الدوال الأساسية

المجموعات Set

من المفاهيم الأساسية في الرياضيات الحديثة مفهوم المجموعة (الفئة)، ويرجع فضل اكتشاف هذا المفهوم إلى العالم الرياضي جورج كانترو (1854–1918)، ويكتسب هذا المفهوم أهمية خاصة حيث إنه مكن الرياضيين من التعرف على أساليب حديثة لتوحيد فروع الرياضيات المختلفة.

ومفهوم المجموعة مفهوم عام، يتسع للأشياء المجردة والأشياء المحسوسة، حتى ولو كان يتعلق بعلم الرياضيات، ففي لغتنا العربية الكثير من المفردات التي تعبر عن تجمع مجموعة من الأشياء مثل: فصل، باقة، عائلة، خلية وغيرها، ولكن توجد في اللغة كلمة واحدة تؤدي نفس المعنى وهى (مجموعة).

المجموعة:

هي تجمع واضح المعالم من الأهداف التي تدعى عناصر أو أعضاء في المجموعة أو تجمع من الأشياء المتميزة والمعرفة تعريفاً جيداً، ونستخدم عادة الحروف الكبيرة $(A, B, C, D......)$ للتعبير عن المجموعات، كما نستخدم الحروف الصغيرة $(a, b, c, d........)$؛ للتعبير عن الأشياء (العناصر) التي تتكون منها المجموعة .

يعبر عن المجموعة بإحدى الطريقتين الآتيتين:

1- طريقة الحصر أو القائمة:

وتكون بكتابة جميع العناصر التي تتكون منها المجموعة، وتوضع بين قوسين على الشكل التالي $\{\quad\}$ ويفصل بين كل عنصر والذي يليه فاصلة (،).

أمثلة :

$$A = \{3, 4, 6, 9\}$$
$$N = \{a, f, g\}$$

2- طريقة الوصف:

إذا كان عدد عناصر المجموعة كبير فانه يمكن التعبير عنها بكتابة عناصرها الأولى، بحيث تكون كافية للتعرف على باقي عناصر المجموعة ثم توضع نقاط تدل على استمرارية عناصر المجموعة بنفس النمط، ثم يكتب العنصر الأخير الذي تنتهي عنده عناصر المجموعة.

مثال :

إذا كانت Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 100 فإنها تكتب على الشكل التالي:

$$Z = \{1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 99\}$$

ملاحظات:

1- ترتيب العناصر في المجموعة ليس له أهمية، فمثلا المجموعة $\{1,2,3\}$هي نفسها المجموعة $\{3,2,1\}$.

2- تكرار العناصر في المجموعة لا يزيد من عدد عناصرها، ويفضل عدم التكرار.

3- يمكن إعطاء خاصية معينة تميز عناصر المجموعة عن غيرها، ويمكن تحديد عناصر المجموعة بهذه الخاصية، **فمثلا** $\{\, x: p(x) \,\}$ تمثل المجموعة التي عناصرها x تتمتع بالخاصية P.

أمثلة:

1) $A=\{\, x : x$ عدد أولى يقع بين $0,12 \,\}$, $A=\{\,2,3,5,7,11\}$

2) $B=\{\, x\in IN : 3\le x\le 7 \,\}$ ، $B=\{\,3,4,5,6,7\,\}$

3) $C=\{\, x\in IN : 5< x<10 \,\}$ ، $C=\{\,6,7,8,9\,\}$

ملاحظة:

يستخدم الرمز $(\in)$ للدلالة على أن العنصر (ينتمي) إلي المجموعة، ويعني الرمز (:) العبارة (حيث إن).

المجموعة الخالية:

تعرف المجموعة الخالية بأنها المجموعة التي لا تحتوي على أية عناصر، ويرمز لها بالرمز ϕ (فآي)، كما يمكن أن نرمز لها بقوسين خاليين دون أية عناصر $\{\quad\}$.

أمثلة :

{ (عدد يقبل القسمة على 5 ويقع بين $x(3,1$: $A=\{\ x$ هذا يؤدى $A=\{\ \}$

{ (طالب عمره يتجاوز 100 سنة)x : x } $B=$ هذا يؤدى $B=\{\ \}$

المجموعة الجزئية:

إذا كانت A مجموعة جزئية من B، فإن كل عنصر من A هو أيضا في B، ويرمز لذلك بالرمز $A\subseteq B$, حيث $A\subseteq B\Leftrightarrow(s\in A\rightarrow s\in B)$، تكون مجموعة A جزئية من B إذا وفقط إذا كان كل عنصر من المجموعة A عنصراً من المجموعة B.

قوة المجموعة:

تعرف قوة المجموعة A على أنها مجموعة كل المجموعات الجزئية لهذه المجموعة، ويرمز لها $S(A)$ حيث $S(A)=\{X: X\subseteq A\}$.

ملاحظة:

إذا كان عدد عناصر المجموعة A يساوي k؛ فإن عدد عناصر أي قوة المجموعة A هو 2^K.

فمثلا :

إذا كانت $A=\{3\}$ فإن عدد عناصر $S(A)$ هو 2^1،

ويكون $S(A)=\{\phi,\{3\}\}$

إذا كانت $A=\{0,3,6\}$ فإن عدد عناصر $S(A)$ سيكون $2^3=8$.

ويكون

$$S(A)=\{\phi,\{0\},\{3\},\{6\},\{0,3\},\{0,6\},\{3,6\},\{0,3,6\}\}.$$

المجموعات المنتهية وغير المنتهية: Finite and Infinite sets

تكون المجموعة منتهية إذا كانت خالية، أو تحتوي على n من العناصر حيث إن n عدد صحيح موجب، و تكون المجموعة غير منتهية إذا كان عدد عناصرها غير منتهي .

المجموعات العدودة (القابلة للعد) وغير العدودة

Countable and uncountable sets

يقال عن المجموعة إنها عدودة إذا أمكن ترقيم عناصرها بالأعداد الطبيعية أي إذا وجد

تقابل بينها وبين أي مجموعة أعداد طبيعية، ويقال عن المجموعة أنها غير عدودة إذا لم يمكن ذلك.

ملاحظات: 1- كل مجموعة منتهية هي مجموعة قابلة للعد.

2- يوجد مجموعات غير منتهية قابلة للعد مثل مجموعة الأعداد الطبيعية.

أمثلة :

مجموعة الأعداد الطبيعية (مجموعة عدودة وغير منتهية).

مجموعة المستقيمات المارة بنقطة معينة في مستوى (مجموعة غير عدودة وغير منتهية).

مجموعة الأعداد الطبيعية بين 5، 30 (مجموعة عدودة ومنتهية).

المجموعات المتساوية: Equal sets

يقال لمجموعتين A و B أنهما متساويتان $A=B$ إذا وفقط إذا كانت $A\subseteq B$ ، $B\subseteq A$ ، أي أن المجموعتين المتساويتين هما مجموعتان تحتوى كل منهما عناصر الأخرى.

فمثلا:

1- إذا كانت $A=\{2,3,5,7,11\}$ وإذا كانت {(عدد أولى أصغر من 13) :B={x فإن $A=B$

2- إذا كانت $A=\{1,3,5,7\}$ وإذا كانت $B=\{1,3,5\}$

فإن $A\neq B$ لان $7\notin B$. ، $7\in A$

المجموعات المتكافئة: Equivalent sets

يقال عن المجموعتين أنهما متكافئتان إذا كان هناك تناظر أحادى بين عناصرهما وبمعنى آخر المجموعتان المتكافئتان هما مجموعتان عدد عناصرهما متساو، ويرمز لها بالرمز $\equiv$.

فمثلا:

1- إذا كانت $A=\{0,2,4,6,8,10\}$ وإذا كانت $B=\{a,b,c,d,e,f\}$ فإن $A\equiv B$

2- إذا كانت $A=\{0,1,3,5\}$ وإذا كانت $B=\{\alpha,\beta,\chi\}$ فإن A لا تكافئ B لان عدد عناصر المجموعة A أربعة وعدد عناصر المجموعة B ثلاثة .

المجموعة الشاملة: Universal Set

هي مجموعة تحوي جميع العناصر محل الدراسة، وبمعنى آخر أن المجموعة الشاملة هي مجموعة تحوي جميع المجموعات الجزئية للمجموعة المدروسة ويرمز لها بالرمز U.

وكأمثلة على المجموعات الشاملة:

مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى الأعداد الطبيعية، مجموعة كل عناصر الأعداد الصحيحة وغيرها من المجموعات.

الاحتواء: Inclusion

يقال عن المجموعة A أنها محتواة في B إذا كانت المجموعة A مجموعه جزئية (Subset) من المجموعة B، أي إذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمي إلى B، وتكتب عملية الاحتواء على الشكل التالي: $A \subseteq B$

فمثلا:

$$A = \{2, 7, 11\} \ , \ B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$
$$\therefore \ A \subseteq B$$

> **تعريف:**
> المجموعة A مجموعه جزئية فعلية (Proper Subset) من المجموعة B إذا كان $A \subseteq B$, وهناك عنصر في B لا يوجد في A , ونكتب ذلك $A \subseteq B \ , \ A \neq B$, وقد نكتبه فى بعض الأحيان $A \subset B$.

بعد تعريفنا للاحتواء نستطيع أن نعرف تساوي مجموعتين كما يلي:

1. $A = B$ وإذا وفقط إذا كان $A \subseteq B$ وكان $B \subseteq A$.
2. معنى $A \subset B$ انه يوجد على الأقل عنصر واحد في المجموعة B غير موجود في المجموعة A و جميع A هي عناصر في B .

ملاحظات:
1- المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من أي مجموعة.
2- المجموعة الخالية وحيدة.
3- قد تكون عناصر المجموعة مجموعات في حد ذاتها.

العمليات على المجموعات Operations On Sets

الاتحاد: Union

إذا كان A, B مجموعتين فان المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعتين تسمي اتحاد المجموعتين A, B ويرمز لها بالرمز $A \cup B$

$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ او } x \in B \}$$

فمثلا :

1- إذا كانت $A = \{0,2,4\}$ و إذا كانت $B = \{a,b,c\}$ فإن $A \cup B = \{0,2,4,a,b,c\}$

2- إذا كانت $A = \{0,1,3,5\}$ و إذا كانت $B = \{0,1,2\}$ فإن $A \cup B = \{0,1,2,3,5\}$

التقاطع: Intersection

إذا كانت A, B مجموعتين، فإن المجموعة التي تتكون من العناصر المشتركة بين المجموعتين A, B تسمي تقاطع المجموعتين A, B ويرمز لها بالرمز $A \cap B$

$$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ و } x \in B \}$$

فمثلا:

1- إذا كانت $A = \{0,2,4\}$ وإذا كانت $B = \{a,b,c\}$ فإن $A \cap B = \phi$

2- إذا كانت $A = \{0,1,3,5\}$ وإذا كانت $B = \{0,1,2\}$ فإن $A \cap B = \{0,1,\}$

المجموعة المكملة:

تعرف مكملة المجموعة A على أنها مجموعة كل العناصر غير المنتمية إلى المجموعة A ، بشرط انتمائها إلى المجموعة الشاملة، ويرمز لها بالرمز A^c ، أي أن:

$$A^c = \{x : x \notin A, x \in U\}$$

ومن هذا التعريف نستنتج أن تقاطع المجموعة مع مكملتها يعطي مجموعة خالية، ومكملة المكملة يعطي المجموعة الأصلية، وكذلك إتحاد المجموعة مع المكملة يعطي المجموعة الشاملة كالتالي:

$$A^c \cap A = \phi$$

$$A^c \cup A = U$$

$$(A^c)^c = A$$

فرق مجموعتين:

إذا كانت A, B مجموعتين؛ فإن فرق المجموعتين $A - B$ هو المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي توجد في A ، ولا توجد في B ، ويرمز لذلك بالرمز $A - B$

$$A - B = \{ x : x \in A \text{ و } x \notin B \}$$

المكملة النسبية:

إذا كانت $A \subseteq B$ ؛ فإن $A-B$ تسمى مكملة المجموعة B بالنسبة للمجموعة A ، ويرمز لذلك بالرمز B^C . على الرغم من أن المجموعة الشاملة بالمعنى المطلق غير موجودة فإنه في كل حالة نتعامل فيها مع المجموعات تكون هناك مجموعة شاملة نسبية فعلى سبيل المثال: عند التعامل مع مجموعة الأعداد الطبيعية IN ، نستطيع أن نفترض بأن Z (مجموعة الأعداد الصحيحة) هي المجموعة الشاملة (ونرمز عادة للمجموعة الشاملة بالرمز U) إذا كانت A هي المجموعة الشاملة U؛ فإن $U-B=A-B$ تسمي مكملة B ، ويرمز لها بالرمز B^C نستطيع تعريف B^C بطريقة أخرى ، وهي:

$$B^C = \{ x : x \notin B \}$$

مثال:

إذا كانت $A=\{1,3,5,7\}$ ، $B=\{2,3,4,5,6,8\}$ وكانت المجموعة الشاملة هي $U=\{1,2,3,4,,,10\}$ فأوجد: $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, B^c .

الحل:

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$
$$A\cap B=\{3,5\}$$
$$A-B=\{1,7\}$$
$$B^c=\{1,7,9,10\}$$

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,4,8\}$, $B=\{2,3,5,6\}$ وكانت المجموعة الشاملة هي $U=\{1,2,........10\}$ فأوجد: $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, B^c .

الحل:

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$$
$$A\cap B=\{2\}$$
$$A-B=\{1,4,8\}$$
$$B^c=U-B=\{1,4,7,8,9,10\}$$

مثال:

إذا كانت، $A=\{1,4,9\}$ ، $B=\{1,3,5,7,9\}$ ، $C=\{2,3,5,7\}$ ، والمجموعة الشاملة هي $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$:

فأوجد: C^c , A^c , $A\cup B\ B^c$, $A^c\cap B$, $A-B$, $C\cap(B^c\cup A)$.

الحل: , $C^c=\{1,4,6,8,9\}$, $B^c=\{2,4,5,6,8\}$, $A^c=\{2,3,5,6,7,8\}$

$A-B=\{4\}$, $A^c\cap B=\{3,5,7\}$, $A\cup B=\{1,3,4,5,7,9\}$

جبر المجموعات:

إذا كانت A,B,C ثلاث مجموعات فإنه يمكننا إثبات العلاقات التالية:

1- التبديل $A\cup B=B\cup A$ و $A\cap B=B\cap A$.

2- التنسيق $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ و $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

3- التوزيع $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

4- التكميل $(A^c)^c=A$ $A^c\cup A=U$ $A^c\cap A=\phi$.

