الفصل الحادى عشر

الرياضة والفلك والتكنولوجيا في القرن الخامس

لعل من الخير أن نقسم هذا الفصل إلى ثلاثة أجزاء : جزء للرياضة ، وجزء للفلك ، وثالث للتكنولوجيا ، على الرغم من أن هذا التقسيم قد يضطرنا للعودة إلى الشخصيات نفسها مرتين أو ثلاثاً .

الرياضة :

زينون الإيلى

إن دارسى الصورة الأولى للرياضيات عند اليونان لتتملكهم الدهشة على الدوام من حقيقتين متكاملتين (أو متناقضتين) وهما : إهمال الحساب البسيط ، والعمق النادر فى التفكير الرياضى . فالفيثاغوريون الأول لم يعنوا بالعمليات الحسابية العادية ، فى حين كانت آراؤهم الهندسية تعتمد إلى حد كبير على خصائص الأعداد . فالنقطة عندهم مجرد وحدة ذات وضع ؛ وأى شكل هندسى ، ابتداء من الخط المستقيم ، يمكن تصوره وتمثيله مؤلفاً من نقط عديدة . فيثير هذا التصور الذهنى مشكلة الاتصال ومشكلة قابلية التقسيم إلى ما لا نهاية ؛ وبعبارة أدق ، أثار ذلك التصور هاتين المشكلتين فى أذهان اليونان ، لأن تلك الأذهان كانت متهيئة للمناقشة الفلسفية . ولدينا شواهد كثيرة على النبوغ اليونانى ، ولكن لا يوجد شاهد أقوى وأشد إثارة للدهشة من التفكير الرياضى فى ذلك العصر . وقد كانت حوافزه مشكلات منطقية لا يكاد الرجل العادى فى أيامنا هذه (بعد خمسة وعشرين قرناً) يلاحظها . ويظن لأول وهلة أن أذكى الناس أسرعهم إدراكاً ، ولكن سرعان ما يعدل عن ذلك إلى عكسه

تقريباً . والحمقى هم الذين يفهمون سريعاً ، أو يعتقدون ذلك، لأنهم لايقدرون على تخيل المصاعب ، ومن ثم لا يجدون أمامهم حواجز يقفزون فوقها . إن البون الشاسع بين المستوى الرياضى عند قدماء المصريين والبابليين من جهة ، وعند اليونان من جهة أخرى ، قوامه أن أولئك لم يفكروا حتى فى بعض المصاعب التى كان اليونان قد بدأوا فعلا فى مكافحتها .

ولعلنا نتذكر أن زينون زار أثينا مع أستاذه بارمينيديس (Parmenides) حوالى منتصف القرن . ولربما التقى إبان إقامته فيها برياضيين، مثل أبقراط ، كانوا إذ ذاك يحاولون حبك الآراء الهندسية فى نظام دقيق. وبما أن زينون كان بنزعته الأولى فيلسوفاً ومنطقيا فإنه أدرك وجود مصاعب فكرية لم تكن لتخطر أبداً فى ذهن الرياضيين الفنيين، الممارسين ، (وحتى الرياضيين اليونانيين) ! . كان هؤلاء يعتبرون الخط المستقيم مؤلفاً من نقط . فكيف نستطيع أن نوفق بين تلك الفكرة واتصال الخط المستقيم ؟ ليس المستقيم بسلسلة من نقط أو ، بعبارة أخرى ، بسلسلة من ثقوب . إنه كل متصل . فإليك ما يمكن أن يقوله الرياضى الفنى : إن فى إمكانك أن تقرب النقط كلا من الأخرى وأن تصغر الثقوب حسبما تشاء ، وإذا كان البعد بين نقطتين أكبر مما يرضيك فما عليك إلا أن تقسمه إلى ألف أو مليون قسم، وأن تتصور وجود نقط أخرى فى كل من هذه الأقسام . أما عالم المنطق فيمكن أن يعترض على هذا ويقول :. إن المسافة بالذات بين أى نقطتين لا تؤثر فى جوهر النقاش ؛ إذ مهما صغرت تلك المسافة فإن النقطتين تبقيان منفصلتين ومختلفتين عن المستقيم أو الفراغ الذى يصل بينهما . وثمة أيضاً مصاعب مماثلة تعترض سبيل تقسيم الزمان، فهل نعتبره متصلا أو منفصلا؟ وتعترض سبيل تقسيم الحركة (وهى انتقال جسم ما من موضع معين إلى موضع آخر فى زمن معين) . لقد عرفنا النتائج الخادعة التى أفضت إليها تأملات زينون فى مثل هذه الأحاجى من كتاب الطبيعة لأرسطو[1] ، وهو الذى دعا تلك النتائج بالمغالطات مع أنه لم يتمكن من دحضها : وعرفنا بعضها أيضاً من شرح سمبليكيوس (١–٧١) (Simplicios) على أرسطو، وإنها لتأملات

تغوص فى أعماق الفكر ، ذلك لأنها شغلت أذهان الفلاسفة والرياضيين إلى يومنا هذا. وبما أن تلك المسائل عويصة جدا فإن سردها كاملة على التدقيق يتطلب مجالا فسيحاً. فعلينا أن نكتفى هنا بالإشارة إلى طبيعتها العامة. وإذا اتبعنا نموذج كاجورى (Cajori) فإننا سندعو حجج زينون الأربع ضد الحركة ، بالأسماء الآتية: « القسمة الثنائية »، و « أخيل »، و « السهم »، و « الملعب »، وسنوجزها كما يفعل كاچورى :

١ — « القسمة الثنائية » : إنك لا تستطيع أن تمر بعدد لا متناه من النقط فى زمن محدود. فعليك أن تقطع نصف أية مسافة معينة قبل أن تقطع المسافة كلها ، وعليك أيضاً أن تقطع نصف هذا النصف قبل أن تقطعها .ويستمر هذا التقسيم إلى ما لا نهاية (إن كان الفراغ مؤلفاً من نقط) بحيث يفضى إلى عدد لا متناه فى فراغ معين فلا يمكن اجتيازه فى زمن محدود .

٢ — « أخيل » : وهى الحجة الثانية ، والمشهورة بأحجية أخيل والسلحفاة . وفيها ينبغى أن يصل أخيل أولا إلى الموضع الذى انطلقت منه السلحفاة . وفى أثناء ذلك تكون السلحفاة قد تقدمت قليلا من موضعها الأول . فعلى أخيل إذن أن يقطع المسافة الأولى التى قطعتها السلحفاة ، ولكن فى خلال ذلك تكون السلحفاة قد قطعت مسافة قليلة ولا تزال متقدمة عليه ؛ إن أخيل يقترب دائماً من السلحفاة أكثر فأكثر ولكنه لن يلحق بها .

٣ — « السهم » الحجة الثالثة ضد إمكان حدوث الحركة فى فراغ مؤلف من نقط هى أن سهماً ما ، بناء على هذا الفرض ، فى أية لحظة معينة إبان تحليقه لابد أن يكون ساكناً فى نقطة معينة من الفراغ .

٤ — « الملعب » : تصور ثلاثة صفوف متوازية من نقط متحاذية :

الشكل (١)		الشكل (٢)	
(ا)	....	(ا) →	....
(ب)	....	(ب)	....
(ج)	....	(ج) ←	....

إن (ب) وهو أحد هذه الصفوف غير قابل للحركة بينا يتحرك الصفان (ا) و (ج) فى اتجاهين متعاكسين وبسرعتين متساويتين بحيث تنتظم النقط فى الصفوف كما هو ممثل فى الشكل (٢) . إن سرعة النقط فى (ج) بالنسبة إلى سرعتها فى (ا) تساوى مثل سرعتها بالنسبة إلى (ب) ، وبعبارة أخرى إن أية نقطة فى (ج) تكون قد مرت بعدد من النقط فى (ا) يساوى مثل عدد النقط التى مرت بها فى (ب) . ولذلك لا يمكن أن يكون ثمة تناظر بين لحظة زمنية والانتقال فى الفراغ من نقطة إلى أخرى(٢) .

إن الحجج الأربع التى ذكرناها كانت فيما يبدو موجهة ضد العقيدة التى أقرها أكثر الناس فى ذلك العصر (وفى جملتهم الفيثاغوريون وأنبادوكليس) (Empedocles) والتى لا يزال يؤمن بها أكثر الناس فى عصرنا هذا ؛ وهى العقيدة التى تعتبر الفراغ حاصل جمع من النقط ، والزمان حاصل جمع من اللحظات. ولقد قدم زينون الحجج على أن حدوث الحركة على أساس الكثرة غير قابل للتصور.

ديموكريتوس الأبديرى

ولد ديموكريتوس بعد مولد زينون بنحو ثلاثين عاماً . وإن تاريخى مولده ووفاته ليسا ثابتين ، ولكننا لا نخطىء كثيراً إذا قلنا : حوالى عام ٤٦٠ ق.م. وعام ٣٧٠ ق. م. ولا يستنتج من هذا أن افتراضات ديموكريتوس الرياضية كانت أحدث عهداً من افتراضات زينون ، أو أن ديموكريتوس كان على علم بأحاجيه . ومهما يكن من أمر هذا فإنه حين بدأ الإنسان يفكر على التدقيق فى مشكلة الاتصال ومشكلة اللانهاية ، لم يكن ثمة مفر من تلك الأحاجى أو مما هو على شاكلتها ، واليونانيون — لا واحد منهم فحسب بل كثيرون — كانوا يفعلون ذلك بالذات . وقد ورد فى قائمة مؤلفات ديموكريتوس التى نشرها ديوجنيس اللائرسى (Diogenes Laertios) (١ — III) ذكر خمس وسائل فى الرياضيات : الأولى فى تماس الدائرة والكرة ؛ والثانية والثالثة فى الهندسة ،

والرابعة فى الأعداد ، والخامسة فى الأعداد اللامنطقية . وسوف نعود عما قريب إلى الرسالة الأخيرة حين نبحث فى ذلك الموضوع . على أن عناوين الرسائل من الثانية إلى الرابعة غامضة جداً ، فلافائدة ترجى منها . أما الرسالة الأولى ، فإذا افترضنا أن العنوان يعنى التماس بين كرة ما ومستوى مماس لها ، فإننا مسوقون إلى اعتبار زاوية لا متناهية فى الصغر . وإذا اعتبرنا القضية الأبسط من تلك ، (وهذا ما فعله ديموكريتوس على الراجح) وهى الزاوية بين دائرة ما ومماس لها ، فإن المصاعب الكامنة تعرض على عجل . أولا : كان تعريف المماس أمراً ضرورياً ، غير أن ذهن ديموكريتوس كان حاداً بالقدر الكافى كى يدرك أن للمماس وللدائرة نقطة وحيدة مشتركة فيما بينهما ؛ ولو أن هذا لم يكن فى الإمكان توضيحه بأية محاولة بالرسم . ثم لابد من اعتبار الزاوية ، فهذه كان ينبغى أن تكون صغيرة جداً ، وذلك لأنه إذا أدير المماس حول نقطة تماسه دوراناً طفيفاً جداً ، تشارك مع الدائرة فى نقطة ثانية ولم يعد بعد ذلك مماساً .

أغفل أفلاطون ذكر ديموكريتوس ، فى حين أن أرسطو تحدث بحماسة ، بالغة عن آرائه فى التغير والنمو . وأشار أرشيميدس بعد ذلك إلى أعظم كشوف ديموكريتوس الرياضية وهو : أن حجم مخروط ما يساوى ثلث حجم الأسطوانة التى تشاركه فى القاعدة والارتفاع ، وأن حجم هرم ما يساوى ثلث حجم المنشور الذى يشاركه فى القاعدة والارتفاع ، ثم أردف قائلا : إن ديموكريتوس لم يقدم برهانين على صحة نظريتيه بل قدمهما يودوكسوس[٣] (Eudoxos) فيما بعد . فكيف كشف ديموكريتوس هاتين النظريتين ؟ لقد استعمل على الراجح طريقة فجة وحدسية ، فقسم الهرم (أو المخروط) إلى شرائح متوازية. وسوف نعود إلى ذلك عندما نبحث فى كشف يودوكسوس لطريقة الاستقصاء (Method of Exhaustion) واستعماله إياها .

وينسب فيتروفيوس (Vitruvius) تطبيق بواكير فن المنظور على تصميم المناظر المسرحية إلى ديموكريتوس وإلى كل من أجاتارخوس (Agatharchos)

وأناكساجوراس (Anaxagoras) . وهذه نسب محتملة، ولكن لم يقم الدليل على صحتها . ومن المؤكد أنه كانت هناك مشاكل منظورية كان لابد لمخرجى المناظر من حلها . غير أن إيجاد حلول صحيحة يمكن أن يتم على نحو تجريبى .

هيبوكراتيس أو أبقراط الخيوسى

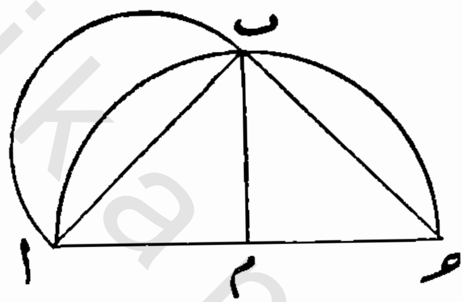
ولنأت الآن إلى أعظم الرياضيين فى القرن الخامس ، وهو أول رجل أسبغ الشهرة على اسم أبقراط . فكل مثقف تقريباً يألف ذلك الاسم ، وإن كان يثير فى ذهنه ذكرى رجل آخر هو أبو الطب ، أبقراط الكوسى (Hippocrates of Cos) . إن اسم أبقراط ليس بنادر فى بلاد اليونان[٤] ، ومما يسترعى النظر أن ألمع اثنين من حملة هذا الاسم كانا متعاصرين ونشأ فى مجموعة الجزر نفسها وهى سبوراديس (Sporades) القريبة من شاطئ آسيا الصغرى . وقد ولد الرياضى ، الذى كان أكبر سناً ، بخيوس وازدهر بأثينا فى الربع الثالث من القرن الخامس . أما الطبيب فكان من رجال الجيل التالى إذ كان لا يزال صبياً حين اكتمل نضج الرياضى ، وكان لا يزال يعمل عند دورة القرن . نشأ فى جزيرة كوس إحدى جزر سبوراديس الجنوبية التى تدعى أيضاً جزر الدوديكانيز (Dodecanese)[٥]. وسوف نخصص له فى باب آخر كل المكان الذى هو جدير به حقاً، ولكن كان لزاماً علينا أن نعرفه للقارئ هنا وأن نضعه لحظة ما قرب معاصره الأكبر سناً . وإنى لآمل كثيراً أن يتذكر قارئو هذا الكتاب أن هناك أبقراطين كانت أعمالهما المجيدة بارزة على حد سواء ، ولكنها مختلفة جداً فلا يمكن المقارنة بينهما . ومن المؤكد أنا لا نستطيع القول بأن الثانى كان رجلا أعظم من الأول ، وإن كان أكثر الناس يذكرونه وحده ، وأما الأكبر سناً فيكاد يكون منسياً . ولكن لا علينا !

كان السبب فى مجئ أبقراط إلى أثينا حوالى منتصف القرن ، حسبما يروى ، هو ضياع ممتلكاته ، وسعيه من أجل استردادها . ففى إحدى الروايات كان أبقراط تاجراً وقد أسر القرصان سفينته ، وفى رواية أخرى (رواها أرسطو)[٦]

كان عالماً فى الهندسة وقد سلبه جباة المكس فى بيزنطة كثيراً من المال « بسبب غفلته » . لا ريب فى أن الناس كثيراً ما اتهموا الرياضيين (من طاليس إلى بوانكاريه (Poincaré) بأنهم ليسوا من أصحاب الكفاية فى معالجة أمور الحياة العادية ، وهذه قصص ممتعة من نواح أخرى ، لأنها تساعدنا على أن ندرك وجود جوانب أخرى للحياة اليونانية : فثمة التجار والقرصان ، وجباة المكس الأشرار . والظاهر أن أبقراط كان فى بادئ الأمر تاجراً كما كان رياضياً ولم يكن هذا التآلف مستهجناً فى المجتمع اليونانى . وقد تفرغ للرياضيات بعد أن فقد ما ملكت يداه فكان من أوائل الذين علموا لقاء أجر من المال ، ولم لا يكون قد أصاب من الأجر بقدر ما أصاب السوفسطائيون ، فهو نفسه يمكن أن يدعى سوفسطائياً ، مع أنه تخصص فى ميدان الرياضيات .

