل فلك البروج . وهذا المقال يهتم بمقياس مقدار ϵ اعتمادا على طريقتين مختلفتين عن فلكي اسلامي اسمه محمد بن الصباح .

ومحمد بن الصباح هو احد اخوة ثلاثة هم محمد وابرهيم والحسن ، اهتموا بالهندسة والفلك ، وكانوا معاصرين لبني موسى المشهورين ، في ايام الخليفة المأمون ، كما يذكر فؤاد سيزكين [١] ص ٢٥٢ ، ٢٥٣ . وذكرهم ابن النديم والقفطي . ومن مؤلفات محمد ابن الصباح : « رسالة في العمل بساعة المبسوطة » و « رسالة في امتحان موضع الشمس وميلها وساعة مشرقها وكمية مسارها » ؛ وينقل ابو نصر بن عراق مقتطفات من هذه الرسالة ويعلق عليها في مخطوطاته « رسالة في امتحان الشمس » ، المنشورة ضمن مجموعة « رسائل ابي نصر الى البيروني » ، الصادرة عن هيئة النشر الشرقية العثمانية بحيدرآباد بالهند . ولمحمد بن الصباح رسائل وكتب اخرى بالاشتراك مع اخوته .

والذي نقدمه هنا هو نقل عن كتاب البيروني « تحديد نهايات الاماكن لتصحيح مسافات المساكن » المنشور في القاهرة سنة ١٩٦٢ [٢] . ويذكر فيه ، ابتداء من ص ١٤٦ ، (ص ١٤٩ بالمخطوطة) الى ص ١٥٥ (ص ١٦٠ بالمخطوطة) طريقتين لاستخراج سعة المشرق الكلي ، ينسبهما البيروني الى محمد بن الصباح ، نقلا عن استاذه ابن العراق . ويحسن تقديمهما محققين .

مبـادىء فلكيـة :

في الشكل الاول نتقدم بعض المبادىء الفلكية اللازمة . ونبين من مدار الشمس في اليوم ذي اطول نهـار ، اي تقاطع مـدار السرطان مع فلك البروج . يكون مـدار الشمس في ذلك اليوم دائرة صغرى يقع القطب الشمالي في موضع قطبهـا . وهذه الدائرة مماسة اينما لدائرة السرطان . وتقاطع تلك الدائرة مع الافـق هو النقطة المسماة $\theta_ع$ (θ المطلع) وتمثل اعظـم قيمة لساعة المشرق . فاذا رسمنا دائرة صغرى المشرق تمـر بالنقطة $\theta_ع$ ، وقطبها هو النقطة ش ، فانهـا تمثل دائرة ساعة المشرق . والآن نسقط دائرة فلـك البروج على دائرة ساعـة المشرق . افرض نقطة مـا ، $\lambda_م$ ، على فلك البروج . اسقط $\lambda_م$ على الافـق لتحصل على $\theta_م$ برسم دائرة صغرى توازي خـط الاستواء . ثم اسقط $\theta_م$ على دائـرة ساعة المشرق حسب دائـرة صغرى توازي المحور الرئيسي ش ز ، لتحصل على النقطـة هـ

وبهـذا الاسلوب فان صورة نقطة الاعتدال الربيعي ح تنطبق على ح . ونحصل على ان درجات القوس ع'م تساوي درجات القوس ع ح . وهكذا لجميع النقـاط على فلك البروج . ومعنى هذا ان حركة الشمس على فلك البروج يمكـن ان يمثلها حركة على دائـرة ساعـة المشرق وبالسرعة نفسها . وهذا المبـدأ الرياضي كان واضحا لمحمد بن الصباح لانه استعمله في طريقته ، ولـو انـه لم يبرهن عليه . للبرهان انظـر المرجـع [٣] .

طريقة محمد بن الصباح :

يذكر البيروني ان محمدا بن الصباح عنده طريق من الحساب لاستخراج سعة المشرق الكلي من رصد سعة ثلاثة مشارق ، على نهاية مدنيين متقابلتين ، قد ارسله في مقالته مجردا من غير برهان وهو حسن ، وإن بنى امره على تساهل . ويذكر البيروني حسابه ، ويستعمل ارصادا فلكية للتدليل عليه ؛ وفيما يلي نقدم البنية الجبرية الرمزية لما يذكره البيروني .

