Relations and functions العلاقات والدوال

تعريف الضرب (الجداء) الكارتيزي (الديكارتي) Cartesian product

لنفرض أن A, B مجموعتان ، تسمى المجموعة غير الخالية التي تتكون من الأزواج المرتبة (x, y) حيث $x \in A$, $y \in B$ بالضرب الكارتيزي (الديكارتي) للمجموعتين A, B ويكتب $A \times B$ بحيث $A \times B = \{ (x, y) : x \in A , y \in B \}$.

تعريف العلاقة الثنائية:

لتكن A, B مجموعتين غير خاليتين، نسمي علاقة R من A إلى B أي مجموعة جزئية من $A \times B$ وتكتب $a\,R\,b$ أو $(a, b) \in R$ وتقرأ a مرتبطة بالعلاقة R مع b .

1–النطاق: Domain

لتكن B, A مجموعتين غير خاليتين عندها نعرف نطاق العلاقة R من A إلى B على أنه مجموعة جميع الإحداثيات الأولى من الثنائيات المرتبة حيث:

$$Dom(R) \subseteq A \quad , \quad Dom(R) = \{x \in A \quad : (x, y) \in R\}$$

2–المدى: Range

لتكن B, A مجموعتين غير خاليتين عندها نعرف مدى العلاقة R من A إلى B على أنه مجموعة جميع العناصر الثانية من الثنائيات المرتبة حيث :

$$Rang(R) \subseteq B \quad , \quad Rang(R) = \{y \in B \quad : (x, y) \in R\}$$

تعريف العلاقة العكسية: Inverse relation

لتكن A , B مجموعتين غير خاليتين وإذا كانت R علاقة من A إلى B ، فإن معكوس العلاقة R هي علاقة R^{-1} من B إلى A ، حيث إن $b R^{-1} a$ إذا وفقط إذا $a\,R\,b$ أي أن: $R^{-1} = \{(y, x) \quad : \quad (x, y) \in R\}$

obeikandi.com

مثال :

إذا كانت $A=\{2,4,6,8,10\}$ و $B=\{k,m,n\}$ فأوجد $A\times B$ و $B\times A$ ،ونطاق ومدى العلاقة $A\times B$:

الحل :

$$A\times B=\left\{\begin{matrix}(2,k),(2,m),(2,n),(4,k),(4,m),(4,n),(6,k),(6,m),\\(6,n),(8,k),(8,m),(8,n),(10,k),(10,m),(10,n)\end{matrix}\right\}$$

$$B\times A=\left\{\begin{matrix}(k,2),(k,4),(k,6),(k,8),(k,10),(m,2),(m,4),\\(m,8),(m,10),(n,2),(n,4),(n,6),(n,8),(n,10)\end{matrix}\right\}$$

نطاق العلاقة $A\times B$ هو $D=\{2,4,6,8,10\}$

مدى العلاقة $A\times B$ هو $Range=\{k,m,n\}$

مثال :

إذا كانت $R=\{(0,1),(3,1),(4,2),(7,3),(7,5)\}$ فأوجد R^{-1} ونطاقها ومدها:

الحل : $R^{-1}=\{(1,0),(1,3),(2,4),(3,7),(5,7)\}$

نطاق العلاقة R^{-1} هو $D=\{1,2,3,5\}$

مدى العلاقة R^{-1} هو $Range=\{0,3,4,7\}$

تعريف :

لنفرض أن R علاقة على A عندها نقول عن هذه العلاقة:

1- متعاكسة إذا وفقط إذا كان aRa لكل عنصر $a\in A$.

2- متماثلة إذا وفقط إذا كان aRb يؤدي إلى bRa .

3- ناقلة إذا وفقط إذا كان aRb و bRc يؤدي إلى aRc.

4- متكافئة عندما وفقط عندما تكون R علاقة متعاكسة ومتماثلة وناقلة.

مثال :

1- نفرض أن $A=R$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية فإن :

2- $(<)$ علاقة ناقلة ولكنها ليست متعاكسة أو متماثلة .

3- $(\geq)$ علاقة ناقلة ومتعاكسة ولكنها ليست متماثلة .

4- $(=)$ علاقة متكافئة .

obeikandi.com

الدالة: Function

لتكن Y, X مجموعتين غير خاليتين نعرف الدالة f على أنها علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y بحيث يشير كل عنصر $x \in X$ إلى واحد وواحد فقط من عناصر Y يدعى صورة العنصر X ويرمز له بالرمز $f(x)$ ، هكذا نجد أنه يجب أن يتوفر في العلاقة الدالية الشرطان الآتيان:

1- يجب أن يشمل نطاق العلاقة جميع عناصر X.

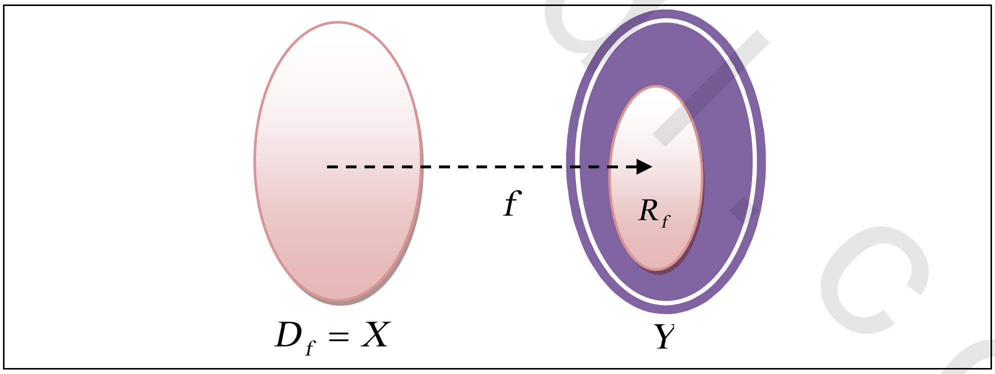
2- عدم ظهور أي عنصر من عناصر X أكثر من مرة واحدة كمركبة أولى في جميع الأزواج المرتبة التي تنتمي إلي العلاقة، أي أن لكل عنصر من X صورة واحدة $f(x)$ في Y.