قبل أن نشرح عمله ، ينبغى أن نذكر قصة أخرى ذات طابع مميز للجو العقلى فى ذلك العهد . فقد شغلت أذهان الرياضيين الأثينيين حينذاك ثلاث مسائل شهيرة : الأولى تربيع الدائرة ، والثانية تثبيت الزاوية ، والثالثة مضاعفة المكعب . فكيف ظهرت هذه المسائل الثلاث ؟ إن الأولى قديمة جداً ، وكان من المستحيل أن يعرف الرياضيون حتى ذلك العهد إيجاد حل صحيح لها . أما الاثنتان الأخريان فإن ظهورهما ليس طبيعياً كما هى الحال فى المسألة الأولى . وهناك أسطورتان عن مصدر المسألة الثالثة رواهما إراتوستنيس (Eratosthenes) وتحدث بهما الرواة فيما بعد ، وسنكتفى بسرد واحدة منهما . حينما كان أهل ديلوس (Delos) يعانون من وطأة انتشار الطاعون فيما بينهم ، أمرتهم كاهنة دلفى بأن يضاعفوا حجم معبد معين كان مكعب الشكل ؛ ولذا دعيت تلك المسألة بالمسألة الديلية . وهذه أسطورة تقوم الدلائل كلها على أنها حادث سابق مختلق ، وبقدر ما أعلم ، لم يكن هناك أبداً معبد مكعب الشكل لا فى ديلوس ولا فى أى مكان آخر[٧] . وثمة تفسير أبسط ، فلعل بعض الرياضيين رغب فى أن يصوغ مسألة معينة فى الهندسة المستوية صياغة عامة . فلمضاعفة مربع ما ، يكفى أن ننشئ على قطره مربعاً جديداً . فهل كان فى الإمكان

إيجاد صيغة مشابهة للمكعب ؟ إنها لم تكن مسألة سهلة بقدر ما بدت . وإن بروز هذه المسائل الثلاث من بين عدد لا متناه من مسائل أخرى ، لبرهان جديد على العبقرية الإغريقية ، فهى كلها تضم إلى بساطتها الظاهرة مصاعب خفية من الطراز الأعلى(٨) . إنها غير قابلة للحل إلا على وجه التقريب ؛ ولا يمكن حل الثانية والثالثة بالطرق الهندسية البسيطة . أى باستعمال المسطرة والبرجل (البركار) ؛ ومع هذا كله فقد أوجد الرياضيون اليونانيون فى القرن الخامس حلولا نظرية لتلك المسائل .



شكل ٦٣ — هلاليات أبقراط الخيوسى

لم يعالج أبقراط المسألة الثانية ، ولكنا مدينون له لتقديمه حلولا غير تامة للمسألتين الأخريين . وقد قادته محاولاته لتربيع الدائرة إلى كشف بعض الهلاليات التى يمكن أن تربع ؛ ومن الغريب حقًّا أنه كشف ثلاثة من أنواع الهلاليات الخمسة التى يمكن أن تربع بطريقة بسيطة . فكان كشفه مثيراً للحماسة كل الإثارة ، ذلك لأنه أثبت أن بعض الأشكال المنحنية على الأقل كان قابلا للتربيع .

وإليك المثال الأبسط من هلاليات أبقراط . اعتبر نصف المربع ا ب ج المحاط بنصف الدائرة التى مركزها (م) (الشكل ٦٣) . ولنرسم نصف دائرة قطرها ا ب . إن النسبة بين مساحتى نصفى دائرتين هى كالنسبة بين مربعى قطريهما . ثم إن اح٢ ، ٢ ا ب٢ . إذن نصف الدائرة الكبرى يساوى نصف

الدائرة الصغرى . اطرح القطعة المشتركة بين المساحتين تجد أن المساحتين الباقيتين ، أى مساحة الهلالى ومساحة المثلث ا ب م ، متساويتان .

هذه قضية بسيطة ، ولكنها تتضمن معرفة النظرية الهندسية القائلة بأن النسبة بين مساحتى دائرتين كالنسبة بين مربعى قطريهما[٩] ، وإذا وجد أبقراط مساحة ذلك الهلالى وجب أن نفترض أنه عرف تلك النظرية . ولربما كانت معرفته بها بديهية ، وعند أوديموس أن أبقراط قد أثبت النظرية ، ولكن إن صح هذا الرأى ، فإننا لا نعلم كيف أقام البرهان .

إن رسالة أبقراط فى تربيع الهلاليات لفى غاية الأهمية من ناحية أخرى : إنها الشذرة الوحيدة من الرياضيات الهللينية (أى قبل العهد الإسكندرى) التى نقلت إلينا كاملة ، ولكن النقلة كانت بطيئة[١٠] وغير مباشرة . فهذا يوضح لنا مرة أخرى كم يصعب الحصول على معرفة الحقائق عن علم الرياضة الأول عند اليونان، وكم يجب أن يكون المؤرخ حصيفاً .

إن حل أبقراط[١١] للمسألة الثالثة ، وهى مضاعفة المكعب ، ممتع كالسابق على السواء وذلك بمايتضمنه ، لأنه يبين أن أبقراط كان ذا فهم واضح فى النسب المركبة . وقد استخرجت تلك المعرفة من خصائص الأعداد ثم طبقت بطريقة الحدس على المستقيمات .

إذا كان طول ضلع المكعب المعطى يساوى ا ، فإن المسألة تتطلب تعيين س بحيث يكون $س^{٣} = ٢ ا^{٣}$. وتحل بإيجاد وسطين متناسبين فى تناسب مستمر بين الطول ا والطول ٢ ا : $\frac{ا}{س} = \frac{}{ص} = \frac{ص}{٢ا}$ ، فيستنتج من هذا أن $س^{٢} = ا ص$ ، $ص^{٢} = ٢ ا س$ ؛ إذن $س^{٤} = ٢ ا^{٣} س$ أو $س^{٣} = ٢ ا^{٣}$.

وما إن أقبل منتصف القرن الخامس حتى كان عدد كبير من النظريات الهندسية قد قرر ، وعدد كبير من المسائل قد حل ، فقضت الضرورة الملحة بوضع هذه النتائج التى سبق تقريرها جميعها فى ترتيب منطقى قويم . على أن هذا لم يتطلب تصنيفها فحسب ، بل تطلب ما هو أهم من ذلك ألا وهو تدعيم

البراهين وتقويتها . فنى كثير من الحالات (كما أوضحنا فيما تقدم بشأن النظرية التى أوردها إقليدس) كانت المعرفة حدسية ، أو كان البرهان ، إن وجد ، قد أخفق فى إيجاد سبيله إلى الانتشار .

إذا وضعت كل مادة فى موضعها المنطقى ، كشف عن وجود الثغرات . وأصبح ما يمكن بناؤه من الصرح الهندسى أقوى ، وزادت الدقة فى معرفة المرء بما ينبغى أن يعمل كى يرقى بهذا الصرح أكثر فأكثر نحو التمام والكمال المنطقى . ويبدو أن أبقراط كان أحد الأوائل الذين حاولوا القيام بتلك المهمة ، أى إنه كان الرائد الأول لإقليدس ، لا كمكتشف لنظريات منفردة فحسب ، بل كبناء فى إقامة الصرح الهندسى الذى سمى فيما بعد « الأصول » .

وإذا كان النص الأبقراطى الذى نقله إلينا سمبليكيوس بخصوص تربيع الهلاليات هو حقيقة كما كتبه أبقراط ، فإنه أول رياضى ، حسبما نعلم ، استعمل حروف الهجاء فى الأشكال الهندسية ، فجعل وصف هذه الأشكال بغير غموض أمراً ممكناً . وهكذا جرى العرف فى كتابة المخطوطات فى سهولة ويسر ، ذلك لأنه يمكن حذف الأشكال التى يصعب رسمها بإتقان . فهى ليست ضرورية ، لأن القارئ يستطيع أن يعيد إنشاءها بسهولة على أساس النص . ولسنا نستغرب حين نجد أن استعمال الحروف عند أبقراط لم يكن إذ ذاك واضحاً ويسيراً ، كما كانت الحال عند إقليدس ، غير أنها كانت بداية هامة كل الأهمية ، وتكاد تكون ضرورية لتقدم الرياضيات فى المستقبل .

فبينا يكتب أبقراط « المستقيم الذى يقع عليه ا ب » أو « النقطة التى تقع عليها ك » يكتب إقليدس ببساطة وإيجاز ، ونحن أنفسنا كذلك : « المستقيم ا ب » و « النقطة ك » . كثيراً ما ترد فروق كهذه فى تاريخ التعبير الرياضى بالرموز (الرمزيات الرياضية) . ويمكننا أن نقول بصورة أعم ، فى تاريخ العلم . وقلما يتمكن المبتكر من التعبير عن ابتكاره بالشكل الأبسط ، فيقوم رجل آخر أو رجال عديدون ، أقل ذكاء ، ولكن أكثر ممارسة من المبتكر نفسه ، بإتمام الابتكار . ولعل ابتكار أبقراط ، على سبيل المثال ، قد اكتمل بأيدى بعض

المعلمين ، أو حتى بعض الطلبة الذين يؤثرون كتابة العبارة الموجزة : « المستقيم ا ب » بعامل الكسل المحض .

وإذا كان أبقراط قد كتب بالفعل أول كتاب فى الهندسة ، وهذا الأمر ليس ممكناً فحسب بل هو ظاهر الاحتمال ، فقد اضطر إلى إحكام البراهين ، ويمكننا أن نصدق قول بروكلوس Proclos بأنه ابتكر طريقة التنسيق الهندسى ، (Apagoge) وهى الانتقال من قضية أو نظرية إلى أخرى حيث يعتمد فى حل القضية اللاحقة على حل القضية السابقة . وسوف نبحث فى ذلك فيما بعد .

كانت أعمال أبقراط الخيوسى جديرة بالاعتبار ، فهى جليلة حقاً ويستحق من أجلها أن يسمى « أبا الهندسة » ، بقدر ما استحق أبقراط الكرسى أن يسمى « أبا الطب » . ومع ذلك ، فأولى بنا أن نتجنب مجازات كهذه لأنه لا يوجد آباء مطلقون إلا أبانا خالق السموات .

أينوبيديس الخيوسى[١٢]

كان أينوبيديس ، بناء على رواية بروكليس (٢ — V) ، أصغر سناً بقليل من أناكساجوراس . والراوى يقدم تاريخه على أبقراط وثيودوروس . فيمكننا أن نفترض أن أينوبيديس كان معروفاً فى الربع الثالث من القرن الخامس . وجدير بنا أن نلاحظ أنه لم يكن معاصراً لأبقراط فحسب ، بل كان أيضاً من أبناء مدينته . فلا بد أنهما تعارفا بخيوس أو بأثينا . ويكاد لا يهمنا أكان أصغر سناً بقليل من أبقراط أم لم يكن ، والذى يعنينا هو الترتيب التاريخى للاكتشافات ، وهو يختلف عن الترتيب التاريخى للميلاد ؛ فبينا يقوم بعض الرجال بأجل أعمالهم فى شبابهم ، يقوم بها آخرون فى سن متأخرة .

إن مكانة أينوبيديس كعالم فلكى أجل من مكانته كعالم رياضى ، وسوف نفرد له مكاناً أكبر فى الجزء الثانى من هذا الفصل . إن أعماله الرياضية متواضعة ولكن لها دلالتها ، فهو أول من حل المسألتين الآتيتين : أولا : رسم عمود من

نقطة مفروضة على مستقيم معلوم ؛ وثانياً : إنشاء زاوية من نقطة مفروضة على مستقيم تساوى زاوية معلومة .

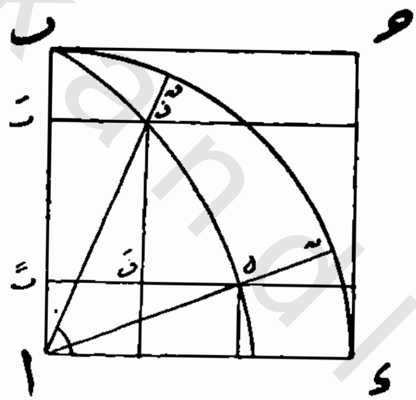
وبما أنه كان فى استطاعة كل امرئ حل هاتين المسألتين على وجه التقريب ، فإن نسبة حلهما إلى أينوبيديس تعنى أنه كان أول من أظهر كيفية حلهما على وجه التدقيق ، وذلك باستعمال المسطرة والبركار . وكان لابد من حل مسائل كهذه حتى يصبح تأليف « الأصول » أمراً ممكنا ، ولكن بروكليس يقول إن أينوبيديس حل المسألة الأولى لأسباب فلكية ، ويقول أيضاً إنه استعمل كلمة الشاخص القديمة (Cata gnomona) للدلالة على العمود (Orthios) . وكل هذا يوضح طور الانتقال فى ذلك العهد : فالمعرفة الهندسية تنسق وتأخذ فى التبلور تدريجيًّا ، وها هى ذى « الأصول » تصنع .

هيبياس الأيليسى

نشأ هيبياس فى إيليس[١٣]، وهى مقاطعة صغيرة فى الزاوية الشمالية الغربية من البيلوپونيز ، وقد اشتهرت بتربية الخيول وكادت ترقى إلى مرتبة القداسة لدى اليونان بسبب دورة الألعاب الأولمبية التى كانت تقام فى سهول أولمبيا كل أربع سنوات . وقد ولد حوالى سنة ٤٦٠ ق.م وما يعرف عنه يزيد كثيراً عما يعرف عن أبقراط وأينوبيديس اللذين يكبرانه سنًّا وذلك لأنه ساح كثيراً فى جميع أرجاء اليونان محاضراً فى الناس ومعلماً ، وكان سوفسطائيًّا جواباً فى الأرض يسيطر على ميدان نشاطه حب الشهرة والمال . ومع أنه كان على استعداد للبحث فى أى موضوع ، فقد كان ذا ولع خاص بالرياضة وعلم الطبيعة . وحين وصل إلى إسبرطة أصابته خيبة مريرة ، لأن الإسبرطيين لم يعنوا كثير العناية بعلم الطبيعة ، فلم يجزلوا له العطاء مكافأة على محاضراته العلمية . وتخلده محاورتان لأفلاطون وهما : هيبياس الأكبر ، وهيبياس الأصغر ، حيث يظهر فيهما سوفسطائيًّا مختالا فخوراً . إنها لصورة غير جذابة ، ولكن شهرته الرياضية وطيدة الأركان ، بسبب اكتشاف وجيد يثير الدهشة حقًّا .

لقد ابتكر هيبياس منحنياً جديداً كى يحل مسألة تثليث الزاوية ، فهو أول مثال فى التاريخ على منحن من مرتبة عليا ، إذ لا يمكن أن يرسم بأية آلة وإنما يرسم بيانيًا بالانتقال من نقطة إلى أخرى . ويدلك هذا على أنه يملك الشجاعة الكافية كى يقفز خارج الصرح الهندسى ، الذى كان يعمل على تثبيت دعائمه وتنسيقه أقدر الرياضيين فى ذلك الحين ، ثم ينطلق فى استكشاف أسرار المجهول الواقع خارج ذلك الصرح .

وقد سمى المنحنى الذى اكتشفه هيبياس منحنى التربيع (Quadratrix) (وسوف نجد المبرر لهذا الاسم فيما بعد) . ويمكن تكوينه كما يأتى : فلنفرض أن لدينا المربع ا ب حـ د (وطول ضلعه س) وأن فى داخله ربع



شكل ٦٤ – منحنى التربيع لهيبياس الايليسى

الدائرة التى مركزها فى ا ، ونصف قطرها س ، ولنفرض أن نصف القطر يدور بسرعة ثابتة من الموضع ا ب ، إلى الموضع ا د ، وأن ب حـ يتحرك فى الوقت نفسه إلى أسفل بسرعة ثابتة إلى الموضع ا د ، حيث يبقى إبان حركته موازياً لموضعه الأول . فيكون المحل الهندسى للنقط التى يتقاطع فيها المستقيمان (مثل نقطة ف ، ونقطة ل) هو منحنى التربيع . والآن ، الزاوية ب ا د : الزاوية ق ا د تساوى القوس ب د : القوس ق د = ب ا : ف. هـ . ولنعتبر

الشعاع ا ف الذى يصل المركز ا مع نقطة ما على المنحنى مثل ف ؛ ولنفرض أن طول الشعاع هو (ر) وأن هـ هى الزاوية التى يميل بها على ا د ؛ فيستنتج مما تقدم أن $\frac{س}{ر حا هـ} = \frac{\frac{ط}{٢}}{هـ}$ ، وهذه هى معادلة المنحنى .