ورغم ما ذكره اعلاه عن اسقاط فلك البروج على دائرة ساعة المشرق ، فان البيروني لا يقيس الزوايا على دائرة فلك المشرق لصعوبة ذلك ، بل يقوم بالقياس على دائرة اخرى اسمها دائرة الميل ؛ فاذا ادير الافق حتى يصبح دائرة خط الزوال ومعامدا لخط الاستواء ، فان دائرة ساعة المشرق تصغر حتى تنطبق على دائرة الميل ذات نصف قطر يساوي جا ϕ . وعلى هذا فان القياسات على الميل هي القياسات λ هي القياسات نفسها على دائرة ساعة المشرق من نقطة تقع على خط استواء الارض ، انظر الشكل (٢) .

وهنا ننبه الى ان العلاقات المثلثية التي استخدمها الرياضيون المسلمون والتي نقدمها فيما يلي ، ونميزها بكتابتها بخط غليظ ، مختلفة قليلا عن العلاقات المثلثية المستخدمة اليوم ، والعلاقة بينها هي جا θ = ل جا θ ، حيث

ل هو نصف قطر دائرة التعريف ، ونفرضه = ٦٠ في هذا المقال ، اى ٦٠ = ن
اساس النظام الستيني . والقياسات المذكورة هي بالنظام الستيني حيث
الفاصلة المنقوطة (؛) تقوم مقام الفاصلة العشرية . مثلا :

٤١؛٥٥ ٦: ٤١؛٥٥ (ستيني) = ٥٥ + ٤١ × ٦٠ + ٦ × ٦٠ × ١٠ = ١٤١١٠ (عشري) باقية

وكما نعلم ،فان النظام الستيني يحوى درجات ،دقائق ،وثوانى ،وهكذا .
والشكل (٣) منقول عن البيروني (ص ١٤٩) . فالدائرة الكبرى هي دائرة البروج
ونصف قطرها ر ،والدائرة الصغرى هي دائرة الميل ونصف قطرها ر جتا ε .
حيث ε زاوية ميل فلك البروج .
افرض أ = λ ،وهو خط طول الشمس في وقت ما ،فان ميل λ هو أس بـ ، و
أس يساوى س ومن المثلثات المتشابهة فان

$$\frac{\text{جا}\,\lambda}{\text{ر}} = \frac{\text{جا}\,\delta}{\text{ر}' } = \frac{\text{جا}\,\delta}{\text{جا}\,\varepsilon}$$

ولاى رصدين ى ، ك بحيث ان ط ى = ى ط = ى ك فان س م = م ل . هذا هو اساس
انتظام حركة الشمس . وهو من التساهل الذى يذكره البيروني .

ولاشتقاق الطريقة الاولى لابن الصباح ،فاننا نفرض دائرة الميل (د) ،
وافرض الاقواس أب ، أج ، أد تمثل قياسات الرصد الثلاثة δ_1 δ_2 δ_3
فان ب ج = ج د (الافتراض انتظام حركة الشمس ،ولان القياسات متساوية
متساوية في فصل واحد) .
فان الاقواس د ز = د هـ = ٢ ب ج + ٢ أب = ٢ أ ج .
لذلك ب هـ = ٢ جا δ_1 = $م_1$

د ز = ٢ جا δ_3 = $م_2$
ب ز = ٢ جا δ_2 = $م_3$

ويسمى البيروني م ز = د ب = و بالوتر المستخرج

د م = د ز − م ز = هـ د − ب د = هـ ب = $م_1$

وكذلك ا هـ ز = ب هـ + ب هـ = $\frac{م_1^2 + م_3^2}{2}$ ، حيث اعتبرنا هـ ب ز خطا واحدا ،

وبتطبيق نظرية بطليموس على ب ز م د فان

$$م_2^2 = م_1 م_3 + و^2$$

$$ع^2 = م_2^2 - \frac{(م_1^2 + م_3^2)^2}{4}$$

ومنها و = $\sqrt{م_2^2 - م_1 م_3}$ ، ع = $\frac{1}{2}\sqrt{[م_2^2 - (\frac{م_1^2 + م_3^2}{2})]}$

