

## الباب الأول

### مقدمة تاريخيه عن كيمياء الكم

التمثيل التتائي الأبعاد والثلاثية الأبعاد لدالة الموجه الكمية ونظرية ميكانيكا الكم الأساسية الفيزيائية ما هي إلا تعديل لنظرية نيوتن الكلاسيكية والتي تطبق علي المادة ذات الأجسام في الميكانيكا وهو ما هو خاص بالجسيم الذري أو ما دونه.

وأما الوصف لميكانيكا الكم فهي المطبقة لوصف اصغر ما دون تلك الكميات السابقة الذكر والي كميات الطاقة المحددة والتي تتبع سواء أكانت مستمرة أو متقطعة. وعموما يمكن إستخدام مرادف آخر وهو فيزياء الكم أو ميكانيكا الكم غير النسبي.

**فما هي إذا ميكانيكا الكم؟**

**لتوضيح تلك النظرة عن مبادئ ميكانيكا الكم :**

لنفترض أن جسيم له خاصية ويمكن قياسه أو تحديده في مكانين بقيمتين أحدهما في مكان جسيم للمكان (أ) وللمكان (ب) وهذه الخاصية القياسية نلاحظ أن المكان (أ) أو المكان (ب) هو المتوقع كلاسيكياً.

ولكن نظرية الكم تنص عكس ذلك بأن الجسيم يمكن أن يتواجد في المكانين معا وهذا ما لا نستطيع تخيل هذا التصور بواسطة النظريات الكلاسيكية. وهذا الغرابة للشخص العادي عن أهمية الكم حيث إننا نتصور أن عقل أينشتاين شئ ونحن شئ آخر. ولكن أنه نفسه لم يتأمل بان نظرية الكم صحيحة. وعموما عندما نبدأ بالقياس لحالة الجسيم لسوف يتغير من مكانه وليكن المكان أ. وهذا يعني إن تغيرت عملية القياس لحالة الجسيم لنراه في احد المكانين. وإذا لم نحاول التصرف لحالة القياس لظل علي حالته قبل القياس وهما المكانين معا. انظر إلي ما في حولك من أشياء. لنفرض انك بعيد عن موقف معين ولك أن تتخيل موقف أو مكان لشخص ما في أي مكان وفي أي اتجاه ولك

أن تتخيله في أي مكان وزمان معا. ولكن التأكد للمكان والزمان معا ربما يكون منعدم. وذلك ربما نصف أو تتخيل لشخص آخر معك له مكان الشخص الآخر الذي لا يعرفه هو ولكن هو نوع من التصور. ولكن بناءا علي نظرية ميكانيكا الكم فهذا لا يجدي. فإذا حاولت تصور وقياس المكان فلسوف أغير الموقف وهذا غير معقول. حيث لربما يكون المكان تتغير في كذا اتجاه للشخص الآخر الموصوف.

لذا فان ميكانيكا الكم لتصف مثل تلك الأمور بإحداثيات كثيرة وليست من بعدا واحد فقط لذا تلك التخيلات ربما تكون أعدادا تخيلية أو ربما تربيع تلك الأعداد التي تؤدي في لحظة قياسية لوجود المكان. وهذا يعني إن الاحتمالات كثيرة ولربما تصف المكان بأكثر من إحداثي وهذا ما نريد أن تصفه لأحد الأشخاص مثلا لزيارة منزلك وهو لا يعرفه بل تقول له أمامك خلفك علي جانبك كذا وكذا. وهو ما يكون مربع القياس وهذا فعلا ميكانيكا الكم. تلك الإحداثيات كثيرا ما تعرف بالدالة الموجية للجسيم.

### التطور التاريخي لميكانيكا الكم :

بدأ هذا التاريخ من عام 1900 لبحث قدم بواسطة ماكس بلانك عن الطيف الضوئي الصادر عن الجسم الأسود الساخن حتى حالة التوهج، حيث وصفها بالطاقة الصادرة هذه الطاقة إنما تصدر علي هيئة وحدات - لكميات محددة وعرفت بالكوانتا  $quanta$  كونه وذلك في عام 1900.

بينما في 1905 بحث اينشتاين عن الظاهرة الكهرومغناطيسية التي تنص "علي أن الأشعة الكهرومغناطيسية تنتقل في الجو علي هيئة صفائح لكتل عرفت بالفوتونات  $Photons$ ."

ثم في عام 1913 اصدر بوهر (فيلر بوهر) تجربته عن الذرة التي نص "أن الالكترونات تدور في أفلاك تلك الالكترونات ثابتة الطاقة ما لم

تتغير من مكانها لفقد تلك الطاقة أو اكتسابها، وسميت أيضا فوتونات".

كما بين لويس في 1923 بإقتراح "أن الالكترونات وغيرها من الجسيمات المتناهية علي حد الاقتراح تسلك مسلكا تشبه الموجات المستقرة". ثم قدم باولي أطروحوه وهي مبدأ عدم التأكد والذي ينص علي أنه لا يمكن لأي جسيمين لهما نفس الحالة الكمية أن يتواجدا في المستوي الطاقوي الكمي نفسه ومن ناحية أخرى قدم شرودنجر عالم الرياضيات وصفا رياضيا لمعادلة ميكانيكا الكم وذلك في عام 1926 وفي عام 1927 تناول هيزنبرج اقتراحا وهو مبدأ عدم التأكد ثم طور مع ماكس بورن وبسكال جوردان صياغة ربما تكون مكافئه لمعادلة شرودنجر.

وفي عام 1928 بدأ التقدم والوصف لمعادلة ميكانيكا الكم والإكتشافات حيث قدم بول ديراك تلك المعادلة التي تأخذ النسبية وسيمت بمعادلة الإلكترون مع الأخذ في الاعتبار قيمة الدوران أو اللف وفي عام 1932 تم اكتشاف الإلكترون المضاد ولنا أن نتخيل أن النواة والتي كان من المفترض أنها تحتوي علي بروتون ونيوترون فقط بل ظهر فيها لأكثر من 30 جسيما أخر (الكيمياء النووية والإشعاعية- دار الرشد للمؤلف) ثم في عام 1947 (ظهرت نظرية المجال الكمية) بواسطة فاين مان وآخرين من العلماء، والتي بها تم حساب التفاعلات بين الفوتونات والالكترونات بصورة دقيقة. ثم بدأت نظرية أخرى والتي تعرف بنظرية الكوارك بواسطة موراي جيلمان 1964 لتفسير البناء الداخلي للذرة. ثم ظهرت نظرية التوحيد بين القوة الكهرومغناطيسية والقوة النووية الطيفية في عام 1969 بواسطة عبد السلام وفينبرج. وأخيرا في 22 ابريل 1994 تم اكتشاف أخر للكوارك والذي من المفترض وجوده في بناء الذرة (كوارك القمة) بل وصلت فيما بعد إلي

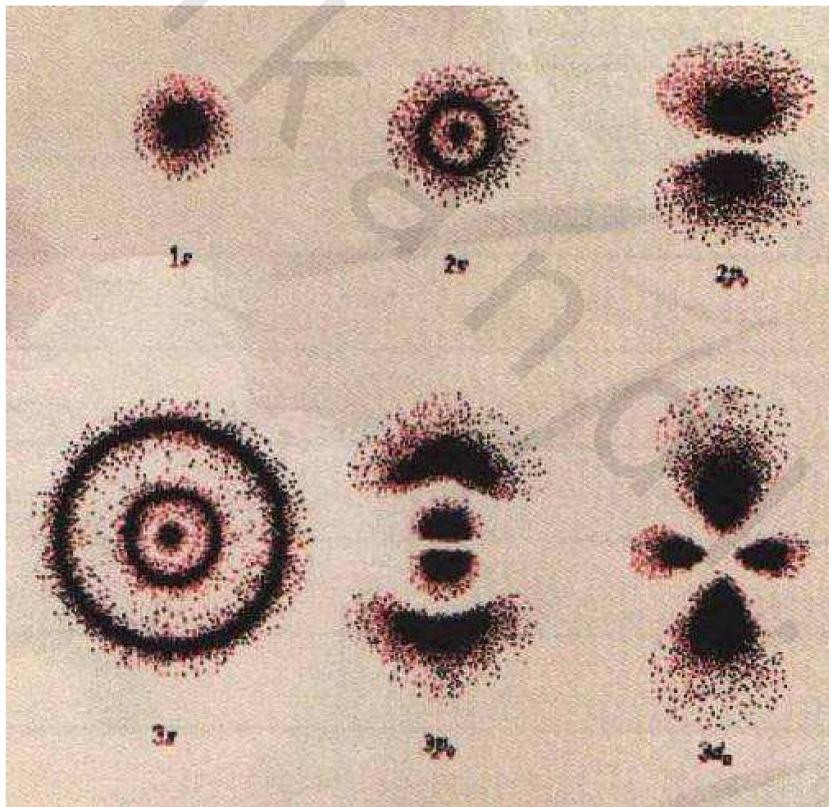
سبعمائة جسيم آخر. حسب النموذج المعياري لذرة. فبينما نتأمل إشكالية الجسيم الأسود، وهو جسيم يمتص الإشعاع الساقط عليه كاملاً ليعيد مرة أخرى الإشعاع علي هيئة طاقة وهذه الطاقة فشلت كل المحاولات المستندة علي الميكانيكا الكلاسيك في توصيف هذا الإشعاع عند الترددات العالية، حيث وجد انحرافاً كبيراً عن المتوقع وهذا ما عرف بعد ذلك باسم الكارثة البنفسجية الفوقية.

لذا نجد أن ماكس افترض فكرة التنبؤ بتناقص الدورات العالية التردد لإشعاع الجسم الأسود، وهذا الافتراض ينص " علي إن الاهتزازات الكهرومغناطيسية إنما تصدر علي هيئة كموم، وبالنص القانوني أي أن  $E = h\nu$ ، حيث  $E$  طاقة الكم،  $h$  ثابت بلانك،  $\nu$  تعبر عن التردد. وحين يؤكد نيوتن أن طبيعة الضوء جسيم بمعنى أنه مؤلف من جسيمات صغيرة، وأيدته العديد من التجارب ونجد من ناحية أخرى يانج Young يؤكد إن الضوء ذو طبيعة موجية من ناحية التداخل الضوئي. ثم لويس مرة أخرى الذي ينظر إلي جسيمات المادة يمكن أن تسلك الشكل الموجي في بعض الأحيان واقترح معادلة هو الآخر والتي تشبه معادلة بلانك  $\lambda = \frac{h}{p}$  حيث  $p$  العزم،  $\lambda$  الطول الموجي.