ويمكن استعمال المنحنى لتثبيت أية زاوية مثل هـ . فلنقسم المستقيم ف هـ إلى قسمين بنسبة ٢ : ١ ، حيث يكون ف ف$_{١}$ = ٢ ف هـ . ولنرسم بعد ذلك المستقيم بَ جَ فيقطع المستقيم ف هـ فى نقطة ف ويقطع المنحنى فى نقطة ل ، ولنرسم المستقيم ا ل . فتكون الزاوية ن ا د ثلث الزاوية هـ .

وكذلك يمكن استعمال المنحنى فى تقسيم زاوية ما بأية نسبة ؛ إذ يكفى (فى مثالنا) أن نقسم المستقيم ف هـ بتلك النسبة ونتم الإنشاء كما فعلنا من قبل .

وبعد ذلك بقرن استعمل دينوستراتوس (Dinostratus) (٢٠٤ ق.م) وآخرون المنحنى نفسه لتربيع الدائرة ، ولهذا السبب سمى منحنى التربيع (Tetragonizusa)

ثيودوروس البرقاوى

إن ما نعلمه عن الرياضى ثيودوروس البرقاوى[١٤] يفوق ما نعلمه عن غيره من الرياضيين ، ذلك لأن أفلاطون يعرفه فى بداية محاورته تياتيتوس (Theaitetos) كمعلم شهير . وكان حينذاك (عام ٣٩٩)[١٥] رجلا مسنًّا ، ولذا يمكننا القول إنه ولد حوالى عام (٤٧٠) . ويروى أن أفلاطون زاره فى قورينا ، لكن ثيودوروس ، على كل حال ، كان بأثينا حوالى نهاية القرن ، وانتسب إلى جماعة سقراط ، وكان (أو لعله كان) أستاذ الرياضة لأفلاطون . وينسب إليه كشف رياضى وحيد ، لكنه كشف رائع . فيقال إنه أثبت اللامنطقية فى الجذور التربيعية للأعداد : ٣ ، ٥ ، ٧ . . . . . ، ١٧ .

ومما له دلالته، أن كشف اللامنطقية فى $\sqrt{٢}$ لا يعزى إليه ، فلا يستدل من ذلك إلا أن هذا الكشف كان سابقاً لعهده . والواقع هو أن هذه المعرفة

* أضفت العبارة الواردة بعد الفاصلة زيادة فى الإيضاح (المترجم) .

تنسب إلى الفيثاغوريين الأولين . لقد كان اكتشاف اللامنطقية فى $\sqrt{2}$ مفاجأة رهيبة ، والفيثاغوريون على ما يبدو تصوروا إلى حين أنه كان حادثاً استثنائياً .

إن الجذر التربيعى للعدد ٢ يظهر فى مجال النظر الفكرى ببساطة وبصورة طبيعية جداً ، ذلك لأنه القطر فى مربع الوحدة (فالضلع والمساحة تساويان واحداً). فكيف كشف الفيثاغوريون الأولون وجود اللامنطقية فى $\sqrt{2}$ ؟

علينا أولا أن نعرف للقارئ رجلا آخر من الفيثاغوريين الأولين وهو هيباسوس الميتابونتى [١٦] (Hippasos of Metapontum) الذى نسجت حوله قصص عجيبة . فقالوا إنه طرد من المدرسة الفيثاغورية لأنه باح بأسرار رياضية . وزعموا فى إحدى الروايات أنه أذاع إنشاء ذى الإثنى عشر وجهاً داخل كرة ما ، وادعى أن الإنشاء من عنده . وورد فى رواية أخرى أنه أذاع الكشف عن مقادير لامنطقية — وهذه تشير على الأرجح إلى $\sqrt{2}$ أو إلى $\sqrt{5}$. وثمة شيء رياضى آخر يمكن أن يقال عن هيباسوس قبل أن نتركه . لقد ميز الفيثاغوريون الأولون بين ثلاثة أنواع من الوسط : الوسط الحسابى ، والوسط الهندسى ، والوسط المعاكس الأدنى [١٧] . فاقترح هيباسوس أن يسمى الثالث منها الوسط التوافقى ، وهى تسمية مطابقة كل المطابقة ، وذلك لأهمية الأوساط التوافقية فى ميدان الموسيقى النظرية ، وقد عرف أيضاً ثلاثة أوساط أخرى . فلنعد الآن إلى الكشف عن وجود المقادير اللامنطقية ، وهو الكشف الذى اعتبره الرياضيون فى القرنين السادس والخامس نوعاً من الفضيحة لعلم المنطق .

إن العدد اللامنطقى alogos هو العدد الذى لا يمكن تقديره تماماً بدلالة أعداد أخرى ، وقد كشف عن اللامنطقية هندسياً حين وجد الإدراك باستحالة تقدير القطر فى مربع الوحدة بدلالة طول الضلع أو بدلالة أى جزء من الأجزاء المتساوية التى يمكن أن يقسم إليها ذلك الطول ، مهما صغرت .

فكيف كان فى استطاعة المرء إثبات تلك اللامنطقية ؟ لقد أشار أرسطو [١٨] إلى البرهان الذى تناقلته الأجيال ، وهو برهان يقوم على دليل الخلف .

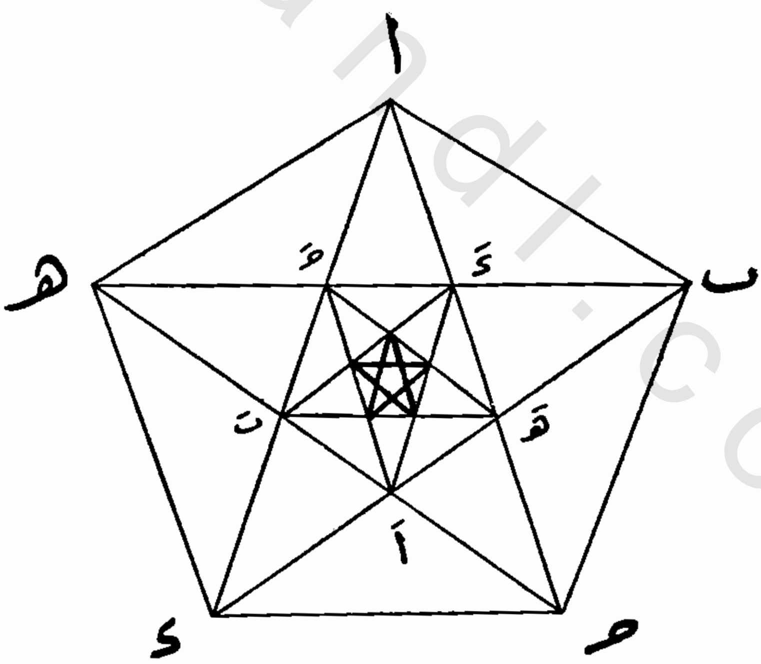
وبما أنه برهان قصير وفى غاية اليسر فإننا نورده فيما يأتى :

لنعتبر مربعاً طول ضلعه ا ، ونصف قطره حـ . ينبغى أن نبرهن أن (ا) و (حـ) هما عددان غير منسوبين . ولنفرض أنهما منسوبان ، وأن النسبة بينهما $\frac{\text{حـ}}{\text{ا}}$ تقدر بالشكل الأبسط $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ ، فلهذا يكون $\frac{\text{حـ}^{٢}}{\text{ا}^{٢}} = \frac{\text{ل}^{٢}}{\text{م}^{٢}}$ ؛ لكن حـ^{٢} ، = ٢ا^{٢} ؛ ولذلك ل^{٢} = ٢ م^{٢} . إذن ل^{٢} عدد زوجى ، ولذا فإن ل عدد زوجى ، ويجب أن يكون م عدداً فردياً . والآن ، إذا كان (ل) عدداً زوجيًّا فيمكننا أن نكتب ل = ٢ ن ؛ ولذا فإن ل^{٢} = ٤ ن^{٢} = ٢ م^{٢}، أى أن م^{٢} = ٢ ن^{٢} . إذن م^{٢} عدد زوجى ، ولذا فإن م عدد زوجى .لقد وجدنا أن م هو عدد زوجى وفردى آن واحد ، وهذا مستحيل . إذن فالعددان (ا) و (حـ) هما غير منسوبين .

إن من الممكن أن يكون هيباسوس قد كشف المقدار اللامنطقى الأول (إن لم يكن قد كشف من قبل) ، غير أن المرء لا يستطيع إقامة الدليل على ذلك . وثمة ما يغرى المرء بهذا الافتراض ، ذلك لأن الرواية التى ذكرناها فيما تقدم تدعمه ، ولأنه يفسح فى مجال الزمن برهة وجيزة يمكن أن تتطور فى خلالها نظرية اللامنطقية . على أن برهان اللامنطقية فى $\sqrt{٢}$ الذى أوردناه منذ قليل ، على بساطته ، يتضمن درجة من التجريد يكاد يصعب إدراكها فى زمن مبكر كعهد هيباسوس ، ولنقل فى بداية القرن الخامس . ولكن هناك رواية أخرى تنسب إلى هيباسوس بعض المعرفة بذى الاثنى عشر وجهاً ، وهو مجسم منتظم أوجهه مخمسات منتظمة . إن عناية أحد الفيثاغوريين بالمخمس المنتظم لأمر طبيعى تماماً ، ذلك لأن شعار جماعته هو المخمس النجمى ، الكامل ، (وهو المخمس المنتظم الذى مدت أضلاعه حتى نقط التقاطع) .

ولقد تقدم كورت فون فريتز (Kurt Von Fritz) باقتراح يسترعى النظر وهو أن عناية هيباسوس بالمخمسات النجمية والمخمسات المنتظمة وبالأعداد والنسب التى تتضمنها تلك الأشكال يمكن أن تكون هى التى هدته إلى فكرة

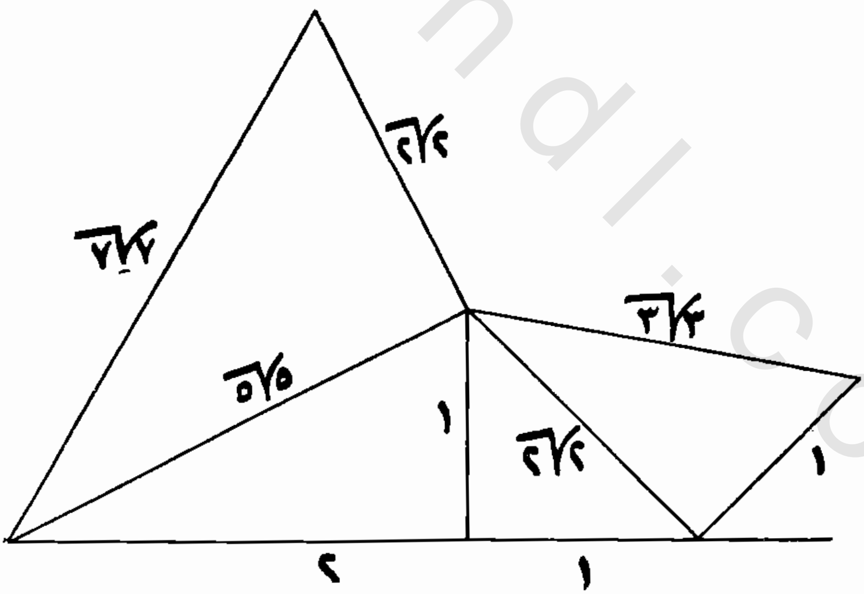
اللاقياس . إذ كيف يحاول صانع فى إيجاد المقدار المشترك بين المستقيمين (ا) و (ب) ؟ إنه يحاول أن يقيس الأطول (ا) بدلالة الأقصر (ب) ، وإذا ما أخفق ، فإنه يحاول أن يقيسه بدلالة كسور من (ب) . والآن ، إن طريقة كهذه لا يمكن استعمالها فى هذه الحالة ؛ ذلك لفقدان الدقة المثالية فى القياسات الآلية . ولكن ، لو اعتبر هيباسوس المخمس المنتظم وقد رسمت جميع أقطاره ، لرأى أن الأقطار تؤلف مخمساً نجمياً وتحيط بمخمس منتظم أصغر من المخمس الأول (الشكل ٦٥) . إن متابعة العمل على النهج نفسه فى الإنشاء لأمر ممكن ، وإن فى ذلك لحافزاً كافياً . إن المرء لا يستطيع ، من الناحية العملية ، أن يستمر فى هذا التكرار إلى أمد طويل ، ولكن من الواضح ، نظرياً ، أن التكرار ممكن إلى ما لا نهاية ، وهذا يعنى أن القطر والضلع لا يقبلان التحويل إلى مقاس مشترك ، فهما إذن ، غير قابلين للقياس .



شكل ٦٥ — المخمسات المنتظمة والنجمية .

لعل الكشف الذى أجراه هيباسوس عن المقادير غير القابلة للقياس وقبل أن يقوم الدليل الكامل على وجودها كان بعامل الحدس ، حتى إنه لأمر ممكن أن الرياضيين اليونانيين بدأوا قبل نهاية القرن فى اعتبار حالات أكثر تعقيداً . فى محاورة هيبياس الأكبر (عام ٣٠٣ ق.م) ترد الملاحظة الآتية : كما أن عدداً زوجياً إما أن يكون مجموع عددين زوجيين وإما أن يكون مجموع عددين فرديين ، فكذلك إن مجموع عددين لامنطقيين ، إما أن يكون منطقياً ، وإما أن يكون لا منطقياً . وإليك مثالا طيباً : إذا قسم مستقيم ذو طول منطق قسمة ذات وسط وطرفين ، فإن النسب الثلاث* بين تلك الأجزاء والمستقيم كله جميعها نسب لامنطقية .

إذا افترضنا أن هيباسوس قد كشف اللامنطقية فى $\sqrt{٢}$ و $\sqrt{٥}$ ، فكيف وجد ثيودوروس الجذور الصماء الأخرى حتى $\sqrt{١٧}$ ؟ لربما أنشأ عدداً كبيراً منها بطريقة سهلة كما يظهر فى الشكل (٦٦) . وما إن أدرك وجود مقادير



شكل ٦٦ — إنشاء بسيط لمقادير مختلفة غير قابلة للقياس

* لقد قسم المستقيم من الداخل ومن الخارج أيضاً قسمة « ذهنية » (المترجم) .

لامنطقية وأصبح ذاك الإمكان مسلماً به ، لم يعد إيجاد مقادير جديدة أمراً عسيراً . إنما كانت المصاعب الرئيسية من نوع آخر : إذا كانت هناك أعداد لم يمكن تمثيلها بأية نسبة مثل ن : م ، فإن فكرة الفيثاغوريين عن وجود المحاكاة بين الأعداد والمستقيمات أو بين الحساب والهندسة لا يمكن أن تكون قد وجدت بعد ذاك من يدعمها — فهل وجدت ؟ ليس لدينا من سبب يحملنا على الظن بأن هذه المصاعب العميقة الأغوار قد حلت قبل القرن الرابع ، ولكن الحقبة الطويلة لاختمار تلك الآراء التى يمثلها هيباسوس وثيودوروس قد مهدت السبيل إلى عصر تيآتيتوس ويودوكسوس . وسوف نتابع مناقشاتنا فى هذا الموضوع عندما نصل إلى الحديث عن ذلك العصر .