ومن تشابه المثلثين د هـ ب ، د ز ط فان

$$\frac{د هـ}{د ز} = \frac{د ب}{د ط} \text{ ، اى ان } \frac{ع}{م_2} = \frac{و}{2 ر} = \frac{و}{2 \text{جا} \theta}$$

لذلك جا θ = $\frac{و \cdot م_2}{2 ع}$

او θ = معكوس جا $\frac{و \cdot م_2}{2 ع}$

الرصد الفلكي

تتطلب هذه الطريقة ثلاثة ارصاد على فترات متساوية وفي الربع ذاته .

ولذلك فان البيروني قام بالقياسات في مرصده بخوارزم (الآن تحت الحكم السوفيتي) ، حيث درجة العرض ϕ = ١٧ ٤٢' ٥٠ .

وقاس الزوايا δم عند ساعة الزوال على فترات متساوية مدة كل منها ثلاثون يوما . والقياس الاول يوم الجمعه بتاريخ ٢ مرداد سنة ٣٨٥ (بعد يزدجرد) الموافق ٢ صفر سنة ٧٠٤ للهجرة والموافق ١١ تموز سنة ١٠١٦ م والقياسات هي

δ_1 = ٢٨ ٢١٤ ٥٠ ، δ_2 = ٠ ١٤٠ ٥٠ ، δ_3 = ١٢ ٣٠ ٥٠

على ان البيروني يبدل δ_1 ، δ_3 ليحفظ ترتيب الزوايا .

هناك بعض الاخطاء في الحسابات التي يذكرها البيروني في كتابه . ورمز بعض الارقام اما بالحروف على طريقة حساب الجمل ، او بالنظام العشري . وبعض الحسابات كما يذكرها البيروني ،ونضع بين حاصرتين < > الصحيح حيث يجب . ونرجح ان البيروني لم يخطىء . بل ان الخطأ قد جاء ربما من الناسخين الذين حسبوا او كتبوا .

$م_1$ = ١٥ ٤١٠ ٦ ؛ والصحيح < ٦٠ ٤٢٥٥ >

$م_2$ = ٥٠ ١٠ ٢٩ ؛

$م_3$ = ٥٥ ٥٤٠ ٤٣ ؛

$\frac{م_1^2 + م_3^2}{2}$ = ١٨٠ ٢٥ ؛ ٢٥

وحسب النظام العشري فان $م_1$ = ٢٤٠٧٥ ثواني < ٢٤١١٥ >

$م_2$ = ١٠٤٥١٠ ثواني

$م_3$ = ١٥٨٠٩٥ ثواني

$\frac{م_1^2 + م_3^2}{2}$ = ٩١١٠٥ ثواني

$م_1 \cdot م_3$ = ٣٨١٢٤٦٠٩ روابع

$م_2^2$ = ١٠٩٤٠٣٤٠١٠٠ روابع

$م_2^1 - م_1^2 \cdot م_3^2$ = ٧١٢٧٨٧٩٩٧٥ . < ٧١٠٩٨٧٩١٧٥ > روابع

و = ٨٤٤٢٧ < ٨٤٣٢٠ > ثواني

$م_2^2 - \left(\frac{م_1^2 + م_3^2}{2}\right)^2$ = ٢٦٤٠٢١٩٠٧٥ < ٢٦٢٢٢١٩٠٧٥ > روابع

ع = ٥١٢٨٣ ثواني < ٥١٢٠٨ >

ر = ٨٥٨٦٠ ثواني (٨٦٨٦٠)ثواني

ب = ٠ ، ٢٥ ، ٢٣°٢٣ (٢٣ ، ٢٨ ، ٢٣)

تعليق

يعلل البيروني عدم دقة الجواب الى سببين :-

(١) افتراض انتظام حركة الشمس . وقد احتجناه من فرضنا ب ج = ج د .
وهذا غير صحيح .

(٢) عدد الخطوات اللازمه لإستخراج الجواب كبير نسبيا ، مما يؤدى الى
اغلاط في الحساب والتقدير . خصوصا من حساب الجذور والجيوب .