الدالة Function

إذا كانت X, Y مجموعتين غير خاليتين فإن الدالة $f : X \to Y$ هي علاقة تحدد لكل عنصر $x \in X$ عنصراً واحداً وواحداً فقط $y \in Y$ بحيث : $y = f(x)$ يرمز لنطاق الدالة $f(x)$ بالرمز D_f ومداها بالرمز R_f .

تمثيل الدالة:

تمثيل الدالة مخططياً على الشكل:



مثال : إذا كانت $Y = \{1,2,4,6,9\}$ ، $X = \{1,2,3\}$ أوجد :

$$R_1 = \{ (x, y) \ : \ y = 2x \}$$
$$R_2 = \{ (x, y) \ : \ y = x^2 \}$$
$$R_3 = \{ (x, y) \ : \ y = 2x + 2 \}$$

ووضح فيما إذا كانت R_1 , R_2 , R_3 علاقات دالية أم لا.

الحل :

$$X \times Y = \{(1,1),(1,2),(1,4),(1,6),(1,9),(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),(2,9),(3,1),(3,2),(3,4),(3,6),(3,9)\}$$

$$R_1 = \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(2,4),(3,9)\}$$

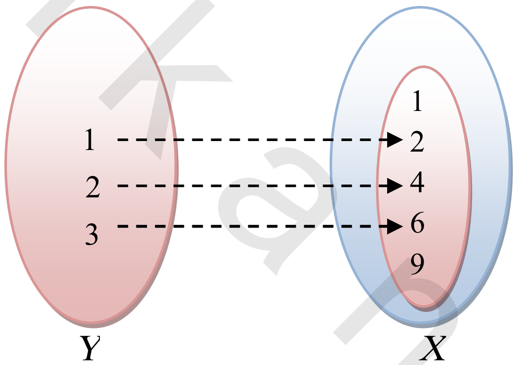
$$R_3 = \{(1,4),(2,6)\}$$

$$\because\ Dom(R) = DR_1 = \{1,2,3\}\ ,\ Rang(R) = RR_1 = \{2,4,6\}$$

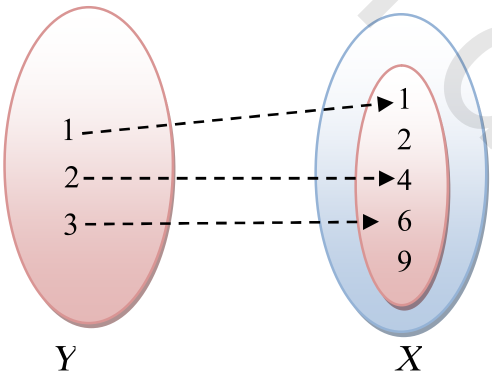
$$DR_2 = \{1,2,3\}\ ,\ Rang(R) = RR_2 = \{1,4,9\}$$

$$DR_3 = \{1,2\}\ ,\ Rang(R) = RR_3 = \{4,6\}$$

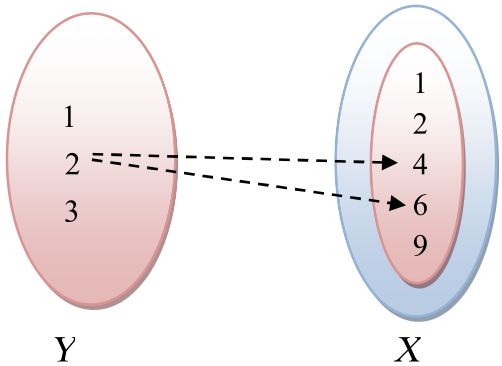
واضح أن R_1 , R_2 علاقتان داليتان، بينما R_3 ليست علاقة دالية .



العلاقة R_1 دالة



العلاقة R_2 دالة



$X \neq DR_3$ وبالتالي

العلاقة R_3

ليست دالة

obeikandl.com

ملاحظة:

يسمى المتغير $x \in X$ بالمتغير المستقل (Independent variable) وهو متغير النطاق حيث: $D_f = \{ x \in X \ : \ f(x) \in IR \} \subseteq X$ (نطاق الدالة) ويسمى المتغير $y \in Y$ بالمتغير التابع "dependent variable " وهو متغير المدى حيث إن $R_f = \{ x \in X \ : \ y = f(x) \} \subseteq Y$ (مدى الدالة)، وباعتبار أن الدوال المعرفّة التي سيتم دراستها يكون نطاقها ومداها مجموعات جزئية من IR ، لذلك تسمى هذه الدوال بالدوال الحقيقية.

مثال :

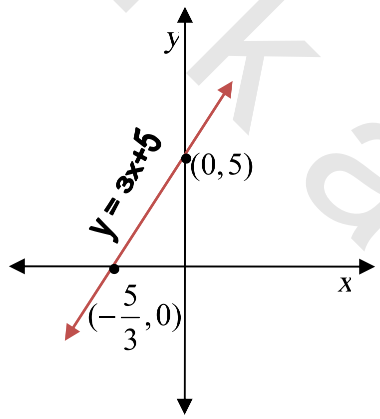
أوجد النطاق والمدى ثم ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = 3x + 5$ حيث $f : IR \rightarrow IR$.