كانت للعبقرية اليونانية إدراكات فطرية للحقائق الرياضية ، كما كانت لها تلك الإدراكات فى ميدان الجمال ، فقد أدركت فيما يظهر ، إن لم يكن فى البداية ذاتها ، فعلى أية حال فى وقت مبكر جداً ، أنه لا يمكن بناء علم الرياضة بدقة منطقية دون أن تحل تلك العبقرية مسائل عديدة تتضمن فكرة اللانهاية . ويمكننا تقدير الأعماق الفذة لتلك العبقرية تقديراً أحسن إذا ما تمثلنا فى أذهاننا أن ثمة مثقفين عديدين فى عصرنا الحاضر ، بل على حظ وافر من الثقافة ، من أمثال الأطباء ، أو علماء النحو ، يكادون لا يفقهون مثل هذه الأمور ، ناهيك عن اكتشافها . لقد قدمنا فى هذا الباب حتى الآن شواهد كثيرة على الإدراكات البدهية عند اليونان بخصوص فكرة اللانهاية . ونخص بالذكر منها ما عرضناه من آراء زينون ، وديموكريتوس ، وهيباسوس ، وثيودوروس ، والآن نضيف إلى هؤلاء رجلين آخرين ، هما أنتيفون وبريسون .

أنتيفون السوفسطائى (٢١)

نشأ أنتيفون بأثينا ولمع فى العصر نفسه الذى اشتهر فيه سقراط ، فكان إلى حدما منافساً له ، كمعلم للشباب . كان سوفسطائياً يعنى بعلوم عديدة كما عنى أيضاً بالكهانة ، والتنبؤ بالغيب ، وتفسير الأحلام . وينبغى ألا ننسى

أبداً أن التنبؤ بالغيب وخاصة تفسير الأحلام[٢٢] كانا حينذاك جزأين أصيلين من العلوم الطبيعية تنجذب إليهما بدافع حب الاستطلاع طائفة من أفضل العقول، ذلك لأن الناس لم يدركوا حين ذاك بجلاء ، إدراكاً دقيقاً ، حدود المعرفة كما ندركها نحن فى عصرنا الحاضر . وعلى أية حال ، إن أنتيفون جدير باهتمامنا لأنه ابتكر طريقة جديدة لحل المسألة القديمة ، وهى مسألة تربيع الدائرة .

فقد اقترح إنشاء مضلع بسيط منتظم ، ولنقل مربعاً ، داخل الدائرة المعطاة . وكان من الممكن بعد ذاك إنشاء مثلث متساوى الساقين على كل من أضلاع المربع ، بحيث يكون رأسه على محيط الدائرة . فيكون قد تم بذلك إنشاء مثمن منتظم ، وإذا ما ثابر المرء على العمل بالطريقة نفسها فإنه ينشئ مضلعات منتظمة عدد أضلاعها : ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ . . . ضلعاً . ومن الواضح أن مساحة أى مضلع لاحق من تلك المضلعات المتتالية تكون أقرب إلى مساحة الدائرة من مساحة أى مضلع سابق ، وبعبارة أخرى إن مساحة الدائرة تستنفد تدريجياً بازدياد أضلاع المضلع المحوط بالدائرة نفسها . إن مساحات هذه المضلعات يمكن أن تحسب بالتمام ، أو أن المضلعات يمكن أن « تربع » ، فالمساحات تزداد تدريجياً إلا أنها لا يمكن أن تتجاوز نهاية معينة ، هى مساحة الدائرة نفسها .

وقد انتقد أرسطو ، وشراحه ، وآخرون ، هذه الطريقة فبينوا أنه مهما تكرر عدد المرات الذى يتضاعف فيه عدد أضلاع المضلع فى كل مرة ، فإن مساحة الدائرة لا يمكن أن تستنفد تماماً .

بريسون الهيراكلى[٢٣] :

ابن هيرودوروس من هيراكليا بونتيكا (Herodores of Heraclea Pontica) الذى عرف بإنشاء الخطب أو العناية بتدوين الأساطير ، وكان تلميذاً لسقراط ولتلميذه إقليدس الميجارى فهو من جيل لاحق لأنتيفون ولا بد أنه عاش

فى النصف الأول من القرن الرابع ، ولكن يجب أن نتحدث عنه هنا لأن عمله يتمم عمل أنتيفون إتماماً حسناً . فبينا كانت طريقة أنتيفون تستند إلى رسم سلسلة من المضلعات داخل الدائرة التى يكون عدد أضلاعها : ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ . . . ضلعاً ، اقترح بريسون إنشاء سلسلة من المضلعات خارج الدائرة نفسها . إن مساحات المضلعات المحيطة تتناقص تدريجياً . وإن مساحة الدائرة هى النهاية العليا لمساحات المضلعات المحاطة ، وهى النهاية الدنيا لمساحات المضلعات المحيطة . ومما لا شك فيه أن بريسون كان هدفاً للانتقادات نفسها التى وجهت إلى أنتيفون ، فقد انتقده بحق أرسطو ، وسمبليكيوس ، وكثيرون من مؤرخى الرياضيات .

ويظهر لى أن المؤرخين الحديثين (مثل روديو وهايبرج) [٢٥] (Rudio and Heiberg) اشتطوا فى قسوتهم على أنتيفون وبريسون . فقد كان منهج الأخير يفتقر إلى الدقة ولكنه صدر عن بديهة صحيحة ، وأدى فى النهاية إلى « طريقة الاستنفاد » التى صاغها يودوكسوس ، وإلى حساب التكامل .

ولا يستطيع المرء أن يجحد فضل بريسون فى القيام بكشف معين وهو أن مساحة الدائرة حد نهائى للمساحات المتزايدة للمضلعات المحوطة ، وأنها حد نهائى للمساحات المتناقصة للمضلعات المحيطة ، وأنه كلما ازداد عدد الأضلاع فى سلسلتى المضلعات اقتربت مساحاتها أكثر فأكثر من مساحة الدائرة عن جانبى هذه المساحة . وقد طبق أرشيميدس (٣—III ق.م) هذه الطريقة ، فقاس فعلا مساحتى مضلع محوط ومضلع محيط عدد أضلاع كل منهما ٩٦ ضلعاً وتوصل إلى الاستنتاج بأن ٣$\frac{١}{٧}$ > ط > ٣$\frac{١٠}{٧١}$ (٣,١٤٢ > ط > ٣,١٤١) .

ويحسن بنا أن نلاحظ قبل اختتام هذا الجزء أن الرجال الذين استعرضنا آراءهم الرياضية (مع إمكان استثناء أبقراط) لم يكونوا رياضيين بالمعنى المقصود من هذه الكلمة فى أيامنا ؛ بل كانوا فلاسفة وسوفسطائيين ، أدركوا الأهمية الأساسية للرياضة وحاولوا فهم هذا العلم فهماً حسناً بقدر الإمكان. ولنلاحظ أنهم أتوا إلى أثينا من جهات مختلفة من دنيا اليونان . فقد أتاها زينون من

المستعمرة اليونانية الكبرى فى جنوب إيطاليا ، وأبقراط وأينوبيديس من أيونيا ، وديموكريتوس من تراقيا ، وهيبياس من البيلوپونيز ، وثيودوروس من برقة ، وبريسون من شاطئ البحر الأسود ، وكان أنتيفون (بقدر ما نعلم) أثينيًّا ، وهو الأثيني الوحيد بينهم . ولو تحدثنا عن أرخيتاس (Archytas) الذى عاش فى القرنين [٢٦] ، وسوف نحدثك عنه فيما بعد ، لكان علينا أن نضيف إلى قائمة الأقطار المذكورة قطراً آخر هو صقلية . فيدل هذا على أن العبقرية الرياضية كانت موزعة فى أرجاء بلاد اليونان كما كانت العبقرية الفنية أو الأدبية. إن تلك العبقرية لم تكن أثينية ، أو محصورة فى أية منطقة ، بل كانت عبقرية بلاد اليونان .

الفلك

فى استعراضنا للآراء الفلكية فى القرن الخامس يمكننا أن نترك آراء الفلاسفة أمثال هيراكليتوس ، وأنبادوكليس ، وأناكساجوراس وأن نقتصر جل الاقتصار على آراء الفيثاغوريين . فمدرسة هؤلاء كانت فعلا أعظم المدارس الفلكية شأناً فى ذلك القرن وأكثرها تقدماً . وكان لصوفيتهم الرياضية وجه مفيد ، ذلك لأنها ساعدت على افتراض أدوار منتظمة فى حركة الأجرام السماوية وعلى كشف قوانين الأجرام السيارة . وقد قال أفلاطون[٢٧] : « كما أن العيون ابتدعت لتشخص إلى النجوم ، فقد ابتدعت الآذان لتسمع الحركات المنسجمة ، وهاتان أختان من علوم الطبيعة كما يقول الفيثاغوريون » . ويعبر هذا القول تعبيراً جميلا عن تصور الفيثاغوريين للوحدة التى تأتلف فى تكوينها علوم الرياضة والموسيقى والفلك ، ذلك التصور الذى أثر فى التفكير الفلكى على مر الزمان حتى عصر كبلر (Kepler) .

حين نتحدث عن فلكيين فيثاغوريين ، لا نقصد أولئك المريدين الذين خبروا جميع أسرار الأخوة الفيثاغورية فحسب ، بل نقصد أيضاً أولئك الذين تقبلوا الآراء الفيثاغورية فى النظام الكونى ، ولو جزءاً منها ؛ وهكذا فإننا سنبدأ بالحديث عن بارمينيديس (الذى لم يكن فيثاغوريًّا بل كان مؤسس المدرسة

الإيلية) ، ثم نتحدث عن فيلولاوس (Philolaos) ، وهيكيتاس (Hicetas) ، وبضعة أشخاص آخرين .

كان الفيثاغوريون أول من سمى العالم بلفظة كوسموس (Cosmos) (وفيها دلالة ضمنية على أنه نظام متجانس ومرتب فى أحسن ترتيب) ، وأول من قال باستدارة الأرض. وتنسب هذه الخصائص إلى فيثاغورس نفسه وإلى بارمينيديس أيضاً، إذ ليس من السهل أن نفصل مبتكرات بارمينيديس من العقائد الفيثاغورية السابقة عليه ، ولا داعى لأن نقلق كثيراً من ذلك . ويمكن أخذ القسم الأول من حديثنا على أنه لا يمثل آراء بارمينيديس فحسب، بل آراء الفيثاغوريين أيضاً حوالى منتصف القرن . فى ذلك الزمن كانت بعض النقاط فى علم الكون لدى الفيثاغوريين قد تقررت : فالكون نظام محكم الترتيب ، وأكمل الأشكال هو شكل الكرة، والأرض مستديرة(٢٨)، والأجرام السيارة ليست أجراماً هائمة ، بل هى ذات حركات منتظمة الأدوار . ومن الممكن أن آراء أخرى كانت مقبولة حينذاك، كقدسية النجوم والسيارات، والأثينية اللازمة فى خصائص الكون — ما فوق القمر (تام) وما دون القمر (غير تام)(٢٩). إن آراء كهذه تبعدنا عن علم الفلك وتنقلنا إلى ميدانى الميثولوجيا والدين . على أن وجودها إلى جانب الآراء الأخرى، التى هى أقرب إلى الطابع العلمى، يوضح لنا التناقض الظاهر فى أن المدرسة الفيثاغورية كانت فى زمن ما مهداً لعلم الفلك الرياضى وعلم التنجيم فى آن واحد . ومع أن هاتين الوجهتين متناقضتان فيما يظهر ، فإنهما تعودان إلى الظهور تكراراً على مر تاريخ العلوم (حتى القرن السابع عشر على أقل تقدير) . ولا يستطيع المرء أن يفهم تطور علم الفلك فى العصور القديمة والعصور الوسطى ما لم يتمثل فى ذهنه على الدوام ذلك التقابل الأساسى بين تينك الوجهتين .

بارمينيديس الإيلى :

جاء بارمينيديس إلى أثينا حوالى منتصف القرن ، إلا أنه كان فى العقد السادس من عمره ، ولذا من الممكن أن تكون آراؤه الفلكية قد تبلورت قبل

ذاك . فكان أول من افترض أن الأرض الكروية الشكل انقسمت إلى خمس مناطق ، وإن لم تكن واضحة الحدود ، وتصور أن عرض المنطقة الوسطى ، وهى الحارة والمأهولة ، يبلغ ضعفى ما هو عليه فى الواقع . ولا يمكننا أن نعلق أهمية كبيرة على تلك المناطق لأنها كانت وليدة الظن إلى حد بعيد . أما فكرة الشكل الكروى للأرض فإنا لا نعلم كيف توصل الفيثاغوريون الأولون ، وبارمينيديس فى جملتهم، إلى ذلك الاستنتاج . والراجح أنه كان فى البدء تصوراً أولياً سابقاً على التجربة، وسرعان ما تأيد وتكرر تأييده بمراقبة النجوم . كانت الأرض المعروفة لدى اليونان تمتد على الأقل من دائرة العرض ٤٥° شمالا (شمالى البحر الأسود) إلى مدار السرطان أو حتى إلى أبعد من ذلك — أى إنها كانت تمتد فى نطاق يتراوح عرضه بين ٢٠ و ٢٥ درجة من درجات العرض . إن فى هذا الفرق فى درجات العرض ما يكفى وزيادة للملاحظة تغيرات هامة من حيث أوضاع النجوم فى السماء . فإذا ما ساح المرء شمالا أصبحت بعض النجوم قطبية ؛ ومن الناحية الأخرى ، إن نجماً ساطعاً (وهو سهيل) لا يرى فى بلاد اليونان بالذات ، ومن ذلك كان يلمح فوق الأفق فى جزيرة كريت ، وكان ارتفاعه يزداد إذا ما قصد المرء مصر وأقلع فى اتجاه أعلى النيل . وعلاوة على ذلك ، لابد أن السياح لاحظوا ازدياد طول النهار إذا ما سافر المرء شمالا ؛ فكانت هذه الملاحظة كافية لأن تهدى إلى فكرة المناطق . ولقد كان بارمينيديس أول من تصور الكون سلسلة متواصلة من الكرات أو التيجان (Stephanai) المتحدة المركز مع الأرض التى هى مستقرة فى مركز الكون . ولا حاجة بنا إلى التذكير بآرائه الفلكية الأخرى ، فبعضها لم يكن جديداً (مثال ذلك : أن القمر يستمد ضوءه من الشمس) أو كان محض أوهام (مثال ذلك : أن الشمس والقمر جزءان من المجرة) . إن ما يسترعى النظر ، على كل حال ، هو أن ميتافزيقيا صرفاً ، كما كان هو ، توصل عن طريق الحدس إلى الكثير من الحقائق ، ذلك لأن سبقه إلى فكرة وجود المناطق الجغرافية يكاد يضاهى فى روعته سبق ديموكريتوس إلى فكرة وجود الذرات .

فيلولاوس الكروتونى[٣٠]

نشأ فيلولاوس فى كروتون أو فى تارنت (والبلدتان فى منطقة خليج تارنت) . وبما أن فيثاغورس أسس مدرسته فى كروتون فليس بمستغرب إذن أن ينسب فيلولاوس إلى الفيثاغوريين . كان معاصراً لسقراط ، كما كان بارمينيديس ؛ ويمكننا أن نستنتج أنه كان أصغر من الأخير بكثير . فقد ولد على الراجح بعد بارمينيديس وقبل سقراط ، ذلك لأنه كان أستاذ ألكل من سيمياس (Simmias) وكيبيس (Cebes) فى مدينة طيبة (Thebes)، وكان هذان من تلاميذ سقراط الأخيرين[٣١]

كانت آراؤه فى الفلك فيثاغورية ، وكثيراً ما يوصف بأنه أول شارح لآراء الفيثاغوريين فى علم الفلك ، على أن هذا القول يجب أن يعدل من ناحيتين . أولا : أن بارمينيديس ، الذى لم يكن على كل حال فيثاغورياً صرفاً ، كان على وجه الاحتمال أكبر من فيلولاوس سناً . ثانياً : أنه يمثل مرحلة أكثر تعقيداً، فهى الثانية (أو الثالثة) من مراحل التطور فى علم الفلك لدى الفيثاغوريين . وقد فقدت لسوء الحظ جميع مؤلفاته ، ما عدا شذرات قليلة جداً .