ويلاحظ ان البيروني ،رغم معرفته بالتساهل الموجود في هذه الطريقة ،
لاعتمادها على فرض غير صحيح،فانه آثر ان يبرهن على عدم دقتها بالرصد والمثل
العددي . وهذا مثل آخر على الدقة التي كان يتوخاها العالم المسلم ،وعلى حبه
للتجربة ،وتحمله المشاق في سبيل ذلك .

الطريقة الثانيه

والتغلب على مزالق الطريقة الاولى ، فإن البيروني يقدم لنا طريقا آخر ،
وان كان لايجزم بصحة نسبته الى محمد بن الصباح لفساد في النسخه من مقالة
ابن الصباح التي كانت وقعت بين يدى البيروني،"فاستخرج ابو نصر بن عراق طريقا
اما ان يطابق صحيح ذلك ،واما ان يكون طريقا ثالثا" . وهذا الطريق يحتاج
الى رصدين للشمس،وهي في ربع واحد . ولاشتقاق المعادلة الخاصة فان الخطوات
المتبعه هي كما يلي . انظر الشكل (٥) .

ارسم دائرة تمثل سعة المشرق ونصف قطرها يساوى جيا ب ،ومركزها ع . افرض
القوس أ ب سعة المشرق الاول - اى مقدار الرصد الاول - وخذ على المحيط القوس
ب ج = القوس أ ب . وافرض القوس ب ج سعة المشرق الثاني - اى مقدار
الرصد الثاني - ونرمز له بالحرف ز بحيث ان القوس ب ز ضعف القوس ب ج . نصف القوس

ﻫ ب ز في د ، وانزل د ح عمودًا على الوتر ب ز ،

فاذا ب ﻫ = ٢ جا $\frac{\theta}{1}$ = $م_1$

ب ز = ٢ جا $\frac{\theta}{1}$ = $م_2$

فان ز ح = $\frac{2^{م_1+م_2}}{2}$

وكذلك د ج = أ ب = ب ح = ب د

و = د ب = $\frac{1^{م} - 2^{م}}{2}$ = الوتر المستخرج

نصف الزاويه د ع ب بالمضلع ف ، فان الزاويه المركزية د ع ب المقابلة لهذا الوتر المحيطية ب ز د وهي الزاوية $\frac{\theta}{2}$ ، بينما ع د ف = تمام الزاوية

د ع ف = $90^\circ - \frac{\theta}{2}$

ولذلك فان

$$\frac{\text{ز د}}{\text{ز ح}} = \frac{\text{جا } 90}{\text{جا}(90 - \frac{\theta}{2})} = \frac{\text{ل}}{\text{جتا } \frac{\theta}{2}}$$

لذلك س = ز د = $\frac{\text{ل} \left(م_1 + \frac{م_2}{2} \right)}{\text{جتا } \frac{\theta}{2}}$

وفي المثلث ب د ز ، فان

$و_2 = ب د^2 = ب ز^2 + ز د^2 - 2 ب ز \cdot د ز$ جتا $\frac{\theta}{2}$

$= ر د^2 + م_2^2 - 2 م_2 \cdot \left(م_1 + \frac{م_2}{2} \right)$

$= س^2 - م_1 م_2$

$$\frac{\text{نق}}{2} = \frac{\sqrt{\text{نق}^2 + 4 \text{ ف}^2}}{2}$$

ومن المعادلة ٥٠٨ فان

$$\text{ع د} = \text{جا} \frac{\text{ل} \cdot \text{و}}{\frac{\text{جا}\ \frac{\text{ث}}{2}}{2}}$$

اي ان ق = ٢٠٠ جتا $\frac{\text{ل}}{\text{جا}^2 \frac{\text{ث}}{2}}$

الرصد الفلكي والحساب

يذكر البيروني رصدين متتاليين بينهما ثلاثون يوما ،كما في الطريقة الاولى

$$\delta_1 = ١٢ ؛ ٣^\circ \qquad \text{ق}_1 = ٤١٠ ؛ ٥٥ = ٦$$

$$\delta_2 = ٠ ؛ ١٤ \qquad \text{ق}_2 = ١٠ ؛ ٥٠ = ٢٩٠$$

$$\text{ق}_1 \cdot \text{ق}_2 = ٣٢ \text{ ؛ } ٥١٠ \text{ ؛ } ١٧ \text{ } \langle ٥٣ \text{ ؛ } ٥١٠ \text{ ؛ } ١٧ \rangle = \langle ٦٤٢٩٢ \rangle \text{ثواني}$$

(الخطأ في معدل ق ١ ، ق ٢ ، والارقام مكتوبة بالاحرف ، مما يدل على انها خطأ املائي وليست خطأ كتابيا لكن القيمة الصحيحة هي المستعملة بعد ذلك).