ومن هنا بدأت الأمور تتكشف لملاح صورة جديدة للكون تتداخل فيه الجسيمات والوسط المهتز، بحيث يصعب التعرف والتمييز بينهما، حيث إن تلك الأمور مهدت الطريق لظهور ميكانيكا الكم بنظرية نيلز بوهر الشهيرة الذرية والتي لا تسمح للاندفاع الزاوي بأخذ قيم سوي المضاعفات الصحيحة للقيمة بالقانون  $L = n \cdot h = n \frac{h}{2\pi}$  حيث  $L$  قيم الإندفاع الزاوي،  $n$  عدد صحيح، وعليه فقد ظهرت مستويات الطاقة أو الأفلاك علماً بأن  $p = m \cdot v$  العزم. ثم بعد ذلك بدأت الأمور تعطي

## انطباعاً آخر عندما قدم هينزيبرج - ميكانيكا المصفوفات Matrix Mechanics Transformation وتوجد نظريات عديدة انتهت بنظرية التحويل Theory

وإذا كانت الصورة الموجودة في الأذهان عن الذرة ما هي إلا أفلاك حاملة بمجموعة من الالكترونات تدور حول نواه موجبه الشحنة، فهذه الصورة قد تلاشت من عام 1970 حيث بدأت هذه الفكرة تتلاشي لتظهر صورة أخرى للاماكن الأكثر احتمالاً لوجود الإلكترون مثلاً في ذرة (H) حيث تكون النواة في مركز الشكل، لكل مخطط مثلاً. شكل (1)



شكل (1) شكل الذرة العام

إذا ما أهمية ميكانيكا الكم؟

توجد بعض الأمور تستطيع ميكانيكا الكم إن تصفها، بينما النظرية الكلاسيكية الفيزيائية لا تستطيع وصفها ومن بين تلك الأمور هي:

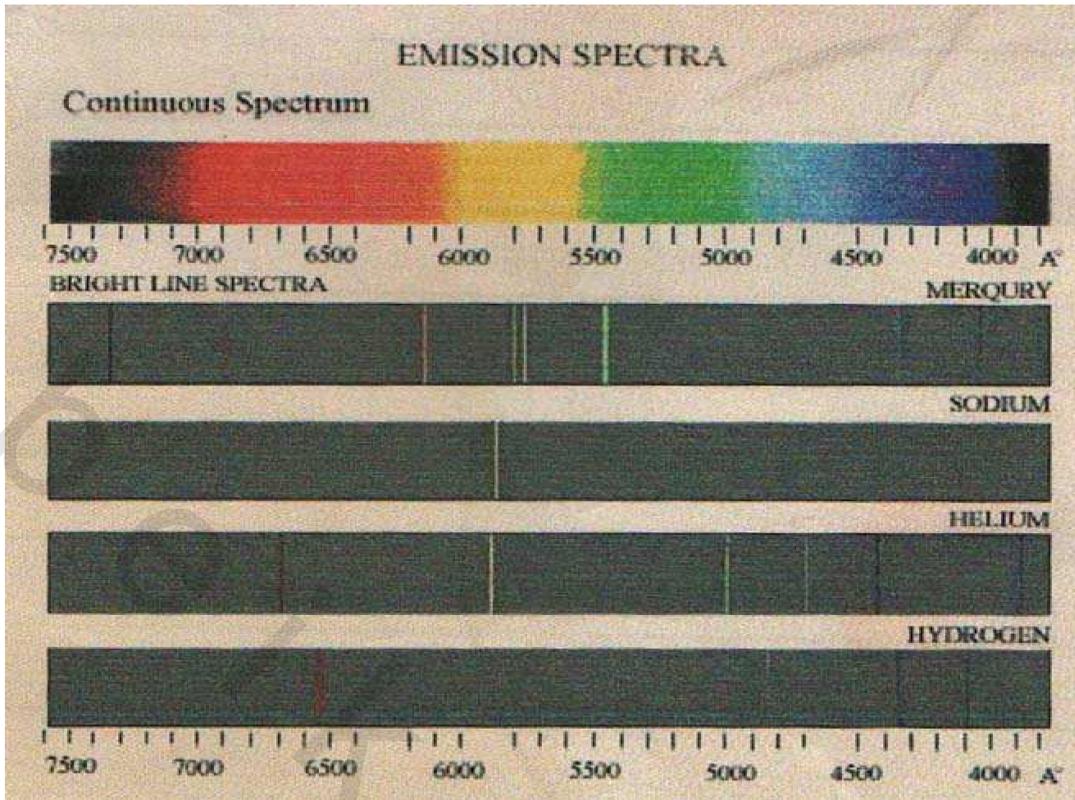
- ١- عدم اتصال الطاقة.
- ٢- الازدواجية الموجية والجسمية للضوء والمادة.
- ٣- النفق الكمي.
- ٤- مبدأ الشك لهيزنبرج.
- ٥- الغزل.

### أولاً: عدم اتصال الطاقة :

من البديهيات بالنظر إلي طيف صادر من لمبة صوديوم لضوء اصفر - برتقالي أو لضوء ابيض مزرق - بخار الزئبق. بشرط عملية النظر حصرها في فتحة ضيقة بالعين وليست بفتحة العين كاملة نلاحظ وجود الضوء الصادر مكون من خطوط مفردة الألوان ومختلفة. هذه الخطوط منفصلة وهذا يمثل مستويات لطاقة الالكترونات لتلك الذرات المختلفة المثارة..

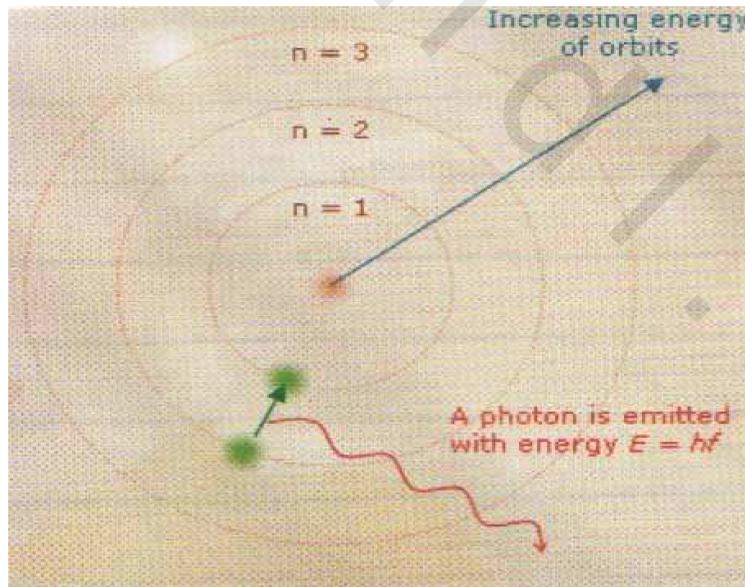
وهذا يدل علي أن الإلكترون عندما ينتقل من مدار إلي مدار أعلي فعليه إكتساب لطاقة، وعندما ينتقل من مدار إلي مدار أعلي فعليه إكتساب لطاقة وعندما ينتقل من مدار إلي مدار ادني فانه يفقد تلك الطاقة علي هيئة إشعاعات فوتونية مطابقة للفرق بين هذين المستويين. وكلما كان الفرق في الطاقة كبيرا كلما كان الضوء (الفوتونات) نشط واقترب لونه من النهاية البنفسجية من الطيف.

وإذا كانت الفوتونات مقيده في مستويات طاقة منفصلة، فان طيف الذرة المثارة ستعطي ألواناً متصلة من الأحمر إلي البنفسجي بلا خطوط مفردة. فالمصباح ذو الدرجة 4401751115 واط له أن يعطي هذه القيم فقط، وعندما تنتقل من وضع إلي وضع آخر يليه، فان القدرة تنتقل إلي الوضع الآخر مباشرة بدون اللجوء للانتقال التدريجي شكل (2)، شكل (3).



شكل (2)

يبين مستويات الطاقة واكتسابه لكمية من الطاقة وانبعث الإشعاعات عند العودة



شكل (3)

يظهر مدى انتقال الإلكترون من مدار واكتسابه لكمية الطاقة وانبعث الإشعاعات عند العودة

## ثانياً: الازدواجية :

ففي عام 1690 توجد نظرية وهي أن الضوء مؤلف من موجات بواسطة كريستان هايجنز، ولكن نيوتن في عام 1704 وضع أن الضوء مؤلف من جسيمات صغيرة. وكلا النظريتين مدعمتا بالتجارب. ولكن كلاهما لم يفسرا الظواهر المرتبطة بالضوء. ومن هنا بدأت فكرة الارتباط بينهما، ففي عام 1923 افترض لويس دي برولي إن الجسيم المادي يمكن إن يظهر له خصائص موجية، كما انه في 1927 ظهرت نظرية بواسطة دينيسون وجيرمر إن الالكترونات تتصرف بحق مثل تلك الموجه ولكن عند ظروف معينه.

وهذا ما نلاحظ لجسيم ما إن يكون ماديا أو موجه في نفس اللحظة ولكن متى يكون ذلك؟

فلنا أن نقول ليس من المعتقد أن الضوء عبارة عن سيل من الجسيمات تتحرك في أي اتجاه بطريقة موجية، ولكن ربما في الحقيقة أن الضوء والمادة عبارة عن جسيمات، وما يكون موجياً هو احتمال أن يكون جسيماً.

## ثالثاً: الانفاق الكمية :

وهذه الظاهرة التي يمكن أن تتضح من ميكانيكا الكم وبدون هذه الظاهرة ما كانت لرقائق الكومبيوتر في الظهور، وربما كان الكمبيوتر الشخصي مثلا بحجم غرفة مثلا، وعموما من المحتمل فالموجه ربما تعين الجسيم. وعندما يتلاقى هذا الاحتمال أي حاجز لطاقة فان معظم الموجه سوف يرتد منعكسا تاركا فجوه سوداء، ولكن جزء صغير سوف يخترق خلال الحاجز معتمدا علي سمك الحاجز، حتى ولو كان الجسيم يمتلك لطاقة كافية لإجتياز الحاجز، إذا ستكون هناك احتمالية إن يخترق نفقيا من خلال الحاجز. ولنا أن نتخيل وجود كره من أي مادة وتقذف بسرعة معتدلة علي حائط فإنها لا تمكث أن ترتد

ولكن إذا تصورت كرة من الطين لازب وقذفت بسرعة عالية فإنها لا تمكث أن تختزن الحائط حادثة فجوه بدون التأثير علي الحائط وما شأنك في إلكترون الذي يسير بسرعة ضخمة وهائلة فان النفق حادث لا محالة.