سوف يظهر لنا فى فترة وجيزة كم كانت آراؤه معقدة . فهى توضح مرة أخرى الجرأة فى النظر الفكرى عند علماء الطبيعة من اليونانيين الأولين ، ذلك بأنهم كانوا متجردين عن الأهواء الدينية ومتحررين من قيود الإدراك العادى عند سواد الناس ، فالقضية كلها عندهم هى إعطاء تفسير منطقى للحقيقة فى عالم الطبيعة ، وما من فرض يعد مغرقاً فى الجرأة إذا ما أعطى مثل ذاك التفسير . فلم يتردد فيلولاوس فى رفض القول بوجود الأرض فى مركز الكون ، وهو فرض سلم به أسلافه من الفيثاغوريين . والرأى عنده أن الكون كروى محدود وفى مركزه تماماً توجد النار المركزية ، (موقد الكون ، أو برج المراقبة الخاص بزيوس ، إلخ . . .) والتى هى أيضاً القوة المركزية

أو المحرك المركزى . وتدور حول تلك النار عشرة أجسام : أولا ، الأرض المقابلة (Antichthon) التى ترافق الأرض دائماً وتحجب النار عنها ، ثانياً ، الأرض نفسها ، ثم القمر ، والشمس ، والسيارات الخمسة ، وأخيراً النجوم الثابتة . ولسنا نرى الأرض المقابلة ، ذلك لأن أرضنا تدير ظهرها إلى الأرض المقابلة على الدوام ، أى إنها تدير ظهرها إلى مركز الكون . فهذا يعنى ضمناً أن الأرض تدور على محورها هى ، بينما تدور هى حول مركز الكون[٣٢].

إن الجرأة فى ذلك التصور رائعة . فلم يرفض فيلولاوس القول بوجود الأرض فى مركز الكون فحسب ، بل لم يتردد فى اعتبار الأرض سيارة كبقية السيارات ، وفى افتراض أنها تدور حول مركز الكون وتدور أيضاً (ربما) على محورها هى . وفوق ذلك ، افترض حدساً وجود جرم سيار آخر يظل على الدوام خفياً . إن هذا التصور يبدو مصطنعاً كل الاصطناع ، فلماذا أدخل فيلولاوس الأرض المقابلة ؟ الرأى عند أرسطو أنه فعل ذلك ليعلل ظاهرتى الخسوف والكسوف وخاصة توارد الخسوف الكثير مقابلا لتوارد الكسوف[٣٢ ا] .

وإذا كانت الأرض تدور حول مركز الكون ، فإن الحركات الظاهرة للنجوم يمكن تعليلها بالدوران الذى تقوم به الأرض على محورها فى اتجاه مضاد . وبالرغم من ذلك افترض فيلولاوس أن كرة النجوم الثابتة تدور مثل الكرات الأخرى ، وهذا مثال طيب على جرأة عظيمة معروفة بالحذر (وهى ظاهرة كثيراً ماترد فى تاريخ العلوم ويمكننا أن نعتبرها القاعدة العامة لا الشذوذ) — فلو افترضنا أن الكرة الخارجية لم تتحرك ، لأصبح تصوره فعلا أبسط بكثير مما كان عليه . غير أن فيلولاوس لم يستطع إقناع نفسه بأن يفعل ذلك — لأن جميع الكرات تتحرك . . . ولأن الزيادة فى التعقيد ، التى أقحمها اعتباطاً فى تصوره لم تتعارض مع الواقع . وبما أن سرعة زاويا الكرات تناقصت بازدياد أنصاف أقطارها ، فقد كان فى مقدور المرء أن يعين دائماً سرعة الزاويتين لكرة الأرض ولكرة النجوم الثابتة بحيث أمكن تعليل الحركة الظاهرة للنجوم تعليلا تاماً . أما الحركة المنسوبة إلى الكرة الخارجية ، وهى البطيئة كل البطء

فربما أدخلت فى الافتراض لتعليل ظاهرة مبادرة الاعتدالين . على الرغم من ملاحظات المصريين والبابليين فى قرون طويلة ، فإن تلك الظاهرة كانت مجهولة إذ ذاك ؛ وبقيت مجهولة إلى زمن هيبارخوس (Hipparchos) (فى النصف الثانى من القرن الثانى[٣٣] ق.م) .

هيكيتاس السيراكوزى

إن النظام الكونى الذى كنا فى وصفه عزاه آيتيوس[٣٤] (Aetios) إلى فيلولاوس ، وعزاه ديوجينيس اللاثرسى إلى هيكيتاس ، أما أرسطو فقد عزاه إلى الفيثاغوريين عامة .

وحتى ولو كان النظام من ابتكار فيلولاوس فإن من الممكن أن هيكيتاس حسّنه . ولنضرب مثلا : أن هيكيتاس ربما استنتج أن الأرض تدور على محورها هى ، وتخلى عن ذلك التصور الوهمى الذى يفترض اعتباطاً وجود نار مركزية وأرض مقابلة . ويؤيد شيشرون (النصف الأول من القرن الأول ق. م) هذا الرأى ؛ ومع أنه شاهد من قرن لاحق ، إلا أنه كان يستند إلى نص لثيوفراستوس (Theophrastos) (النصف الثانى من القرن الرابع ق. م) ، الذى كان أقرب منه بكثير إلى زمان ذلك النظام . إن تاريخ هيكيتاس غير معروف ، ويمكننا الافتراض أنه أصغر من فيلولاوس ومعاصر له . « إن هيكيتاس السيراكوزى ، كما يقول ثيوفراستوس ، يعتقد أن السماء والشمس والقمر والنجوم ، وكل الأجرام السماوية فى اختصار ساكنة فاقدة الحركة ، وأنه لا يوجد جرم فى الكون — ما عدا الأرض — قد أوتى الحركة ، وأنه بينما تدور الأرض على محورها بسرعة عظيمة ، تأتى فى مجال النظر كل الظواهر التى يمكن أن تحدث كما لو كانت الأرض ساكنة هادئة والسماوات قد أوتيت الحركة[٣٥] » .

وعلى أية حال ، فإن شهادة شيشرون على أنه لا يتحرك شىء فى الكون ما عدا الأرض خاطئة ولا ريب ، ويمكن فهم هذه المبالغة من رجل لم يكن فلكياً ، فبالغ كثيراً فى توكيده الفكرة التى عبر عنها هيكيتاس وثيوفراستوس :

إنما الأرض هي التي تدور على محورها دورة فى كل يوم، لا السماوات المرصعة بالنجوم.
فبناء على قوة تلك الشهادة التاريخية ، يسمح لنا أن نعزو إلى فيلولاوس النظام الذى يفترض أن الأرض سيارة كبقية السيارات تدور حول النار المركزية بالسرعة نفسها التى تدور بها الأرض المقابلة ، وأن نعزو إلى هيكيتاس النظام الذى يضع الأرض فى مركز الكون ويفسر الدوران الظاهرى للنجوم بافتراض دوران حقيقى للأرض حول محورها هى .

إكفانتوس السيراكوزى

إتماماً لهذه القصة ، يجب أن نقول بضع كلمات عن إكفانتوس ، مع أنه ينتمى على الراجح إلى القرن التالى. ولأنه كان سيراكوزيا وفيثاچوريا مثل هيكيتاس ، يمكننا أن نفترض أنه كان بطريقة مباشرة أو غير مباشرة تلميذاً تابعاً للأخير . وبناء على ما رواه آيتيوس[٣٦] « فى الفروض المقبولة » (De Placita) ، « إن هيراكليديس البونتى وإكفانتوس الفيثاجورى يحركان الأرض ، لا حركة انتقالية بل حركة دورانية ، كدولاب مثبت على محوره ، من الغرب إلى الشرق ، حول مركزها هى » . وهكذا أكد إكفانتوس على الأقل (إن لم يكن هيكيتاس من قبله) تأكيداً لا إبهام فيه دوران الأرض على محورها يومياً . إن ما يذكره آيتيوس عن إكفانتوس مقروناً باسم هيراكليديس ، وحتى ذكره للأخير قبل الأول ، يدل على أنهما كانا متعاصرين (ولد هيراكليديس حوالى عام ٣٨٨ وتوفى فيما بين ٣١٥ — ٣١٠)[٣٧]. ويروى أن إكفانتوس جمع فى فلسفته بين عقائد الفيثاغوريين وعقائد الذريين ، ولهذا أيضاً يصح وضعه فى القرن الرابع ، بل وفى زمن هيراكليديس .

الآراء الفلكية للويكيپوس وديموكريتوس :

كان مؤسسا النظرية الذرية عالمين عظيمين فى الكون وفلكيين محدودين . ولندرس ديموكريتوس وحده :

« قال إن عدد الأكوان المرتبة غير محدود وأنها مختلفة حجماً ، وإنه لا يوجد فى بعضها

شمس ولا قمر ، وفى بعض آخر يوجدان معاً بحجم أكبر مما عندنا ، وفى بعض ثالث توجد عدة شموس وأقمار . وإن الأبعاد بين الأكوان المرتبة ليست متساوية فهنا تتزايد وهناك تتناقص ، وبعض الأكوان يتزايد وبعضها يزدهر وبعضها ينحل ويتلاشى ، وهنا تولد أكوان وهناك تختفى . إلا أنها تفنى من جراء اصطدام أحدها بالآخر . وبعض الأكوان المرتبة قاحل لا حيوان فيه ولا نبات ولا ماء إطلاقاً . وإن الأرض ولدت من النجوم فهى أول ما ولد من كوننا وإن القمر هو أقرب النجوم إلينا ، ثم تأتى بعده الشمس وبعدها النجوم الثابتة ، على أن السيارات ليست كلها على ارتفاع واحد . ولقد سخر من كل شىء وكأنما كل الأشياء بين الناس قمينة بالسخرية[٣٨] » .

صاغ هذه العبارات القديس هيبوليتوس (النصف الأول من القرن الثالث) (St. Hippolytos) ، وإذا افترضنا أنها تمثل أفكار ديموكريتوس فإنها تسترعى النظر، لجرأتها ولأنه لا يوجد ما يبررها . ومن الواضح أنه لم يكن لدى ديموكريتوس شىء يعتمد عليه فى تكوين مثل هذه الآراء، ومع ذلك أيد علم الطبيعة الحديث هواجسه الفطرية . ولنضرب مثلا : إننا نعلم الآن أن عدد الأكوان، إن لم يكن لا نهائياً ، فهو على أقل تقدير كبير كل الكبر إلى حد يروع الخيال ؛ ونعلم أيضاً أن ثمة أنواعاً من النجوم عديدة مختلفة وأنها فى أدوار شتى من التطور ، فبعضها فى تطور صاعد وبعضها نازل . لا ريب فى أن ذلك ليس بعلم طبيعى ، وإنما هو خيال شعرى . وعلى كل حال ، كانت بعض آرائه الكونية من وحى النبوة كما كانت نظريته الذرية . إذ كيف استطاع وضع مثل هذه التكهنات ؟ فى ذلك ما يدعو إلى العجب ؛ ثم لماذا أقحم نفسه ، وهو فى حالة لا قرار لها ، فى ميدان الرجم بالغيب بأمور كهذه ؟ .

ومن الجهة الأخرى ، لم يعتقد ديموكريتوس أن الأرض مستديرة الشكل (كان تصور كروية الأرض فيما يظهر احتكاراً فيثاغورياً لم يعن رجال المذاهب الأخرى بالتطفل عليه) . وقد أمضى بعض الوقت فى زيارة للشرق فكانت آراؤه فى الفلك بابلية على التأكيد . ويعالج ديموكريتوس فى أحد كتبه الأبواب

الأربعة ذاتها : الفلك الوصفى ، والجغرافيا ، وفن البولو ، وعلم الظواهر الجوية . ويمكن إعادة إنشاء البحث الأول مما ذكره فتروفيوس[٣٩] ؛ وربما كان مقروناً بخرائط فلكية مزينة ، على الطراز البابلى ، بصور الآدميين والحيوانات التى أصبحت تمثل فيما بعد صور مجموعات[٤٠] من النجوم . وعلى الرغم من فكرته فى أن الأرض مسطحة « شبيهة بالقرص فى جوانبها ، ومجوفة فى الوسط[٤١] » ، فقد تقبل احتمال وجود « مناطق على سطحها » ، ولكن على الطراز البابلى . لقد قسم البابليون الكرة السماوية إلى ثلاث مناطق متحدة المركز : الأولى طريق آنو (Anu) وهى فوق القطب ، وطريق النجوم القطبية ؛ والثانية طريق إنليل (Enlil) وهى الوسطى ، أو منطقة البروج ؛ والثالثة طريق إيا (Ea) وهو إله العمق ، بل العمق السحيق . لقد تخلى ديموكريتوس عن ذلك التقسيم الثلاثى وبدله بتقسيم ثنائى إلى نصفى كرة : نصف شمالى ونصف جنوبى . وكان القول بوجود مجموعات نجوم جنوبية تختلف عن المجموعات الشمالية يبدو معقولا ، ذلك لأنه إذا ما ساح المرء جنوباً ، وعبر البحر المتوسط ، واتجه نحو أعلى النيل ، ظهرت له تدريجياً مجموعة نجوم جديدة . ولكن كيف استطاع أن يوفق بين وجهات النظر هذه وفكرته فى تسطح الأرض ؟ الأرض عنده مسطحة ، ولكنها ليست عمودية مع محور الكرة السماوية . وهذا رأى لا يؤذن بشىء فى المستقبل ، إلا أن تصورات ديموكريتوس مهدت السبيل لآراء يودوكسوس (النصف الأول من القرن الرابع ق. م) ، وأراتوس السولى (Aratos of Soli) من بعده ؛ وهى التى ظلت شائعة زمناً طويلا[٤٢].

كان ديموكريتوس على علم بآراء اليونانيين فى الفلك . وخاصة آراء أناكساجوراس ، الذى سار ديموكريتوس على نهجه . غير أن هناك فرقاً عجيباً بينهما من حيث ترتيب السيارات . فبينا وضعها أناكساجوراس بالترتيب الآتى : القمر ، فالشمس ، فالسيارات الخمس ثم النجوم ، وضع ديموكريتوس الزهرة بين القمر والشمس . وهذا يعنى أنه أدرك أن الزهرة سيارة سفلية ، ولكن لم يدرك عطارد ، فمهد الطريق بذاك القدر لهيراكليديس البونتى .

أينوبيديس الخيوسى :

يعزى إلى الرياضى أينوبيديس ، الذى كان أصغر من أناكساجوراس ومعاصراً له ، اكتشافان فلكيان . الأول هو ميل مستوى فلك البروج ، ميل السمت . وقد لمح أناكسيماندروس الميليتى (Anaximander of Miletos) من قبل فكرة الميل ، والواقع من الملاحظات التى أجراها باستعمال المزولة (وهى أبسط الآلات الفلكية) ، لم يكن فى الإمكان استنباط الفكرة فحسب ، بل كان قياس الميل ممكناً أيضاً. ولكن ، حتى لو قاس أناكسيماندروس الميل لمستوى الفلك ، لشق على المرء أن يقول إنه فهم هذا الميل حقاً . ومن جهة أخرى ، إذا كان أينوبيديس (وأغلب الظن أنه كان) على علم بآراء الفيثاجوريين فى الفلك فقد أصبح فى إمكانه أن يفهم حقاً ميل الفلك ، وأن يكشفه .