ومن زيج حبش ، يستخرج البيروني

$$\text{ث} = ٣٨ ؛ ١٧^\circ$$

ل الاعتدال متمم ٣٨ = ن = ١٩٠٥٧ ؛ ٥٢° $\langle ٤٢ \text{ ؛ } ٥٧٠ \text{ ؛ } ١٩٠ \text{ ؛ } ٥٢^\circ \rangle$.

(وليس لهذا الخطأ أثر فيما بعد لأنه لايستعمله).

$$\frac{\lambda\Delta}{2} = {}^{\circ}14\,;\,38'\,30''$$

$$\underline{\text{جا}}\ \frac{\lambda\Delta}{2} = 15\,;\,90'\,59'' = 54599 \text{ ثواني}$$

$${}^{\circ}90 - \frac{\lambda\Delta}{2} = {}^{\circ}75\,;\,21'\,30''$$

$$\text{حا}\left({}^{\circ}90 - \frac{\lambda\Delta}{2}\right) \times \underline{\text{جتا}}\ \frac{\lambda\Delta}{2} = 85\,;\,30'\,0'' = 208680 \text{ ثواني}$$

$$ل = 60$$

$$س = \frac{60 \times 64292}{208980} = 55\,;\,250' \text{ , } 18 < 21\,;\,22' < 18$$

(والخطأ هنا في القسمة ،وسؤثر في الجواب الاخير).

$$س = 66355 < 66452 > \text{ثواني}$$

$$س^{2} = 4402986025 < 4415868304 > \text{رواسع}$$

$$م_{1} \cdot م_{2} = 252025865 \text{ رواسع}$$

$$س^{2} - م_{1} \cdot م_{2} = 188272727275 < 189560961054 > \text{رواسع}$$

$$و = 43290 < 43572 > \text{ثواني}$$

$$\underline{و}_{2} = 21695 < 21786 > \text{ثواني}$$

$$\underline{\text{جا}} = 85828 < 85832 > \text{ثواني}$$
$$= 28\,;\,00'\,23 < 32\,;\,00'\,23 <$$

وعليه فان $= 24046 ; 22 < {}^{\circ}4\,;\,24'\,0 > {}^{\circ}23$

ولانعرف القيمة الصحيحة للزواية في ذلك الوقت التي [illegible] النتائج .

عرفان (يشكر المؤلف استاذه ادوارد كندى اذ قرأ المسودة وعلق على اخطائها).