الحل :

واضح أنه لكل $x \in IR$ يكون $3x+5 \in IR$ وبالتالي

يكون $D_f = IR = (-\infty, \infty) \ , \ R_f = IR = (-\infty, \infty)$

ولرسم الدالة $y = 3x + 5$ نفرض قيمتين للمتغير X وتحدد قيمتا y المقابلتين ونمثلها على المستوى الإحداثي كما هو مبين بالشكل المجاور:



ملاحظة:

بشكل عام منحنى الدالة : $y = f(x) = ax + b$ هو خط مستقيم في المستوى ميله a :

$m = a \ , \ y = ax + b$ و أن $D_f = IR \ , \ R_f = IR$

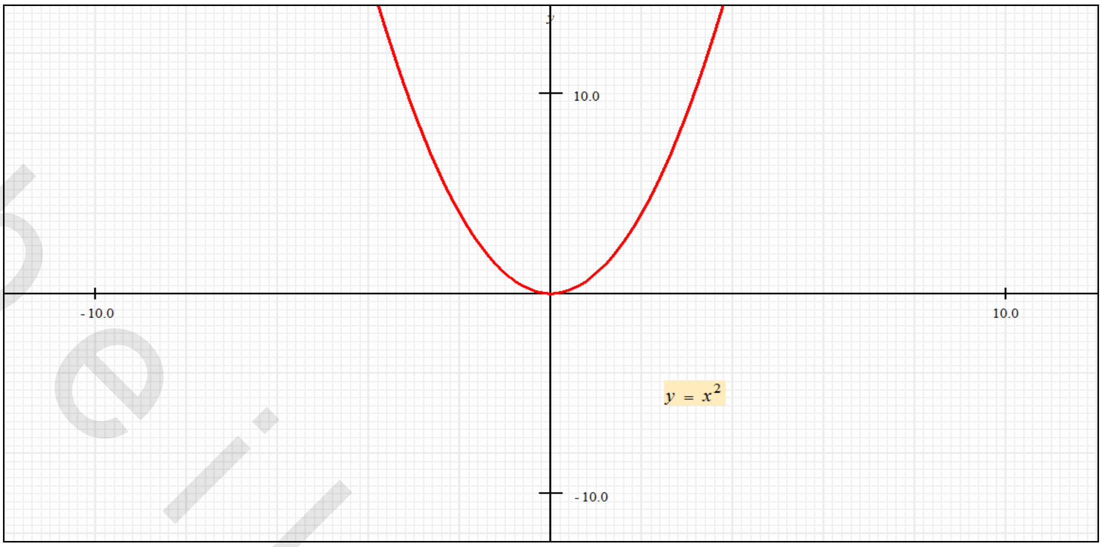
مثال:

أوجد النطاق والمدى وارسم المنحنى للدالة $y = f(x) = x^2$ حيث $f : IR \rightarrow IR$.

الحل :

$D_f = IR = (-\infty, \infty) \ , \ R_f = [0, \infty)$ ومنحنى الدالة هو قطع مكافئ محوره التماثلي هو محور الصادات.

obeikandi.com



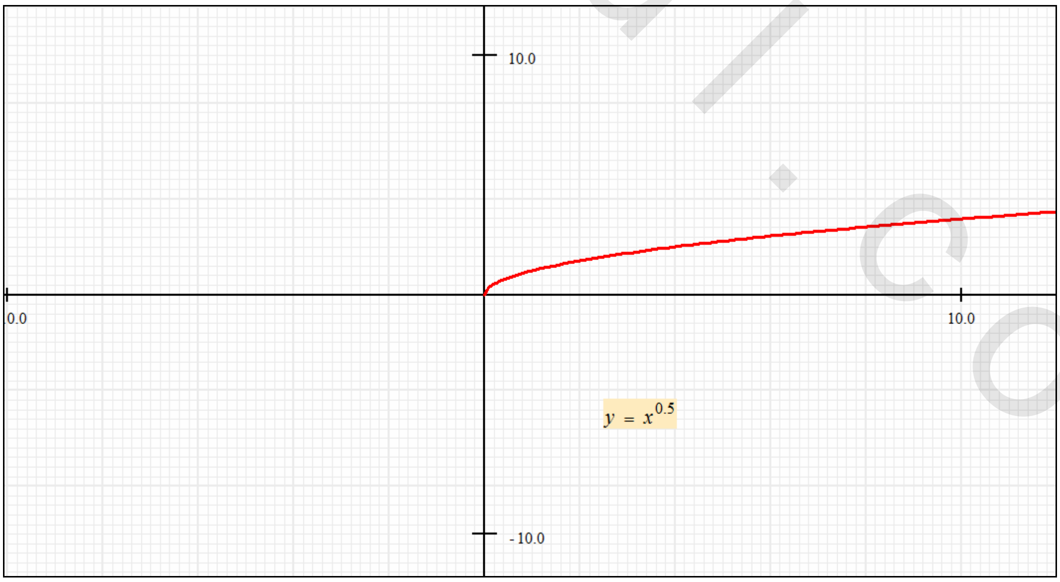
مثال :

أوجد النطاق والمدى وارسم المنحنى للدالة $y= f(x)=\sqrt{x}$ حيث $f : IR \to IR$.

الحل :

$$D_f =\{\, x\in R \,:\, f(x) \in R \,\}=\{\, x\in R \,:\, x\geq 0 \,\}=[\,0,\infty)$$

$$R_f =\{(x, y) \,:\, y^2 = x \,,\, x\,, y\in R\}=[\,0,\infty)$$



obeikandl.com

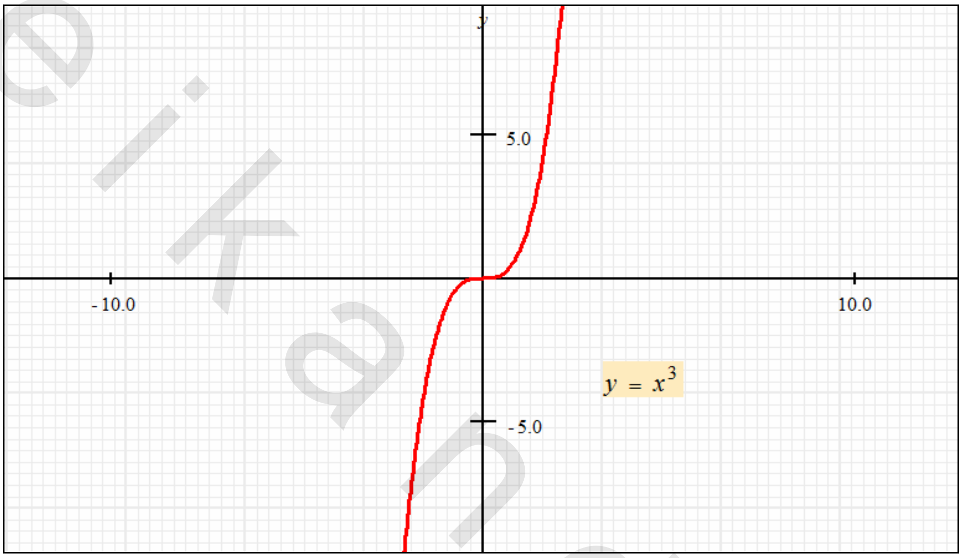
مثال:

أوجد النطاق و المدى وارسم المنحنى للدالة $y = x^3$ حيث $f : IR \to IR$.