5- قانوني دومورجان $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ و $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

ولإثبات العلاقات الجبرية بين المجموعات هناك عدة طرق منها:

1- باستخدام العمليات على المجموعات:

لنبرهن أن $A\cup B=B\cup A$ باستخدام العمليات والتعاريف الأساسية للمجموعات:

$x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A$ أو $x\in B\Leftrightarrow x\in B$ أو $x\in A$ $\Leftrightarrow$ $x\in B\cup A$

منها: $A\cup B=B\cup A$

لنبرهن أيضاً أن $A\cap B=B\cap A$:

$x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A$ و $x\in B\Leftrightarrow x\in B$ و $x\in A$ $\Leftrightarrow$ $x\in B\cap A$ منها: $A\cap B=B\cap A$

مثال:

إذا كانت $C=\{2,3,5,7\}$ ، $B=\{1,3,5,7,9\}$ ، $A=\{1,4,9\}$ ،

أثبت أن: $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ و $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

و $A\cup B=B\cup A$

الحل:

واضح أن:
$$\begin{gathered}A\cup B=B\cup A\\ \{1,2,3,4,5,7,9\}=\{1,2,3,4,5,7,9\}\end{gathered}$$
،
$$\begin{gathered}A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\\ \{1,9\}=\{1,9\}\end{gathered}$$
،

$$\begin{gathered}A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C\\ \{\ \}=\{\ \}\end{gathered}$$

وبنفس الطريقة السابقة نستطيع إثبات باقي القوانين.

2- باستخدام جداول الانتماء:

تستخدم جداول الانتماء؛لإثبات قوانين المجموعات، ويتكون جدول الانتماء من أسطر يشتمل كل سطر على احتمالات الانتماء، ويعتمد عدد أسطر هذه الجداول على عدد المجموعات المراد إثبات العلاقة بينها، فإذا كان لدينا مجموعة واحدة؛ فإن الجدول سيتكون من سطرين، أما إذا كان لدينا مجموعتان؛ فإن الجدول سيتكون من أربعة أسطر، وبصفة عامة فإن عدد أسطر جداول الانتماء يمكن تحديده باستخدام العلاقة 2^n حيث n تشير إلى عدد المجموعات، كما سيتضح من خلال استخدام هذه الجداول في إثبات بعض العلاقات السابقة:

لإثبات – قانون التبديل.

إذا كان A, B مجموعتين ؛ فإن إثبات هذه العلاقة كالتالي:

نكوّن جدول يتكون من 4 صفوف من العلاقة $4 = 2^2$:

A	B	$A\cap B$	$B\cap A$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

من تطابق العمودين الثالث والرابع نثبت صحة علاقة التبديل.

– قانون التنسيق.

إذا كانت A, B, C ثلاث مجموعات أثبت أن $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$: حيث إن القانون يحتوي علي ثلاث مجموعات؛ فإن عدد الأسطر في جدول الانتماء هو $8 = 2^3$ أسطر، كما هو مبين بالجدول التالي:

A	B	C	$A\cap B$	$A\cap C$	$A\cap(B\cap C)$	$(A\cap B)\cap C$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

من الجدول نلاحظ أن $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ لان العامودان الممثلان في جدول الانتماء يحتويان على نفس رموز الانتماء.

خط الأعداد الحقيقية: The Real numbers line

في هذا البند سنقدم عرضاً موجزاً لبنية نظام الأعداد الحقيقية، يتكون خط الأعداد من جميع الأعداد التي يمكن تقسيمها إلى نظامي الأعداد الكسرية (العادية)، والأعداد الصماء على الشكل التالي:

$$-\infty \longleftrightarrow +\infty$$

$$.............-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3............$$

الأعداد الطبيعية: The Natural Numbers

وهى أعداد نظام العد، ويرمز لها بالرمز IN ، ويمكن الحصول على عدد منها بجمع العدد 1 إلى نفسه عدد من المرات حيث $IN = \{1,2,3,..................\}$ وهي مغلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب، ولكنها غير مغلقة دائماً بالنسبة لعمليتي القسمة والطرح (أي أن حاصل جمع أو ضرب أي عددين طبيعيين ينتج عنها عدد طبيعي أيضاً، ولكن بالنسبة لعمليتي القسمة والطرح لأي عددين طبيعيين لا يكون بالضرورة نتاجها عدداً طبيعياً وهي مجموعة غير منتهية.

الأعداد الصحيحة: The Integer Numbers

وهى الأعداد الطبيعية مضافاً إليها الصفر وسالب الأعداد الطبيعية، وهذه المجموعة مغلقة تحت عمليات الجمع والضرب والطرح، ولكنها غير مغلقة على عملية القسمة، ويرمز لها بالرمز الأتي Z أو I حيث: $Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,........\}$ وهي مجموعة غير منتهية .

الأعداد القياسية أو الكسرية: The Rational Number

وهى الأعداد التي تكتب على شكل $\frac{a}{b}$ حيث a,b عددان صحيحان و $b \neq 0$، ويرمز لمجموعة الأعداد العادية (الكسرية) بالرمز Q أي أن: $Q=\left\{\frac{a}{b} : a,b \in Z , b \neq 0\right\}$، وهذه المجموعة مغلقة تحت عمليات الجمع والضرب والطرح، وكذلك القسمة، **نلاحظ** أن أي عدد صحيح a يكون العدد القياسي $\frac{a}{1}$.

العدد الكسري: إما أن يكون عدداً عشرياً منتهياً مثل 0.256، أو عدداً عشرياً غير منته ومتكرر المقاطع ***مثل:*** $\frac{3}{11} = 0.272727.............$ ، $\frac{1}{3} = 0.33333...........$.

الأعداد غير العادية (الكسرية) The Irrational Numbers

العدد غير الكسري هو العدد الذي لا يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{b}$، حيث a,b يمثلان عددين صحيحين، أي أن الأعداد غير العادية هي الأعداد الحقيقية التي لا تكون أعدادا عادية، ويرمز لمجموعة الأعداد غير العادية بالرمز Q^c أي أن:

$$Q^c = \left\{ r : r \neq \frac{a}{b}, \forall\, a,b \in Z \right\}$$

بعض أمثلة الأعداد غير العادية (الكسرية)

$$\pi = 3.14159265..... \ , \quad \sqrt{2} = 1.41421356.......$$

الأعداد الحقيقية The Real Numbers

الأعداد الحقيقية هي كل الأعداد العادية وغير العادية، وتلك التي لا نستطيع التعبير عنها بكسور، مثل نصف محيط الدائرة التي نصف قطرها الوحدة، والذي نعبر عنه بقيم تقريبية $\pi = 3.14159265......$ وغيرها، ويرمز لها بالرمز IR، أي أن: $IR = Q \cup Q^c$ تمثل الأعداد الحقيقية بنقط على خط أفقي، حيث يقابل كل عدد حقيقي نقطة واحدة فقط، والعكس صحيح كذلك، أي أن كل نقطة على الخط الأفقي يقابلها عدد حقيقي واحد فقط، ويسمى هذا الخط بالخط الحقيقي أو خط الأعداد الحقيقية (Real Line)

$$-\infty \longleftarrow \cdots\cdots -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \cdots\cdots \longrightarrow +\infty$$

حيث الرمز ∞ (يشير إلى ما لا نهاية) بمعنى أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير منتهية.

ملاحظة:

إن مجموعة الأعداد الطبيعية IN مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة Z، وهى بدورها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد العادية Q، والأخيرة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية IR، أي أن:

$$IN \subseteq Z \subseteq Q \subseteq IR \ .$$

بعض خواص الأعداد الحقيقية:

إذا كانت a, b, c أعداداً حقيقية ، فإن:

$a+b$ عدد حقيقي ، و $a-b$ عدد حقيقي .

$a\times b$ عدد حقيقي ، و $\frac{a}{b}$ حيث $b\neq 0$ عدد حقيقي .

0 عدد حقيقي ، وهو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع

1 عدد حقيقي ، وهو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الضرب .

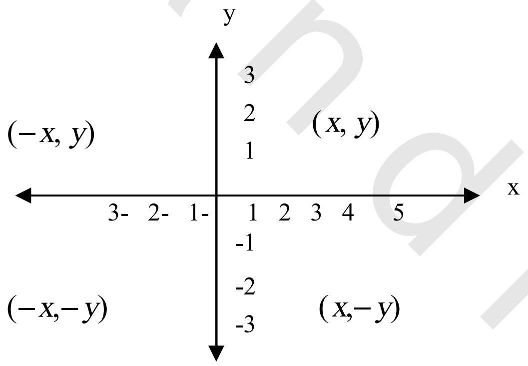
لكل عدد حقيقي a معكوس (نظير) جمعي $(-a)$.

لكل عدد حقيقي a لا يساوى الصفر معكوس(نظير) ضربي $\left(\frac{1}{a}\right)$.

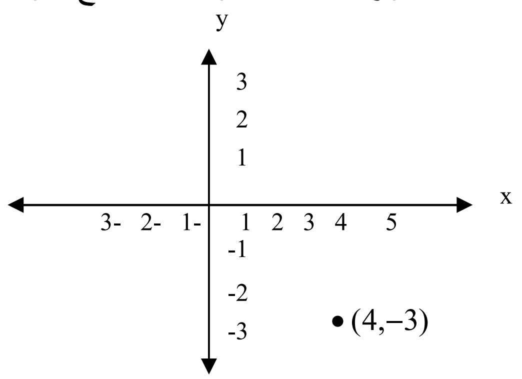
نظام الإحداثيات في بعدين "الإحداثيات المتعامدة أو الديكارتية"

The Rectangular two Dimensions Coordinate system

يتكون نظام الإحداثيات في بعدين من تقاطع خطي أعداد متعامدين عند نقطة الأصل $(0,0)$، ويسمى محور الإحداثيات الأفقي بالمحور x، والمحور الرأسي بالمحور y، ويقسم المستوي إلى أربعة أجزاء متساوية، يسمى كل جزء منها ربع (quaolrant) وتحدد كل نقطة في هذا المستوي ثنائي مرتب "ordered pair"، يرمز له بالرمز (x, y)، و تختلف إشارات الإحداثيات حسب موقعها في المستوى، وتكون كالتالي بفرض x ، y عددان حقيقيان موجبان: في الربع الأول (x, y)، والربع الثاني $(-x, y)$، والربع الثالث $(-x,-y)$، أما في الربع الرابع فهي النقطة $(x,-y)$. ويسمى هذا المستوى أحيانا بالمستوى الديكارتي (الكارتيزي) (plane Rectangular Cartesian Coordinates) نسبة إلى الرياضي الفرنسي ديكارت (1596–1650)؛ حيث كان أول من استخدم نظام الإحداثيات في بعدين . يرمز للمستوي الكارتيزي في بعدين بالرمز IR^2 حيث: $IR^2 = IR\times IR = \{\,(x,y)\ :\ x, y \in IR\}$



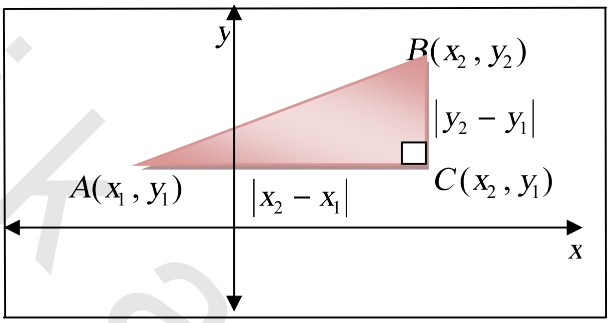
فمثلا: لرسم النقطة $(4,-3)$ نتحرك أربع وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات وثلاث وحدات في الاتجاه السالب لمحور الصادات، وعند التقاطع تكون النقطة $(4,-3)$.



المسافة بين نقطتين في المستوى الديكارتي: Distance Between two points

إذا كانت $A(x_1, y_1)\ ,\ B(x_2, y_2)\ \in IR^2$ ، عندئذ لإيجاد المسافة d بين النقطتين A, B نكوّن المثلث ABC قائم الزاوية في C .

نلاحظ: أن إحداثيات النقطة C هو (x_2, y_1)، وبما أن A, C على خط أفقي واحد فان المسافة AC تساوى $|x_2 - x_1|$، وكذلك النقطتان B, C على خط عمودي واحد؛ فان المسافة BC تساوي $|y_2 - y_1|$.



من نظرية فيثاغورث ، نجد أن $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ أي أن:

$$d = \sqrt{\overline{AB}^2} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$$

إذا:

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

وبما أن $|x|^2 = x^2$ فان:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وتسمى هذه الصيغة بصيغة المسافة .

مثال:

أوجد المسافة بين النقطتين $(2, 5)\ ,\ (-3, 7)$.

الحل:

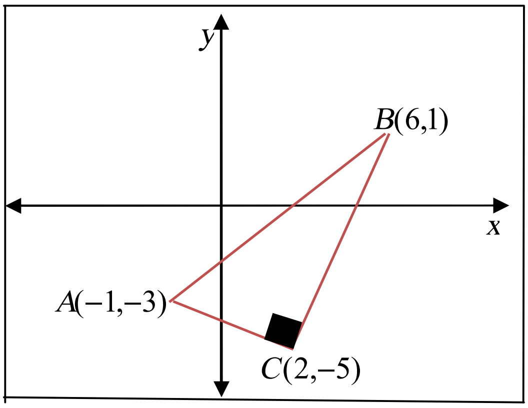
$$\because\ d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\therefore\ d = \sqrt{(-3-2)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

مثال:

اثبت أن النقاط $C(2,-5)$, $B(6,1)$, $A(-1,-3)$ هي رؤوس مثلث قائم الزاوية وأوجد مساحته.

الحل: باستخدام قانون المسافة بين نقطتين نجد:



$$d(A, B) = \sqrt{(6-(-1)^2) + (1-(-3))^2}$$

$$= \sqrt{(7)^2 + (4)^2} = \sqrt{65}$$

$$d(B, c) = \sqrt{(2-6)^2 + (-5-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52}$$

$$d(A, c) = \sqrt{(2-(-1)^2 + (-5-(-3))^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\because \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$(\sqrt{65})^2 = (\sqrt{52})^2 (\sqrt{13})^2$$

$$65 = 52 + 13$$

$$65 = 65$$

إذن المثلث ABC قائم الزاوية في C

نوجد مساحة المثلث ABC القائم الزاوية في C

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة ×الارتفاع

$$A = \frac{1}{2}(\overline{AC}) \times (\overline{BC})$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{13}.\sqrt{52} = \frac{1}{2}\sqrt{13}.\sqrt{4.13}$$

$$= \frac{1}{2}(2).\sqrt{13}.\sqrt{13} = 13$$ وحدة مربعة

منتصف المسافة بين نقطتين: Middle of Line Piece

إن إحداثي نقطة منتصف المسافة بين نقطتين $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ هي:

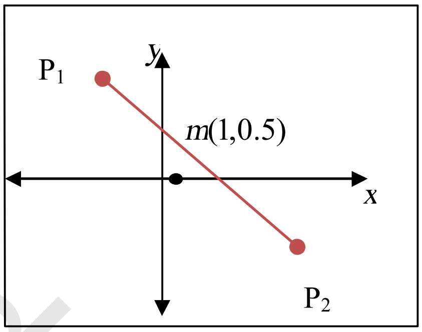
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

مثال:

أوجد النقطة M التي تنصف القطعة المستقيمة الواصلة من النقطة $P_1(-2,3)$ إلى النقطة $P_2(4,-2)$، وارسم النقط M,P_1,P_2، ثم تحقق من أن $d(P_1,M)=d(P_2,M)$.