إن القياس الباكر لميل الفلك ، ميل السمت ، الذى عرفه إقليدس (وهو ٢٤° ، والقيمة الحقيقية : ٢٧ ٢٣°) لم يقم به أينوبيديس ، وإنما قام به فلكيون آخرون أتوا بعده . وقد اقترح البعض أن إقليدس اهتم بمسائل رياضية معينة لأن لها تطبيقات فى علم الفلك ، وكمثال على ذلك ، يقدم بروكلوس الإنشاء الهندسى الذى قام به إقليدس للمضلع المنتظم ذى الخمسة عشر ضلعاً[٤٣]. « لأننا حين ننتهى من رسم الشكل ذى الخمس عشرة زاوية داخل الدائرة التى تمر فى القطبين نحصل على بعد كل من دائرة الاستواء ومنطقة البروج عن القطبين ، ذلك لأنهما تبعدان الواحدة عن الأخرى بمقدار ضلع الشكل ذى الخمس عشرة زاوية . »[٤٤]

إن اكتشافه الثانى هو « السنة العظيمة » (Megas-eniautos) وطولها ٥٩ عاماً ، وربما اقتبسها من بابل . إذا افترضنا أن طول السنة وهو ٣٦٥ يوماً ، والشهر ٢٩ يوماً ونصف اليوم ، فإن العدد ٥٩ هو أصغر عدد صحيح من السنين يحوى عدداً صحيحاً (٧٣٠) من الشهور[٤٥]. وهذا أمر يحار فيه المرء كثيراً ، لأنه إن صح أن المصريين عرفوا طول السنة ذاك وهو ٣٦٥ يوماً ، منذ عهد

الأسرة الثالثة (فى القرن الثلاثين) ، فإن البابليين عرفوا دورة مداها ١٩ عاماً منذ عام ٧٤٧ . وحوت تلك الدورة شهوراً ناقصة وشهوراً كاملة طولها على التعاقب ٢٩ يوماً ، ٣٠ يوماً ، يضاف إليها سبعة شهور مضافة لضبط التقويم ، فكانت تلك السنة أدق من السنة المصرية[٤٦] . أما دورة السنوات الثمان (Octaeteris) لكليوستراتوس التنيدى (Cleostratos of Tenedos) فتضمنت أن طول السنة هو ١/٤ ٣٦٥ أو ٧/١٦ ٣٦٥ يوماً. فما الذى ساق أوينوبيديس إلى الإصرار على ٣٦٥ يوماً؟ الرأى عند كنسورينوس (النصف الأول من القرن الثالث)(Censorinos) أن أوينوبيديس جعل طول السنة ٢٢/٥٩ ٣٦٥ يوماً . أما تفسير تانيرى لذلك التناقض فهو كما يأتى : بعد أن وجد أوينوبيديس أن عدد الشهور فى السنة العظيمة يساوى ٧٣٠ (= ٣٦٥ × ٢) ، كان عليه أن يعين عدد الأيام، ففعل ذلك على أساس التقويم الأثينى ، مسجلا الأطوال الصحيحة للشهور القمرية الاقترانية (والشهر الاقترانى هو الزمن بين بدرين متعاقبين أو مطلعى هلالين متعاقبين) ، وكان هذا العدد يساوى ٢١٥٥٧ يوماً * ، وإذا قسم على ٥٩ يكون خارج القسمة ٢٢/٥٩ ٣٦٥ يوماً وهو طول السنة . ويجب التنويه إلى أن أوينوبيديس وفيلولاوس كانا على علم (مع خطأ بنسبة واحد فى المائة) بالأدوار الزمنية الصحيحة تقريباً لحركات السيارات الآتية : زحل ، والمشترى ، والمريخ ؛ وكان من الممكن الحصول على معرفة كهذه من بابل[٤٩].

سافر أوينوبيديس إلى مصر بعيد عام ٤٥٩ ، أما إصلاحه للتقويم، الذى أعاد به تثبيت السنة العظيمة التى ابتكرها الفيثاغوريون ومدتها ٥٩ سنة ، فقد نشر على لوحة كبيرة من البرنز عرضت فى أولمبيا عام ٤٥٦ . وهكذا فى استطاعة جميع زائرى الألعاب الأولمبية أن يعلموا بالإصلاح الذى قام به أوينوبيديس لو أنهم اهتموا به اهتماماً كافياً . ولكن إذا أخذنا بالنتائج حكمنا بأنهم لم يأبهوا له كثيراً .

---

* العدد المذكور حاصل ضرب ٧٣٠ فى طول الشهر الاقترانى وهو ٢٩,٥٣٠٦ يوماً شمسياً وسيطاً. (المترجم) .

ميتون ويوكتيمون :

أجرى ميتون ويوكتيمون الملاحظات الصحيحة الأولى للانقلابين الشمسيين بمدينة أثينا عام ٤٣٢ . واستطاعا بوساطة هذه الملاحظات أن يعينا أطوال الفصول تعييناً أدق من التعيينات السابقة . وأدخلا فى ذلك العام نفسه دورة جديدة ، تدعى الدورة الميتونية (Metonic) ومدتها ١٩ سنة شمسية ، أى ما يعادل ٢٣٥ شهراً قمرياً ؛ فيستدل ضمناً من هذا أن طول السنة يساوى $\frac{٥}{١٩}$٣٦٥ يوماً تقريباً . وهذا التقدير أطول من الطول الحقيقى بثلاثين دقيقة وعشر ثوان ، إلا أنه كتقدير تقريبى أفضل بكثير من تقديرات كليوستراتوس وأوينوبيديس ، كما يظهر من الجدول الآتى :

طول السنة

	يوماً	ساعة	دقيقة	ثانية
كليوستراتوس	٣٦٥	$١٠\frac{١}{٢}$		
أوينوبيديس	٣٦٥	٩		
ميتون	٣٦٥	٦	١٨	٥٦
السنة الاعتدالية الوسطى	٣٦٥	٥	٤٨	٤٦

إن معرفتنا بالملاحظات التى أجراها ميتون ويوكتيمون مستمدة من ورقة بردى (محفوظة الآن فى اللوفر) وتدعى الفن اليودوكسى The art of Eudoxos (أو ورقة البردى اليودوكسية) . وهى على الراجح مذكرات دارس أقام بالإسكندرية من عام ١٩٣ إلى عام ١٩٠ تقريباً . وليس لنا أن نتابع هذه القصة لأنه لا يمكننا أن نفسح للتقويم مكاناً كبيراً ، فإنه يبعدنا عن تاريخ الفلك ويجرنا إلى ميدان تسيطر فيه الاعتبارات[٤٨] الدينية والسياسية على المعرفة الفلكية .

التكنولوجيا والهندسة

يكاد تاريخ الفنون والصناعات وفروع مختلفة من الهندسة والهندسة المعمارية يكون قصة لا نهاية لها ، وينبغي أن نقتصر على أمثلة قليلة لها دلالتها .

أرتاخايس الفارسي

كان أحد الأعمال الهندسية البارزة التي شهدها القرن حفر قناة عبر شبه[٤٩] جزيرة آتوس (Athos) بأمر من كسركسيس (Xerxes) ملك الفرس ، (٤٨٥–٤٦٥) . ولما كانت الملاحة خطرة جداً حول شبه الجزيرة الجبلية تلك، فقد أمر الملك العظيم بحفر القناة حتى يطمئن إلى سلامة أسطوله . وإليك بعض التفاصيل التي أوردها هيرودوت[٥٠] : كلف بهذا المشروع (Epestasan tu ergu) الفارسيان بوباريس (Bubares) ابن ميجابازوس (Megabazos) وأرتاخايس بن أرتايوس (Artaios) ، وكان أرتاخايس ذا مكانة عالية عند الملك ، وذا طول فارع عندما ينتصب على قدميه ، فكان أطول رجل فى فارس (طوله ثمانى أقدام !) . وتوفى أثناء تنفيذ العمل أو بعد إنجازه ، فحزن عليه الملك والجيش وشيع جثمانه إلى مثواه باحتفال رائع مهيب . ويبلغ طول البرزخ ٢٥٠٠ ياردة ، ولا يزال فى الإمكان مشاهدة معالم الحفر فى الوقت الحاضر، أو أنها كانت تشاهد قبل قرن : « تكون القناة سلسلة من الأحواض يتراوح عمقها بين قدمين وثمانى أقدام ، أما عرضها فمن ٦٠ إلى ٩٠ قدماً ، وقد شقت فى طبقات من الحجارة الكلسية ورمال تكونت فى العصر الجيولوجى الثالث ، وعمقها الأقصى على الراجح لا يزيد حيثما كان عن ٦٠ قدماً تحت السطح الطبيعى للأرض المجاورة التى يبلغ أقصى ارتفاعها عن سطح البحر ٥١ قدماً فقط » (رولنسون)[٥١](Rawlinson) .

أجاتارخوس الساموسى (٥٢)

قيل عن أناكساجوراس (ص ٢٤٣) أنه ألف كتاباً فى علم المناظر . وكان أجاتارخوس ، الذى ولد حوالى عام ٤٩٠ وأقام بأثينا من عام ٤٦٠ إلى عام ٤١٧ ، رساماً مارس الفن الجديد فعلا فأخرج مناظر أو مشاهد مسرحية للروائى أيسخيولوس (Aischylos) . وهو على ما نعلم أول رسام استعمل قواعد المنظور على مقياس واسع (أى فى الرسم على الجدران أو فى رسم المناظر ، خلافاً للرسم على الزهريات) . ولعله فعل ذلك قبل أن يؤلف أناكساجوراس كتابه وأخضع الفن لأحكام العقل ؛ وذلك لوجود الصلة بين أناكساجوراس والروائى يوريبيديس (Euripedes) . ولم يقتصر أجاتارخوس على ممارسة فن المنظور فحسب ، بل كتب فيه أيضاً مذكرة فنية (Hypomnemata) . ولسنا نستطيع الحكم على ما كتبه بمقارنته بكتابات أناكساجوراس وديموكريتوس لأن جميع كتاباتهم فقدت . ومما له دلالته على وجه ما ، أن ثلاثة رجال من ذاك الزمن وهم أجاتارخوس، وأناكساجوراس ، وديموكريتوس كانوا على صلة بفن المنظور ، ومن ثم يمكننا أن نفترض باطمئنان أن الفن بدأ فى ذاك الزمن ، وأن ذلك كان أمراً طبيعياً ، إذا ما أخذنا بعين الاعتبار أنه كان العصر الذهبى للتراجيديا .

هيبوداموس الميليّ (٥٣)

ولدينا رمز آخر للنضج اليونانى جدير بالاعتبار ، ألا وهو ظهور أول مهندس لتخطيط المدن . كان هيبوداموس مهندساً معمارياً ، وهو الذى وضع تخطيطاً لإنشاء ميناء أثينا ، بيرايوس (Peiraieus) (قبل عام ٤٦٦) ، ولإنشاء المستعمرة الأثينية تورى(٥٤) (Thurii) عام ٤٤٤ ، غير أنه لم يكن مسئولا عن بناء رودس (Rhodes) (عام ٤٠٨)، وهكذا يمكننا القول إنه اشتهر بعيد منتصف القرن .

ولم يعن بإنشاء المدن من الناحية البنائية المادية (الشوارع والساحات ، ومواضع المبانى العامة ، وما إليها) فحسب ، بل عنى أيضاً بإنشائها من الناحية الخلقية ، فكان فى تفكيره السياسى أحد السابقين على أفلاطون . وحاول أن يؤسس دستوراً مثاليًّا تناوله أرسطو بالنقد بلا هوادة . غير أن تعريف أرسطو به معبر وطريف :

« هيبوداموس بن يوريفون (Euryphon) ، من أهل ميليتوس ، وهو الذى اخترع فن تخطيط المدن ، وأشرف على إنشاء بيرايوس ، — رجل غريب الأطوار ، قادته شهرته للظهور إلى شذوذ عام فى حياته ، مما جعل البعض يظنه متصنعاً فى تصرفه (ذلك أنه كان يتزين بالشعر المسترسل والحلى الثمينة ؛ وإن كان يلبسها على ثوب رخيص دافئ شتاء وصيفاً) ؛ وفيما عدا طموحه فى أن يكون ضليعاً فى علم الطبيعة ، فإنه كان أول من قام بتحريات عن أفضل أنواع الحكم وإن كان غير سياسى .

« كانت المدينة الهيبودامية تتألف من ١٠,٠٠٠ مواطن مقسومين إلى ثلاثة أقسام : قسم الصناع ، وقسم الزراع ، وثالث يتألف من حماة الدولة المسلحين . وقسم هيبوداموس الأرض كذلك إلى ثلاثة أقسام : قسم مقدس ، وقسم عمومى ، وثالث خصوصى : فالأول خصص لإقامة العبادة المعتادة للآلهة ، والثانى لعول المحاربين ، والثالث للمزارعين . وقسم القوانين أيضاً إلى ثلاثة أنواع ، لا أكثر ، لاعتقاده أن هناك ثلاثة موضوعات للمقاضاة : التحقير ، والأذى ، وقتل النفس[٥٥](ويتلو ذلك وصف مسهب ومناقشة) .

وأشد ما روع أرسطو هو أن هيبوداموس لم يكن ذا خبرة سياسية أو إدارية كرجل دولة أو إدارة ، بل كان فيثاغوريًّا حالماً ، غير أن بعض أحلامه كانت قابلة للتطبيق أكثر مما قدر لها أرسطو . ولنضرب لذلك مثلا ، أراد هيبوداموس أن تحوى مدينته مزارعين يزرعون أراضيهم لمنفعتهم الخاصة ، فتساءل أرسطو : « وما نفع المزارعين للمدينة ؟ » . أجل ، لابد أن هيبوداموس

آمن بأن « مدينة ذات حدائق » لهي مكان أفضل صحياً لسكنى كل مواطن من مدينة تتألف من البيوت والمخازن، أو لم يكن هيبوداموس محقاً ؟ لقد كان فى الواقع حالماً ، ولكنه كان حالماً موفقاً ، بل كان السلف البعيد لرجال مثل باتريك جيديس (١٨٥٤ — ١٩٠٢) (Patrick Geddes) فى عصرنا نحن ، ممن حاولوا التوفيق بين المقتضيات المادية فى تخطيط المدن والوجهتين[٥٦] الخلقية والاجتماعية .

مناجم الفضة فى لوريون[٥٧]

قبيل الوصول إلى رأس سونيون (Sunion) وهو طرف أتيكا (Attica) الجنوبى ، يجتاز المرء منطقة لوريون (Laurion) الغنية بالمعادن . وقد جرى التعدين فيها ، وهى تبلغ قرابة ٨٠ كيلومتراً مربعاً ، من زمن موغل فى القدم ، (ولنقل منذ العصر الحديدى الباكر) . وكان اليونانيون يشتغلون بالتعدين ليحصلوا خاصة على جالينا (Galena) فضية ، وهى خامة تحوى ٦٥ فى المائة من الرصاص ، كان فى الإمكان الحصول على فلزات أخرى كالزنك والحديد ؛ بل والذهب ، ولكن بقلة لأنه كان يستخلص بالطرائق القديمة . وكانت أتيكا هى المنتج الوحيد للرصاص فى دنيا اليونان ، والفضل لمناجم لوريون . وكان مطلب الأثينيين الرئيسى الحصول على الفضة ، واكتشفت حول بداية القرن الخامس خامات أغنى بالفضة . فأخذت الدولة على عاتقها مهمة استغلال[٥٨] مناجمها ، وكان استغلالها مثمراً أيما إثمار ، إلى حد أن كل مواطن قبض منها حوالى عام ٤٨٣ منحة مالية . إلا أن ثميستوكليس ، الذى أحس بالخطر الفارسى قبل الآخرين وأدرك الحاجة إلى أسطول بحرى قوى ، أقنع الحكومة الأثينية بتخصيص دخل مناجم لوريون لذلك الغرض الملح . فكان النصر فى سلاميس (Salamis) عام ٤٨٠ ثمرة تلك السياسة . ومكنت هذه الفضة فيما بعد بركليس من إعادة بناء أثينا بصورة رائعة . وحين نعجب بالبارثينون (Parthenon) يجب أن نذكر دائماً مناجم لوريون وسخرة العبيد ، اللتين جعلتا من الممكن إقامة البنيان .

وقد لا يرضى أن نذكر أن العبقرية وحدها لم تكن كافية لخلق تلك التحفة الفنية ، بل لابد لها من التعدين والعبودية ، وفى وسعنا أن نطرد تلك الخواطر الأثيمة فى غير خداع .

استغلت هذه المناجم فى القرن الخامس فوق طاقتها ، وكان العمل يجرى فيها إلى ما قبيل منتصف القرن التالى ، دون أن ينقب عن مناجم جديدة . وسبق لكسينوفون[٥٩] (Xenophon) أن أبدى هذه الملاحظة « واقترح نظاماً اشتراكياً لاستغلال المناجم ، فتقوم الدولة باستئجار العدد اللازم من العبيد ، لندرة رأس المال الخصوصى ، إلا أن الخطباء كانوا يرددون أن فى الإمكان تحصيل كثير من المال فى أثينا للاستثمار فى مغامرات تجارية وغيرها ، فتوقف التنقيب يرجع إذن إلى أن الربح من المناجم أصبح ضئيلا ، أو إلى أن أهم الرواسب المعدنية سبق استكشافه فزاد بذلك خطر الإخفاق فى حفر مناجم جديدة » . ولقد بذلت جهود لتنشيط العمل فى المناجم فى القرنين الثالث والثانى . ولكن عرقلتها مشاكل العمل وأوقفتها ثورة العبيد عام ١٠٣ . واضطر الأثينيون فى زمن سترابو (Strabo) (النصف الأول من القرن الثانى ق.م) إلى معالجة الحجارة والخبث اللذين كانا قد طرحا جانباً ؛ وفى زمن بوزانياس (Pausanias) (النصف الثانى من القرن الثانى) كانت المناجم مهجورة تماماً . ومنذ عام ١٨٦٠ أعيد استغلال المناجم ومحتوياتها بطرق أفضل ولأهداف جديدة ، وقد أثمر هذا الاستغلال ، لا لتعدين الفضة ، بل لتعدين الرصاص ، والزنك والمنجنيز . ويمكن مشاهدة آثار الاستغلال القديم فى أماكنها حتى الآن ، من منافذ ضيقة ، ودهاليز ، وأفران ، وصهاريج ، وموائد للغسل ، ومعدات أخرى .