الحل :

$$D_f = \{\, x \in R :\ y \in R \,\} = (-\infty, \infty)$$

$$R_f = \{\, (x, y) :\ y^2 = x\ ,\ \ x, y \in R \} = (-\infty, \infty)$$



مثال :

أوجد النطاق و المدى وارسم المنحنى للدالة $y = x^2 - 2x + 1$ حيث $f : IR \to IR$.

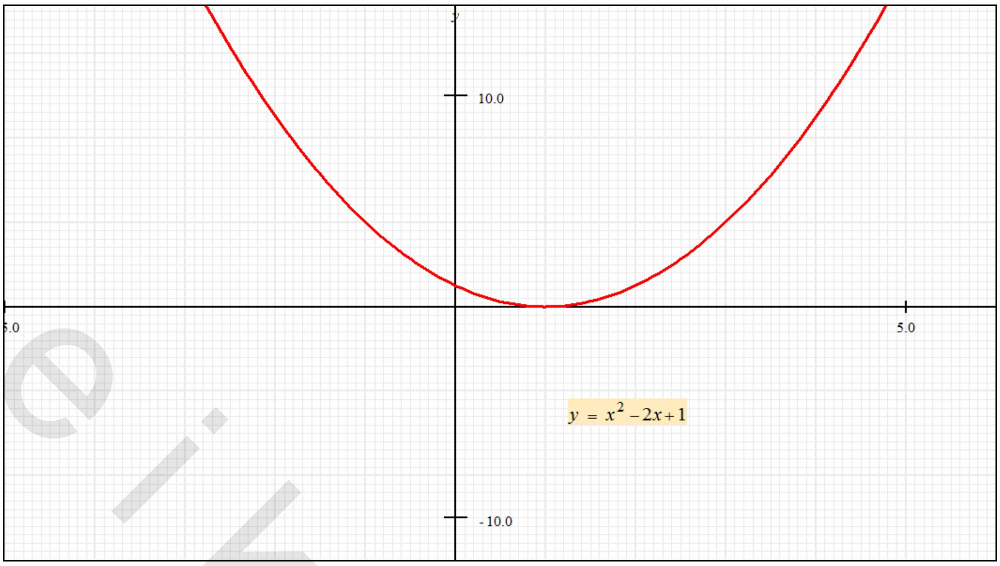
الحل :

نلاحظ أن $y = (x-1)^2$ وبالتالي فهي غير سالبة أي أن $y \geq 0$ ،

$$D_f = \{\, x \in R :\ y \in R \,\} = (-\infty, \infty)$$

$$R_f = \{ (x, y) :\ y = (x-1)^2\ \ ,\ \ x, y \in R \} = [0, \infty)\ .$$

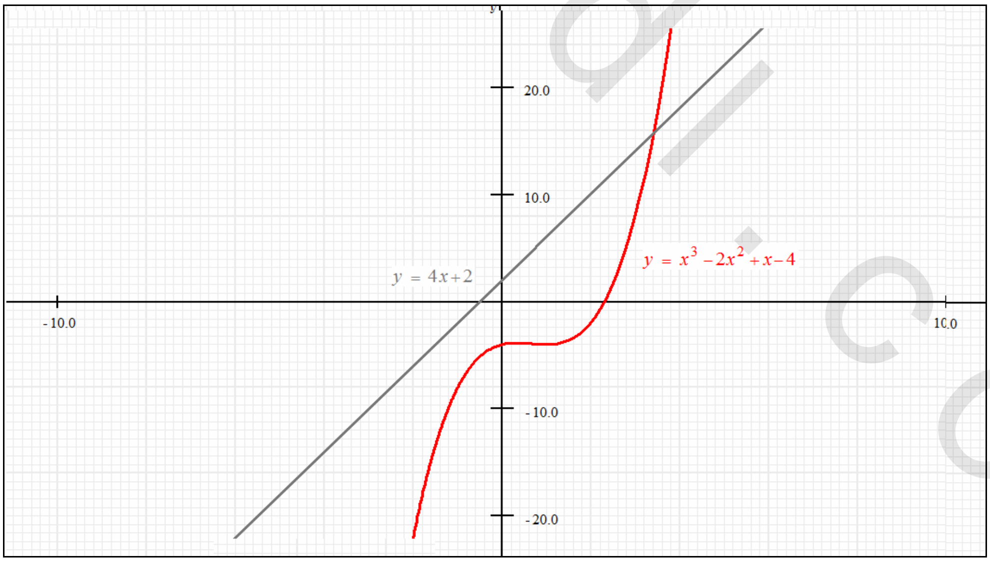
obeikandl.com



مثال :

أرسم المنحنى للدالة $y = x^3 - 2x^2 + x - 4$ مع المستقيم $y = 4x + 2$ حيث $f : IR \to IR$.

الحل :



obeikandl.com

العمليات الجبرية على الدوال Algebraic Operations on functions

إذا كانت f ،g دالتين فإن :

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ لكل $(x \in D_f \cap D_g)$.

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ لكل $(x \in D_f \cap D_g)$.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ لكل $(x \in D_f \cap D_g)$ بشرط $g(x) \neq 0$.

مثال :

إذا كانت $g(x) = 3x + 1$ ، $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ فأوجد: $\left(\frac{f}{g}\right)$ ، $f \times g$ ، $f \pm g$

الحل :

$(f + g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + 3x + 1$ لكل x في النطاق المشترك للداليتين نوجد .

$D_g = R$ ، $D_f = [-2,2]$ منها يكون النطاق المشترك هو $D_f \cap D_g = [-2,2]$

$(f - g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - 3x - 1$ لكل x في النطاق المشترك للدالتين.