الحل:

$\because$ نقطة المنتصف M هي:



$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{3+(-2)}{2}\right)$$

$$M=(1,\frac{1}{2})$$

$$d(P_1,M)=\sqrt{(-2-1)^2+(3-\frac{1}{2})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{61}{4}}=\frac{\sqrt{61}}{2}$$

$$d(p_2,M)=\sqrt{(4-1)^2+(-2-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{61}{4}}=\frac{\sqrt{61}}{2}$$

$$\therefore\quad d(P_1,M)=d(P_2,M)$$

مثال: اوجد قيمة x التي تجعل المسافة بين النقطتين $(-2,3)$, (x,x) مساوية 5 وحدات.

الحل: من قانون المسافة بين نقطتين $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)}$

$5=\sqrt{(x+2)^2+(x-3)^2}$ بتربيع الطرفين نحصل على

$$25=(x+2)^2+(x-3)$$

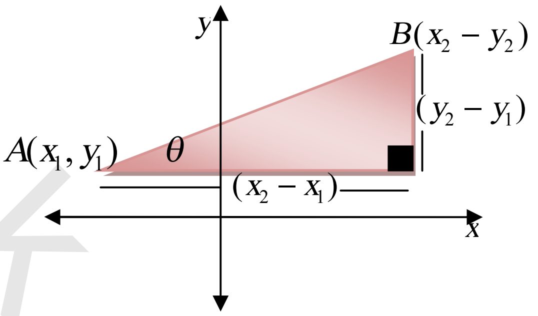
$2x^2-2x-12=0$ ومنها $(x-3)(x+2)=0$

بذلك فإن قيمة $x=2$ أو $x=3$

معادلة الخط المستقيم Equation of straight line

من الموضوعات الهامة في الرياضيات دراسة طرق إيجاد معادلة الخط المستقيم، وذلك بعد معرفة ميله وعلاقة المستقيمات ببعضها .

ميل المستقيم (slope): هو قياس معدل التغير النسبي للاحداثيين x, y للنقطة (x, y) كلما تحركنا على المستقيم AB ، كما في الشكل التالي:



تعريف:

لنفترض أن L مستقيم غير(رأسي) عمودي وأن $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ نقطتان عليه, فإن ميل المستقيم L والذي سنرمز له بالرمز m يمكن الحصول عليه كما يلي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نلاحظ أن:

- ميل المستقيم هو خارج قسمة فرق الصادات على فرق السينات لأي نقطتين عليه.
- ميل المستقيم العمودي (الرأسي) يساوي ∞، أي أن المستقيم (الرأسي) العمودي له ميل غير معرف.

ملاحظات :

1- إذا كان $m > 0$ ؛ فإن المستقيم يتجه إلي أعلى كلما تحركنا من اليسار إلى اليمين (زاوية الميل حادة) .

2- إذا كان $m < 0$ ؛ فإن المستقيم يتجه إلى أسفل كلما تحركنا من اليسار إلى اليمين

3- (زاوية الميل حادة) .

4- ميل المستقيم m هو ظل الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع محور السينات، أو المستقيم الموازي لمحور السينات، أي أن: $m = \tan\theta$.

شرط توازي مستقيمين :

إذا كان ميل المستقيم L_1 هو m_1 ، وميل المستقيم L_2 هو m_2 ؛ فإن $m_1 = m_2$ إذا وفقط إذا كان L_1 يوازي L_2 .

شرط تعامد مستقيمين:

إذا كان ميل المستقيم L_1 هو m_1 ، وميل المستقيم L_2 هو m_2 ؛ فإن $m_1 \times m_2 = -1$ إذا وفقط كان L_1 عمودي على L_2 .

مثال:

إذا وقعت النقطتان $(2,1)$, $(1,-1)$ على المستقيم L_1 ؛ ووقعت النقطتان $(-2,0)$, $(0,4)$ على المستقيم L_2 ، فحدد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين .

الحل:

$$m_2 = \frac{4-0}{0+2} = 2 \quad ، \quad m_1 = \frac{1+1}{2-1} = 2$$

إذا المستقيمان L_2 L_1 متوازيان ؛ لأن $m_1 = m_2$

مثال:

إذا كان المستقيم L_1 يمر بالنقطتين $(1,-2)$, $(5,6)$ فأوجد ميل L_2 الذي يكون عمودي على المستقيم L_1 .

الحل:

$$m_1 = \frac{6-(-2)}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$$

بما أن L_2 عمودي على L_1 فإن:

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \rightarrow m_2 = \frac{-1}{2}$$

مثال:

إذا مر المستقيم L_1 بالنقطتين $(6,-2)$, $(2,-6)$ ، فأوجد ميل L_2 الذي يكون عمودي على المستقيم L_1 و L_3 الموازي للمستقيم L_1 .

الحل:

نوجد أولا ميل L_1 $m_1 = \frac{-2+6}{6-2} = \frac{4}{4} = 1$ ومنها يكون ميل L_2 هو $L_2 = -1$ أما ميل L_3 يكون $L_3 = 1$ حسب التعريف السابق.

معادلة الخط المستقيم وطرق إيجادها:

المعادلة العامة لمعادلة المستقيم هي $Ax+By+C=0$ ، حيث A,B,C أعداد، ويشترط ألا يساوي كلاً من A و B صفراً في آن واحد . بذلك تكون الصورة العامة لمعادلة خط المستقيم هي

$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ بوضع $\frac{A}{B}=m$ وهي تمثل ميل المستقيم و $\frac{C}{B}=b$ تمثل الجزء المقطوع من y .

دراسة المعادلة العامة لمعادلة المستقيم: General Equation

إذا كان $C=0$ ؛ فإن $Ax+By=0$ ومنها: $y=\frac{-A}{B}x$

وهي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله $m=\frac{-A}{B}$

فمثلا:

$y=-\frac{8}{3}x$ هي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله $\frac{-8}{3}$.

إذا كان $B=0$ و $A\neq 0$ فإن $Ax+C=0$ ومنها: $x=-\frac{C}{A}$

وهي معادلة مستقيم رأسي يوازي محور الصادات، ويقطع جزءاً من محور السينات مقداره $\frac{-C}{A}$.

فمثلا:

$x=-\frac{9}{4}$ هو مستقيم يوازي المحور yy' ويمر بالنقطة $\left(\frac{-9}{4},0\right)$

إذا كان $B\neq 0$, $A=0$ فإن $By+C=0$ ومنها: $y=-\frac{C}{B}$

وهي معادلة مستقيم يوازي محور السينات، ويقطع جزءاً من محور الصادات مقداره $-\frac{C}{B}$.

فمثلا:

$y=\frac{2}{5}$ هو مستقيم يوازي المحور xx' ويمر بالنقطة $\left(0,\frac{2}{5}\right)$.

طرق إيجاد معادلة المستقيم:

1- معادلة المستقيم بدلالة ميله ونقطة عليه Point – slope form :

لنفرض أن المستقيم L (غير رأسي) يمر بالنقطة (x_1, y_1)، وأن ميله m نأخذ أي نقطة عامة $p(x, y)$ على المستقيم L فنجد من صيغة الميل أن $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

وهذا يكافئ $(y - y_1) = m(x - x_1)$

وهذه هي صيغة معادلة المستقيم L بمعلومية ميله ونقطة عليه .

مثال:

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(5,-7)$ ، ويوازي المستقيم $6x + 3y - 4 = 0$.

الحل:

معادلة المستقيم المار بالنقطة $(5,-7)$ هي:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$
$$(y + 7) = m(x - 5)$$

$\because$ المستقيم يوازي المستقيم $6x + 3y - 4 = 0$

$$m = \frac{-6}{3} = -2$$

$\therefore$ معادلة المستقيم هي:

$$y + 7 = -2(x - 5)$$
$$y + 7 = -2x + 10$$
$$y + 2x = 3$$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,7)$, $B(-3,2)$ عند منتصف AB .

الحل:

إحداثي منتصف قطعة مستقيمة هي:

$$\mathrm{p} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

وبالتالي يكون $\mathrm{p} = \left(\dfrac{1 + (-3)}{2}, \dfrac{7 + 2}{2}\right) = \left(-1, \dfrac{9}{2}\right)$

∵ المستقيم عمودي على المستقيم الواصل بين النقطتين

$$\therefore \quad m_1 \times m_2 = -1$$

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-7}{-3-1} \quad \rightarrow \quad m_1 = \frac{5}{-4}$$

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \quad \rightarrow \quad m_2 = \frac{-1}{\frac{5}{-4}} \quad \rightarrow \quad m_2 = \frac{4}{5}$$

∴ معادلة المستقيم هي $(y - y_2) = m_2\,(x - x_2)$

$$(y-2) = \frac{4}{5}(x+3) \quad \rightarrow \quad 5y - 10 = 4x + 12$$

$$5y - 4x - 22 = 0$$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$ وعمودي على المستقيم $2x + 4y - \frac{8}{9} = 0$.

الحل:

∵ معادلة المستقيم المار بالنقطة $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$ هي:

$$(y - y_1) = m\,(x - x_1)$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right) = m\,(x+4)$$

∵ المستقيم عمودي على المستقيم $2x + 4y - \frac{8}{9} = 0$

∵ ميل هذا المستقيم هو $m_1 = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

∴ ميل المستقيم العمودي هو m_2

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \quad \rightarrow \quad m_2 = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} \quad \rightarrow \quad m_2 = 2$$

∴ معادلة المستقيم هي:

$$y - \frac{1}{2} = 2(x+4)$$

$$y - \frac{1}{2} = 2x + 8 \quad \rightarrow \quad y = 2x + 8 + \frac{1}{2}$$

$$y = 2x + \frac{17}{2}$$

2- معادلة مستقيم بدلالة نقطتين منه Two points- form:

إذا كانت النقطتان $B(x_2, y_2)$ و $A(x_1, y_1)$ تقع على المستقيم L، فإن ميله m هو $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$، نختار إحدى النقطتين، ولتكن $A(x_1, y_1)$، والميل الذي حصلنا عليه، ونستخدم الصيغة السابقة $(y - y_1) = m_1\,(x - x_1)$.

أي أن: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

وهذه هي معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين $B(x_2, y_2)$, $A(x_1, y_1)$.

مثال:

عين معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(3,-2)$, $(1,4)$.

الحل:

باستخدام صيغة النقطتين نجد: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$$y + 2 = \frac{4+2}{1-3}(x-3)$$

$$y + 3x = 7$$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{8}, \frac{1}{4}\right)$.

الحل:

باستخدام صيغة النقطتين نجد: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$$\left(y - \frac{7}{3}\right) = \frac{\frac{1}{4} - \frac{7}{3}}{\frac{2}{8} - \frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(y - \frac{7}{3}\right) = \frac{\frac{-25}{12}}{\frac{7}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(y - \frac{7}{3}\right) = \frac{-50}{84}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y\frac{-50}{84}x + \frac{50}{168} + \frac{7}{3} \rightarrow y = \frac{-50}{84}x + \frac{392}{168}$$

$$y = \frac{-25}{42}x + \frac{49}{21}$$

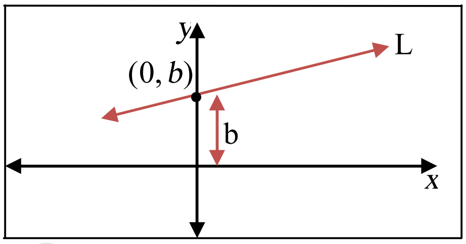
3- معادلة المستقيم بدلالة ميله والجزء الذي يقطعه من محور الصادات:

Slope – Intercept form

لنفرض أن المستقيم L يقطع جزءاً من محور الصادات مقداره b، وأن ميله m ، فإذا استعملنا صيغة الميل ونقطة نجد أن: $(y - y_1) = m_1\ (x - x_1)$

وهذا يكافئ $y = m\,x + b$

وهي معادلة المستقيم الذي يقطع الجزء b من محور الصادات وميله m



مثال:

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{-1}{2}$ ويقطع $\frac{3}{4}$ من محور الصادات.

الحل:

صيغة الميل والجزء المقطوع من محور الصادات هي: $y = m\,x + b$ منها نحصل على $y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{4}$ وهذا يكافئ: $2x + 4y = 3$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم $\frac{1}{2}x + 4y + \frac{5}{4} = 0$ ويقطع $\frac{1}{2}$ من محور الصادات

الحل:

$\because$ المستقيم يوازى المستقيم $\frac{1}{2}x + 4\,y + \frac{5}{4} = 0$

$\therefore$ ميله هو $m = \frac{-\frac{1}{2}}{4} = \frac{-1}{8}$

$\because$ صيغة الميل والجزء المقطوع من محور الصادات هي: $y = m\,x + b$

نجد: $y = \frac{-1}{8}x + \frac{1}{2}$

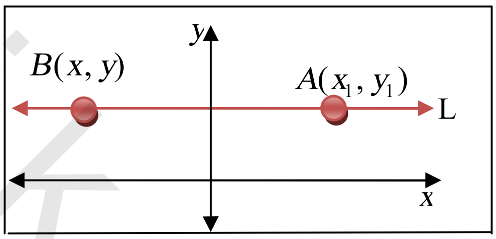
4- معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (x_1, y_1) :

Equation of a Horizontal line

بما أن المستقيم L أفقيُ أي يوازي محور السينات فإن ميله؛ $m=0$، لأن الإحداثي الصادي لأي نقطة هو y_1 . إذا كانت (x, y) نقطة عامة على المستقيم L فإن:

$$y - y_1 = 0 \quad \rightarrow \quad y = y_1$$

وهى معادلة المستقيم الأفقي المار بالنقطة (x_1 , y_1) :



مثال:

أوجد معادلة المستقيم الأفقي والمار بالنقطة $(2,1)$.

الحل:

معادلة المستقيم الأفقي الذي يمر بالنقطة (x_1 , y_1) هي $y = y_1$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي $y = 1$

مثال:

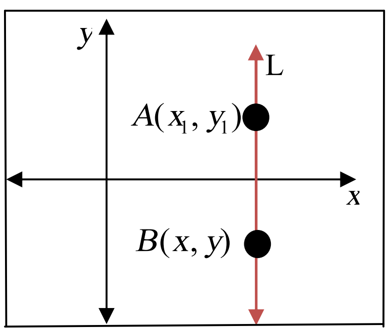
أوجد معادلة المستقيم الأفقي الذي يمر بالنقطة $\left(\frac{3}{4} , \frac{3}{5}\right)$.

الحل:

معادلة المستقيم الأفقي الذي يمر بالنقطة (x_1 , y_1) هي $y = y_1$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي: $y = \frac{3}{4}$

5- معادلة المستقيم الرأسي والمار بالنقطة (x_1, y_1) A vertical line:



بما أن المستقيم L رأسيا أي يوازي محور الصادات، وأن الإحداثي السيني لأي نقطة عليه هو x_1 ، وإذا كانت (x, y) نقطة عامة على المستقيم L فإن: $x - x_1 = 0$ وبذلك تكون معادلة المستقيم الرأسي والمار بالنقطة (x_1 , y_1) هي: $x = x_1$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{4}\right)$.