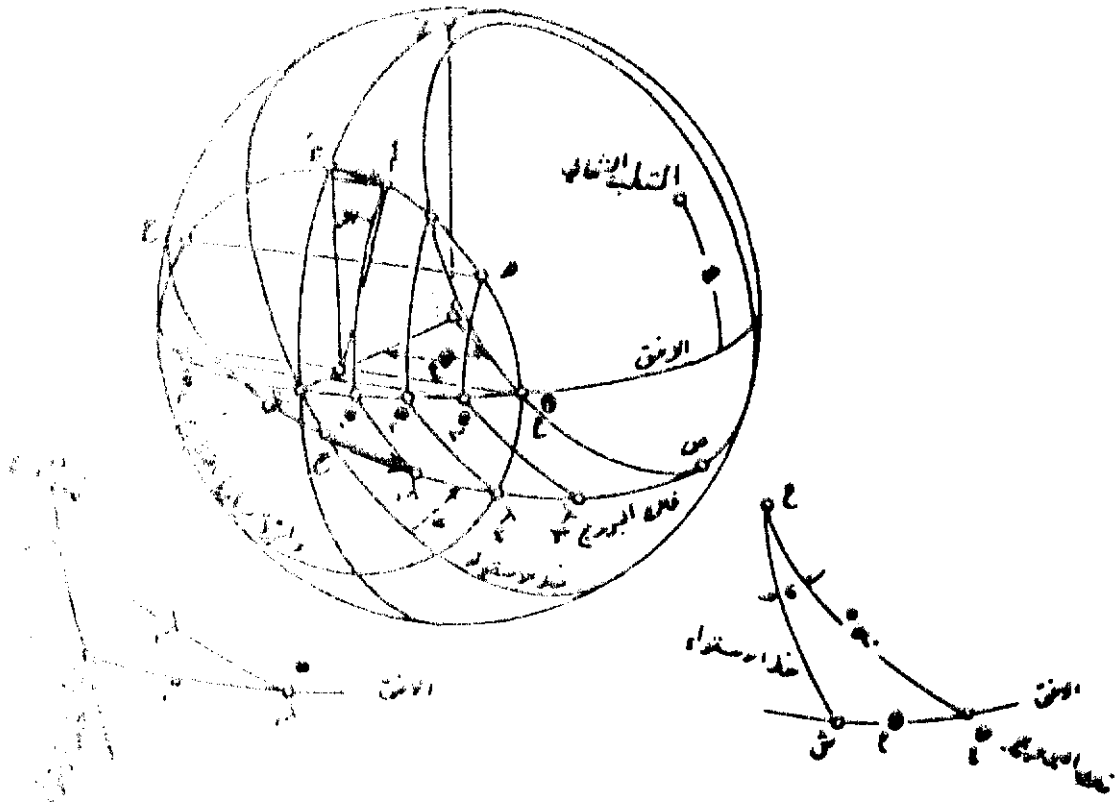
(١) Sezkin , Fuat , Geschichte Des Arabischen Schriftums. Band V , Leiden , 1974.

(٢) البيروني ، ابو الريحان ، " تحديد نهايات الاماكن في تصحيح مسافات المساكن " طبع القاهره ١٩٦٢ .

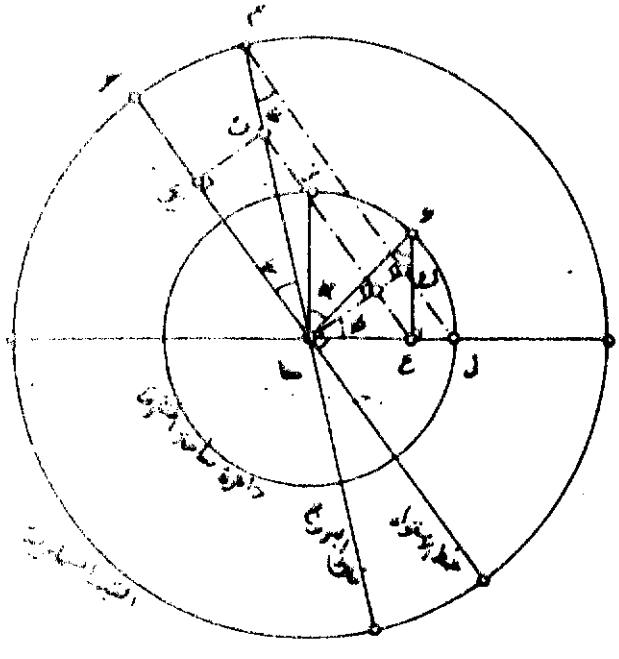
(٣) Kennedy, E.S. and Sharkas , H., " Two Medieval Methods for Determining the obliquity of the Ecliptic", The Mathehmatics Teacher , Vol. LV No 4 , April 1962

(٤) Colliers Encyclopedia , Vol. 5 P604 , Macmillan Educational Corporation , New York.