$(f \times g)(x) = \left(\sqrt{4 - x^2}\right)(3x + 1)$ لكل x في النطاق المشترك للدالتين.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{3x + 1}$ بحيث $3x + 1 \neq 0$ أي أن $x \neq \frac{-1}{3}$ لكل x في النطاق المشترك للدالتين وهو $D_{\frac{f}{g}} = [-2,2] - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

تعريف:

إذا كانت $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ فإن الدالة المركبة (Composite function) هي $go\,f : X \to Z$, $(go\,f)(x) = g(f(x))$ لكل $x \in X$ حيث

$D_g \cap D_f \neq \varphi$ و $D_{g \circ f} = D_g \cap D$

حيث D نطاق الدالة الحاصلة $g(f(x))$:

$$\begin{tikzcd} (x) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

obeikandi.com

بشكل مشابه نعرف الدالة التركيبية fog على الشكل التالي:

إذا كانت f و g دالتين عندها الدالة المركبة fog تعرف على الشكل :

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

حيث $D_f \cap R_g \neq \varphi$ و $D_{f\circ g} = D_g \cap D$

حيث D هو نطاق الدالة المركبة $f(g(x))$.

مثال :

أوجد $go\,f$, fog إذا كانت $g(x) = x^2$, $f(x) = x+1$.

الحل :

لدينا $D_f = R$ $R_f = R$

$D_g = R$ $R_g = [0,\infty)$

منها $D_f \cap R_g = [0,\infty) \neq \varphi$ بذلك نحصل على

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

$D_{f\circ g} = D_g \cap D = R$ وكذلك نجد $D_g \cap R_f = [0,\infty) \neq \varphi$ بذلك نحصل على:

$$(go\,f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 + 1$$

منها يكون لدينا $D_{g\circ f} = D_f \cap D = IR$ و $R_{g\circ f} = [1,\infty)$

مثال :

أوجد $go\,f$, fog إذا كانت $g(x) = x^2 - 16$, $f(x) = \sqrt{x}$.

الحل :

$R_f = [0,\infty)$, $D_f = [0,\infty)$

$R_g = [-16,\infty)$, $D_f = R$

منها نحصل على $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 16) = \sqrt{x^2 - 16}$

$$D = (-\infty,-4] \cup [4,\infty)$$

$$D_{f\circ g} = D_g \cap D = (-\infty,-4] \cup [4,\infty)$$

بذلك يكون لدينا $(go\,f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = x + 16$

وأيضا لدينا $D = R$ منها نحصل على $D_{g\circ f} = D_f \cap D = [0,\infty)$

obeikandl.com

بعض أنواع الدوال Some types of Functions

الدوال كثيرة الحدود polynomial functions

إذا كان $p(x)=a_0+a_1(x^2)+..................+a_n(x^n)$

حيث $a_0\,,a_1\,,..................,a_n$ هي أعداد حقيقية و $a_n\neq 0$ فإن الدالة $p(x)$ تسمى دالة كثيرة الحدود من الدرجة n .

أمثلة:

$$n=0\ \rightarrow p(x)=5$$
$$n=1\ \rightarrow p(x)=2x-1$$
$$n=3\ \rightarrow p(x)=4x-x^3$$

وهكذا

نطاق الدوال كثيرة الحدود هي IR ومداها مجموعة جزئية من IR .

- حالات خاصة :

1. **الدالة الذاتية " المحايدة " (Identity function)**

هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى ومعامل x يساوي الواحد ،وهي على الشكل التالي: $f(x)=x$

2. **الدالة الثابتة (constant function)**

هي الدالة التي لا تحتوي على أي متغيرات $f(x)=c\ \ ;\ c\in IR$

الدوال القياسية أو الكسرية: (Rational functions)

إذا كانت $p(x)\ ,\ q(x)$ كثيرتي حدود فإن الدالة القياسية تكون على الشكل التالي:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}\quad ,\quad q(x)\neq 0$$

الدالة f تسمى دالة قياسية (كسرية)

نطاق الدالة القياسية هو جميع الأعداد الحقيقية ماعدا القيمة التي تجعل المقام يساوي صفراً بذلك يكون نطاق الدالة هو $D_f=IR-\{\ x\in IR\ \ :\ q(x)=0\ \}$

فمثلا :

إذا كان $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$ فإن:

$$D_f = IR - \{ x \in IR \ : \ x^2 - 1 = 0 \} = IR - \{-1, 1\}$$
$$= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

دالة الجذر التربيعي: Square root function

تعرف دالة الجذر التربيعي بأنها دالة من الشكل $f(x)=\sqrt{g(x)}$ حيث $g(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n يحدد نطاق الدالة الجذرية على الشكل :

$$D_f = \{x \in R \quad : g(x) \geq 0\} \quad , \quad R_f \subseteq [0, \infty)$$

مثال:

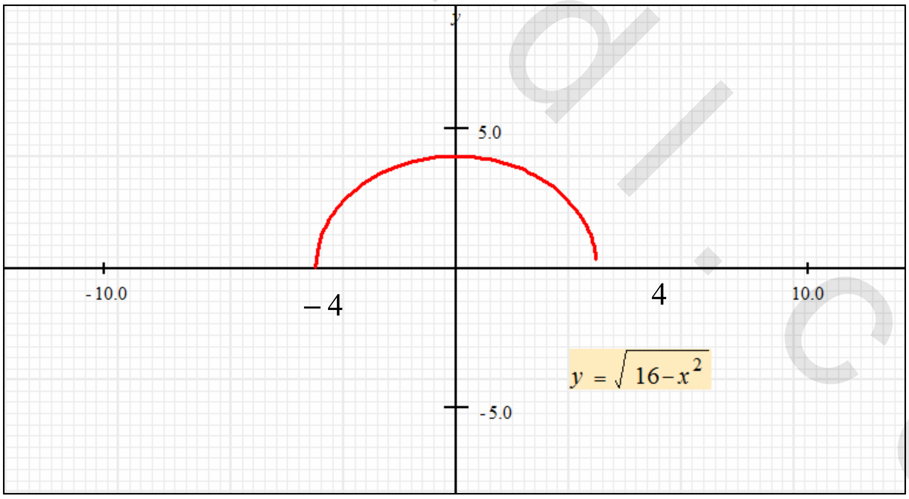
حدد نطاق الدالتين التاليتين :