الحل:

معادلة المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة (x_1, y_1) هي $x = x_1$

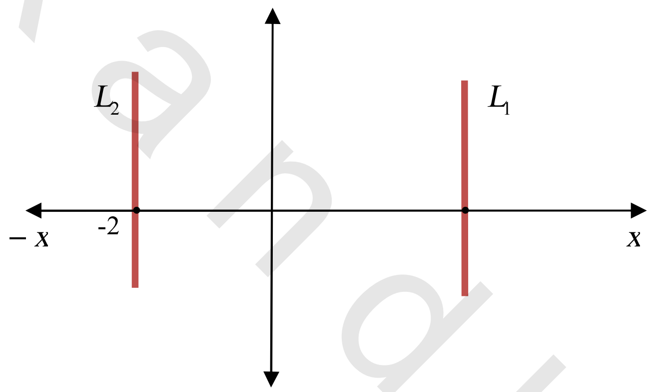
$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي $x = \frac{3}{5}$

مثال:

برهن أن المستقيمان $x = 5$ و $x = -2$ متوازيان.

الحل :

بما أن المستقيمان رأسيان فإن كل منهما يوازي محور الصادات وبالتالي هما متوازيان.

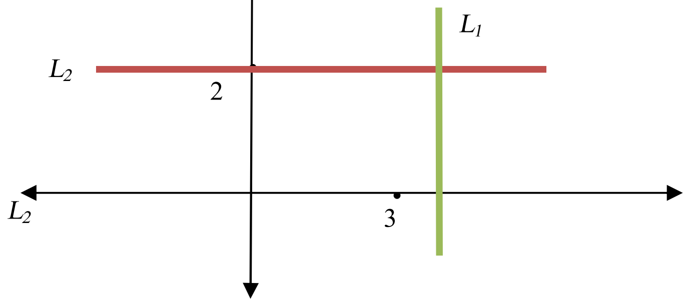


مثال:

برهن أن المستقيمان $x = 3$ و $y = 2$ متعامدان.

الحل:

بما أن المستقيم الأول رأسي والمستقيم الثاني أفقي فإن الأول يوازي محور السينات والثاني يوازي محور الصادات فنهما متعامدان



المتباينات Inequalities

يمكن تعريف إشارات المتباينة على النحو التالي: $<\ ,\ >\ ,\ \leq\ ,\ \geq$، والتي تدعى على الترتيب: أصغر، أكبر، أصغر أو يساوي، أكبر أو يساوي على الشكل التالي:

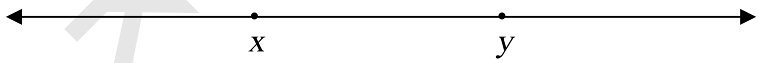
$x < y$ تعني أن $y - x$ موجب.

$y < x$ تعني أن $y - x$ سالب.

$x \leq y$ تعني أن $y - x$ ليس سالباً.

$y \leq x$ تعني أن $y - x$ ليس موجباً.

وهندسياً على محور الأعداد الحقيقية تعني العبارة $x < y$ أن النقطة X تكون على خط الأعداد على يسار النقطة y .



فمثلاً:

1) $3 < 4$ أو $4 > 3$ تعني أن 3 أصغر من 4 أو 4 أكبر من 3.

2) $x \leq 5$ تعني أن x عدد حقيقي أصغر أو يساوي 5، فهو أي عدد حقيقي لا يزيد عن 5.

3) $2 < x < 6$ تعني أن x أي عدد حقيقي موجود مابين 2، 6، وهو أكبر من 2 وأصغر من 6.

بعض خواص المتباينات: Properties of Inequalities

إذا كانت $a\ ,\ b\ ,\ c$ أعداداً حقيقة فإنَّ:

1) إذا كان $a < b$ و $b < c$ فإن $a < c$

2) إذا كان $a < b$ فإن $a \pm c < b \pm c$

3) إذا كان $a < b$ و $c > 0$ فإن $a \times c < b \times c$ لأي عدد حقيقي c.

4) إذا كان $a < b$ و $c < 0$ فإن $a \times c > b \times c$ لأي عدد حقيقي c.

5) إذا كان $a > 0$ فإن $\frac{1}{a} > 0$ وإذا كان $a < 0$ فإن $\frac{1}{a} < 0$.

6) إذا كان $0 < a < b$ فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

7) إذا كان $a \times b > 0$ فإن كلاً من a, b إشارة واحدة .

8) إذا كان $a \times b < 0$ فإن كلاً من a, b ذات إشارة مختلفة عن الآخر .

9) إذا كان $a < b$ و $c < d$ فإن $a + c < b + d$.

فمثلاً:

1) $2<1$ و $4<2$ هذا يؤدي إلي $1<4$.

2) $1<2$ وبالتالي $1+3<2+3$ ، $1-3<2-3$.

3) $2<5$ وبالتالي $2\times3<5\times3$.

4) $2<5$ وبالتالي $2\times(-3)>5\times(-3)$.

5) $0>2$ وبالتالي $0>\frac{1}{2}$ و $0<2-$ وبالتالي $-\frac{1}{2}<0$.

6) $2<3$ وبالتالي $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$.

7) $0>2\times3$ وبالتالي $0>2$، $3>0$.

$0>(-3)\times(-2)$ وبالتالي $0<2-$، $-3<0$.

8) $0>(-3)\times2$ وبالتالي $0>2$، $-3<0$.

$0<3\times(-2)$ وبالتالي $0<2-$، $3>0$.

9) $2<3$ و $5>4$وبالتالي $2+4<3+5$.

الفترات (المجالات) Intervals:

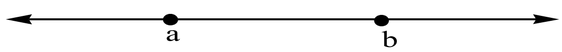
تعريف:

الفترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية IR ، ولها أحد الأشكال التالية:

1- الفترة (المجال) المغلقة Closed Interval

ويرمز لها بالشكل $[a,b]$ حيث $a<b$ ، وتشكل مجموعة الأعداد الحقيقية من محور الأعداد الحقيقية الواقعة بين العددين a , b ، متضمنا الطرفين a , b ، وتكتب (رياضياً) على الشكل:

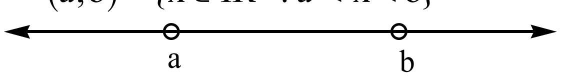
$$[a,b]=\{x\in IR \ : a\le x\le b\}$$



2- الفترة (المجال) المفتوحة Interval Open

ويرمز لها بالرمز $]a,b[$ أو (a,b) حيث $a<b$ وتشكل مجموعة الأعداد الحقيقية من محور الأعداد الحقيقية الواقعة تماماً بين العددين a , b ، وتكتب (رياضياً) على الشكل:

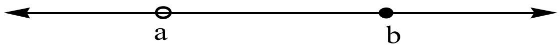
$$(a,b)=\{x\in IR \ : a<x<b\}$$



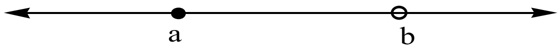
3- الفترة (المجال) نصف المفتوحة أو نصف المغلقة (Half Closed Half Open) Interval

ويمز لهما بالرمز $[a,b)$ أو $(a,b]$، وتكتب (رياضياً) على الشكل:

$$(a,b]=\{x\in IR \ : a<x\leq b\}$$



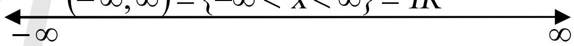
$$[a,b)=\{x\in IR \ : a\leq x<b\}$$



ملاحظة:

يمكن لأحد طرفي الفترة أو كلاهما أن يكون في اللانهاية الموجبة أو السالبة، وعندها سيكون ذلك الطرف مفتوحاً.

$$(-\infty,\infty)=\{-\infty<x<\infty\}=IR$$



فمثلاً: أكتب مجموعات الأعداد الحقيقية التالية على شكل فترات.

1) إذا كانت $A=\{x\in IR:1\leq x\leq 3\}$ فإن $A=[1,3]$.

2) إذا كانت $B=\{x\in IR:-1<x\leq 6\}$ فإن $B=(-1,6]$.

3) إذا كانت $C=\{x\in IR:4<x<10\}$ فإن $C=(4,10)$.

4) إذا كانت $D=\{x\in IR:3\leq x<7\}$ فإن $D=[3,7)$.

5) إذا كانت $E=\{x\in IR:8<x\}$ فإن $E=(8,\infty)$.

6) إذا كانت $F=\{x\in IR:x\leq -2\}$ فإن $F=(-\infty,-2]$.

بعد التعرف على أنواع الفترات نتطرق إلي حل أنواع المتباينات على النحو التالي:

أ- حل المتباينة $ax+b>0$:

لحل المتباينة الخطية نتبع الخطوات التالية:

1- نحل المعادلة $ax+b=0$ فنجد الجذر $x=\frac{-b}{a}$ ، $a\neq 0$.

2- ننظم جدولاً لدراسة إشارة المقدار من الشكل:

X	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	∞
$ax+b=0$	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a

3- نوجد الفترة الموافقة لإشارة المتباينة .

مثال:

أوجد حل المتباينة $2x+1>2$.

الحل:

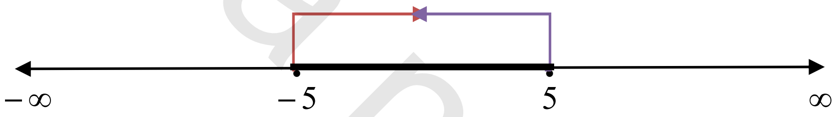
يتم حل هذه المتباينة بإضافة (-1) إلي طرفي المتباينة

$2x+1-1>2-1$ هذا يودي إلي $2x>1$ بالقسمة على 2 نحصل على $x>\frac{1}{2}$ وبذلك يكون الحل الفترة $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

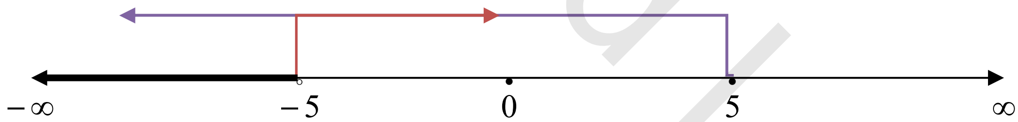
مثال:

إذا كانت $A=\{x: x\le 5\}$, $B=\{x: x\ge -5\}$ أوجد $A\cap B$, $A-B$ ، موضحاً الحل على خط الأعداد.

الحل:



$A\cap B=[-5,5]$



$A-B=(-\infty,-5)$

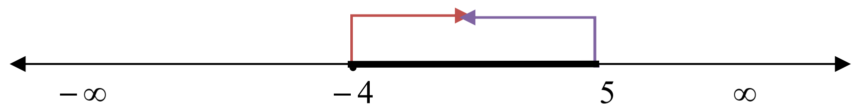
مثال:

أوجد حل المتباينة ومثلها بيانياً على خط الأعداد $-11\le 2x-3<7$.

الحل:

بإضافة (3) للإطراف $-8\le 2x<10$ وبالقسمة على (2) نجد $-4\le x<5$

وبذلك تكون مجموعة الحل هي: $[-4,5)$



مثال:

إذا كان لدينا المتباينة $3x+5 \le x-7$ أوجد حلها.

الحل:

يتم حل هذه المتباينة بإضافة العدد -5 فنحصل على $3x \le x-12$، و نضيف المقدار $-x$ إلى طرفي المتباينة فنحصل على $2x \le -12$، و بقسمة المتباينة على 2 نحصل على $x \le -6$، وهكذا يكون مجال الحل هو $(-\infty,-6]$.

مثال:

حل المتباينة $1-3x>2$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

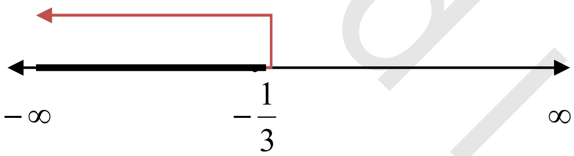
الحل:

بإضافة (-1) للطرفين يكون $1-3x-1>2-1$

أي $-3x>1$ وبالضرب في $(-\frac{1}{3})$ ، يكون لدينا $x<-\frac{1}{3}$

(لاحظ إشارة المتباينة تغيرت في هذه الحالة).

أي أن: أي عدد أصغر من $-\frac{1}{3}$ يعتبر حلا لهذه المتباينة، والحل هو الفئة $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$



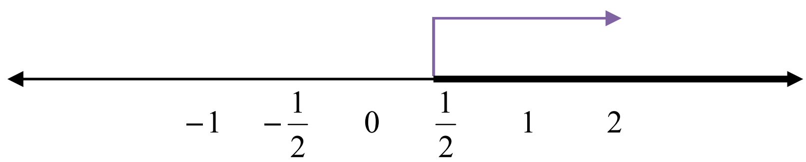
مثال:

حل المتباينة $2x>1$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

بالضرب في $(\frac{1}{2})$ نحصل على $x>\frac{1}{2}$ أي أنَّ:

أي عدد أكبر من $(\frac{1}{2})$ يُعتبر حلاً لهذه المتباينة و الحل هو الفئة $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$



ب-حل المتباينة $ax^2 + bx + c > 0$:

لحل متباينة الدرجة الثانية نتبع الخطوات التالية:

1- نحل معادلة الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$ فنجد جذورها إن وجدت.

2- ننظم جدول من الشكل التالي:

X	$-\infty$	بينهما	x_1	بينهما	x_2	بينهما	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		من إشارة a	0	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

مثال:

حل المتباينة $x^2 + 3x + 2 < 0$ ، مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

نأخذ معادلة الدرجة الثانية $x^2 + 3x + 2 = 0$ فنلاحظ انه يمكن أن تكتب $(x+1)(x+2) = 0$ وبالتالي جذريها: $x_2 = -2$ $x_1 = -1$ ، ومنها نكون الجدول:

X	$-\infty$	بينهما	-2	بينهما	-1	بينهما	$+\infty$
$x^2 + 3x + 2$		+	0	−	0	+	

الفترة الموافق للقيمة السالبة لكثيرة الحدود هي (-2، -1) .

طريقة ثانية للحل: $x^2 + 3x + 2 < 0 \quad \Rightarrow (x+1)(x+2) < 0$

هناك احتمالية:

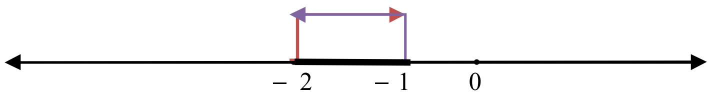
إما $(x+1) > 0$ و $(x+2) < 0$

أو $(x+2) > 0$ و $(x+1) < 0$

في الاحتمال الأول يكون $x < -1$ و $x > -2$ وبالتالي مجال الحل هو:

$$(-\infty, -1) \cap (-2, \infty) = (-2, -1)$$

وفي الاحتمال الثاني يكون $x > -1$ و $x < -2$ ، وبالتالي مجال الحل φ، وبالتالي يكون مجال الحل الكلي وفق الاحتمالات السابقة هو $(-2,-1) \cup \varphi = (-2,-1)$ كما موضح على خط الأعداد.



مثال:

حل المتباينة $x^2 - 2x \geq 0$ ، مع توضيح الحل على خط الأعداد.

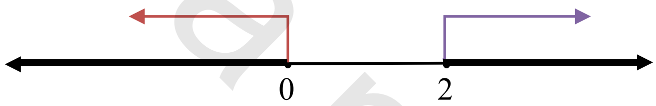
الحل:

نحل معادلة الدرجة الثانية $x^2 - 2x = 0$ والتي تكتب على الشكل $x(x-2) = 0$ وبالتالي:

$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$ ومنها نكون الجدول:

x	$-\infty$	بينهما	0	بينهما	2	بينهما	∞
$x^2 - 2x$		+	0	−	0	+	

الفترة الموافق لـ X أكبر أو تساوي الصفر لكثيرة الحدود وهي إتحاد الفترتين $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.