لا ريب فى أن صناعة التعدين وصناعة الفزات ليستا من مستحدثات القرن الخامس ، فقد مارسها المصريون وأقوام آخرون من قبل على مدى آلاف السنين . ولم يكن احتكار الدولة للصناعتين جديداً ، ولا استعمال الخامات فى صنع التماثيل والمعدات العسكرية حديثاً . وطبيعى أن الحكام إذا ما وجدوا

ثروات كهذه استعملوها وأساءوا استعمالها لقضاء حاجاتهم الخاصة . على كل حال ، كان استغلال مناجم لوريون فى القرن الخامس أول استغلال عرفت عنه بعض التفاصيل من النواحى الأثرية ، والسياسية والاقتصادية . وإنه لأمر هام جداً أن نذكر أن مجد أثينا لم يوطد على أساس العبقرية اليونانية فحسب ، بل على استغلال مناجم الفضة أيضاً . ولن توجد الروح الإنسانية منفصلة عن الجسم ، ولا الجمال عن الكدح والألم ، ولا الاختراعات الروحية الأخرى عن الاسترقاق وعدد لا يحصى من الويلات .

كانت هناك مناجم أخرى فى بلاد اليونان عدا مناجم أتيكا . وقد أشار هيرودوت إلى مناجم بالقرب من جبل بانجايوس (Pangaios) (فى مقدونيا) ، وفى تراقيا (Thrace) ، وجزيرتى سفنوس (Siphnos) وثاسوس (Thasos) .

أما التعدين فى فلسطين وغربى آسيا فإنا نجد له صدى خافتاً فى سفر أيوب إذ يقول : « يوجد قطعاً عروق للفضة وموضع للذهب حيث يجدونهما . ويستخرج الحديد من التراب ، ويسكب الحجر نحاساً . كل ذلك وضع حداً للظلمة ، ويدفعنا إلى أن نبحث فى كل مكان عن الكمال ، عن حجر الظلمة ، وظل الموت »[٦٠] وهذا يتضمن وجود بعض الخبرة فى استخراج الخامات من المناجم ، بل وفى صناعة التعدين . وقد وجدت فى ذاك الزمن خبرة كهذه فى بلاد شتى ، فى جميع أرجاء العالم ، إلا أن عمال المناجم والتعدين كانوا أناساً أميين ممن تنقصهم الرغبة والقدرة على وصف خبراتهم . إن صناعة التعدين ، أكثر من أية صناعة أخرى ، كانت ولا تزال مقرونة بقدر هائل من الجهالة والخرافة[٦١] .

تعليقات

(١) زينون هو أحد شخصيات الحوار فى «محاورة بارمينيديس» لأفلاطون . ومع ذلك لا يناقش أفلاطون مشاكل زينون الرياضية بل يناقش حججه ضد الكثرة فقط ، ويحاول أن يبخسه حقه عند مقارنته ببارمينيديس . وقد لاحظ أفلاطون فى محاورته فيدروس (Phaidros) ٢٦١د ، أن زينون عرف كيف يجعل الشىء والشىء نفسه يظهران متشابهين ومختلفين ، واحداً ومتعدداً ، ساكنين ومتحركين .

(٢) راجع مقالة فلوريان كاجورى : «الغاية من حجج زينون على الحركة» . فى مجلة ايزيس ٣ ، ٧ — ٢٠ ، ١٩٢٠

(Florian Cajori, The purpose of Zenon arguments on motion, Isis 3, 7-20, 1920).

وتلخص المقالة الجدل فى الموضوع إلى زمن بول تانيرى (Paul Tannery) الذى يشاركه كاجورى فى استنتاجاته . وعند تانيرى أن زينون قاوم الرأى القائل بأن النقطة وحدة ذات وضع . راجع أيضاً المصادر الآتية : (ا) فيليب . ى . ب جوردان ، «السهم الطائر . خطأ فى حساب الزمن»

Philip E.B. Jourdain, "The flying Arrow. An anachronism." Mind 25, 42-55 (Aberdeen 1916) (Isis, 3, 277-278 (1920)).

(ب) ت . ل . هيث ، تاريخ الرياضيات عند اليونان .

T.L. Heath, History of Greek Mathematics, Oxford 1921, Vol. 1 pp. 271-283. (Isis 4, 532-535 (1921-1922)).

(٣) يثنى أرسطو على ديموكريتوس فى كتاب : الكون والفساد ، ٣١٥ أ ٣٤ وما يليها ؛ أما أرشميدس فيذكر كشف ديموكريتوس فى كتابه «المنهج» . وقد اقتبس منه هيث النص المتعلق بالموضوع وأورده فى كتابه : «المختصر فى الرياضيات عند اليونان»

Heath Manual of Greek mathematics (Oxford 1931) p. 283.

(٤) الفعل Hippocrateo باليونانية يعنى : فرس أى كان حاذقاً فى أمر الخيل ؛ وربما كان الاسم Hippocrates ملائماً لضابط بسلاح الفرسان .

(٥) تبلغ مساحة خيوس ٣٣٥ ميلا مربعاً ، ولم يولد بها أحد أعاظم الرياضيين فحسب ، بل ولد بها أيضاً رياضى كبير هو أينوبيديس ، والمؤرخ تيوبومبوس (Theopompos) ويدعى أهل الجزيرة أن الشاعر هوميروس ولد بها أيضاً . ويزودنا فوستيل دى كولانج (Fustel de coulanges) بمعلومات وافرة فى مقالته : «مذكرة عن جزيرة خيوس» التى نشرت بالفرنسية فى Arch. Missions Scientifiques ، ٥ ، ٤٨١ (١٨٥٦) وأعيد طبعها فى كتابه : «مسائل تاريخية» (باريس ١٨٩٣) ، ص ٢١٣ — ٣٣٩ (Questions hitoriques, Paris 1893, pp. 213-339) ،

ولكنه يقع فى الخطأ الآتى (ص ٣١٨) : « كثيراً ما ذكر القدماء عن واحد اسمه أبقراط الخيوسى أنه كان رياضيا وفلكيا ومهندساً » . ويدل هذا على أن واحداً اسمه فوستيل دى كولانج مهما امتاز فى نواح أخرى ، فإنه لم يكن رياضيا ولا مؤرخاً للعلوم .

تقع جزيرة كوس جنوبى جزيرة خيوس. والأولى أصغر من الأخيرة بكثير ، وهى فى الواقع صغيرة جدا (ومساحتها ١١١ ميلا مربعاً) . وقد ولد بها رجل ألمعى وحيد هو « أبو الطب » أبقراط .

(٦) أرسطو ، كتاب الأخلاق إلى أوديموس ، ٧ — ١٤ ، ١٢٤٧ أ .

(٧) يذكر قسطنطين ج يافيس (Constantine G. Yavis) فى كتابه : Constantine G. Yavis, Greek altars, Saint-Louis; Saint Louis University Press, 1949, pp. 169-170, أن هذه المعابد كانت مكعبة الشكل تقريباً ولكنها على كل حال ليست فى ديلوس بل فى قبرص . معبدان منها فى فونى (Vouni) ، وربما يرجع تاريخهما إلى القرن الخامس فنازلا ، أما أبعاد قاعدتيهما فكما يأتى: ١,٥٩ ؛ ١,٧ متراً ، ٢,٧ ؛ ١,٥٤٤ متراً — وإذن هما بعيدتان كل البعد عن الشكل المربع .

(٨) أثبت يوهان هاينريخ لامبرت (Johann Heinrich Lambert) سنة ١٧٦٧ أن ط (نسبة محيط الدائرة إلى قطرها) عدد لا منطق ، وأثبت لوجاندر (Legendre) أن ط٢ ، أيضاً عدد لا منطق سنة ١٧٩٤ ؛ وأثبت فرديناند لنديمان (Ferdinand Lindemann) سنة ١٨٨٢ ، أن ط عدد متسام ، (Transcendental) . راجع مجلة أوزيريس (Osiris) : ١ ، ٥٣٢ ، ١٩٣٦ .

وقد بحث فيليكس كلاين (Felix Klein) ١٨٤٩ — ١٩٢٥ المسائل الثلاث على ضوء الرياضيات الحديثة فى كتابه : « مناقشة مسائل مختارة فى الرياضيات الابتدائية » (Vortrage über ausgewahlte Fragen der Elementarmathematik) (ليبزج ١٨٩٥ ، الترجمة الإنجليزية ، بوسطن ١٨٩٧ ، المنقحة ، نيويورك ، ١٩٣٠ (ايزيس : ١٦ ، ٥٤٧ (١٩٣١) .

(٩) إقليدس ، ١٢ ، ٢ .

(١٠) وردت فى تاريخ الهندسة لأوديموس (٢ — IV : ق. م) وحفظت فى شرح سمبليكيوس (١ — VI) على كتاب الطبيعة لأرسطو . فثمة ألف سنة تقريباً بين سمبليكيوس وأبقراط! ويمكن الحصول على النص بسهولة ، فقد نشره بول تانيرى بالفرنسية واليونانية فى « مذكرات الجمعية العلمية فى بوردو » : ٥ ، ٢١٧ — ٢٣٧ ، (١٨٨٣) ، وأعيد طبعه فى « مذكرات علمية » (تولوز ١٩١٢) ، الجزء الأول ص ٣٣٩ — ٣٧٠ . وقد نشر فرديناند روديو (Ferdinand Rudio) النص باليونانية والألمانية (١٩٤ ص ، ليبتزج ، ١٩٠٧) .

(١١) إن المخمس الفيثاغورى الذى رسمت عليه الأحرف (Hygieia) (ص ٤٣٢ ، جـ ١) سابق لأبقراط على الراجح ، ولكن استعمال الحروف فى الأشكال لتسهيل المناقشة الهندسية مختلف جداً عن استعمالها لغاية رمزية .

(١٢) كتب عنه كورت فون فريتز (Kurt-Von Fritz) مقالة قيمة فى دائرة معارف الآداب والعلوم الألمانية (Pauly Wissowa) (١٩٣٧ ، المجلد ٣٤ ، ٢٢٥٨ — ٢٢٧٢) .

(١٣) بيرون (Pyrrhon) ، وهو مؤسس مدرسة الشكاك ، نشأ أيضاً بإيليس .

(١٤) نقول ثيودوروس الرياضي لأن ثيودوروس البرقاوى يثير فى أذهان أكثر الناس ذكرى رجل آخر ، أشهر منه ، يدعى أحياناً ثيودوروس الملحد ، وهو تلميذ لأريستيبوس البرقاوى (Aristipos of Cyrene) الذى كان تلميذاً لسقراط . وقد نفى ثيودوروس الملحد من برقة وأقام مدة من الزمن بالإسكندرية ، وفى أخريات حياته سمح له بالعودة إلى بلدته التى نشأ فيها حيث توفى على الراجح فى نهاية القرن الرابع . وصفوة القول ، لم يكن الثيودوروسيان البرقاويان متعاصرين ، فالرياضى يرقى تاريخه إلى النصف الثانى من القرن الخامس ، بينما يرقى تاريخ الفيلسوف إلى النصف الثانى من القرن الرابع . وكانت برقة ، وهى أكبر مدينة فى ولاية برقة ، مركزاً ثقافياً هاماً إذ لم يولد بها أريستيبوس والثيودوروسيان فحسب ، بل ولد بها أيضاً الشاعر كاليماخوس (وقد توفى سنة ٢٤٠ تقريباً) (Callimachos) والمطران سينيسيوس (V — ١) (Synesios)

(١٥) جرى الحوار على ما يظن سنة وفاة سقراط ، فى عام ٣٩٩ ، ولم يكتب إلا بعد مضى ما يقرب من ثلاثين عاماً أى سنة ٣٦٨ — ٣٦٧ .

(١٦) لم أخصص له مقالة فى كتابى : « المقدمة » لأن تاريخه مبهم كل الإبهام . وربما كان من أهل القرن السادس أو القرن الذى يليه . وإنى أسميه هيباسوس الميتابونتى مع أن مولده ينسب إلى موطنين آخرين : سيباريس ، وكروتون . وعلى كل حال ، تقع البلدتان فى المنطقة نفسها حول خليج تارانتو (Taranto) ، عند كعب الحذاء فى خريطة إيطاليا .

(١٧) نذكر على سبيل تذكير القارئ أن العدد (ب) يكون الوسط الحسابى للعددين ا ، حـ إذا كان $\text{ب} = \frac{\text{ا} + \text{حـ}}{٢}$ ، ويكون وسطهما الهندسى إذا كان $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$ ، ويكون وسطهما التوافقى إذا كان $\frac{\text{ا}}{\text{حـ}} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ب} - \text{حـ}}$ ، أو إذا كان $\frac{١}{\text{حـ}} - \frac{١}{\text{ب}} = \frac{١}{\text{ب}} - \frac{١}{\text{ا}}$. فيقال إن الأعداد الثلاثة ا ، ب ، حـ تؤلف على التوالى متوالية عددية ، أو متوالية هندسية ، أو متوالية توافقية .

(١٨) أرسطو ، التحليلات الأولى ، ٤١ ا ، ٢٦ — ٣٠ .

(١٩) راجع مقالة كورت فون فريتز : « اكتشاف هيباسوس الميتابونتى للاقياس فى المجلة الرياضية الأمريكية : (Ann. Math.) ، ٤٦ ، ٢٤٢ — ٢٦٤ ، (١٩٤٥) ، وقد نقلنا الشكل من مقالته بعد الاستئذان من أولى الفضل .

(٢٠) حتى ديموكريتوس مهد لذلك ، لأنه عالج فى أحد كتبه المقادير اللامنطقية والأجسام الصلبة (الذرات ؟) (Peri alogon grammon cai naston) ؛ لكن ينبغى ألا ننسى أنه عاش فى أخريات القرن الرابع . إن العنوان يحيرنا ، فهل حاول أن يجد علاقة بين المقادير اللامنطقية والذرات ؟ .

(٢١) ينبغى ألا يخلط ، وكثيراً ما حدث ، بينه وبين معاصره الخطيب أنتيفون الذى عاش

بأثينا أيضاً حوالى (٤٨٠ – ٤١١) ، وهو أجل شأناً فى تاريخ الأدب والسياسة ، وإن كان لا يدخل فى دائرة اختصاص مؤرخ العلم إطلاقاً .

(٢٢) راجع مقالة آرثر ليزلى بيز (Arthur Leslie Pease) فى التنبؤ بالغيب فى قاموس أكسفورد الأدبى (اكسفورد مطبعة كلارندون ١٩٤٩) ومعها ثبت طويل للمصادر ، فإنها مقدمة عامة للموضوع .

إن المقالات العديدة فى دائرة معارف الدين والأخلاق (Encyc. of Religion and Ethics) تمكننا من القيام بدراسة مقارنة عن التنبؤ بالغيب فى عدة أقطار ؛ راجع المجلد الرابع (١٩١٢) ص ٧٧٥–٨٣٠ .

(٢٣) ينبغى ألا يخلط بينه وبين بريسون آخر ، من الفيثاغوريين المحدثين ، فالآخر أحدث عهداً بكثير ، وقد عاش فى الإسكندرية أوروما فى القرن الأول أو الثانى بعد المسيح . نشر له مارتن بليسنر (Martin Plessner) كتاباً آخر فى « الاقتصاد » سنة ١٩٢٨ ؛ راجع ايزيس : ١٣ ، ٥٢٩ (١٩٢٩ – ١٩٣٠) .

(٢٤) سميت عدة مدن يونانية فى أوربا وآسيا باسم هيراكليا ، لكن هذه المدنية على الخصوص قامت فى بيثنيا على الشاطئ الجنوبى الغربى للبحر الأسود . كانت موطن هيراكليدس البونتى (Heracleides of Pontus) (٤ – ٢ ق . م) وربما كانت أيضاً موطن الرسام زويكسيس (الذى ولد حوالى عام ٤٤٥) (Zeuxis) .