#### رابعاً: مبدأ الشك لهيسنبرج :

من المعلوم القياسات العينية شئ مألوف أي التي تري بالعين. فمثلاً بناءً معيناً يمكن للقياس أن يقيس هذا المبني بشئ من الدقة طولاً و عرضاً وارتفاعاً. ومهما يكن المقياس الذري لميكانيكا الكم، عملية القياس حساسة جدا ولنفترض معرفة مكان الإلكترون في مداره ولمعرفة ذلك يجب أن تكون السرعة اكبر من الحد المسموح لسرعة الإلكترون أو أنك تحضر شيئاً ما ذات قدرة عالية لمعرفة مكان الإلكترون وليكن ميكروسكوبا عملاقا. وأيآ كانت الوسيلة فان عملية البحث سوف تعتمد علي الضوء الساقط والذي هو مكون من فوتونات، وهي تمتلك قدرا كافيا من كمية التحرك الزخم ما إن تلاقيه ستغير مساره. فكان هيزنبرج أول من أدرك أن بعض الأزواج من القياسات تحوي في جوهرها شكا (لا حقيقة حتمية) تشترك معها. لأننا لو كان لدينا شيئاً ما معلوما الموقع لدرجة معينه، فستكون لديك فكرة غير مؤكدة عن مدي تلك السرعة، وأننا لا نلاحظ ذلك في حياتنا العملية العادية لذا فان ميكانيكا الكم تنص علي "انه من المستحيل الحصول علي تلك القياسات تماما" وان مبدأ الشك لهيزنبرج هو حقيقة طبيعية حيث في ضوء تلك المفاهيم من المستحيل بناء أداة قياس تصل إلي الدقة المطلوبة.

#### خامساً: غزل الجسيم (الدوران المغزلي للجسيم) :

أدت تجربة أجريت بواسطة اوتوستيرن ووالترجيرللاك عام 1922 إلي نتائج لا تفسر بالطريقة التقليدية الفيزيائية وتدل علي أن الجسيمات

الذرية لها كمية حركة زاوية، وتلك الحركة لها طاقة كمية، وتأخذ قيما منفصلة معينه فقط. فمن المهم أن نعلم أن غزلية الجسيم الذري ليست القياس لكيفية الغزل وخصوصاً لجسيم صغير في صغر الإلكترون والذي يدور حول المحور أم ساكن.

فالتصوير بواسطة الرنين المغناطيسي تستلهم حقيقة أنه تحت شروط معينه فان غزل نويات مثلاً الأيدروجين يمكن أن تتقلب من حالة إلي حالة أخرى. وبالتالي يمكن لنا قياس تكوين صورة لموقع الأيدروجين في الجسم كجزء أساسي من الماء.

### نظرية الكم بلانك :

افترض بلانك أن متوسط الطاقة الكلية للموجه الموقوفة تعتمد علي تردد الموجه، وان الطاقة الكلية للموجه الموقوفة لها أن تأخذ قيما منفصلة وليست قيما متصلة " (Discrete) (Continuous) كما تفرضه الفيزياء الكلاسيكية.

وقد افترض بلانك أن قيم الطاقة الممكنة تأخذ صوراً منفصلة ومنتظمة لناخذ الشكل التالي:

$$E = 0, \Delta E, 2\Delta E, 3\Delta E, 4\Delta E, \dots$$

و  $\Delta E$  تمثل الفرق في الطاقة بين القيم المتتالية المسموحه والافرض

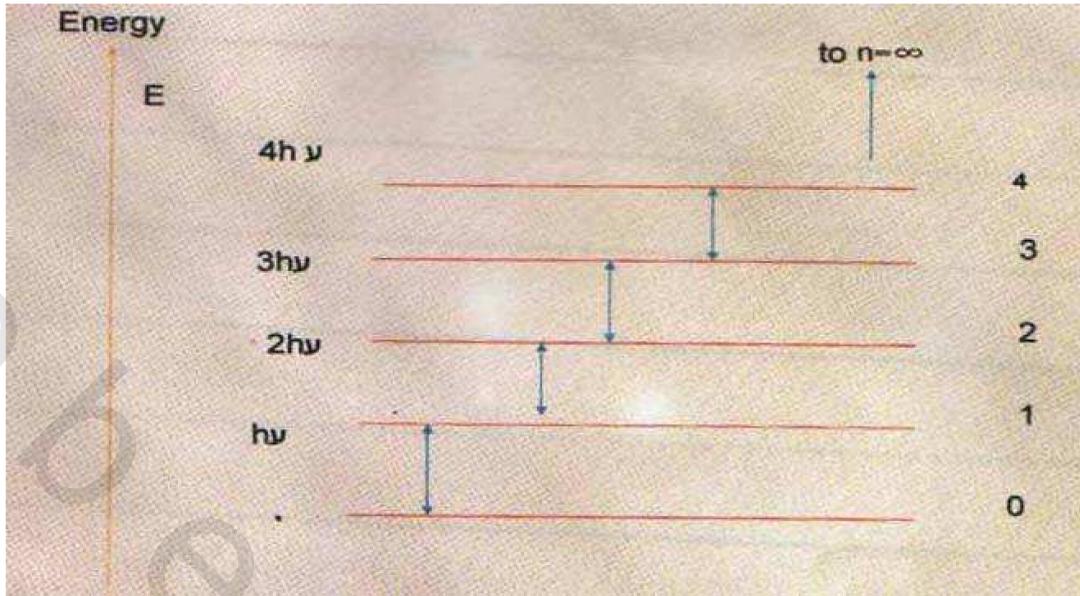
كالتالي:

$$\Delta E = hv \quad (1) \quad 1-$$

$h$  ثابت بلانك مساويا المقدار  $6.63 \times 10^{-34} \text{ JS}$  وتصبح قيم الطاقة

المنفصلة للأمواج الموقوفة علي الصورة التالية شكل (4)

$$E = 0, hv, 2hv, 3hv, 4hv, \dots$$



شكل (4)

### قيمة الطاقة من مدار إلي مدار آخر

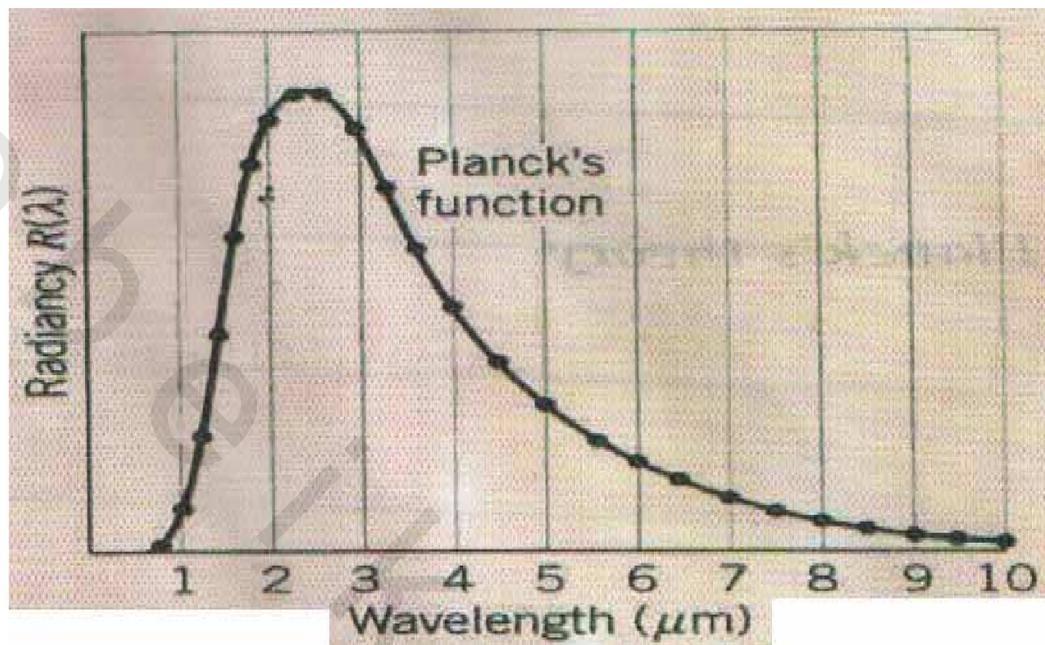
كما يمكن لتلك الاهتزازات التوافقية أن تصور أشعة كهرومغناطيسية محددة القيمة، بناءً علي عملية الانتقال من مدار إلي مدار آخر للاكتساب ولفقد بناءً عل شكل الانتقال من أدني إلي أعلي اكتساب والعكس من ادني إشعاع لطاقة. وبناءً علي ذلك فإن (n) تعني مستويات الأفلاك..... 1, 2, 3, 4, وهو عدد صحيح لمستوي الطاقة ويعرف بفرض الكم لبلاانك **Plank's quantum theory** ومن العلاقة إذا:

$$E_n = nh\nu \quad 1- (2)$$

فمثلاً إذا حدث الانتقال من 1 وحتى 5 فإن الفرق إذا هو 4 بمعنى  $4h\nu$  وبالتالي توصل بلانك إلي قانون لتوزيع كثافة الطاقة للجسيم الأسود كدالة في طول الموجه الصادر علي هيئة إشعاعات كهرومغناطيسية علي النحو :

$$u(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda} \cdot \frac{1}{hc/\lambda kT - 1} d\lambda \quad 1- (3)$$

وكما هو ملاحظ انتقال تطبيق القانون مع نتائج القياسات العملية لطيف الجسم الأسود شكل (5)



شكل (5) يبين ثوابت بلانك المطابقة للنتائج للملاحظة تماماً

### مقدمة في كيمياء الكم :

## الأشعة الكهرومغناطيسية Electromagnetic Radiation

الدراسة عن الكهربية المغناطيسية الإشعاعية، فصفاتها وتفاعلاتها مع المادة مدخلا مهما لكيمياء الكم، فدراسة بلانك تعتبر الأساس لطاقة الكم، والتحليل الطيفي الذري من ناحية إكتساب طاقة أو فقد تلك الطاقة علي هيئة إشعاع لدراسة تقدمت بواسطة نيلز بوهر ونظريته مقبولة عن ذرة الهيدروجين والتي أدت إلي معلومات تفسيريه حول التركيب الذري والجزيئات بناء علي الكهربية الإشعاعية المغناطيسية. فالمعلومات المجردة والتي كلها تقريبا معلومة لدينا مثل موجات الراديو، الطاقة التي تصلنا من الشمس إنما تصل لجميع الكواكب الاخري علي شكل إشعاع.

وعندما نناقش الإشعاع الكهرومغناطيسي من ناحية الموجة وعندنا الكثير من نوعية الموجات وحركة الموجه علي شاطئ البحر، انخضاع خيوط الكمان، النغمات الواصلة إلينا عن طريق الموجات الصوتية كل تلك الموجات متضمنة لحركة واحدة وهي حركة الذبذبة وتتميز بواسطة السعة (التردد) طول الموجه، حركة الموجات خلال الفراغ، سرعة التعاقب كل تلك الذبذبات متعلقة بصيغه لمعادلة.

$$C = \lambda \nu \quad 1- (4)$$

حيث  $\lambda$  طول الموجة (المسافة الفراغية بين المواضع علي الموجات المتعاقبة)،  $\nu$  التردد (عدد الأطوال الموجية التي تمر علي المرقب (المنظار - العداد) لكل دورة زمنية،  $C$  سرعة الموجات المتعاقبة.