مثال:

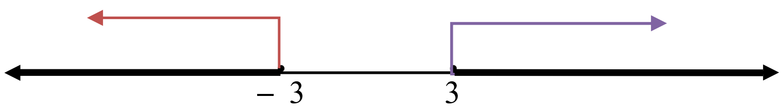
حل المتباينة $9 - x^2 \leq 0$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

نأخذ المعادلة $9 - x^2 = 0$ ونحللها إلى الشكل $(3-x)(3+x) = 0$ ، وبذلك نجد الجذرين $x = -3, \quad x = 3$ وبالتالي نكون الجدول:

X	$-\infty$	بينهما	-3	بينهما	3	بينهما	∞
$9 - x^2$		−	0	+	0	−	

وبالتالي نجد الفترة الموافقة لقيم x المناسبة لإشارة المتباينة، وهي إتحاد الفترتين $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.



مثال:

حل المتباينة $x^2 + x - 2 > 0$.

الحل:

يعني أنَّ المقدارين $(x+2)\,(x-1) > 0$ إمَّا أن يكونا موجبين معاً أو سالبين معاً $(X+2)$ و $(x-1)$

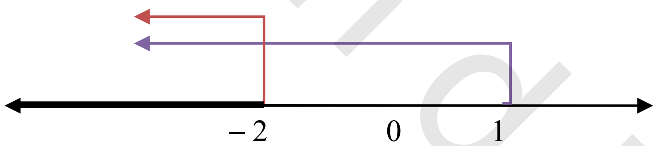
أ- المقدران موجبان: $x+2>0 \;\rightarrow\; x>-2$

$x-1>0 \;\rightarrow\; x>1$

$\therefore$ فئة التقاطع = فئة الحل = $(1\,,\,\infty)$

ب-المقدران سالبان: $x+2<0 \;\rightarrow\; x<-2$

$x-1<0 \rightarrow x<1$



$\therefore$ فئة التقاطع هي فئة الحل = $(-\infty\,,\,-2)$

$\therefore$ فئة الحل من أ ، ب هي: $x \in (-\infty,-2) \cup (1\,,\,\infty)$

من الرسم يتضح أن لهما نفس الإشارة في اتحاد الفترتين $(-\infty,-2) \cup (1\,,\,\infty)$.

3- حل المتباينة الكسرية $\dfrac{ax+b}{cx+d} > 0$:

لحل المتباينة الكسرية نكون جدولاً يبين إشارات البسط، والمقام ثم نحدد إشارة الكسر، ونوجد الفترة المطلوبة:

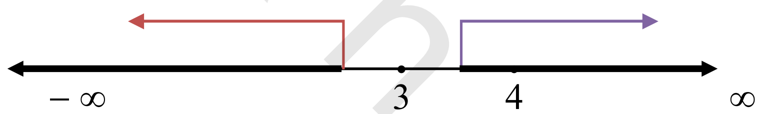
مثال: حل المتباينة $\frac{x}{x-3} < 4$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

نأخذ المتباينة $\frac{x}{x-3} < 4$ ، ومنها $\frac{x}{x-3} - 4 < 0$ ، والتي تأخذ الصورة التالية $\frac{x-4(x-3)}{x-3} < 0$ ، وبذلك نحصل على $\frac{12-3x}{x-3} < 0$ أو $\frac{4-x}{x-3} < 0$ ثم نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	3	بينهما	4	بينهما	∞
$4-x$		+	+	+	0	−	
$x-3$		−	0	+	+	+	
$\frac{4-x}{x-3}$		−	II	+	0	−	

الفترة التي تحقق المتباينة هي: $(-\infty,3) \cup (4,\infty)$



مثال:

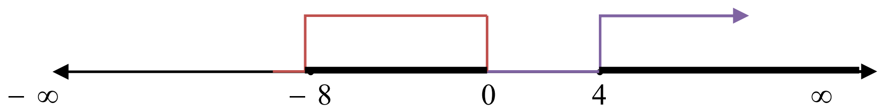
حل المتباينة $\frac{3}{x-4} \le \frac{2}{x}$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

نأخذ المتباينة $\frac{3}{x-4} \le \frac{2}{x}$ ، و منها $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x} \le 0$ ، والتي تأخذ الصورة التالية $\frac{2(x-4)-3x}{x(x-4)} \le 0$ ومنها $\frac{-x-8}{x(x-4)} \le 0$ أو $\frac{x+8}{x(x-4)} \ge 0$ ثم نكون الجدول التالي:

X	$-\infty$	بينهما	**−8**	بينهما	**0**	بينهما	4	بينهما	∞
$x+8$		−	0	+	+	+	+	+	
$x(x-4)$		+	+	+	0	−	0	+	
$\frac{x+8}{x(x-4)}$		−	0	+	II	−	II	+	

الفترة التي تحقق المتباينة هي: $(-8,0)\cup(4,\infty)$



مثال:

حل المتباينة $\frac{x+1}{x+3}>0$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

لدينا $\frac{x+1}{x+3}>0$ حتى يكون الكسر موجباً يجب أن يكون للبسط والمقام الإشارة ذاتها وبالتالي نكون أمام احتمالين

أ: نفرض أنّ: $x+1>0$ و $x+3>0$ و بالتالي يكون لدينا:

$x>-1$ و $x>-3$ والحل هو التقاطع الذي يكون على النحو التالي:

$$(-1,-\infty)\cap(-3,\infty)=(-1,\infty)$$

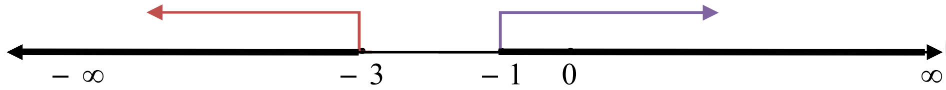
ب- نفرض أنّ: $x+1<0$ و $x+3<0$ و بالتالي يكون لدينا:

$x<-1$ و $x<-3$ والحل هو التقاطع الذي يكون على النحو التالي:

$$(-\infty,-3)\cap(-\infty,-1)=(-\infty,-3)$$

إذن الحل العام للمتباينة هو إتحاد الحلين أي أن:

مجموعة الحل للمتباينة $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,\infty)$

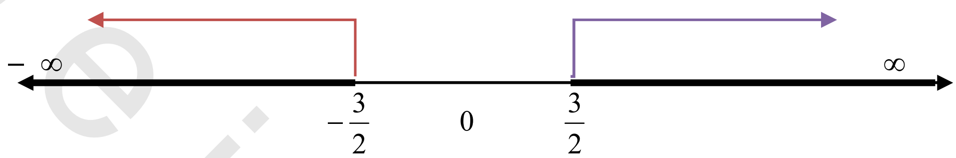


مثال:

حل المتباينة: $\frac{9}{4}\le x^2$ مع توضيح الحل على خط الأعداد.

الحل:

نكتب المتباينة على الشكل التالي: $x^2 \geq \frac{9}{4}$ منها نحصل على $|x^2| \geq \frac{9}{4}$ بذلك يكون لـــ x احتماليه: $x \geq \frac{3}{2}$ أو $x \geq \frac{-3}{2}$



إذاً مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty , -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2} , \infty)$

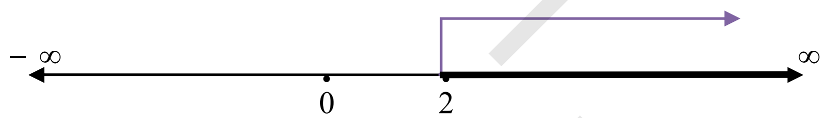
مثال:

حل المتباينة : $\frac{x+1}{x-2} > 1$ مع توضيح الحل على خط الأعداد ؟

الحل:

نكتب المتباينة على الشكل التالي : $\frac{x+1}{x-2} - 1 > 0$ منها نحصل على $\frac{x+1-(x-2)}{x-2} > 0$

هذا يودي إلى أن $\frac{3}{x-2} > 0$ منها تكون قيمة x هي : $x > 2$



إذاً مجموعة الحل للمتباينة هي $(2, \infty)$

القيمة المطلقة Absolute value:

إذا كان x عدداً حقيقياً، فإن القيمة المطلقة للعدد x هي عدد حقيقي غير سالب، يرمز له بالشكل $|x|$ ويعرف على الشكل التالي:

$$|x| = \begin{cases} x & ,if \quad x \geq 0 \\ -x & ,if \quad x < 0 \end{cases}$$

عندما نمثل الأعداد الحقيقية هندسيا على المحور الحقيقي فإن العدد $|x|$ هو المسافة الفاصلة بين نقطة الأصل $(0,0)$ و قيمة x .

بعض خواص القيمة المطلقة: Properties of Absolute Value

مهما يكن العددان $x, y \in R$ يكون لدينا:

$1- \quad -|x| \leq x \leq |x|$

$2- \quad |x| = \sqrt{x^2} \quad , \quad |x|^2 = x^2$

$3- \quad |x| = |-x|$

$4- \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$5- \quad |x| = a \quad , \quad a \geq 0 \Leftrightarrow x = a \quad or \quad x = -a$

$6- \quad |x| \leq a \quad , \quad a \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-a, a]$

$7- \quad |x| \leq a \quad , \quad a < 0 \Leftrightarrow \varphi$ مجموعة حلول المتباينة ستكون

$8- \quad |x| \leq a \quad , \quad a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq a \; or \quad x \leq -a \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$

$9- \quad |x| \geq a \quad , \quad a \leq 0 \Leftrightarrow x \in R$

$10- \quad x^2 \geq a \quad , \quad a \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq \sqrt{a} \quad or \quad x \leq -\sqrt{a}$

$11- \quad x^2 \geq a \quad , \quad a \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$

$12- \quad |x + y| \leq |x| + |y|$

$13- \quad |x - y| \geq |x| - |y|$

$14- \quad |x.y| \geq |x|.|y|$

$15- \quad \left|\frac{x}{y}\right| \geq \frac{|x|}{|y|} \quad , \quad |y| \neq 0$

مبرهنة Theorem:

إذا كانت a عدداً حقيقياً موجباً، و x أي عدد حقيقي، فإن: $|x| \le a$ إذا وفقط إذا $-a \le x \le a$.

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $|x-7| \le 5$.

الحل:

من المبرهنة السابقة $|x-7| \le 5 \Rightarrow \quad -5 \le x-7 \le 5$ بإضافة العدد 7 إلى طرفي المتباينة نحصل على $2 \le x \le 12$ إذن مجموعة حلول المتباينة هي $x \in [2,12]$.

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $|x-4| = 6$.

الحل:

واضح أن $|x-4| = 6 \Rightarrow x-4 = 6$ *أو* $x-4 = -6$

ومنها نحصل على $x=-2$ *أو* $x=10$ إذن مجموعة الحل هي $x \in \{-2, 10\}$.

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $|x^2-4| \le 5$.

الحل:

واضح أن $|x^2-4| \ge 5 \Rightarrow x^2-4 \ge 5$ *أو* $x^2-4 \le -5$

ومنها نحصل على $x^2 \le -1$ *أو* $x^2 \ge 9$ سندرس كلٍ احتمالية على حدة:

أولاً: $x^2 \ge 9$ هذا يؤدي إلى ($|x| \ge 3 \Rightarrow x \ge 3$ *أو* $x \le -3$) ومنها $x \in (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$. **ثانياً:** $x^2 \le -1$ وهذا يؤدي إلى أن مجموعة الحل مجموعة خالية .

إذن مجموعة حل المتباينة $|x^2-4| \ge 5$ هي

$(-\infty,-3] \cup [3,\infty) \cup \varphi = (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$.

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $|3x-2|<|2x+1|$.

الحل:

واضح أن $|3x-2|<|2x+1| \Rightarrow |3x-2|^2<|2x+1|^2$ منها نحصل على

$(3x-2)^2<(2x+1)^2 \Rightarrow 9x^2-12x+4<4x^2+4x+1$

بذلك نحصل على $9x^2-12x+4-4x^2-4x-1<0$

ومنها $5x^2-16x+3<0$ أي أن $(5x-1)(x-3)<0$ إذن فئة الحل هي $x\in\left(\frac{1}{5},3\right)$.

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|<4$.

الحل:

من الواضح أنه من أجل $x\neq -1$ يكون $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|<4 \Rightarrow |2x-1|<4|x+1|$ بتربيع طرفي المتباينة نحصل على $|2x-1|^2<16|x+1|^2$، هذا يؤدي إلى $(2x-1)^2<16(x+1)^2$،

ومنها نحصل على $16x^2+32x+16-4x^2+4x-1>0$

أي أن $4x^2+12x+5>0 \Rightarrow (2x+1)(2x+5)>0$ إذا

مجموعة حلول المتباينة هي $x\in\left(-\infty,\frac{-5}{2}\right)\cup\left(\frac{-1}{2},\infty\right)-\{-1\}$.

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $2x+|x+1|>-1$.

الحل:

لدينا $$|x+1|=\begin{cases} x+1 & ,if \quad x+1\geq 0 \\ -(x+1) & ,if \quad x+1<0 \end{cases}$$

هناك احتمالين:

الاحتمال الأول: $x+1\geq 0$ هذا يؤدي $|x+1|=x+1$ منها نحصل على

$2x+|x+1|\geq -1 \Rightarrow 2x+x+1>-1$

أي أن $-2<3x$ منها $3x+1>-1 \Rightarrow 3x>-2$ $x>\frac{-2}{3}$.

ومجموعة الحلول في هذا الاحتمال هي التي تحقق: $x>\frac{-2}{3}$ و $x+1>0$

أي أن مجموعة الحل هي: $x\in\left(\frac{-5}{2},\infty\right)\cap(-1,\infty)=\left(\frac{-2}{3},\infty\right)$

الاحتمال الثاني: $x+1<0 \Rightarrow |x+1|=-(x+1)=-x-1$

منها نحصل على $2x+|x+1|1>-1$ بذلك نحصل على $2x-x-1>-1$ وهذا يؤدي إلي $x>0$.

مجموعة حلول هذا الاحتمال ستكون القيم المحققة للمتباينتين: $x>0$ و $x+1<0$

أي أن مجموعة الحل هي: $x\in(0,\infty)\cap(-\infty,-1)=\varphi$

وبالتالي مجموعة الحلول للمتباينة بشكل عام هي: $x\in\left(\frac{-2}{3},\infty\right)\cup\varphi=\left(\frac{-2}{3},\infty\right)$

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية: $|3x+4|\le 2$.

الحل:

من مبرهنة سابقة نجد $-2\le 3x+4\le 2$ ، بطرح العدد 4 نحصل على $-6\le 3x\le -2$ ، وبالقسمة على العدد3 نجد أن $-2\le x\le -\frac{2}{3}$ إذا فئة الحل هي $x\in[-2,-\frac{1}{3}]$

مثال:

أوجد حل المتباينة الآتية $|x+2|\ge 8$.

الحل:

من مبرهنة سابقة نحصل على: $(x+2)\ge 8$ أو $(x+2)\le -8$ أي أن: $x\ge 6$ أو $x\le -10$ ، وفئة الحل هي: $\therefore\ x\in(-\infty,-10]\cup[6,\infty)$

مثال:

اوجد مجموعة الحل للمتباينة $\left|\frac{x+1}{x}\right|>\frac{10}{3}$ موضحاً الإجابة على خط الأعداد.