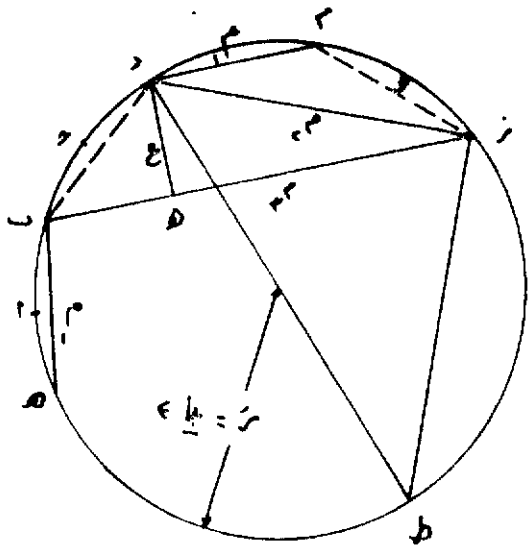
(٥) القفطي ، جمال الدين ابو الحسن علي بن القاضي الاشرف يوسف ، " اخبار العلماء في اخبار الحكماء " دار الآثار للطباعة والنشر والتوزيع ، بيروت .



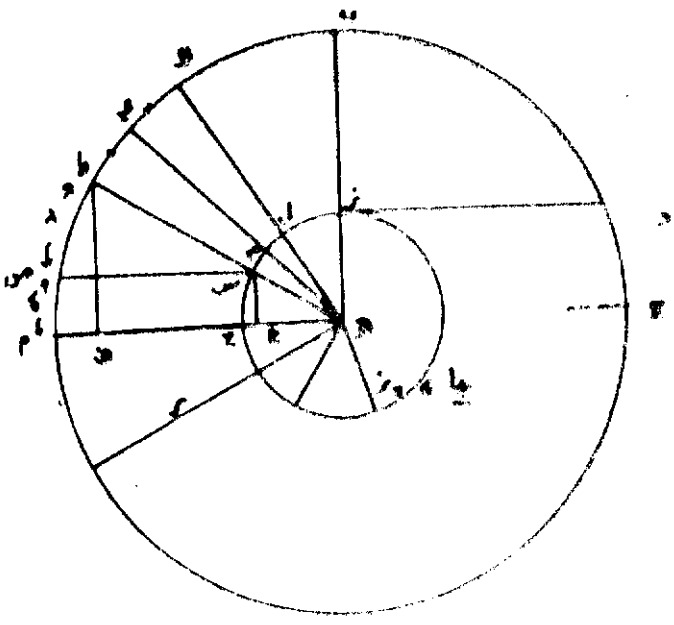
الشكل (١)



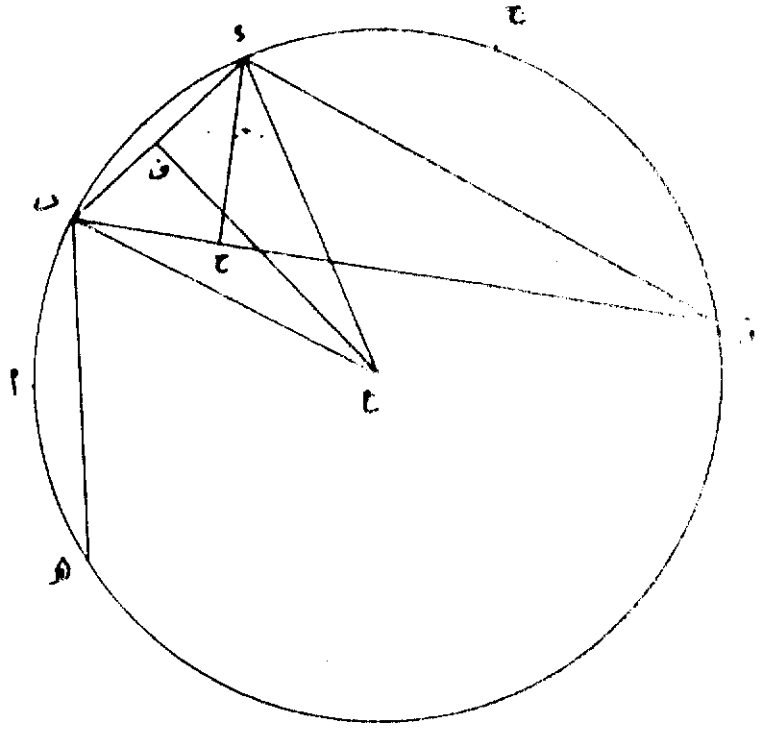
الشكل (٢)



الشكل (٤)



الشكل (٣)



الشكل (٥)