1- $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

2- $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

الحل:

- نطاق الدالة $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ هو $D_f = \{x \quad : \quad 16 - x^2 \geq 0\}$ منها يكون لدينا $16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$ من العلاقة السابقة يكون النطاق $D_f = [-4, 4]$ كما في الشكل التالي:



- أما نطاق الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ منها يكون لدينا

$$D_f = \{x \quad : \quad x^2 + 3x + 2 \geq 0\}$$

$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad , \quad x = -2$ منها نكون الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	-2	بينهما	-1	بينهما	∞
x^2+3x+2		+	0	−	0	+	

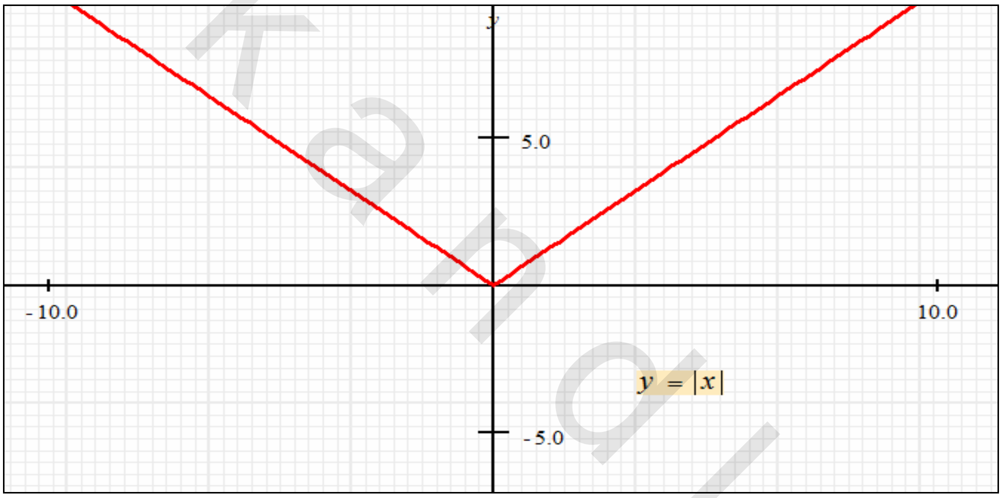
ونطاق الدالة هو $R_f=(-\infty,-2]\cup[-1,\infty)$

دالة القيمة المطلقة: Absolute value function

تعرف دالة القيمة المطلقة $|x|$ على الشكل التالي:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & if \quad x\geq 0 \\ -x & if \quad x<0 \end{cases}$$

بشكل عام فإن : $D_f=R$ ، $R_f\subseteq[0,\infty)$



مثال:

أوجد نطاق ومدى الدالة $f(x)=|2x+1|$ مع رسم الدالة.

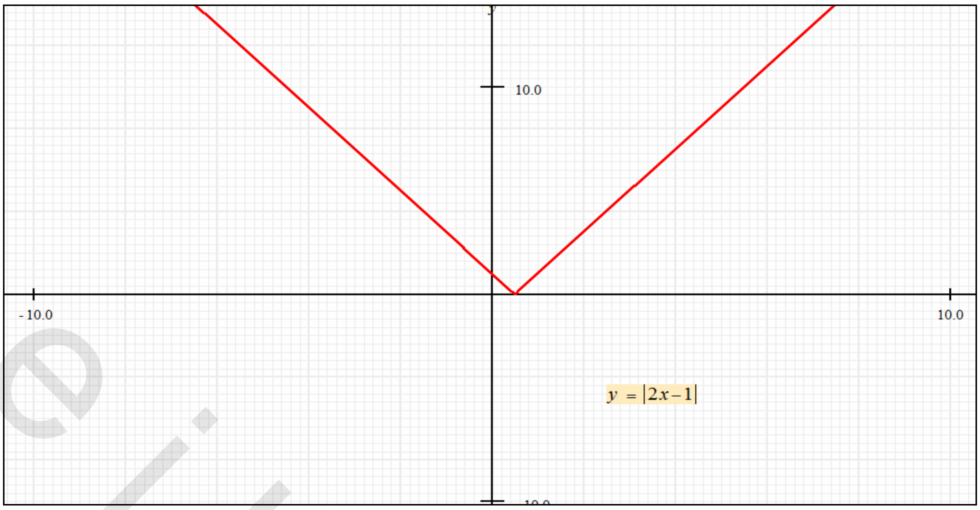
الحل:

الدالة $f(x)=|2x+1|$ تأخذ الشكل:

$$f(x)=|2x+1|=\begin{cases} 2x+1 & , \quad x\geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 & , \quad x<-\frac{1}{2} \end{cases}$$

نطاقها هو $D_f=R$ و $f(x)=|2x+1|\geq 0 \quad \Rightarrow R_f=[0,\infty)$

obeikandl.com



مثال:

حدد نطاق ومدى الدالة : $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2}$.

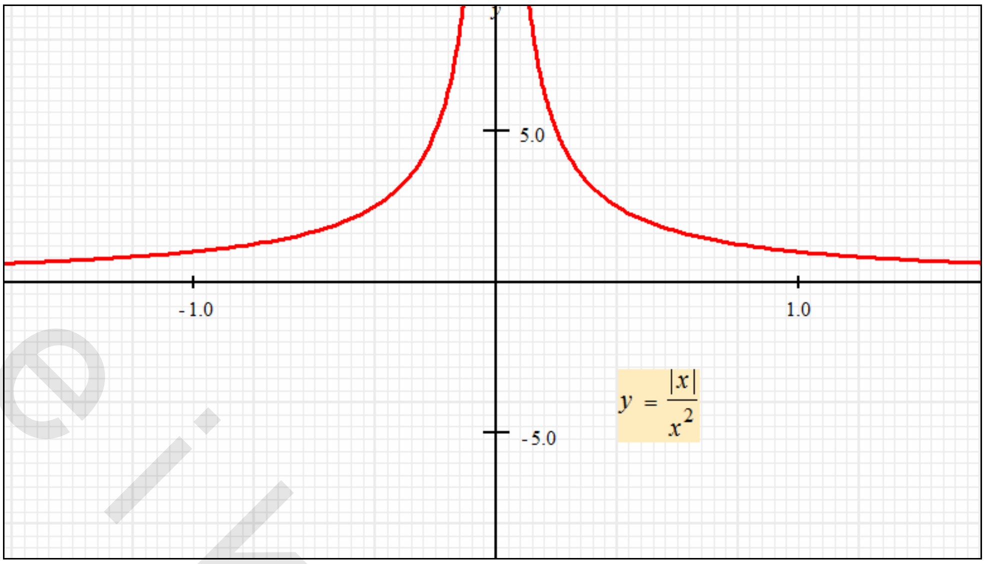
الحل:

الدالة $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2}$ تأخذ الشكل:

$$f(x)=\frac{|x|}{x^2}=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x} & , \quad x>0\\[2ex] \dfrac{-x}{x^2}=\dfrac{-1}{x} & , \quad x<0\end{cases}$$

نطاقها هو $D_f=IR$ ومداها هو : $R_f=(0,\infty)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{|x|}{x^2}>0$

obeikandl.com



الدوال الجبرية Algebraic functions

إذا نتجت الدالة $f(x)$ من تركيبة جبرية من العمليات (الجمع – الطرح – الضرب – القسمة الجذور) لكثيرات الحدود، فإن الدالة $f(x)$ تسمى دالة جبرية .

فمثلا :

الدوال التالية جميعها دوال جبرية :

$f(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=\frac{x^2+5x-7}{\sqrt{2x+10}}$ و $f(x)=x^3-2\sqrt[3]{x}$.

دالة الصحيح الأعظم Greatest Integer Function

هي الدالة التي تنقل كل عدد حقيقي x إلى العدد الصحيح الوحيد، الذي هو أكبر من جميع الأعداد الصحيحة، التي هي أقل من x أو تساويها ويرمز لها بالرمز $[x]$، وتعرف دالة الصحيح الأعظم رياضياً كالأتي $f(x)=n$ حيث $n \le x \le n+1$ و n و $n+1$ عددان صحيحان متعاقبان.

مثال:

جد الصحيح الأعظم للقيم التالية $[2,5]$ ، $[1,5]$،$[-3,6]$.

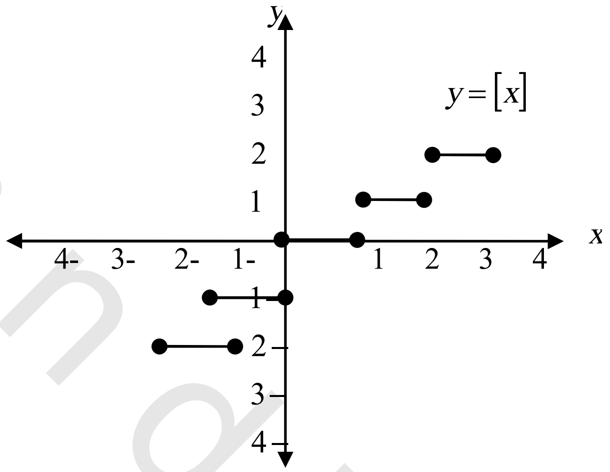
الحل :

$[1,5]=1$ ، $[2,5]=2$ ، $[-3,6]=-3$

مثال:

الجدول التالي يبين طريقة إيجاد العدد الصحيح لدالة الأعداد الصحيحة المختلفة مع الرسم.

n	$n \le x \le n+1$	$[x]$
-2	$-2 \le x \le -1$	$[x]=-2$
-1	$-1 \le x \le 0$	$[x]=-1$
0	$0 \le x \le 1$	$[x]=0$
1	$1 \le x \le 2$	$[x]=1$
2	$2 \le x \le 3$	$[x]=2$



$D_f = IR \ , \ R_f = Z$

وتسمى بالدالة ألدرجيه أو السلمية.

الدوال الزوجية والدوال الفردية : Even and odd functions

لتكن $f : X \to Y$ دالة عندئذ :

1- تسمى الدالة " f " دالة زوجية إذا كان :

$f(-x) = f(x)$ لكل $x \in D_f$

2- تسمى الدالة " f " دالة فردية إذا كان :

$f(-x) = -f(x)$ لكل $x \in D_f$

3- تكون الدالة " f " ليست فردية ولا زوجية إذا لم يتحقق ذلك .

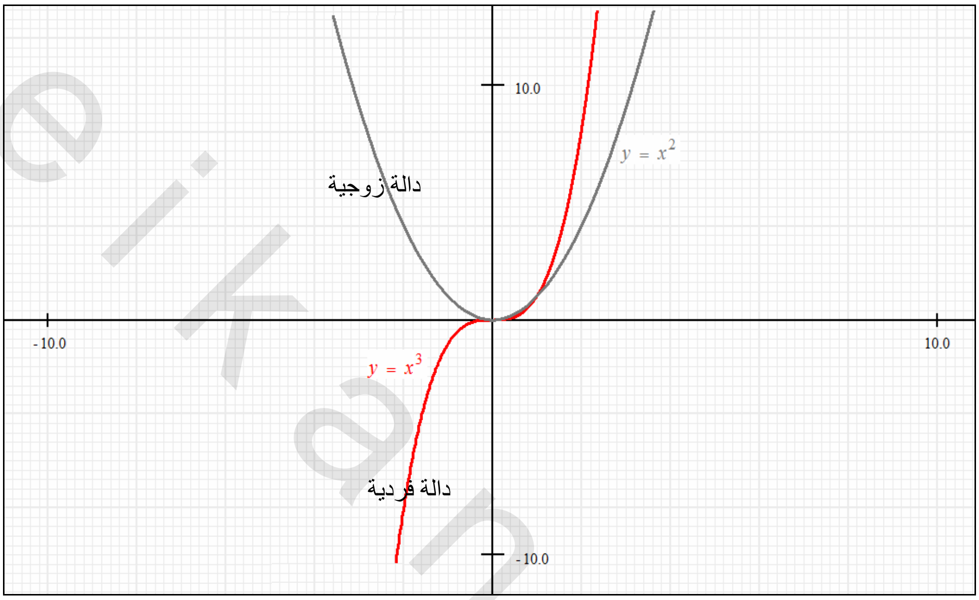
obeikandi.com

مثلاً:

بين فيما إذا كانت الدوال التالية فردية أم زوجية أم غير ذلك موضحاً الإجابة بالرسم.