لنأخذ أنواعا معلومة لدينا مثل موجات الراديو، الضوء المرئي، أشعة اكس علي أساس لهم نفس الظواهر ولكن مختلفة فقط في طول الموجة أو التردد وذلك للكشف عن الإشعاع الكهرومغناطيسي. والسرعة إنما تؤخذ علي أنها حالة ثابتة أو من الثوابت الأساسية في الطبيعة وتؤخذ علي مقياس سرعة الضوء في الفراغ وهي :

$$C = 299782250 \times 10^8 \text{ mSec}^{-1}$$

$$\approx 3 \times 10^{10} \text{ CmSec}^{-1}$$

## انظر الجدول (1)

يبين الطيف الكهرومغناطيسي يقابله التردد والطول الموجي.

المدى	التردد	الطول الموجي
١- الراديو	$\gamma = 1 \times 10^5 H$	$\lambda = 3 \times 10^3 m$
٢- موجة كهرومغناطيسية صغيرة	$\gamma = 3 \times 10^9 H$	$\lambda \approx 1 m$
٣- تحت الحمراء	$\gamma = 3 \times 10^{13} H$	$\lambda \approx 1 \times 10^{-5} m$
٤- الضوء المرئي	$\gamma = 3.75 \times 10^{14} H$	$\lambda = 8 \times 10^{-7} m$
٥- فوق البنفسجية	$\gamma = 7.5 \times 10^{14} H$	$\lambda = 4 \times 10^{-7} m$
٦- فوق البنفسجية الفراغي	$\gamma = 1.5 \times 10^{15} H$	$\lambda = 2 \times 10^{-7} m$
٧- أشعة اكس	$\gamma = 3 \times 10^{15} H$	$\lambda = 1 \times 10^{-7} m$
٨- أشعة جاما	$\gamma = 3 \times 10^{18} H$	$\lambda = 1 \times 10^{-10} m$
	$\gamma = 3 \times 10^{20} H$	$\lambda = 1 \times 10^{-7} m$

## أشعة الجسم الأسود Black body radiation

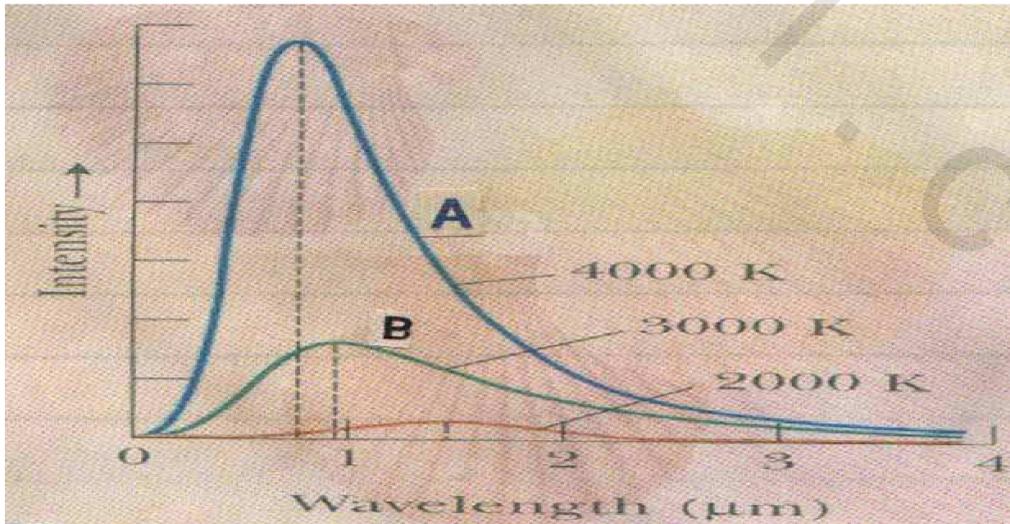
من المعلوم بان الجسم الأسود هو الذي يمتص أو يشع كل الترددات الكهرومغناطيسية فالانبعاث الحراري الناتج يمكن التعرف عليه بواسطة فرن مغلق. وقد تجري تلك التجارب عن الانبعاث الحراري بواسطة فتحة ضيقة من الفرن. ونفترض كمية طاقة مستمدة من دراسة كثافة الطاقة المنبعثة من الجسم الأسود، عند درجة حرارة معينه كدالة للتردد أو الطول الموجي للإشعاع، وعليه يمكن تعيين الكثافة لتلك الطاقة بواسطة العلاقة الآتية:

$$\rho = \frac{4}{C} E \quad 1- (5)$$

$E$  قوة الطاقة المنبعثة،  $C$  سرعة الضوء. وحدات الطاقة (الطاقة لكل وحدة مساحة لكل وحدة زمن)  $\rho$  كثافة الطاقة، من العلاقة الآتية

$$R_v = \frac{4\pi}{C} \beta_v \quad 1- (6)$$

حيث  $\beta$  قوة الانطلاق (الانبعاث) لكل وحدة تردد (Hz) وهي تساوي دورة لكل ثانية لتردد ( $\nu$ ) لكل متر لكل تدرج (زاوية قائمة) لكل ثانية في الاتجاه العمودي علي سطح الجسم الأسود والقيم  $E, \beta_v, \rho$  وكذلك  $\rho_v$  دوال للحرارة،  $\rho$  مساوية للتكامل  $(\int \rho_v d\nu)$  انظر الشكل (6) وخلال الفترة الأخيرة من القرن التاسع عشر، تناول مجموعة لتفسير شدة الطاقة نظرياً، منهم استيفان- بولتزمان **Stephan- Boltzmann** حيث نصا علي أن مجموع الطاقة المنبعثة من الجسم الأسود تتناسب طردياً للأس الرابع لدرجة الحرارة المطلقة بالقانون:



شكل (6)

يبين  $P\nu$  مقابل  $\nu$  عند  $A$ ،  $B$  لدرجات حرارة عالية الاخرى منخفضة مثلا

$$E = \sigma T^4 \quad 1- (7)$$

وأن  $\sigma$  - ثابت التناسب. وهذا يعطي مساحة المنحني وفيما بعد أدت معالجة ناجحة جزئياً عن التردد بواسطة وين 1896 - Wien ، معرفة تماثليه الشكل  $\rho_v$  بمنحني توزيع سرعات جزئ الغاز وافترض القانون

$$\rho_v = \alpha v^3 e^{-\beta v T} \quad 1- (8)$$

كما نص أن كثافة الطاقة تكون اكبر ما يمكن عند اعلي درجة حرارة للجسم الأسود ووضع علاقة تجريبية.

$$T \cdot \lambda_{\max} = b \quad 1- (9)$$

حيث  $b$  مقدار ثابت بقيمة :  $b = 2898 \times 10^{-3} \text{ mK}$

ويعرف هذا القانون "بقانون الإزاحة Displacement law وأما ثابت ستيفان - بولتزمان علي النحو:  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$

ومن الملاحظ من الشكل (7)  $(\beta, \alpha)$  ثوابت المتوافقة للثوابت  $(\sigma, b)$ .

ثم تناول ريليج لتعريف بعض الأخطاء في قانون وين، ثم اجري جي. اتش جينز تصحيحات أخري إلي نتائج ريليج بالعلاقة :

Lord Rayleigh & J. H-jeans

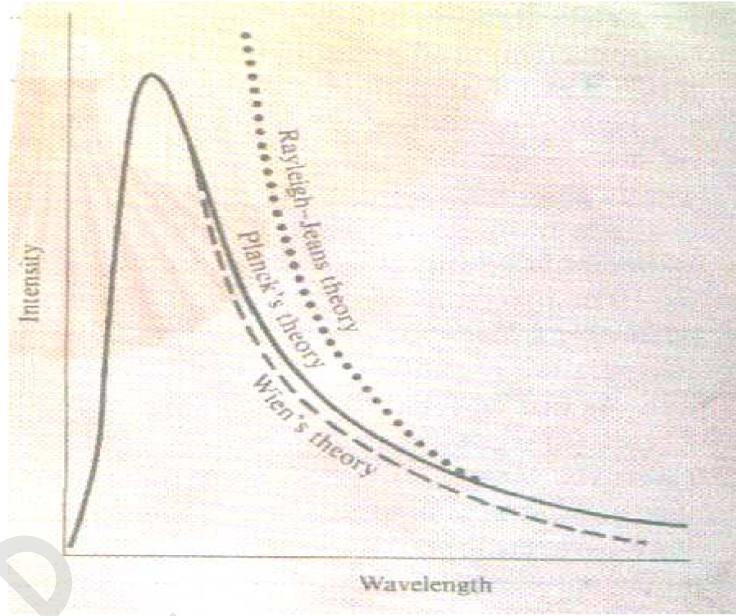
$$\rho_v = \frac{8\pi v^2 KT}{C^3} \quad 1- (10)$$

قانون ريليج - جينز ثم انظر الشكل الذي يبين التطابق

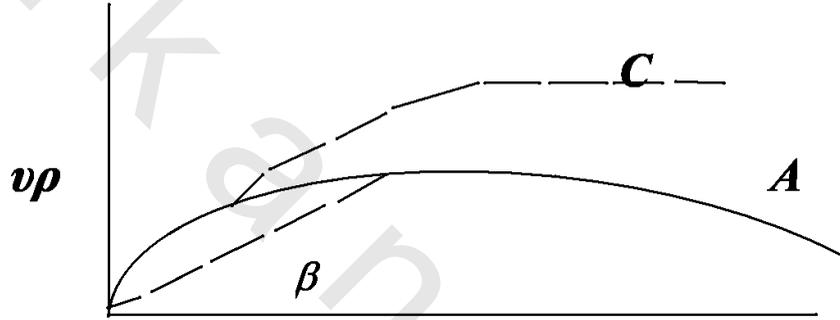
حيث  $K$  ثابت بولتزمان والصيغة الأخيرة أعطت تطابقاً ممتازاً عند ترددات منخفضة (طول موجة طويلة) ولكن دون المستوي عند ترددات عالية، لتزداد باستمرار مع زيادة التردد انظر شكل (8).