الحل:

من خواص القيمة المطلقة نجد: $\frac{10}{3} < \frac{x+1}{x}$ أو $\frac{x+1}{x} < -\frac{10}{3}$ بضرب المتباينتان بـــ x^2 (مقدار موجب) نجد: $x(x+1) > \frac{10}{3}x$ أو $x(x+1) < -\frac{10}{3}x$:

الاحتمال الأول:

$x^2 + x > \frac{10}{3}x$ أي أن $x^2 - \frac{7}{3}x > 0$ و منه $x(x-\frac{7}{3}) > 0$ نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	0	بينهما	$\frac{7}{3}$	بينهما	$+\infty$
$x\left(x-\frac{7}{3}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن فئة الحل هي $(-\infty,0)\cup\left(\frac{7}{3},\infty\right)$

الاحتمال الثاني:

$x^2 + x < -\frac{10}{3}x$ أي أن $x^2 + \frac{13}{3}x < 0$ و منه $x\left(x+\frac{13}{3}\right) < 0$ نكون الجدول التالي:

$\boldsymbol{X}$	$-\infty$	بينهما	$-\frac{13}{3}$	بينهما	**0**	بينهما	$+\infty$
$x\left(x-\frac{7}{3}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن فئة الحل هي $\left(\frac{-13}{3},0\right)$

والحل العام للمتباينة هو $(-\infty,0)\cup\left(\frac{7}{3},\infty\right)\cup\left(-\frac{13}{3},0\right)$

مثال:

أوجد حل المتباينة $0 < |3x+1| < \frac{1}{3}$.

الحل:

نجزئ المتباينة إلي متباينتين كالتالي: $|3x+1| < \frac{1}{3}$ و $0 < |3x+1|$

منها نحصل على المتباينات

$$-\frac{1}{3} < 3x+1 < \frac{1}{3} \qquad (3x+1)^2 > 0$$

$$-\frac{4}{9} < x < \frac{-2}{9} \quad \text{و} \quad x \in IR - \left\{\frac{-1}{3}\right\}$$

بذلك الحل هو تقاطع الحلين $\left\{-\frac{1}{3}\right\} \cap \left(\frac{-4}{9}, \frac{-2}{9}\right)$

أي أن: $x \in \; (-\frac{4}{9} \,,\, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3} \,,\, -\frac{2}{9})$

مثال:

أوجد حل المتباينة $\frac{2}{x+2} > \frac{3}{x-9}$.

الحل:

$0 < \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x-9}$ بتوحيد المقام نحصل على $0 < \frac{3(x+2)-2(x-9)}{(x-9)(x+2)}$ وبالتالي:

$0 < \frac{x+24}{(x-9)(x+2)}$: ندرسها كمتباينة كسرية

X	$-\infty$	بينهما	-24	بينهما	-2	بينهما	9	بينهما	∞
$x+24$		$-$	0	$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$(x-9)(x+2)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{x+24}{(x-9)(x+2)} > 0$		$-$	0	$+$	II	$-$	II	$+$	

$x \in (-24,-2) \cup (9,\infty)$

أمثلة محلولة

1- عبر بطريقة القائمة عن المجموعات:

A={x:x (عدد طبيعي مكون من رقم واحد)}

B={x:x (عامل للعدد6)}

C={x: $x^2-25=0$ }

الحل:

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$B=\{1,2,3,6\}$$

$$C=\{5,-5\}$$

2- عبر بطريقة الوصف عن المجموعات التالية:

$A=\{2,4,6,8,.........\}$ ، $B=\{2,3,5,7\}$

$C=\{1,4,9,16,25.......\}$

الحل:

A={x:x (عدد طبيعي زوجي موجب)}

B={x:x(عدد أولى أصغر من 10)}

C={x: (مربع كامل) }

3- بين أي المجموعات الآتية متساوية وأيها متكافئة:

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$ $B=\{x: x\le 6, x\in N\}$

$C=\{a,b,c,d,e\}$ $D=\{2,4,6\}$

$E=\{-4,2\}$ $F=\{x: x^2+2x-8=0\}$

الحل:

لاحظ أن: $A=B$ و $D\equiv E$ و $F=E$.

4- أوجد المجموعات الجزئية لكل من المجموعات التالية:

$$A=\{2,4,6\}\ ,\ B=\{1,2,3,4\}$$

الحل:

$S(A)=2^3=8$ ومنها

$$S(A)=\{\{\ \},\{2\},\{4\},\{6\},\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},\{2,4,6\}\}$$

$S(B)=2^4=16$ ومنها $S(B)=\begin{Bmatrix}\{\ \},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\\ \{3,4\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}\end{Bmatrix}$

5- إذا كانت $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ و $A=\{3,5,8\}$ و $B=\{2,5,7,8\}$ و $C=\{3,5,7,9,10\}$

فأوجد كلا من: $A\cap B$ ، $A\cup B$ ، $A-B$ ، $(A\cup B)\cup C$ ، $A\cap C$ ، $A\cap(B\cup C)$ ، A^c,B^c,C^c ، $A\cap(B\cup C)$.

الحل:

$A\cap B=\{5,8\}\ ,\ A\cup B=\{2,3,5,7,8\},\ A-B=\{3\},$

$(A\cup B)\cup C=\{2,3,5,7,8,9,10\},\ A\cap C=\{3,5,\}\ ,\ A\cap(B\cup C)=\{3,5,8\},\ ,$

$A^c=\{1,2,4,6,7,9,10\}\ \ A\cap(B\cap C)=\{5\},C^c=\{1,2,4,6,8\}\ ,\ B^c=\{1,3,4,6,9,10\}$

6- أكتب جدول الانتماء اللازم لإثبات قانوني دومورجان.

الحل:

نعلم بأن نص قانوني دومورجان هو:

1) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

A	A'	B	B'	$A\cap B$	$(A\cap B)'$	$A'\cup B'$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

A	A'	B	B'	$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

بمقارنة العمود الرابع والخامس في الجدولين السابقين نلاحظ تطابقهما مما يثبت قانوني ذومورجان.

7- أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (4،1) والعمودي على المستقيم الذي معادلته $2x - 6y = 5$.

الحل:

بما أن المستقيمين متعامدين فإن $m_1 \times m_2 = -1$

و المعادلة العامة للمستقيم $y = mx + b$ ، ومنها

$$\therefore \quad 2x - 6y = 5$$

$$2x - 5 = 6y$$

بقسمة الطرفين على العدد 6: $\frac{2}{6}x - \frac{5}{6} = y$

$$m_1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \times m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -3$$

وبالتالي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

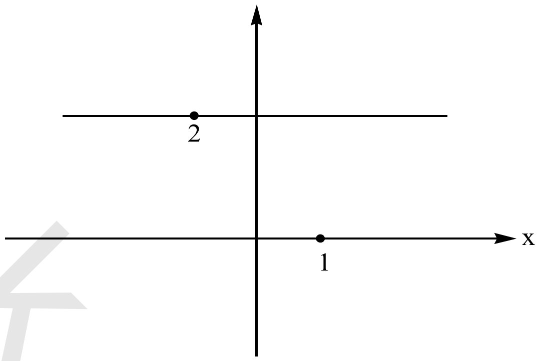
$$y - 1 = -3(x - 4)$$

ومنها $y + 3x = 13$

8- أوجد معادلة المستقيم العمودي على المحور y ويمر بالنقطة (2 , 1).

الحل:

بما أنَّ المستقيم عمودي على المحور y فإن معادلته خالية من المتغير x، وستكون في المتغير y فقط وبما أن المستقيم يمر بالنقطة (1، 2) فإن معادلته هي: $y=2$



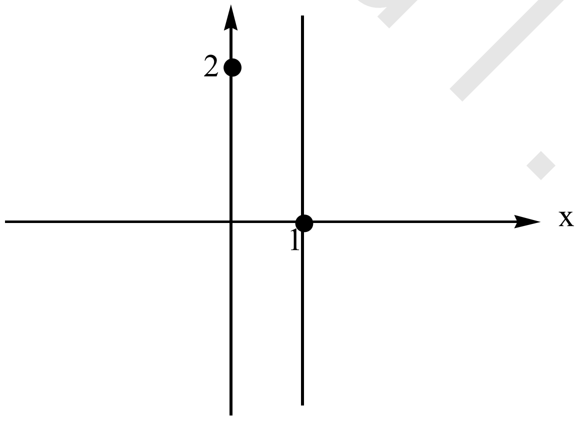
9- اوجد معادلة المستقيم الموازى للمحور y ويمر بالنقطة (2 , 1).

الحل:

بما أن المستقيم موازى للمحور y، إذا فهو عمودي على المحور x

إذا المعادلة عبارة عن (x = عدد)، وهى خالية من المتغير y.

و $x=1$ هي المعادلة المطلوبة لأنه يمر بالنقطة (2 , 1)



10- أوجد قيمة k في المعادلتين علما بان المستقيمين متعامدين $kx+5y=2k$ و $2x-3y=1$.

الحل:

وبقسمة طرفي معادلة المستقيم الأول على 5 $5y=-kx+2k$

$$y = -\frac{k}{5}x + \frac{2}{5}k$$

$$m_1 = -\frac{k}{5} \quad \text{منها} \quad y = 2x - 1$$

وبقسمة الطرفين على 3، نجد $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ ، هذا يؤدي إلي أن الميل يساوي $m_2 = \frac{2}{3}$

بما أن المستقيمين متعامدين إذا $m_1 m_2 = -1$ ومنها $\frac{k}{5} \times \frac{2}{3} = -1$

إذا قيمة k هي: $k = \frac{15}{2} = 7.5$

11- أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم $y = x + 1$ ويقطع جزءًا من محور الصادات قدره 2.

الحل:

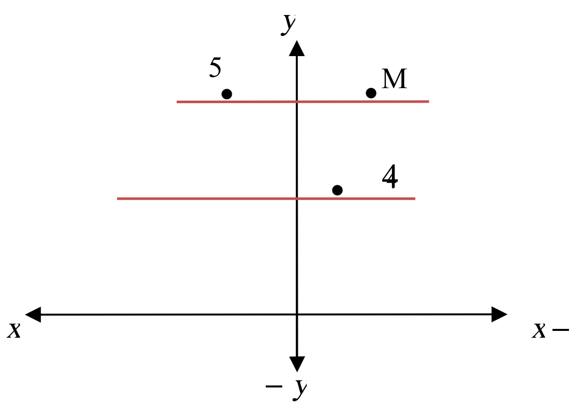
من المعادلة العامة للمستقيمات $y = mx + b$ نجد أن $m_1 = 1 = m_2$ ومن خلال الجزء المقطوع من y نجد أن $b_2 = 2$ و هذا يؤدي إلى $y = mx_2 + b_2$

أي أن المعادلة المطلوبة هي $y = x + 2$

12- أوجد معادلة المستقيم الموازى للمستقيم $y = 4$ ، ويمر بالنقطة $(2\ ,\ 5)$.

الحل:

معادلة المستقيم المطلوب من الشكل $y = C$ و بما أنه يمر من النقطة $M(2\ ,\ 5)$ نجد أن $y = 5$



13- حدد قيمة k التي تجعل النقاط $A(7\,,5)$, $B(-1\,,2)$ ، $(k\,,0)$ رؤوس مثلث قائم الزاوية في B.

الحل:

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-5}{-1-7}=\frac{-3}{-8}=\frac{3}{8}$$

$$m_{BC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-2}{k+1}=\frac{-2}{K+1}$$

$m_{BC}m_{AB}=-1$ وهذا يودي إلي $\frac{3}{8}\times\frac{-2}{k+1}=-1$ منها $\frac{-6}{8k+8}=-1$

$-8k=2$ واضح أن $k=-4$

14- ليكن لدينا $C(2,-5)$ ، $B(3,6)$ ، $A(4,-3)$ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة A ، ويوازي المستقيم المار بالنقطة $B\,,C$.

الحل:

$$m_{BC}=\frac{-5-6}{2-3}=\frac{-11}{-1}=11$$

$$(y-y_1)=m(x-x_1)$$

$$y-3=11(x+4)$$

$$y-11x-41=0$$

15- أوجد معادلة المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة $(3,0)$.

الحل:

معادلة المستقيم الرأسي الذي يمر بالنقطة $A(x_1,y_1)$ هي $x=x_1$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي $x=3$ لأنه يمر بالنقطة $(3,0)$.

16- أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم: $x+2y-15=0$ ويمر بنقطة تقاطع المستقيمين $2x-y=5$, $x+y=4$.

الحل:

أولاً: نوجد ميل معادلة المستقيم المعطى $y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$

وهو نفسه ميل المستقيم المطلوب $m_1 = -\frac{1}{2} = m_2$

نحل المعادلتين $x + y = 4 \;\; ; \;\; 2x - y = 5$ لإيجاد النقطة التي يمر بها المستقيم المطلوب

$x = 4 - y$ منها $2(4-y) - y = 5$ بذلك يكون لدينا

$$8 - 2y - y = 5$$
$$y = 1 \rightarrow \quad x = 3$$

لدينا الميل = $-\frac{1}{2}$ والنقطة $(3\ ,\ 1)$ التي يمر منها المستقيم المطلوب فمعادلته هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$
$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

ومنها المعادلة العامة تصبح على الشكل التالي $y + \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = 0$

17- عينّ معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2\,,3)\,,(4\,,7)$ وما هي الزاوية التي يصنعها مع محور x.

الحل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{7 - 3}{4 - 2_1}(x - 2)$$
$$y - 3 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 1$$

بذلك الميل يساوي $m = 2$ الزاوية التي يصنعها مع المحور x هي: $m = \tan\theta$ بذلك نحصل على قيمة الزاوية $\theta = \tan^{-1}(2) = 63.43^o$

18- عينّ معادلة المستقيم الذي ميلة $m = -7$ تقطع المحور y في النقطة $b = 5$.

الحل:

الصورة العامة للمستقيم هي $y = mx + b$ بالتعويض نحصل على $y = -7x + 5$

19- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(4,-4)$، ويكون عموديا على المستقيم $2x-5y+3=0$.

الحل:

من المعادلة $y=mx+b$ نحصل على

$$y=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\Rightarrow m_1=\frac{2}{5}$$

$$m_1\ .\ m_2=-1$$

$$\frac{2}{5}\ m_2=-1\rightarrow m_2=-\frac{5}{2}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$y+4=-\frac{5}{2}(x-4)$ منها نحصل على $y+\frac{5}{2}x-6=0$

20- أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2\ ,\ 3)$ ويكون موازيا للمستقيم $3x-2y=-1$.

الحل:

من معادلة المستقيم $2y=3x+1$

وبالقسمة على 2 نحصل على $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

$$y=mx+b\ \rightarrow\ m_1=\frac{3}{2}=m_2$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-3=\frac{3}{2}(x+2)$$

$$y-3=\frac{3}{2}x+\frac{6}{2}\rightarrow y=\frac{3}{2}x+3$$

21- أوجد معادلة المستقيم الذي ميله 4 ويقطع محور الصادات بمقدار 3.