(٢٥) راجع كتاب فرديناندروديو (١٨٥٦ – ١٩٢٩) بالألمانية : « تقرير سمبليكيوس عن عملية التربيع عند أنتيفون وأبقراط . » (١٩٤ ص ، لايبزج ، ١٩٠٧) .
(Das bericht des simplicius uber die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates)
فالكتاب يحوى كل النصوص المتعلقة بالموضوع باللغتين اليونانية والألمانية .

(٢٦) ولد حوالى عام ٤٣٠ ، وكان لا يزال حياً فى عام ٣٦٠ .

(٢٧) أفلاطون ، كتاب الجمهورية ، ٧ ، ٥٣٠ .

(٢٨) إننى أستعمل كلمة « مستدير » للدلالة على معنى الكلمة اليونانية (Strongylos) وهو عكس المقصود من كلمة (Platys) أى « مسطح » ، وعكس المقصود من كلمة (euthys) أى « مستقيم » . إن كلمة « مستدير » أقل دقة من كلمة « كروى » ، غير أن الفكرة العامة هى نفسها .

(٢٩) إن بعض هذه الآراء على الأقل كان من أصل شرقى ، فهو مزدى ، أو بابلى ، أو لعله مصرى . راجع كتاب لويس روجيه (بالفرنسية) (Louis Rougier) : « الأصل الفلكى لاعتقاد الفيثاغوريين فى الخلود السماوى للارواح (L'origine astronomique de la croyance pythagoricienne en l'immorralité célestes des âmes). (١٥٢ ص ، القاهرة : المعهد الفرنسى للاثار الشرقية ، ١٩٣٣) . (إيزيس ٢٦ ، ٤٩١ ، ١٩٣٦) .

(٣٠) إن ما نعرفه عنه مستمد من كتاب لآيتيوس عنوانه : «فى الفروض المقبولة ؛ (Ce placitis) وقد نشره هيرمان ديلز (Hermann Diels) فى كتابه : « النظريون من الإجريق » (Doxographigraci) (برلين ١٨٧٩ ص ٤٥ – ٦٩ ، ١٧٨ – ٢١٥ ، ٢٦٧ – ٤٤٤) . وتظهر « فروض » آيتيوس

و « مختارات » ستوبايوس (٥ – ٢) (Ecologue of stobaios).

مطبوعة في كتاب ديلز بأعمدة متوازية . إن تاريخ آيتيوس مبهم كل الإبهام ، وقد نسب كتابه المذكور إلى بلوتارك (٢ – I) (Plutarch)، والراجح أنه متأخر عنه، فيمكننا أن نضع تاريخه حدساً في نهاية القرن الأول أو في الربع الأول من القرن الثاني راجع الهامش (٢) (ص ٩٢).

(٣١) كان سيمياس وكيبس صديقين حميمين لسقراط وكلاهما من طيبة . وهما المتكلمان الرئيسيان ما عدا سقراط نفسه ، في محاورة فيدون (Phaidon) ؛ وقد ورد ذكرهما في محاورة كريتون (Criton) وذكر سيمياس وحده في محاورة فيدروس (Phaidros) . وليس كيبس المذكور هنا هو مؤلف كتاب « الصورة » (Pinax) الذي يدعى بالاسم نفسه (cebetos Thebaiu Pinax)

(٣٢) ليس محققاً ، على كل حال ، أن فيلولاوس كان يدرك ذاك الاستنتاج . مثال ذلك : أن القمر يوجه لنا دائماً نفس الجانب من سطحه وقد اعتبر القدماء أنه لا يدور على محوره ، فلم يدركوا التناقض الذي يترتب على هذا الاعتبار .

(٣٢ ا) الرأي عند بورش (Burch) هو أن « الأرض المقابلة » يمكن تفسيرها بأنها هي جانب الأرض الذي يقابلنا عند الطرف الآخر من قطرها (antipodes) راجع مقالة جورج بوسورث بورش : « الأرض المقابلة » ، أوزيريس ، ١١ ، ١٩٥٣ . (The counter-earth) (Osiris 11 1953)

(٣٣) راجع مقالة أوتونويجباور (Otto Neugebauer) : « الكشف البابلي المزعوم لمبادرة الاعتدالين » في مجلة (J. Am. Oriental Soc. 70-1-8 '1950'). كان يظن أن كيدينو (Cidenas) (Kidinnu) البابلي كشف ظاهرة مبادرة الاعتدالين حوالي عام ٣٤٣ ق . م . ولكن هذا التاريخ ، على أية حال ، يأتي بعد فيلولاوس بقرن من الزمن . راجع أيضاً مقالة بول شنابل (Paul Schnabel) « كيديناس ، هيبارخوس والكشف عن مبادرة الاعتدالين

"Kindenas, Hipparch und die entdeckung der prazcession" Z. Assyriologie, 3, 1-60 (1926) (Isis 10,107, 1928)

(٣٤) ترجم ت . هيث النص المنسوب لآيثيوس إلى الإنجليزية في كتابه : الفلك عند اليونان :

Greek Astronomy, (London, Dent, 1932,) P. 32-33, (Isis 22, 585 (1934-35)).

(٣٥) راجع كتاباً عنوانه « كتاب عن الأكاديميين الأول » ٢ ، ٣٩ ، ١٢٣ . نشره وترجمه جيمس . س . ريد .

Academicorum priorum liber, Edition by James S. Reid (London 1885) P. 322, Translation (London 1885), p. 81.

(٣٦) المرجع : « في الفروض المقبولة » III ، ١٣ ، ٣ .

(٣٧) وضعت إكفانتوس في كتابي : « مقدمة في تاريخ العلم » في الحقبة (١ – IV ق . م) وهيراكليدس في الحقبة (٢ – IV ق. م). وكان ذلك إلى حد ما تحكميا . فقد نشط هيراكليدس في منتصف القرن ، ونشط إكفانتوس على الراجح في الوقت نفسه ، ربما قبل ذلك بقليل .

(٣٨) القديس هيبوليتوس (١ – III) في كتاب له عنوانه « في الموضوعات الفلسفية »

(Philosophumena) ، ١ ، ١١ ، ترجمة ف . ليج . F. Legge, Philosophumena (London 1921) الجزء الأول ، ص ٤٨ . ولقد أبقيت على الجملة الأخيرة فى الاقتباس ، رغم قلة انسجامها مع باقى الكلام، لأنها تردد صدى الرواية القديمة التى تصف ديموكريتوس بالفيلسوف الضاحك تمييزاً له عن هيراقليطس الحزين .

(٣٩) فتروفيوس ، ٩ ، ٤ . (Vitruvius, IX, 4)

(٤٠) راجع كتاب « تاريخ فارس » لمؤلفه أولمستد (A.T. Olmstead) ، ص ٣٣١ — ٣٤١ ، حيث تجد التفاصيل عن الأساس البابلى لآراء ديموكريتوس فى الفلك :
A.T. Olmstead, History of Persia

(٤١) هيث ، كتابه : « الفلك عند اليونان » ص ٣٨
(Heath, Greek astronomy, p. 38)

(٤٢) يمكن إنجاز ذكر الذين رووا عن أرالوس كما يأتى : هيبارخوس (٢ — II ق . م) ، شيشرون (١ — I ق . م)، أخيل تاتيوس (١ — III) ، تيون الاسكندرى (٢ — IV)، أفينوس (٥ — IV) ، سهل بن بشر (١ — IX) . راجع بصدد الأخير من هؤلاء مقالة أرنست هونيجمان (Ernest Honigmann) فى مجلة إيزيس ، ٤١ ، ٣٠ — ٣١ ، (١٩٥٠) .

(٤٣) إقليدس ، كتاب الأصول ، ٤ ، ٦ .

(٤٤) مقتبس من بروكلوس كما أورده هيث فى كتابه : « الأصول لإقليدس » (كمبردج ١٩٢٦) الجزء ٢ ، ص ١١١ ، (٢٤ × ١٥ = ٣٦٠) : Euclid's elements

(٤٥) إنه العدد (٧٣٠) لا (٧٢٩) كما تصد فيلولاوس (وأفلاطون) حين قالا إن مكعب العدد ٩ يساوى عدد الشهور فى السنة العظيمة (٩٣ = ٧٢٩) . وتطابقات عددية كهذه كانت تثير الحبور فى أذهان الفيثاغوريين .

(٤٦) لدينا تقويم بابلى يرقى إلى سنة ٤٢٥ ق . م ، وإن دقته لتسترعى النظر ، وكأنه « تقويم حديث » . راجع المصدر الآتى : Richard A. Parker and Waldo H. Dubberstein Babylonian chronology 626 B.C. to A.D. 45.
ريتشارد ا . باركر ، والدو . هـ . دوبرشتاين . التأريخ البابلى ، ٦٢٦ ق . م إلى ٤٥ ب . م . (شيكاجو ، مطبعة جامعة شيكاجو ، ١٩٤٦) . راجع أيضاً :
(ا) ايزيس ، ٣٤ ، ٤٤٢ (١٩٤٢ — ٤٣) ؛ ٣٩ ، ١٧٤ (١٩٤٨) .
(ب) أولمستيد ، تاريخ فارس ، ص ٣٢٩ (Olmstead, History of Persia, p. 329

(٤٧) راجع كتاب جيوفانى فرجينيوشيا بارلى (Giovanni Virginio Schiaparelli) وعنوانه : « أسلاف كوبرنيق فى العصور القديمة » . فقد قام المؤلف بإجراء العمليات الرياضية وأوجد القيم العددية لتعيينات فيلولاوس الفلكية : (I precursori di Copermico nell'antichita) (ميلان ، ١٨٧٣) ص ٨٠ . راجع أيضاً كتاب هيث : « اريستارخيوس » (اكسفورد ، ١٩١٣) ، ص ١٠٢ وصفحة ١٣٢ .

(٤٨) إن المصادر الرياضية التى تعالج موضوع التقويم كثيرة للغاية ولا يزال المصدر الآتى المرجع الرئيسى فى هذا البحث : Friedrich Karl Ginsel (1850, 1926), Handbuch der mathematischen und technischen chronologie.

فردريخ كارل جنزل : « المختصر فى التقاويم الرياضية والفنية » (٣ أجزاء ، ليبزج ١٩٠٦ — ١٩١٤) . ويبحث المؤلف فى الجزء الثانى موضوع التقويم عند اليونان . وقد أورد هيث ملخص البحث فى كتابه : « أريستارخوس » ، ص ٢٨٤ — ٢٩٧ (Aristrachus, pp. 284-297) . راجع أيضاً المصدر الآتى :

William Kendrick Pritchett and Otto Neugehauer, the Calenders of Athens.

وليم كندريك بريتشت ، واوتو نويجباور : « التقاويم الأثينية » (١٢٧ ص ، كبردج : مطبعة جامعة هارفرد ، ١٩٤٧) [ايزيس ٣٩ ، ٢٦١ (١٩٤٨)] .

(٤٩) تتألف الكالسيديس (Chalcidice) ، الشوكة ذات الفروع الثلاثة ، من أشباه جزر ثلاث ، إحداها شبه جزيرة آتوس وهى أكثر الفروع جنوحاً نحو الشرق . كانت ترعة اكسرسيس عند رأس آتوس وتجرى فى اتجاه الشمال والجنوب (لا شرقاً وغرباً) . وعلى شبه الجزيرة تلك ، وإلى الجنوب من الترعة ، شيدت أديرة جبل آتوس فى عهد البيزنطيين ، وأصبح هذا المكان يدعى بعد ذلك : « الجبل المقدس » .

(٥٠) هيرودوت ، VII ، ٢٢ ، وما يليها ، ١١٧ .

(٥١) ورد الاقتباس فى كتاب عنوانه : «تعليق على هيرودوت » لمؤلفيه : و. و. هاو ؛ ج. ويلز .
W.W. How and J. Wells, Commentary on Herodotus (Oxford, 1912). Vol. 2 p. 135.

ويضيف المؤلفان أن العمل فى شق القناة كان يسيراً ، ولذا فإن مقارنة شتاين (Stein) بين هذه القناة وقناة كورنث(Corinth) مضللة ، ذلك لأن الثانية شقت فى أرض فيها قطعة صخرية طولها ميل وتعلو عن سطح البحر ٢٥٥ قدماً . تدعى أطلال القناة الآن « الأخدود » (Provlaka) وهناك تل بالقرب من الأطلال هو على الراجح قبر أرتاخايس الذى أمر ببنائه كسركسيس . راجع أيضاً هـ. ف توزير .
H.F. Tozer, Researches in the Highlands of Turkey (London 1869), Vol. 1, p. 128.

(٥٢) راجع مقالة ج . سيكس .
J. Six, "Agatharchos", J. Hellenic studies 40, 180-189 (1920) (Isis 5, 204 '1923')

(٥٣) راجع كتاب « السياسة » لأرسطو : ٢ : ٨ ، ص ١٢٦٧ ب — ١٢٦٩ ب ، راجع أيضاً مقالة بيربيز :

Pierre Bise, Hippodamos, Arch. Geshichte Philosophie35,13-42(1923).(Isis7,175 '1925')

(٥٤) نفذ تخطيطه للميناء بيرايوس ولمستعمرة تورى تحت رعاية بركليس (Pericles) وقد بنيت تورى بالقرب من سيباريس (Sybaris) القديمة (على خليج تارنتوم) (Tarentum, Lucania) ، التى كانت قد دمرت . وإنى أدعوها مستعمرة أثينية لأن بركليس هو الذى حث على إنشائها ، لكن الغاية من إنشائها كانت هلينية بوجه عام . وكان من بين المستعمرين الأولين المؤرخ هيرودوت ،

والخطيب ليسياس (Lysias) ، وإخوته . وسرعان ما نمت تورى أو ثوريوم وبلغت درجة عالية من الازدهار ؛ لأن موقعها كان رائعاً . وكان مما يميز الروح اليونانية أن المستعمرين الأولين أخذوا معهم خبيراً فى تخطيط المدن ، أما الآباء الحجاج (Pilgrim Fathers) الذين أقلعوا على الباخرة « ماى فلور » (Mayflower) « سنة ١٦٢٠ (أى بعد ٢٠٦٣ سنة) ليؤسسوا مستعمرة فى أمريكا ، فإنهم لم يفكروا فى تخطيط المدن .

(٥٥) كتاب « السياسة » لأرسطو : ٢ ، ٨ ص ١٢٦٧ ب .

(٥٦) راجع كتاب فيليب بوردمان وعنوانه : باتريك جيديس ، صانع المستقبل .

Patrick Geddes, maker of the future. (Chapel Hill: University of North Carolina Press, 1944). (Isis 37, 91-92, '1947').

(٥٧) راجع مقالا مفصلا لادوارد أردايون ، وعنوانه : « مناجم لوريون فى العصور القديمة »

Edouard Ardaillon. Les mines du Laurion, dans l'antiquité (Bibliotheque des Ecoles françaises d'Athenes et de Rome, fasc. 77, 218 pp., ill., map; Paris 1897).

راجع أيضاً كتاب أوليفر دافيس وعنوانه : « المناجم الرومانية فى أوربا » . Oliver Davies, Roman mines in Europe. (Oxford press 1935), pp. 246-252 (Isis 25, 251, 1936).

(٥٨) تم ذلك بتوزيع المناجم على المتعهدين الذين كانوا يأتون بالعمال من طبقة العبيد ، غير المملوكين للدولة .

(٥٩) من كتاب لاكسينوفان كتبه وهو فى الشيخوخة حوالى سنة ٣٥٣ وعنوانه : « سبل لتحسين الدخل الأثينى » ، (On the means of improving of reveneues of Athene, IV. 3-4) ٤ ، ٣ — ٤ . والاقتباس من كتاب دافيس : « المناجم الرومانية فى أوربا » ص ٢٤٩ .

(٦٠) سفر أيوب ، ٢٨ : ١ — ٣ . (Job 28: 1-3)

(٦١) راجع مقالة كرولى (A.E. Crawley) وعنوانها : « الفلزات والمعدنيات » ، فى دائرة معارف الدين والأخلاق ، الجزء الثامن (١٩١٦) ، ص ٥٨٨ — ٥٩٢ . (Metals and minerals, Ency-of Rilig. and Ethics, vol. 8, pp. 588.592).