وفي عام 1900 توصل ماكس بلانك لمعادلة مطبقة تماماً علي المنحني بالعلاقة :

$$P_v = \frac{8\pi v^3}{C^3} \frac{h}{\exp(hv/kT-1)} \quad 1- (11)$$



شكل (7) يبين المقارنة بين وين وجينز، بلانك والتي تتبع التجربة



شكل (7) A انبعاث حرارة الجسم الأسود المعملية  
مقارنة مع قانون إزاحة وين (β) وقانون جينز (C)

وهذه المعادلة اشتقت لملائمة المنحني، حيث قاس بلانك في دراسته عند تغير المنحني أي عند ترددات عالية ومنخفضة، والمشكلة هنا كيف يكون الربط بينهما. حيث ادخل ثابت آخر بـ  $h$  - ثابت بلانك بالقيمة  $6.55 \times 10^{-27}$  ارج ثانية، والمشتقة من جداول الجسم الأسود وهو قريب للقيمة الحديثة  $6.626 \times 10^{-27}$  ارج ثانية أو  $6.626 \times 10^{-34}$  جول ثانية.. وأفضل ميزه للنتيجة ليست في المعادلة ذاتها، لكن الحقيقة إن هذا الاشتقاق يتطلب أن  $h\nu$  - التردد لا يكون مستمراً، وعلي الأصح يكون منفصلاً وهذا فرض أو بقيمة مكممة. وعليه فإن  $h\nu$  تأخذ وحدات طاقة مكممة، كما إن العديد من العلماء بينوا احتمال ثابت بلانك ما

هو إلا صناعة حسابية أخذت الخطأ والصواب trial and error بدون معني فيزيائي. وعلي أي حال في 1905 تناول اينشتاين تأثير الضوء الكهربائي، كما تناول ديبياي السعة الحرارية للأصلا ب وتغلبت علي معظم الشكوك. وظهرت هذين الظاهرتين ليستا مرتبطة لمشكلة إشعاع الجسم الأسود، وفوق ذلك كلاهما فسرتا إدخال الطاقة الكمية (المكممه) للنظريات. احد المنحنيات يطابق الطاقة المكممه التي تظهر ربما صناعية. علي أي حال هو التفسير النظري للظواهر الثلاثة (بلانك، اينشتاين، ديبياي) يتطلب التكمم، التي يجب امتلاكها لمعني فيزيائي. ولنا الآن التصور للكمية للطاقة بالمعادلة (1) الآتية كما يلي:

$$E = hv \quad (1) \quad 1 - 1$$

وهذه المعادلة حقيقية راسخة في العلوم الحديثة ففي ضوء المعادلة الأخيرة، تعتبر الترددات المطابقة لبعض وحدات الطاقة والشائعة.

$$1\text{ev/molecule} = 2.41805 \times 10^{14} \text{Hz} = 8.06573 \times 10^3 \text{Cm}^{-1}$$

$$1\text{erg/molecule} = 1.50931 \times 10^{16} \text{Hz} = 5.03451 \times 10^{15} \text{Cm}^{-1}$$

$$1\text{J/molecule} = 1.50931 \times 10^{23} \text{Hz} = 5.03451 \times 10^{22} \text{Cm}^{-1}$$

$$1\text{Kcal/molecule} = 1.04855 \times 10^{23} \text{Hz} = 3.49758 \times 10^{22} \text{Cm}^{-1}$$

ففي المعادل (1) نستخدم وحدة سم<sup>-1</sup> مثل Hz - هرتز هذه الإعداد

تطابق الطاقات المعبرة في أعداد الموجه، والتردد مساوياً  $C/\lambda$  - سهم

للكيميائيين، العدد الموجي  $\bar{\nu}$  - الذي يعين بالعلاقة  $1/\lambda$  ووحداته سم<sup>-1</sup>

مثال: احسب كمية الطاقة المنطلقة من داخل فتحة حجمها اسم<sup>3</sup> له

الطول الموجي الآتي:

$$1 - \text{ضوء أصفر } 550-575 \text{ nm}$$

$$2 - \text{دون الحمراء } 1000-1025 \text{ nm}$$

الحل

$$1 - \text{متوسط الطول الموجي } 5625, d\lambda = 25 \text{ nm} - \text{الفرق بينهما.}$$

بالتعويض في معادلة بلانك لقانون التوزيع :

$$U(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hd\lambda kT} - 1} d\lambda$$

والتي يمكن كتابتها في الصورة :

$$= \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{e^{-hd\lambda kT}}{1 - e^{-hd\lambda kT}}$$

وبالتعويض بالقيم :

$$\pi = 22/7, h = 6626 \times 10^{-34} \text{ JS}, c = 2998 \times 10^8 \text{ ms}$$

$$\lambda = (5625 \times 10^{-9} \text{ m})^5, TK = 1500K = 138 \times 10^{-23} \text{ بولتزمان}$$

$$, d\lambda = 25 \times 10^{-9}$$

وعند 2- نجد متوسط الطول الموجي  $d\lambda = 25 \text{ nm}, 10125 \text{ nm}$  وبمقارنة القيم الخارجة من الناتج الحسابي نجد إن (٢) اكبر من (١) بالمقدار  $10^3$  المصاحبة في الضوء الأصفر.

### نظرية بوهر (بور): Boher theory

أبسط الذرات علي الإطلاق ألا وهي ذرة الايدورجين. ولطيف تلك الذرة تقريبا ما يكون شبيها للذرات الاخرى، مكونه خطوط طيف حادة واضحة، مبينة الإمتصاص أو الانبعاث للإشعاع الكهرومغناطيسي من إنتقال الإلكترون المفرد وتحركه بين المدارات السبعة عند ترددات محددته حيث يوجد فقط أربعة خطوط في المنطقة المرئية، وهي:

$$6.17 \times 10^4 \text{ Hz} - 2.06 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}, 4.57 \times 10^4 \text{ Hz} - 1.52 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}$$

$$7.32 \times 10^4 \text{ Hz} - 2.44 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}, 6.91 \times 10^4 \text{ Hz} - 2.30 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}$$

وهذه السلسلة التي تعرف بسلسلة Balmer Series وتطبق بالعلاقة :

$$\bar{\nu} = R \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (12) - 1$$

حيث (n) تمثل رقم الأغلفة والتي تكون اكبر من (٢) وهي قيم صحيحة ثابتة ٤، ٣، وهكذا، R- ثابت ريدبيرج Rydberg Constant

تلك السلسلة تعرف بسلسلة باش Baschen Series والتي تقع في منطقة دون الحمراء والأشعة الحمراء، وتطبق علي النحو:

$$v = R \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (13) - 1$$

n أكبر من الغلاف رقم 3 لمثل تلك الأطياف فسرت بواسطة النظرية البسيطة، وقد صدرت معادلة بواسطة نيلز بوهر في عام 1913. (أتم رسالته في 1911 ثم ذهب إلي كمبرج للعمل مع طوسون J. J. Tomson وعارض طوسون في النموذج الخاص به عن الذرة ثم ترك كمبرج للعمل مع رازرفورد في مانشستر Rutherford– Manchester حيث إن الأخير يري الذرة مكونة من كتلة صغيرة نسبيا لنواه شحنه موجبة محاطة بأجسام أخري سالبة وضعيفة جداً وسماها الإلكترون.

وقد اقترح رازر بأن الذرة عبارة عن مدارات لنموذج مسطح من حيث إن تلك الإلكترونات تدور حول النواة لمدارات محده، بما يشبه الكواكب حول الشمس. وتلك الحركة افترضها مثل قوة الطرد المركزية في حركة دوران الإلكترون والمنتزعة بواسطة التجارب الكهرواستاتيكي فيما بين النواة الموجبة والالكترونات السالبة. (المؤلف كتاب أساسيات الكيمياء الفيزيائية).

$$\text{Negative of electrostatic force} = \frac{Ze^2}{r^2}$$

حيث Z- شحنة النواة، e- شحنة الإلكترون، r- نصف قطر المدار، m- كتلة الإلكترون، v- سرعة الدوران. وبما إن قوة الطرد المركزية = قوة التجاذب الكهرواستاتيكي أي أن:

$$\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

ونحن نعلم أن الطاقة يمكن التعبير عنها بالمجموع للطاقة الحركية (طاقة الوضع - T) و(الطاقة الحركية بالمقدار -  $\frac{1}{2}mv^2$ ) وبالنسبة

لإلكترون واحد فان طاقة الوضع هي  $\frac{Ze^2}{r^2}$  لنحصل علي :

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Ze^2}{r} \quad (14) - 1$$

$$\frac{Ze^2}{r} = mv^2 \quad \text{ونعلم أن :}$$

وبالتعويض لنحصل :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Ze^2}{2r} \quad (15) - 1$$

لنجد:

$$E = -T = -\frac{1}{2}V \quad (16) - 1$$

وتعرف بالمعادلة للميكانيكا الكلاسيكية. تلك البراهين تعتبر تطبيقها للكواكب الشمسية مع قوة الجاذبية الأرضية جيدة.

ولكن مع التطبيق علي انويه والكترونات صغيرة الحجم بالإضافة إلي الشخصيات الموجبة والسالبة يوجد خطأ. كما أن الديناميكا الكهربائية تقودنا علي أن حركة الشحنات المتواجدة في مدار دائري تشع طاقة، لذا ففي نموذج رازر، فان الإلكترون سوف يفقد جزء من الطاقة أثناء الدوران وبطريقة مستمرة، الأمر الذي يجعله يقل تدريجيا وفي النهاية يصل إلي قلب الذرة - النواة. وبالنسبة لذره الأيدروجين، الدوران لها بالقيمة  $10^8 \text{ Sec}$ . وهذا مضاد للحقيقة أن الذرة ثابتة وموجودة.

بعد تلك الفترة عاد إلي الوطن الدنمارك Denmark واصدر بوهر الجزء المفقود إلي نظريته لذره الأيدروجين وهذا الافتراض هو العزم الزاوي  $\bar{P}\phi$ .

$$P\phi = mvr = \frac{nh}{2\pi} \quad 1 - (17)$$

حيث  $n$  - عدد صحيح والمعادلة الأخيرة ستحل لنصف القطر ( $r$ ) لتعطي :

$$r = \frac{nh}{2\pi mv} \quad 1 - (18)$$

وبالتعويض في المعادلة عند قيمة ( $r$ ) لنحصل علي :

$$mv^2 = \frac{2\pi z e^2 m v}{nh} \quad 1 - (19)$$

$$\frac{ze^2}{r} = mv^2 \quad \text{من المعادلة :}$$

$$v = \frac{2\pi ze^2}{nh} \quad 1 - (20)$$

وبحل المعادلة ( $v$ ) للمعادلة عن قيمة ( $r$ ) السابقة لنحصل علي الثوابت الأساسية والعدد الصحيح ( $n$ )

$$r = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 z e^2 m} \quad 1 - (21)$$

وهذا يدل علي أن المدارات تمتلك قيما عديدة لأنصاف الأقطار وبالتالي لا يوجد فقد في الطاقة بناء علي الدوران أو التلاشي في النهاية.

$$\text{ولو استبدلنا المعادلة } v = \frac{4\pi ze^2}{nh} \text{ في المعادلة } (E = -\frac{1}{2}mv^2 = \frac{ze^2}{2r})$$

$$E = -\frac{1}{2}mv^2 = \frac{-2\pi^2 m z e^4}{n^2 h^2} \quad 1 - (22)$$

وهذا يدل أن المعادلة ( $E$ ) دالة للعدد الصحيح ( $n$ ) ولو أضفنا علاقة للطاقة ( $E$ ) لتدل علي العدد الصحيح ( $n$ ) لسوف يمكننا التعبير عن التغير المصاحب للانتقال الطبيعي حيث بوهر عرفها بالمقدار  $h\nu$  كما يلي :

$$\Delta E_{ji} = E_j - E_i \quad 1 - (23)$$

أو بجزئية التردد

$$v_{ji} = \frac{1}{h} (E_j - E_i) \quad 1 - (24)$$

فلو أن  $E_j$  هي الحالة النهائية،  $E_i$  - الحالة الابتدائية. إذا قيمة  $\Delta E$  موجبة تدل علي الامتصاص لكمية من الطاقة، وإذا كانت سالبة، لتدل علي فقد كمية من الطاقة علي هيئة إشعاع لضوء والمعادلات السابقة تدلنا علي أن الإلكترون يدور في مدار ثابت حول النواة، وكل مدار له طاقة محددة ولا ينتقل إلي مدار اعلي إلا إذا اكتسب كمية من الطاقة، وإذا فقد تلك الطاقة عاد إلي المدار الأدنى علي هيئة إشعاع. ولو أن  $(n)$  مساوية لصفر فهذا يعني أن الذرة تمتلك طاقة سالبة عالية لا نهائية. ملاحظة، النظرية لا تعطي كيف للشحنة الالكترونية يمكن أن تتحرك في حركة دائرية ولا تفقد كمية من الطاقة.