الحل:

من معادلة خط المستقيم نعلم بأن $y=mx+b$ بالتعويض عن الميل والجزء المقطوع من محور الصادات نحصل المعادلة التالية:

$$y=4x+3$$

22- برهن أن المستقيمان اللذان معادلتهما $\frac{1}{3}y - x - 2 = 0$, $6x - 2y = 3$ متوازيان.

الحل:

أ- نوجد ميل المستقيم الأول من المعادلة $6x - 2y = 3$:

$$6x - 2y = 3 \rightarrow \quad 2y = 6x - 3$$

$$y = 3x - \frac{3}{2}$$

$$\therefore m_1 = 3$$

ب- نوجد ميل المستقيم الثاني من المعادلة $\frac{1}{3}y - x - 2 = 0$:

$$\frac{1}{3}y - x - 2 = 0 \rightarrow \quad \frac{1}{3}y = x + 2$$

$$y = 3x + 6$$

$$\therefore m_2 = 3$$

$\therefore$ $m_1 = m_2$ إذا المستقيمان متوازيان .

23- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر من نقطة منتصف المسافة بين النقطتين $(1, 3)$ ، $(-1, 5)$ ويكون عموديا على المستقيم المار خلال النقطتين $(-2 , 1)$, $(0 , 0)$.

الحل:

نوجد نقطة منتصف المسافة $(\frac{-1+1}{2} , \frac{5+3}{2}) = (0 , 4)$ هذه النقطة يمر بها المستقيم، المطلوب إيجاد معادلته الآن، نوجد ميل المستقيم المطلوب إيجاد معادلته m_1 من أجل ذلك، نوجد ميل المستقيم الثاني، وذلك عن طريق إيجاد ميل المستقيم العمودي عليه أولاً: (m_2).

ميل المستقيم العمودي على المستقيم المراد إيجاد معادلته:

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}$$

$$m_1 \, . \, m_2 = -1 \rightarrow m_1 = 2$$

إذا لدينا ميل المستقيم $m_1 = 2$ والنقطة التي يمر بها $(0 , 4)$ وبالتالي:

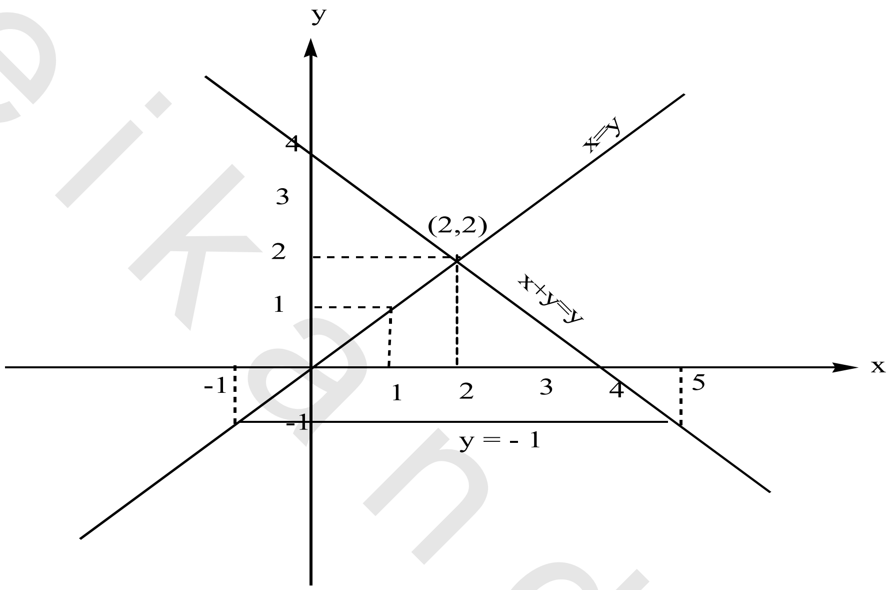
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 4$$

24- أوجد معادلة المستقيم العمودي على المحور y، ويقع تحت نقطة تقاطع المستقيمين $x = y$, $x + y = 4$ ويصنع مثلث مساحته (9) وحدات مربعة مع المستقيمين المطلوبين.

الحل:



نوجد نقطة تقاطع المستقيين $x=y$، و$x+y=4$ من أجل ذلك نحل المعادلتين حلاً مشتركاً فنجد $x+y=4$ من $x=2$ نعوض في إحدى المعادلتين فنجد $y=2$ وبالتالي نقطة التقاطع $(2,2)$.

أن معادلة المستقيم المطلوب والعمودي على المحور y من الشكل $y=a$ نحدد الثابت a بحيث تكون مساحة المثلث الحاصل تساوى 9 بما أن المثلث يقع تحت النقطة $(2,2)$ فإن $a < 2$. وبما أن المستقيمان $x = y$ و $x + y = 4$ متعامدان حاصل ضرب ميلهما $m_1 = 1$ و $m_2 = -1$ هو $m_1 m_2 = -1$ فإن المثلث قائم الزاوية في النقطة $(2,2)$ مساحته تساوي حاصل ضرب الضلعين القائمين لدينا $A(2,2)$ و $B(4-a, a)$ و $C(a, a)$ وبالتالي:

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{AC} = 9 \Rightarrow \overline{AB} \times \overline{AC} = 18$$

$$\sqrt{(2-a)^2 + (a-2)^2} \times \sqrt{(a-2)^2 + (a-2)^2} = 18$$

$$(a-2)^2 = (2-a)^2$$
$$2(a-2)^2 = 18$$
$$(a-2)^2 = 9$$

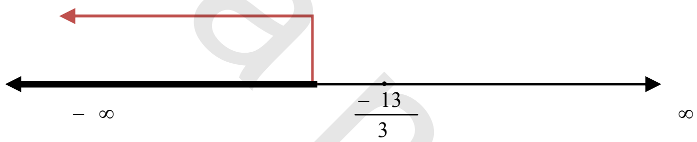
منها نوجد قيمة $a-2=-3$ أو $a-2=3$ بذلك قيمة a هي $a=-1$ أو $a=5$

وبما أن $a<2$ فإن الحل المقبول هو $a=-1$ إذا المستقيم المطلوب هو $y=-1$

25- حل المتباينة $3x+5\le -8$ موضحاً الإجابة على خط الأعداد.

الحل:

واضح أن المتباينة تأخذ الشكل التالي $3x\le -13$ و بقسمة الطرفين على 3 نحصل على $x\le \frac{-13}{3}$ و منها فئة الحل هي: $\left(-\infty, \frac{-13}{3}\right]$ وتمثل على خط الأعداد كالتالي:



26- حل المتباينة $x^2 > x^3$ موضحاً الإجابة على خط الأعداد.

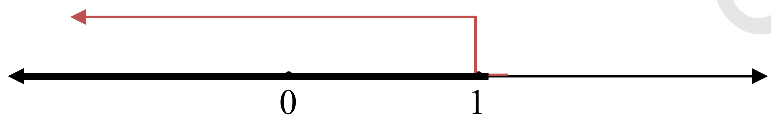
الحل:

$$x^2 - x^3 > 0 \;\rightarrow\; x^2(1-x) > 0$$

بما أن $x^2>0$ عندما $x\neq 0$ هذا يؤدي إلى

$$1-x>o \rightarrow 1>x \quad \text{و} \quad x\neq 0$$

إذا فئة الحل هي $x\in(-\infty\ ,\ o)\cup(0\ ,\ 1)$



27- أوجد حل المتباينة $\frac{1}{x^2}<100$.

الحل:

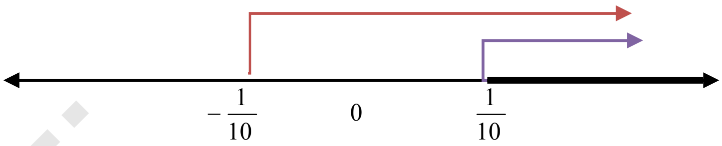
نحصل على بضرب المتباينة في x^2

$$1 < 100x^2 \rightarrow 100x^2 - 1 > 0 \quad \rightarrow 0 < (10x-1)(10x+1)$$

إما المقدران موجبان معاً، أو المقدران سالبان معاً :

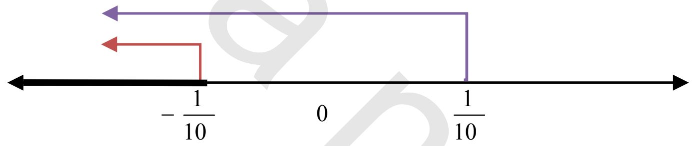
الاحتمال الأول: أن يكون لدينا $10x+1>0$ و $10x-1>0$ هذا يؤدي إلى $x > \frac{-1}{10}$ و $x > \frac{1}{10}$

بذلك فئة الحل هي: $\left(\frac{1}{10}, \infty\right)$.



الاحتمال الثاني: أن يكون $10x+1<0$ و $10x-1<0$ هذا يؤدي إلى $x < \frac{-1}{10}$ و $x < \frac{1}{10}$

بذلك فئة الحل هي: $\left(-\infty, \frac{-1}{10}\right)$.



بذلك تكون فئة الحل هي: $x \in (-\infty\ ,\ -\frac{1}{10}) \cup (\frac{1}{10}\ ,\ \infty)$

28- أوجد حل المتباينة: $x^3 - 5x^2 - 6x > 0$.

الحل:

نأخذ المعادلة $x^3 - 5x^2 - 6x = 0$ ونحللها إلى الشكل $x(x-2)(x-3)=0$ ، وبذلك يكون للمعادلة ثلاثة جذور وهي $x=0$ أو $(x-3)=0$ أو $(x-2)=0$ منها $x=0$ أو $x=3$ أو $x=2$

وبالتالي نكون الجدول:

X	$-\infty$	بينهما	**0**	بينهما	**2**	بينهما	**3**	بينهما	∞
$(x-2)(x-3)$		+	+	+	0	−	0	+	
$x(x-2)(x-3)$		−	0	+	0	−	0	+	

وبالتالي مجال الحل المقبول هو $x \in (0,2) \cup (3,\infty)$

29- أوجد حل المتباينة $\frac{x+1}{x-1} \le x^2 + x - 1$.

الحل:

المتباينة السابقة تصبح على الشكل التالي: $\frac{x+1}{x-1} - x^2 - x + 1 \le 0$

منها نحصل على: $\frac{x+1-x^3-x^2+x+x^2+x-1}{x-1} \le 0$ بذلك نحصل

على $\frac{-x^3+3x}{x-1} \le 0$ وبالتالي يكون $\frac{x(3-x^2)}{x-1} \le 0$ منها نكون الجدول:

X	$-\infty$	بينهما	$-\sqrt{3}$	بينهما	**0**	بينهما	1	بينهما	$\sqrt{3}$	بينهما	∞
$3-x^2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x(3-x^2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\frac{-x^3+3x}{x-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	II	$+$	0	$-$	

بذلك فئة الحل هي: $x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup (0,1) \cup (\sqrt{3}, \infty)$

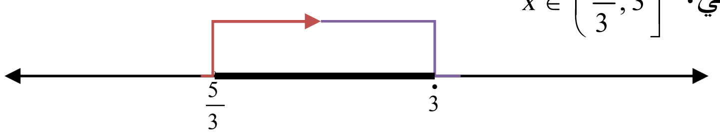
30- أوجد حل المتباينة $\frac{2x-3}{3x-5} \ge 3$.

الحل: المتباينة تأخذ الشكل التالي $\frac{2x-3}{3x-5} - 3 \ge 0$ منها $\frac{2x-3-3(3x-5)}{3x-5} \ge 0$ بذلك نحصل

على: $\frac{-4x+12}{3x-5} \ge 0$ وهذا يؤدي إلى $\frac{x-3}{3x-5} \le 0$ ونكون الجدول التالي:

X	$-\infty$	بينهما	$\frac{5}{3}$	بينهما	**3**	بينهما	∞
$x-3$		-	$-$	-	0	$+$	
$3x-5$		-	0	$+$	$+$	$+$	
$\frac{x-3}{3x-5}$		$+$	II	$-$	0	$+$	

منها فئة الحل هي: $x \in \left(\frac{5}{3}, 3\right]$



31- أوجد حل المتباينة $-3 < \frac{7-2x}{3} \le 4$.

الحل: بضرب طرفي المتباينة في 3، فنحصل على $-9<7-2x\le 12$، نضيف المقدار -7 إلى طرفي المتباينة، نحصل على $-16<-2x\le 5$ بقسمة المتباينة على -2 نحصل على $8>x\ge\frac{-5}{2}$، وهكذا يكون مجال الحل هو $\left[\frac{-5}{2},\infty\right)$.

32- أوجد حل المتباينة $11 < x^2+6x+4 < 20$.

الحل:

$$x^2+6x+4<20 \quad , \quad 11<x^2+6x+4$$

$$x^2+6x-16<0 \quad , \quad 0<x^2+6x-7$$

$$(x-2)(x+8)<0 \quad , \quad 0<(x+7)(x-1)$$

بذلك يكون الحل على الشكل التالي: $x\in(-8,2)$ و كذلك $x\in(-\infty,-7)\cup(1,\infty)$

والحل العام للمتباينة هو تقاطع فئات الحلول كالتالي: $x\in[(-\infty,-7)\cup(1,\infty)]\cap(-8,2)$

بذلك يكون الحل: $x\in[(-\infty,-7)\cap(-8,2)]\cup[(1,\infty)\cap(-8,2)]$

منها نحصل على: $x\in(-8,-7)\cup(1,2)$

33- أوجد حل المتباينة $2x^2+9x+4\ge 0$.

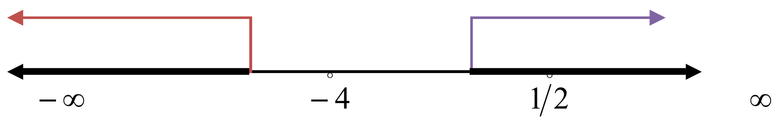
الحل:

نحل المعادلة التالية: $(2x+1)\ (x+4)=0$ بذلك يكون حل المعادلة على الشكل التالي:

$(2x+1)=0$ أو $(x+4)=0$

منها نحصل على $x=\frac{-1}{2}$ أو $x=-4$ بذلك نكون الجدول التالي:

X	$-\infty$	بينهما	**-4**	بينهما	$\frac{-1}{2}$	بينهما	∞
$(2x-1)(x+4)$		+	0	−	0	+	



إذا فئة الحل هي: $(-8,-4)\cup\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$

34- أوجد حل المتباينة $3x^2-2x-6<2x^2-6x-1$.

الحل:

بنقل الطرف الثاني للطرف الأول على المتباينة $x^2+4x-5<0$ منها نحصل على المعادلة $x^2+4x-5=0$ بذلك يكون لدينا $(x+5)(x-1)=0$ منها نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	**−5**	بينهما	**1**	بينهما	∞
$(x+5)(x-1)$		+	0	−	0	+	

وفئة الحل هي $x\in(-5\,,\,1)$

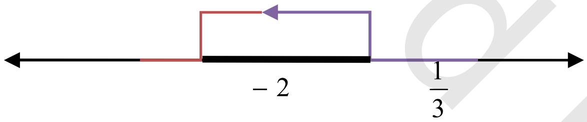
35- أوجد حل المتباينة $3x^2+5x-2<0$ موضحاً الحل على خط الأعداد .