ولننظر مرة أخرى لتردد الطيف في المعادلة الأخيرة وهي :

$$rv_{ji} = \frac{1}{h} (E_j - E_i) \quad 1 - (25)$$

لو عوضنا في المعادلة  $E = -\frac{1}{2}mv^2$  لنحصل علي :

$$v_{ji} = \frac{2\pi^2 mze^4}{h^3} \left[ \frac{1}{n_j^2} - \left(-\frac{1}{n_i^2}\right) \right] \quad 1 - (26)$$

$$v_{ji} = \frac{2\pi^2 mze^4}{h^3} \left( \frac{1}{n_j^2} + \frac{1}{n_i^2} \right) \quad 1 - (27)$$

أو

$$v_{ji} = \frac{2\pi^2 mze^4}{h^3 C} \left( \frac{1}{n_j^2} + \frac{1}{n_i^2} \right) \quad 1 - (28)$$

فلو أخذنا  $Z = 1$  لذرة الأيدروجين. تأخذ سلسلة بالمر فتكون  $n = 1$  وسلسلة باشن  $n_i = 3$  ولتقييم التردد الأول للقيمة  $n_i = 1$  ،  $n_i = 2$  نجد إمكانية حدوثه في المنطقة فوق البنفسجية عند  $823 \times 10^4 \text{ Cm}^{-1}$  والسلسلة الأخرى ستحدث عند ترددات عالية.

ولقد أشارت نظرية بوهر لطيف ذره الأيدروجين، وأيضا لأي إلكترون احادي ولو أن  $Z$  تغيرت إلى قيمة مناسبة في غياب أي تأثير خارجي كهربائي أو مجال مغناطيسي فسوف تحدث بعض التعديلات للنظام الذري احادي الإلكترون في وجود المؤثر الخارجي.

ثم أدخلت إلى نظرية الكم الحديثة بعض التعديلات للتغلب على تلك الصعوبات منها ميكانيكية المصفوفات لهيسنبرج (1925) -W- Heisenberg وميكانيكية الموجه عام ١٩٢٦ - شروودنجر -E- Schrödinger ولأول وهلة مختلفة بناء على الفروق في الشكل الرياضي الداخل حيث وضعت نظرية هيسنبرج على الرياضيات الجبرية للمصفوفات بينما شروودنجر استخدم معادلات مختلفة كما أن شروودنجر اوجد الشكل التقريبي لمكافئين غالبا الاثني مرتبطين في التطبيقات الحديثة لنظرية الكم، ومع الشرح الكيفي فعدد من الأشخاص يميل بالارتياح مع إظهار شروودنجر.

وقبل أن ننهي مناقشتنا لنظرية بوهر سوف نضع وحدات الطاقة ووحدات المسافة من نظرية بوهر المستخدمة في الميكانيكا الذرية، والميكانيكا الجزيئية الكمية، فوحدة الطاقة الشائعة تعتبر ضعف قيمة الطاقة لذرة الأيدروجين في الحالة الأرضية (الساكنة) وهذا يعني قيمة طاقة الوضع لذرة الأيدروجين والتي تعرف بوحدة الطاقة الذرية لهارترينج (Hartree atomic energy unit).

$$1 \text{ Hartree} = mv^2 = \frac{Ze^2}{r} = \frac{2\pi^2 mze^4}{h^2} = 27211652 \text{ ev} \quad (29) - 1$$

ووحدة المسافة في نصف قطر ذرة بوهر في الحالة الأرضية لذرة الأيدروجين

$$1 \text{ Boher} = \frac{h^2}{2\pi^2 mze^4} = 52917715 \text{ \AA} = a_0 \quad (30) - 1$$

وهما مساوية أو مكافئة للوضع  $\frac{h}{2\pi}$ ،  $m$  - مساوية للوحدة .

### ميكانيكية المصفوفات لهيسنبرج :

الصفة المنطقية لمداخلة هيسنبرج لميكانيكا الكم البسيطة تقريبا حيث افترض وجود مصفوفات تقابل لكل نظام ، وقواعد الكم تشتق من مصفوفات جبرية والاهم موضوعة علي الصفات والتعويضات للمصفوفات.

فإذا كان المقدار (AB) للمصفوفة A, B فيمكن إيجادها كما يلي

$$[A B] = [ABBA] \quad (31) - 1$$

والمعادلة تلك ليست بالضرورة مساوية للصفر حيث A, B هي

المصفوفة ولنفترض (اثين × اثين) لمصفوفة كما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \alpha \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \quad (32) - 1$$

فيكون المعكوس هو :

$$[A, B] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \text{Zero} \quad (33) - 1$$

وكما هو واضح من حاصل الضرب الأقواس تؤول للصفر في حالات مقيده وفي هذه الحالة يمكن القول أن المصفوفة تغيرت عندما المعكوس (آداه العاكس) مساويا للصفر. وتتشأ قواعد الكم عند افتراض لاثين من الخواص معاكسين احدهما معاكس لأي ملاحظة مع الطاقة

(مصفوفة تعبر عن الطاقة والتي تعرف بمصفوفة هاميلتونيان (Hamiltonian matrix-  $H$ ) لتعطي التغير في الزمن الملحوظ مضروبة بالمقدار  $(i = \sqrt{-1})$  وكذلك بواسطة ثابت بلانك مقسوما بالمقدار  $2\pi h$  تعين كما في  $(h/2\pi)$  .

$$A H = i\hbar \frac{dA}{dt} \equiv i\hbar A \quad (34) - 1$$

لو  $A$ - التعويض مع  $(H)$  فان العاكس Commutator بصفر الصفات، ذلك التعويض مع  $(H)$  - هاميلتونيان لا يتغير مع الزمن وبالتالي يعرفا بثوابت الحركة. الافتراض الثاني للعلاقة وهو الأساس من مبدأ عدم التأكد لهسنبرج. الشائع وهو :

$$\Delta A \Delta B = \frac{1}{2} [A, B] \quad (35) - 1$$

حيث  $\Delta A \Delta B$  هي اقل قيمة في عدم التأكد في ملاحظات  $A, B$  والتعبير الشائع هو  $\Delta E \Delta T$  مساويا للمقدار  $h/2$  وسوف نحاول تثبيت نظرية هسنبرج هنا.

**افتراضات دي بروجلي وميكانيكا الموجه لشرودنجر :**

تتطلب معالجة أينشتاين للتأثير الضوئي الكهربي طاقة كم إشعاع كهرومغناطيسية والتي تعرف بالفوتون - وحدة الكم الضوئي تمتلك أو تسلك الجسيم المتحرك. ففي رسالة الدكتوراه في عام ١٩٢٥ - باريس أكد لويس دي بروجلي انه تحت ظروف خاصة الإشعاع الكهرومغناطيسي يأخذ مسلك الجسيم بدلا من الموجه، بينما تحت ظروف محددة يأخذ شل الجسيم. فمن نظرية اينشتاين النسبية:

$$E = mc^2 \quad (36) - 1$$

ومن علاقة بلانك :

$$E = hv = \frac{hc}{\lambda} \quad 1 - (37)$$

وبمساواة المعادلتين والقسمة علي (C) نحصل علي :

$$mc = \frac{h}{c} \quad 1 - (38)$$

هذا يتضمن انه بالنسبة للجسيم ، ربما تكتب :

$$mv = \frac{h}{\lambda} \quad 1 - (39)$$

أو :

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} \quad 1 - (40)$$

حيث  $m$  - كثافة الجسيم عند سرعة  $v, mv$  كمية التحرك الخطي - العزم  $p$  وطبيعة الموجه للموجه حقت بواسطة وافيسون وجيرمر (Davisson and Germ)ر حيث وجد أن ضوء أو شعاع الإلكترون ينحرف بواسطة الفراغ المنتظم في البلورة مثل الضوء عندما يحيد بواسطة الفراغ المنتظم للخطوط في الانحراف الشبكي.

وظروف الكم لبوهر للعزم الزاوي يمكن أن يشتق من علاقة دي بروجلي ، فلو أن الإلكترون في مدار بوهر يمتلك سلوك الموجه يجب أن يكون المدار مثل الموجه النائمة المتلونة. بمعنى حدود المدار الذي يجب أن يكون عدد صحيح مضروباً في طول الموجه بمعنى :

$$2\pi r = n\lambda \quad 1 - (41)$$

$$\lambda = \frac{2\pi r}{n} \quad \text{أو :}$$

ومن علاقة بروجلي :

$$mv = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2\pi r} \quad 1 - (42)$$

وبإعادة التعديل سوف نحصل علي ظروف الكم لبوهر :

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

كما ادخل دي بروجلي ميكانيكا الموجه بأخذ معادلات الموجه للإشعاع الكلاسيكي الكهرومغناطيسي واستبدلت علاقة دي بروجلي معادلة ماكسويل لتوالد تعاقب الموجه لأحد الأبعاد وهي :

$$\frac{\partial^2 \psi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} = \frac{\partial^2 \psi}{dt^2} \quad 1 - (43)$$

حيث  $\psi$  - دالة نصف الموجه

$x$  - اتجاه التعاقب،  $v$  - سرعة التعاقب،  $t$  - الزمن، والحل العام لمعادلة تفاضلية ثنائية الرتبة للمعادلة السابقة:

$$\psi(x, t) = a \tau \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{x}{\lambda} - vt \right) \right] \quad 1 - (44)$$

حيث  $a$  - السعة ويوجد حلين آخرين ومقولين وهما:

$$\psi(x, t) = a \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - vt \right) \quad 1 - (45)$$

$$\psi(x, t) = a \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - vt \right) \quad 1 - (46)$$

ولنعبر الشكل الآسي لحل معادلة الموجه والتي يمكن كتابتها علي

النحو :

$$\psi = a e^{2\pi i x / \lambda} e^{-2\pi i vt} \quad 1 - (47)$$

ولنا أن نوضح :

$$a \exp^{2\pi i x / \lambda} \quad a \psi(x) \quad 1 - (48)$$

لنحصل علي :

$$\psi = \psi(x) e^{-2\pi i vt} \quad 1 - (49)$$

وبالتفاضل مرتين مع الاحتفاظ للحد  $(x)$  نحصل علي :

$$\frac{\partial^2 \psi}{dx^2} = \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} e^{-2\pi i vt} \quad 1 - (50)$$

وبتفاضل مع الاحتفاظ للزمن (t) نحصل علي :

$$\frac{\partial^2 \psi}{dt} = \psi(x) 4\pi^2 f^2 v^2 e^{-2\pi i vt} \quad 1 - (51)$$

وبالتفاضل مرة أخرى :

$$\frac{\partial^2 \psi}{dt^2} = \psi(x) 4\pi^2 f^2 v^2 e^{2\pi i vt} \quad 1 - (52)$$

وباستبدال المعادلة (50) في المعادلة (52) نحصل :

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{dx^2} e^{2\pi i vt} = \frac{1}{v^2} \psi(x) 4\pi^2 v^2 e^{2\pi i vt} \quad 1 - (53)$$

وبإهمال الحد الآسي ويتساوي  $\frac{v^2}{v^2}$  للحد  $\lambda^{-2}$  نحصل علي :

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{dx^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi(x) \quad 1 - (54)$$

ولنستبدل طول الموجة من علاقة دي برجولي في المعادلة  $mv = \frac{h}{\lambda}$

لتعطي :

$$\frac{\partial^2 \psi}{dx^2} = \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} \psi \quad 1 - (55)$$

**ملاحظة:** تلك الاشتقاقات ما هي إلا المتغير واحد فقط للمحور  $x$  المعادلة

(55 - 1) لطاقة النظام. والطاقة لمجموع الطاقة الحركية  $T$  وطاقة

الوضع  $V$  إذا :

$$E = T + V = \frac{1}{2} mV^2 + V \quad 1 - (56)$$

والحل بالنسبة للسرعة  $V^2$  نحصل علي :

$$V^2 = \frac{2}{m}(E-V)$$

بالتعويض في المعادلة (٥٥) نجد :

$$\frac{\partial^2 \psi}{dx^2} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} (E-V)\psi \quad 1 - (٥٧)$$

وبتعديل المعادلة (٥٧) لنحصل :

$$\left(\frac{-h^2}{dx^2} \frac{d^2}{dx^2} + V\right) \psi = E\psi \quad 1 - (٥٨)$$

وهنا استخدمت  $h$  بالنسبة  $\frac{h}{2\pi}$

وتعتبر المعادلة (٥٨) لمعادلة شرودنجر الزمن- المستقل time-independent Schrödinger equation لبعد لواحد المحور (X) فقط.

ويمكننا بعد ذلك أخذ أبعادا أخرى ولتكن (y,z) وتكتب علي النحو

$$\hat{H} \psi = E\psi \quad 1 - (٥٩)$$

هذه المعادلة تأخذ شكل معادلة القيمة الذاتية eigenvalue equation والعامل  $\hat{H}$  في هذه الحالة تعمل علي الدالة وتعرف بالدالة الذاتية لتعطي ثابت، وفي هذه الحالة تكون لقيمة طاقة ذاتية (أزمنه الدالة الذاتية) عامل هاميلتونيان- يمثل الطاقة. لاحظ أن جزئية طاقة الوضع لا تتغير. وطاقة الحركة يمكن التعبير عنها من جزئية العزم p كما

$$P^2/2m \quad \text{مبينا المنطقة إلى المتجه X أي (Px)}$$

$$P^2 x/2m \rightarrow -\frac{h^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \quad 1 - (٦٠)$$

ميكانيكا الكم تقليدية كلاسيكية

وعليه :

$$Px \rightarrow \pm (ih \frac{d}{dx}) \quad 1 - (٦١)$$

أو علاقة إشارة السالب في المعادلة (٦١ - ١) - اختيار تقليدي (طريق يسار واحد) لوضع معامل الكم الميكانيكي المناسب لأول نظام لمعامل كلاسيكي ثم بعد ذلك استبدال العزم الخطي بالمقدار  $(-ihd/dx)$  وبالنسبة لاعتماد - الزمن في معادلة شرودنجر نفترض مرة أخرى الحل العام لمعادلة الموجة time-dependent .

$$\psi(x,t) = a \exp^{2\pi i \left( \frac{x}{\lambda} - vt \right)} \quad ١ - (٦٢)$$

بالتفاضل (٦٢) مع الاحتفاظ للزمن :

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -2\pi i v \exp^{2\pi i \left( \frac{x}{\lambda} - vt \right)} \quad ١ - (٦٣)$$

بالاستبدال في علاقة بلانك بالنسبة للتردد والطاقة نحصل علي:

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{iE\psi(x,t)}{h} \quad ١ - (٦٤)$$

وباستبدال E بالعامل H وبالتعديل نحصل علي معادلة شرودنجر توقف - المعادلة time - dependent Schrödinger equation .

$$\hat{H}\psi = -\frac{ihd\psi}{dt} \quad ١ - (٦٥)$$

لوقورنت المعادلة (٦٥ - ١) بالمعادلة (٣٤ - ١) من نظرية هيسنبرج نجد أن تغير زمن هيسنبرج الملاحظ ذاته ، بينما تحقيق شرودنجر هو إلي دالة الموجة.

**مثال:** احسب طاقة حركة إلكترون منبعث من عنصر السيريوم بضوء له طول موجي 550nm وما هو جهود الإيقاف؟ وما هو عدد الالكترونات الشاردة إذا كانت الطاقة الكلية للعدد الموجي 550nm هي  $10 \times 10^3$  علما بان دالة الشغل لعنصر السيريوم  $3.4 \times 10^{-19}$  ر

الحل

$$E = hv = hc/\lambda$$

وبالتعويض :

$$= \frac{6.62 \times 10^{-34} \times 2998 \times 10^8}{550 \times 10^{-9}} = 3.62 \times 10^{-19} \text{ J}$$

ولحساب الطاقة المنبعثة نأخذ العلاقة :

$$E = hv - h\nu_0 = hv - w \text{ (دالة الشغل)}$$

$$= 3.62 \times 10^{-19} - 3.43 \times 10^{-19}$$

$$= 1.9 \times 10^{-20} \text{ J}$$

أما جهد التوقف من العلاقة :

$$E = ev$$

جهد التوقف

$$v = E/e = 1.9 \times 10^{-20} / 1.602 \times 10^{-19}$$

أو

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ (كتلة الإلكترون)}$$

$$= 0.12 \text{ J/C} = 0.12 \text{ V}$$

وبالتالي عدد الالكترونات المنبعثة هي عدد الفوتونات الشاردة :

$$E = nhv$$

$$n = \frac{E}{hv} = \frac{\text{الطاقة الممتصة}}{\text{السعة} \times \text{ثابت بلانك} \times \text{الطول الموجي}}$$

$$= \frac{1.0 \times 10^3 \times 550 \times 10^{-9}}{6.626 \times 10^{-34} \times 2988 \times 10^8} = 2.777 \times 10^{23}$$

$$= 2.777 \times 10^{23} \text{ Photon}$$

**مثال:** احسب الطول الموجي لكل من :

١ - كرة تتس كتلتها 65g تتحرك بسرعة قدرها 45m/s

٢ - إلكترون له طاقة حركة 205 eV

## العل

١ - باستخدام علاقة دي بروجلي :

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6626 \times 10^{-34} \text{ JS}}{65 \times 10^3 \text{ kg} \times 45 \text{ m/s}} = 22653 \times 10^{-34} \text{ m}$$

٢ - طاقة الحرة للإلكترونات هي 205 eV بوحدات SI

$$T = 205 \text{ eV} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV} = 328 \times 10^{-17} \text{ J}$$

ومن قانون الحركة :

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

وبالتعويض عن P - العزم من علاقة دي بروجلي نحصل على :

$$T = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

ويكون الطول الموجي إذا الخاص بالإلكترون:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}} = \frac{6626 \times 10^{-34}}{(2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 328 \times 10^{-17})^{1/2}} \\ = 857 \times 10^{-11} \text{ m} = 0.0857 \text{ nm}$$

لاحظ من المثال انه في كرة التنس لها طول موجي مصاحب لحركتها متناه في الصغر، وعليه فان الطبيعة الموجبة لتلك الأجسام الكبيرة الحجم لا يمكن التعرف عليها بواسطة التجارب المعملية، ولكن الطول الموجي للجسيمات المتناهية في الصغر مثل الإلكترون لا يمكن تجاهله. (١ - للإلكترون 0.0857 nm) و (١ - كرة التنس -  $2.2653 \times 10^{-25}$ )

جدول (٢) دالة شغل لبعض العناصر

Li	2.90	Rb	2.16
Na	2.75	Cs	2.14
K	2.30	Si	4.85

### حيود الالكترونات: Diffraction of Electron

عندما يمر شعاع ضوئي آحادي الطول الموجي علي سطح بلورة فانه ينعكس من خلال وسط مختلف إلي وسط آخر مختلف عنه في الكثافة فإما ينفذ أو ينكسر بزاوية انكسار معينة وتعتمد زاوية الانكسار علي المستويات البينية بينها. ولحساب الطول الموجي للالكترونات فانه يمكن استخدام المعادلة الآتية:

$$n\lambda = 2a \sin \theta \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

حيث  $\theta$  - زاوية الانعكاس،  $a$  - المسافة بين المستويات في البلورة.

**مثال:** احسب الطول الموجي المصاحب للالكترونات. إذا علم أن طاقة الإلكترون الساقطة  $54.0 \text{ eV}$ ، لزاوية قدرها  $65^\circ$  علي سطح بلورة. ثم قارن بين المحسوب نظريا مستخدما علاقة دي بروجلي. إذا علم أن المسافة البينية للمستويات  $0.91 \text{ \AA}$

**الحل**

$$\lambda = 2 a \sin \theta = 2 \times 0.091 \text{ nm} \times \sin 65^\circ \\ = 0.164948 \text{ nm} \approx 0.165 \text{ nm}$$

وتكون طاقة حركة الإلكترون بالجول تساوي إذا:

$$(electronic \ charge \ (e) = F / N) = 1.6 \times 10^{-19} \text{ coulomb}$$

$$F = Faraday \quad N = Avogadro \ number$$

$$= 96500 \text{ C} \quad = 6.025 \times 10^{23} \text{ mole}^{-1}$$

$$\therefore T = 54.0 \text{ eV} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J / eV} = 8.64 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}} = \frac{6625 \times 10^{-34}}{(2 \times 9.1 \times 10^{31} \times 8.64 \times 10^{-18})^{1/2}}$$

$$= \frac{6626 \times 10^{-34}}{3.965 \times 10^{-24}} = 167095 \times 10^{-10}$$

$$= 0167095nm$$

ملاحظة موافقة بين القيمة العملية والقيم النظرية باستخدام فرضية دي بروجلي.