الحل:

واضح أن حل المتباينة $3x^2+5x-2<0$ تأخذ الشكل التالي: $(3x-1)(x+2)<0$ منها نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	-2	بينهما	$\frac{-1}{2}$	بينهما	∞
$(3x-1)(x+2)$		+	0	−	0	+	

إذا فئة الحل هي $x\in(-2,\frac{1}{3})$



36- أوجد حل المتباينة $\frac{1+|x|}{1-|x|}\geq 0$.

الحل:

حسب نظرية القيمة المطلقة نعلم بأن: $|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ ومنها يكون لدينا

$\frac{1+|x|}{1-|x|}\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{1-x}\geq 0 & if \quad x\geq 0 \\ \frac{1-x}{1+x}\geq 0 & if \quad x<0 \end{cases}$ بذلك يكون لدينا احتمالين:

الاحتمال الأول:

في حالة ما نأخذ المقدار $x\geq 0$ يكون $\frac{1+x}{1-x}\geq 0$ ومنه نكون الجدول التالي:

X	0	بينهما	1	بينهما	∞
$1+x$		+	+	+	
$1-x$		+	0	-	
$\frac{1+x}{1-x}$		+	II	-	

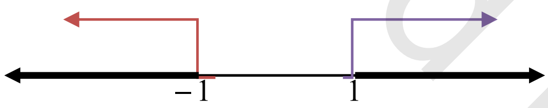
إذا فئة الحل هي: $x \in [0,1)$

الاحتمال الثاني:

في حالة ما نأخذ المقدار $x<0$ يكون $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ منه نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	-1	بينهما	0
$1-x$		+	+	+	
$1+x$		+	0	-	
$\frac{1-x}{1+x}$		+	II	-	

إذا فئة الحل هي: $x \in (-\infty,-1)$



37- أوجد حل المتباينة $|x-7| \leq 5$ موضحاً الإجابة على خط الأعداد.

الحل:

من نظرية سابقة نجد $|x-7| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x-7 \leq 5$ منها نحصل على $2 \leq x \leq 12$ منها تكون فئة الحل هي $x \in [2,12]$

38- أوجد حل المتباينة $|x-4|=6$.

الحل:

واضح أن المقدار $|x-4|=6$ يتكون من $x-4=6$ أو $x-4=-6$ منها نحصل على $x=-2$ أو $x=10$ بذلك تكون مجموعة الحل هي $x\in\{-2,10\}$

39- حل المتباينة $|3x+4|>2$.

الحل:

واضح أن المقدار $|3x+4|>2$ يتكون من $3x+4>2$ أو $3x+4<-2$ منها نحصل على $3x>-2$ أو $3x<-6$ بذلك تكون قيمة المتغير x أما $x<-2$ أو $x>\frac{-2}{3}$ منها فئة الحل هي $x\in(-\infty,-2)\cup\left(\frac{-2}{3},\infty\right)$

40- حل المتباينة $|x^2-4|\geq 5$ موضحاً الإجابة على خط الأعداد.

الحل

واضح أن المقدار $|x^2-4|\geq 5$ يتكون من $x^2-4\geq 5$ أو $x^2-4<-5$ منها نحصل على $x^2\geq 9$ أو $x^2\leq -1$ ولكن $x^2\leq -1$ مستحيلة إذا مجال حلها هو φ بقي المقدار $x^2\geq 9$ وبالتالي تكون قيمة المتغير x أما $x\geq 3$ أو $x\leq -3$ منها فئة الحل هي $x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$

41- حل المتباينة $|3x-2|<|2x+1|$.

الحل:

بتربيع الطرفين وحيث أنهما موجبان نحصل على $(3x-2)^2<(2x+1)^2$ منها يكون لدينا $9x^2-12x+4<4x^2+4x+1$ بذلك نحصل على

$5x^2-16x+3<0 \Rightarrow (5x-1)(x-3)<0$ ومنها نكون الجدول التالي:

X	$-\infty$	بينهما	$\frac{1}{5}$	بينهما	3	بينهما	∞
$5x-1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-3$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(5x-1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذا فئة الحل هي $x \in \left(\frac{1}{5}, 3\right)$

42- حل المتباينة $|x-5| = |3x-1|$.

الحل:

بتربيع الطرفين نحصل على $(x-5)^2 = (3x-1)^2$ منها يكون لدينا: $x^2-10x+25=9x^2-6x+1$

بذلك نحصل على $8x^2+4x-24=0 \Rightarrow (2x-3)(x+2)=0$ نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	-2	بينهما	$\frac{3}{2}$	بينهما	∞
$(2x-3)(x+2)$		$+$	0	-	0	$+$	

بذلك تكون فئة الحل هي $x \in \left\{-2, \frac{3}{2}\right\}$

43- حل المتباينة $|2x+1| \le x+2$.

الحل:

يكون لهذه المتباينة حل إذا كان $x+2$ غير سالب، أي إذا كان $x \ge -2$ وعندها يكون $x \ge -2$ و $(2x+1)^2 \le (x+2)^2$ بذلك يكون لدينا $x \ge -2$ و $4x^2+4x+1 \le x^2+4x+4$ منها نحصل على $3x^2-3 \le 0$ بذلك نجد $x \ge -2$ و $x^2 \le 1$ هذا يؤدي إلى $x \ge -2,\ \ -1 \le x \le 1$

بذلك تكون فئة الحل هي: $x \in (-2,\infty) \cap [-1,1] = [-1,1]$.

44- أوجد حل المتباينة $2x+|x+1| > -1$.

الحل: حسب نظرية القيمة المطلقة نعلم بأن $|x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ ومنها يكون لدينا $|x+1| = \begin{cases} x+1 & if \quad x+1 \ge 0 \\ -x-1 & if \quad x+1 < 0 \end{cases}$ بذلك يكون لدينا احتمالين:

الاحتمال الأول:

في حالة ما نأخذ المقدار $x \geq -1$, $3x > -2$:أي أن $x \geq -1$, $3x+1 > -1$

إذا فئة الحل تتكون من $x \in \left(\frac{-2}{3},\infty\right) \cap (-1,\infty) = \left(\frac{-2}{3},\infty\right)$

الاحتمال الثاني:

ما المقدار $x < -1$, $2x - x - 1 > -1$ منها نحصل على :

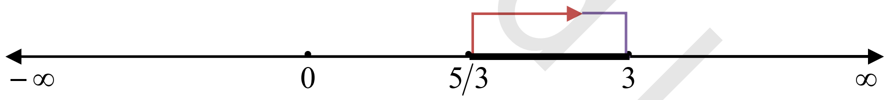
$x < -1$, $x - 1 > -1$ أو $x < -1$, $x > 0$ وهي مجموعة خالية

وبالتالي تبقى مجموعة الاحتمال الأول $x \in \left(\frac{-2}{3},\infty\right)$ وهي الحل العام للمتباينة.

45- أوجد حل المتباينة $\left|\frac{7-3x}{2}\right| \leq 1$.

الحل:

من خواص القيمة المطلقة $-1 \leq \frac{7-3x}{2} \leq 1$ وبضرب المعادلة في 2 نحصل على $-2 \leq 7-3x \leq 2$ وبإضافة العدد -7 إلى طرفي المعادلة $-9 \leq -3x \leq -5$ منها نحصل على $+\frac{5}{3} \leq x \leq 3$ إذا **مجموعة الحل هي:** $x \in [\frac{5}{3}\ , 3]$



Summary

- A set is a well-defined collection of objects called the elements or members of the set.
- Sets will usually be denoted by capital letters and elements are designated by lower – case letters.
- we use the special notation $x \in A$ to mean that x is an element of A or x belongs to A .
- A set A is called a subset of a set B , in symbols $A \subseteq B$, if every element of A is also a member of B .
- The set without any element is called the empty set and is denoted by φ .
- The union of sets A and B denoted by:

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \quad or \quad x \in B\}$$

  It is the set of all elements which belong to at least one of the sets A or B .
- The intersection of sets A and B , denoted by:

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \quad or \quad x \in B\}$$

  is the set of those elements common to both A and B .
- The difference:

$$A - B = \{x : x \in A \quad and \quad x \in B\}$$

  is the set of all elements of A which are not in B
- The closed interval $[A, B]$ is the set of real numbers between a and b that is

$$[A, B] = \{x \in R \quad , \quad a \leq x \leq b\}$$

- The open interval $]A, B[$ or (A, B) is the set of real numbers between a and b that is:

$$(A, B) = \{x \in R \quad , \quad a < x < b\}$$

- The half open (or half closed) interval $[A, B)$ is the set of real numbers between a and b , including the number a , that is:

$$[A, B) = \{x \in R \quad , \quad a \leq x < b\}$$

- In same form we write: $(A, B] = \{x \in R \quad , \quad a < x \leq b\}$
- Natural numbers: set of numbers denoted by N, where

$$N = \{1,2,3,4,5,......... .\}$$

  and is called also the positive integer
- Integer number: is denoted by Z ,where

$$z = \{0,\mp 1,\mp 2,\mp 3,\mp 4,\mp 5,......... .\}$$

- Rational number: is denoted by Z ,where

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : \quad a , b \in Z \qquad , b \neq 0 \right\}$$

- Irrational numbers: Any number that is not rational number is called irrational number.
- Real numbers: denoted by R , is the set that includes the rational and irrational numbers.

Distance between two points $p_1(x_1, y_1)$ and $p_2(x_2, y_2)$ denoted by $d(p_1 p_2)$ is: $d(p_1 p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

A linear equation in two variables is an equation of the form: $Ax + By = C$

Where A and B are not both zero. The points at which the graph of a linear equation crosses the axes are called intercepts. The x-intercept is the points at which the graph crosses the x-axis; The y-intercept is the points at which the graph crosses the y-axis; Steps for finding the intercepts of a linear equation:

Step 1: Let $y = 0$ and solve for x. This determines the x-intercept of the line.

Step 2: Let $x = 0$ and solve for y. This determines the x-intercept of the line. A vertical line is given by an equation of the form $x = a$, where $(a, o)$is the x-intercept.

Slope of a line:

Let $p(x_1, y_1)$ and $q(x_2, y_2)$ be two distinct points. If $x_1 \neq x_2$, the slope m of the non-vertical line L containing P and Q is defined by the formula:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$ I f $x_1 = x_2$, L is a vertical line and the slope of y with respect to x. $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ average rate of change of y with respect to x.

Point-slope form of an equation of a line:

An equation of a non-vertical line with slope m that contains the point (x_1, y_1) is: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Equation of a horizontal line:

A horizontal line is given by an equation of the form y=b, where $(0, b)$ is the y-intercept.

Slope-Intercept form of an equation line:

An equation of a line L with slope m and y-intercept $(0, b)$ is : $y = mx + b$

- Let a and b are two real numbers and $a < b$. We shall use the notation $a < x < b$ to mean that x is a number between a and b .The expression $a < x < b$ is equivalent to the two in equivalents $a < x$ and $x < b$ .Similarly , The expression $a \le x \le b$ is equivalent to the two in equivalents $a \le x$ and $x \le b$. The remaining two possibilities, $a \le x < b$ and $a < x \le b$, are defined similarly.

Let a and b represent two real number with $a < b$:A closed interval denote-

. by $[a, b]$, consists of all real numbers x for which $a \le x \le b$

An open interval ,denoted by (a, b) ,consists of all real numbers x for

. which $a < x < b$

The half – open ,or half –closed , intervals are $(a, b]$, consisting of all real numbers x for which $a < x \le b$,and $[a, b)$, consisting of all real

.numbers x for which $a \le x < b$

****

تمارين على الفصل الأول

1: في التمارين(1–8) اذكر خواص الفترات، وحدد أين توجد في المستوى الكارتيزي, حددها على خط الأعداد:☞

$(\frac{1}{9} , \frac{7}{3}):4 \quad , \quad (\frac{1}{5} , -\frac{1}{2})\ 3: \quad , \quad (-8 , -1):2 \quad , \quad [-3 , 2]:1$

$(-\frac{6}{5} , \frac{3}{5}]:8 \quad , \quad (-\infty , 0]:7 \quad , \quad (-\frac{1}{5} , \infty):6 \quad , \quad [\frac{1}{2} , \frac{1}{4}):5$

في التمارين من 9–12 أوجد المسافة بين النقطتين وأكتب معادلة المستقيم المار بهما.

$(-9 , -10) \quad , \quad (-4 , -7):9$

$(\frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{3}) \quad , \quad (0 , 15):10$

$(-8 , 4) \quad , \quad (-3 , 2):11$

$.(10 , 13) \quad , \quad (0 , -2):12$

13: أثبت باستخدام جدول الانتماء العلاقات التالية:☞

a) $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

b) $(A\cup B) = (B\cup A)$

c) $(A\cap A) = A$

d) $(A-B) = (A\cap B')$

e) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

14: أوجد أطوال أضلاع المثلث الذي إحداثيات رؤوسه☞

$.\ P_1(1 , 2) \quad , \quad P_2(-3 , 4) \quad , \quad P_3(7 , 6)$

15: أوجد كل قيم x، بحيث تكون المسافة بين $(-4, 6)$, (x, x) مساوية L $<$ 10 وحدات.

16: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(3 , 2-)$، ويكون عموديا على المحور x.

17: أوجد معادلة المستقيم الأفقي الذي يمر بالنقطة $(1 , 2)$.

18: أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم الذي يمر خلال النقطتين $(-2\ 1)$, $(0 , 0)$، ويمر خلال منتصف النقطة الواصلة بين النقطتين $(1 , 3)$, $(-1 , 5)$.

19: إذا كانت المسافة بين النقطة $P_1(5 , -2)$ و النقطة $p_2(x,1)$ هي 5 وحدات أوجد هذه النقطة.

20: اثبت أن المثلث ABC حيث $A(1 , 0)$, $B(5 , 4)$, $C(-2 ,3)$ مثلث قائم الزاوية.

21: أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية، ومثل ذلك بيانياً على خط الأعداد الحقيقي:

$a)\ \frac{2x}{x2+5}<0 \quad b)\ (x+3)(x-4)\geq 0 \quad c)\ 7x-8<4x+7$

$d)|2x-3|<|x+2| \quad e)\ 6>3(-x+5)-9\geq 0 \quad f)\ 3x^2-2x-6<2x^2-6x$

$g)\ |x^2-27|=8 \quad h)\ |2x-3|<|x+2| \quad i)\ 6>3(-x+5)-9\geq 0$

$k)\ \left|\frac{2x-1}{x+1}\right|<4 \quad j)\ 4-x\geq|5x-2| \quad m)\ 6>3(-x+5)-9\geq 0$

$n)-1<\frac{3-7x}{4}\leq 6 \quad o)4-x\geq|5x+1| \quad p)2\frac{3x+2}{2x-7}\leq 0$

22: حل المتباينات والمعادلات التالية:☞

$c)\ |2x+1|\leq 2 \quad b)\ |2x-7|=3 \quad a)\ |3x-5|>2$

$f)\ |2x+3|=|x-4| \quad e)\ |x|-|2x+1|\geq 0 \quad d)\ |x^2+5x|\geq 6$

$i)\ |3x+4|>x^2+x+2 \quad h)\ |x+3|=2x+1 \quad g)\ \left|\frac{2x-5}{x-6}\right|\leq 3$

****