## فروض ميكانيكا الكم Postulates of Quantum Mechanics

فمع كل استدلال علمي، الشكل المقدم لميكانيكا الكم يوضع علي افتراضات أساسية هذه الافتراضات ليست بديهية بذاتها مثل الافتراضات العلمية. وعلي أي حال تعتبر تلك الافتراضات مقبولة بسبب النظريات الموضوعة بالتوافق مع العملي، وكلها تعتبر حجر الزاوية للنموذج الرياضي للوصف الكيميائي للمستوي الذري والجزيئي.

### فأول افتراض:

هو أن أي نظام يمكن أن يتواجد في حالات محددة (حالات ذاتية eigen state) وكل حالة مميزة بدالة موجة (دالة ذاتية eigen function) "وفي تطوير شرودنجر أو حالة القوة الموجهة (المتجه الذاتي eigen vector) علي الرغم من تفكير الكيميائيين المبدئي في عموم جزئية الطاقة"، فالحالة ربما يتم تعيينها لأي كمية ملحوظة. وفي الحقيقة الوصف العام للحالة يتطلب وصف لكل الرموز المشتركة. وعمليا من الأفضل الإشارة إلي الحالات اللادقه تماما للنظام كما لو إنها حالات حقيقية. هذا المنطق الوثيق الصلة الملحوظ يعتبر محدد تحت الاعتبار للعملي، كما في التجارب المطيافية عندما الحالات تكون محددة للطاقة فقط ويجب أن تخضع لشروط معينة وهي أن تكون دالة مقبولة.

### الفرض الثاني:

يجب عمل الفرضية مع الملاحظة. ففي أي نظام ما لعامل أيا كان العامل مثل العامل الهرميني، في تمثيل شرودنجر أو القوالب في تمثيل هيسنبرج. فلو أن العوامل أو اشتراك الأقواس، دالة الموجه أو متجه الحالة يمكن التركيب ليكونا معا دالة ذاتية أو متجه ذاتي للتعديل الجديد الملاحظ. فلإيجاد العامل لأي كمية ملحوظة" نستخدم الطريقة التقليدية أولا ولتعريف الملحوظة وهي الإحداثيات والعزم نبقي الإحداثيات ونعوض عنها بالعزم" وهذا الفرض يقدم أمور الحصول علي تلك المؤثرات.

١- نكتب أولا الصيغ بالطريقة الكلاسيكية (بقوانين نيوتن والفيزياء) وبمعرفة الإحداثيات وعزم الحركة والزمن. ثم نجري

بعد ذلك تعديلات عزم الحركة  $Pq$  مثلا، يتم استبداله  $-ih = \frac{d}{dq}$

حيث  $\frac{h}{2\pi} = h$  ،  $-q$  إحداثيات حركة في الاتجاهات. لنأخذ التمثيل التالي لطاقة الحركة لجسيم ( $m$ ) وتكتب الشق الكلاسيكي في المحور ( $X$ ).

$$T_x = \frac{1}{2}mv^2 \quad 1 - (66)$$

ثم نبدأ في التعديل علي النحو :

$$T_x = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{P_x^2}{2m} \quad 1 - (67)$$

نستبدل  $P_x^2$  بالمؤثر الكمي  $-h = \frac{d}{dx}$  فيكون الحاصل :

$$T_x^0 = \frac{1}{2m} \left( -ih \frac{d}{dx} \right) \left( -ih \frac{d}{dx} \right) \quad 1 - (68)$$

ليصبح الناتج :

$$T_x^0 = \frac{h^2}{2m} = \frac{d^2}{dx^2} \quad 1 - (69)$$

نلاحظ وجود اختلاف بين التقليدي والتعبير الكمي. حيث في التقليدي نعوض عن الكتلة ( $m$ ) وبالسرعة ( $v$ ) ليعطي مباشرة القيمة العددية لطاقة الحركة. ولكن في التعبير الكمي إنما يعطي عملية رياضية للتفاضل. كما يمكن أيضا عملية أخرى مماثلة في المحور  $y$  أو  $z$  وبالجمع الكلي في الاتجاهات الثلاثة لنحصل علي:

$$T = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad 1 - (70)$$

أو:

$$T = \frac{h^2}{2m} (\nabla^2) \quad 1 - (71)$$

والتعبير الكلاسيكي للطاقة الكلية - هاميلتونيان

$$E = T + V \quad 1 - (72)$$

$T$  - طاقة الحركة،  $-V$  طاقة الوضع

لنأخذ  $\hat{H}$  بدلا من  $E$  علي النحو والتعديل والاستبدال نحصل علي:

$$\hat{H} = \frac{h^2}{2m} \nabla^2 + \bar{V} \quad 1 - (73)$$

### الفرض الثالث:

يتعلق بالتأويل المحتمل لميكانيكا الكم، فلو أن  $\psi_j$  - دالة موجه أو  $\psi_j$  - حالة متجه للنظام في الحالة ( $j$ )،  $P$  - عامل شرودنجر أو  $P$  - قوالب هيسنبرج أو الأقواس matrix تبين بعض الملاحظات. إذا القيمة المتوقعة وهو متوسط ميكانيكا الكم أو المتوسط المتوقع  $\langle P \rangle_j$  الملاحظ في تلك الحالة هو:

$$\langle P \rangle_j = \frac{\int \psi_j^* P \psi_j d\tau}{\int \psi_j^* \psi_j d\tau} \quad 1 - (74)$$

حيث  $d\tau$  - حجم العنصر علي كل المتغيرات، والتكامل يكون علي قيم المتغيرات أو :

$$\langle P \rangle_j = \frac{\int \psi_j^A P \psi_j}{\int \psi_j^A \psi_j} \quad 1 - (75)$$

عموما دوال الموجة أو حالة المتجهات تعتبر معلومة لذا:

$$\int \psi_j^A \psi_j d\tau = 1$$

$$\int \psi_j^A \psi_j = 1 \quad 1 - (76)$$

في وصف الموجه للقيمة  $\int \psi_j^A \psi_j$

إذا المعادلة ما قبل الأخيرة تكون تقريبا تلك الحالة هنا احتمالية الوحدة لإيجاد النظام في مكان ما في الفراغ المعين بواسطة المتغيرات .

**الفرض الرابع:**

**Absolute values of observable القيمة المطلقة الملحوظة**

لأي نظام معين له " قيم تمت قياسها " ، تلك القيم، ما " هي إلا من خصائص هذا النظام " فمثلا المعادلة

$$\hat{a} \psi = a_i \psi_i \quad 1 - (77)$$

حيث  $\psi_i$  - دالة حالة للنظام (i)،  $\hat{a}$  - المؤثر الكمي المقابل لخاصية هذا النظام المقيسه. فلو أردنا تعيين قيمة لخاصية آيا كانت تلك الخاصية للنظام فانه لابد من الحصول مبدئيا علي هذا المؤثر الكمي  $\hat{a}$  ثم نطبق العملية الرياضية للمؤثر  $\hat{a}$  علي دالة النظام  $\psi_i$  فإذا أردنا مثلا تعيين قيمة الطاقة الكلية لأي نظام فسوف تتناول المعادلة (1-77) والخاصة للمؤثر الكمي للطاقة (هاميلتونيان) علي هذا النحو:

$$\hat{H} \psi = E \psi \quad 1 - (78)$$

ويكون المطلوب إذا هو تعيين القيمة الخاصية للمؤثر  $\hat{H}$  ولنأخذ معادلة الجسيم الواحد وهي:

$$( \frac{h}{2m} \nabla^2 + \bar{V} ) \psi = E\psi \quad (79) - 1$$

وكما سبق أن تلك المعادلة هي معادلة شرودنجر (58) وهذه المعادلة تفسر المعادلة الرئيسية في نظرية الكم. ولكي نتأكد من القيم العددية قيما ثابتة ودقيقة عند القياس فلا بد من قياسها علي عدة أنظمة بشرط التماثل. وبمعني أنها تكون قيمة واحدة في كل مرة وتتكرر فقط في القياس. تلك العينة هي القيمة اللازمة للمعادلة (77 - 1) فمثلا إذا أخذنا بالقياس عدة أرقام حسابية ثابتة فيكون التوزيع بها ثابت مهما يكن من عملية التوزيع ويكون المتوسط قيمة ثابتة في الوقت لو أخذنا عدة أرقام متتالية فيكون المتوسط الحسابي لها هو عملية توزيع حسابي لناخذ المثال:

٣ ٣ ٣		٤ ٣ ٢
٣	المتوسط الحسابي	٣
٩ = ٢٧	متوسط المربع الحسابي	٩,٦٦ = ٢٩

وهذا ما نجده في تطبيق الفرض الثالث .

توجد فروضا أخرى وسوف يتم التناول والانتباه عنها فيما بعد مع شرح ميكانيكا الكم أو الرجوع إلي المراجع .

**مثال:** وضع هل يمكن أن تكون الدالة  $\psi$  دالة مؤثرة للحدين الكميين  $\alpha', \beta'$  أم لا؟ ولماذا؟

**الحل**

لنأخذ المعادلة الفرضية الرابعة ولتكن علي الصورة :

$$\alpha\psi = a\psi \quad (a)$$

$$\beta\psi = b\psi \quad (b)$$

ثم نأخذ العملية المتبادلة وهي بضرب المعادلة (أ) في  $\bar{\beta}$  وضرب المعادلة (ب) في  $\bar{\alpha}$  ثم نأخذ الترتيب بعملية توحيد بسيطة ثم بالطرح من بعضها البعض نجد أن:

$$(\bar{\beta}\bar{\alpha} - \bar{\alpha}\bar{\beta})\psi = (ab - ba)\psi = \text{zero}$$

لذا نلاحظ أن  $\psi$  دالة مميزة للمؤثرين حيث أن هذين المؤثرين متبادلين مع بعضهما البعض.

**مثال:** احسب معكوس التبادل (Commutator- alternate)  $(y, P_y)$

**الحل**

لنأخذ فرضا الدالة  $f(y)$  كمتغير في  $y$  علي هذا النحو :

$$\begin{aligned} [\bar{y}P_y]f(y) &= y\left[-i\frac{h}{dy}\right]f(y) \\ &= -ihyf'(y) \end{aligned}$$

حيث أن  $f'(y)$  تعتبر المشتقة الأولى للدالة  $f(y)$

$$\begin{aligned} [\bar{P}_y y]f(y) &= ih\frac{d}{dy}yf(y) \\ &= -ih[yf'(y) + f(y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\bar{Y}\bar{P}_y]f(y) &= (\bar{y}h)f(y) + (ihyf'(y) + ihf(y)) \\ &= -ihf(y) \end{aligned}$$

$$\bar{[Y, P_y]} = ih$$

وبالتالي :

$$[\bar{Y}, \bar{P}_y]f(y) = ihf(y)$$

ومن العلاقة :

نجد أن المؤثرين الكميّين لعزم حركة المكان وللمكان لا يتبادلان وهذا يعني لا يمكن لنا قياس كلا منهما في وقت واحد.

\*\*\*