$f(x)=x^2$ دالة زوجية لان $f(x)= f(-x)=x^2=(-x^2)$

$f(x)=x^3$ دالة فردية لان $f(x)= f(-x)=-x^3=(-x^3)$



$f(x)=c$ دالة زوجية؛ لأنها ثابتة، ولان : $f(-x)=c= f(x)$

$f(x)=|x-2|$ ليست فردية وليست زوجية؛ لأن :

$$f(x)=|\,x-2\,|=\begin{cases} x-2 & , \quad x-2\geq 0 \rightarrow x\geq 2 \\ -(x-2) & , \quad x-2>0 \rightarrow x<2 \end{cases}$$

$$f(-x)=|-x-2|$$

$$f(-x)=|(-1)(x+2)|$$

$\therefore\ f(x)=|x+2|\neq -f(x)$ ليست فردية وليست زوجية

الدالة الأحادية (المتباينة) : one to one function

لتكن $f : X\rightarrow Y$ عندئذ تسمى الدالة f دالة أحادية إذا وفقط إذا كان

$f(a)= f(b) \Leftrightarrow a=b$ لكل $a, b\in x$ ولبرهان أن f دالة متباينة نفرض أن

$f(a)= f(b)$ و نبرهن على أن $a=b$.

الدالة الفوقية(الغامرة) :Onto function

لتكن $f : X \to Y$ عندئذ تسمى الدالة f دالة فوقية إذا وفقط، إذا كان $R_f = Y$

أي أن المدى = النطاق المصاحب.

الدالة التقابلية "تناظر أحادي": Correspondence function

لتكن $f : X \to Y$ عندئذ تسمى f دالة تقابلية إذا كانت أحادية وفوقية (متباينة وغامرة) في آن واحد.

فمثلا:

$f : IR \to IR$ حيث $f(x) = 2x+1$

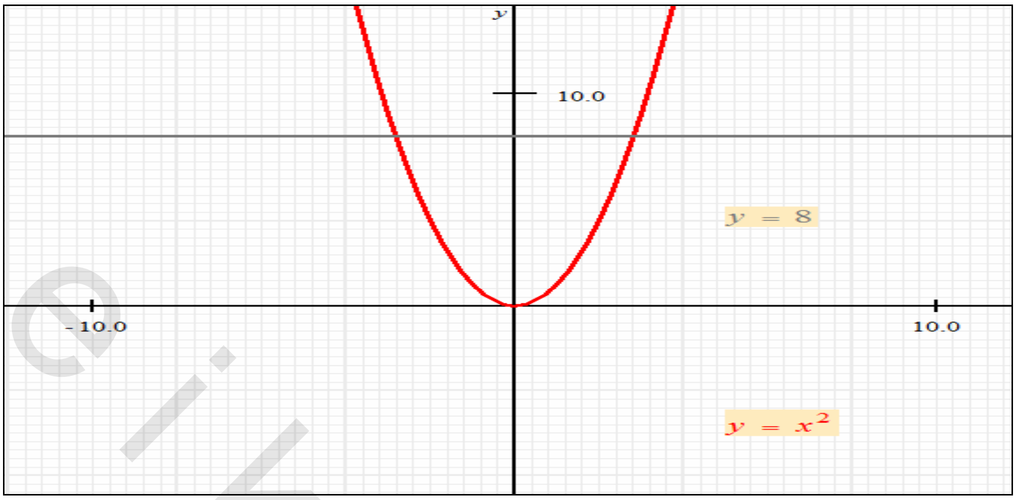
حيث $f(x)$ دالة أحادية (متباينة) لان :

$$f(a) = f(b)$$
$$2a + 1 = 2b + 1$$
$$\therefore \quad a = b$$

وأن $R_f = IR = y$

ملاحظة:

من خلال رسم الدالة تكون الدالة أحادية (متباينة)، إذا كان أي خط مستقيم أفقي (عمودي على محور المدى) لا يقطع منحنى الدالة إلا في نقطة واحدة على الأكثر، فمثلا $f(x)=x^2$ ليست أحادية(متباينة)؛ لأنه من خلال الرسم (هندسياً) نجد أن الخط المستقيم الأفقي يقطع منحنى الدالة في نقطتين كما في الشكل :



مثال:

إذا كانت الدالة $f(x)=2x+3$ حيث $f:IR\to IR$ فهل تمثل تقابل.

الحل:

بما أن الدالة f لها الشكل التالي: $f:x\to f(x)=2x+3$ ونطاقها هو $D_f=IR$ ولكل $\forall x_1,x_2\in IR$ نجد: $\left(f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Rightarrow x_1=x_2\right)$، ومنها تكون الدالة f متباينة. وبما أن $R_f=IR$ فهو مساوياً للنطاق المصاحب Y وبالتالي الدالة f تكون فوقية (غامرة).

إذا f تمثل تقابلا واحد لواحد .

مثال:

إذا كانت الدالة $f(x)=x^3$ حيث $f:IR\to IR$ فهل تمثل تقابلا.

الحل:

بما أن الدالة f لها الشكل التالي: $f:x\to f(x)=x^3$ ونطاقها هو $D_f=IR$ ولكل $\forall\, x_1,x_2\in IR$ نجد: $\left(f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^{\,3}=x_2^{\,3}\Rightarrow x_1=x_2\right)$، ومنها تكون الدالة f متباينة .

وبما أن $R_f=IR$ فهو مساوياً للنطاق المصاحب Y وبالتالي الدالة f تكون فوقية إذا f تمثل تقابل أحاديا .

الدوال المعرفة مقطعياً : piecewise defined functions

هذا النوع من الدوال له صور متعددة معرفة على أكثر من مجال واحد.

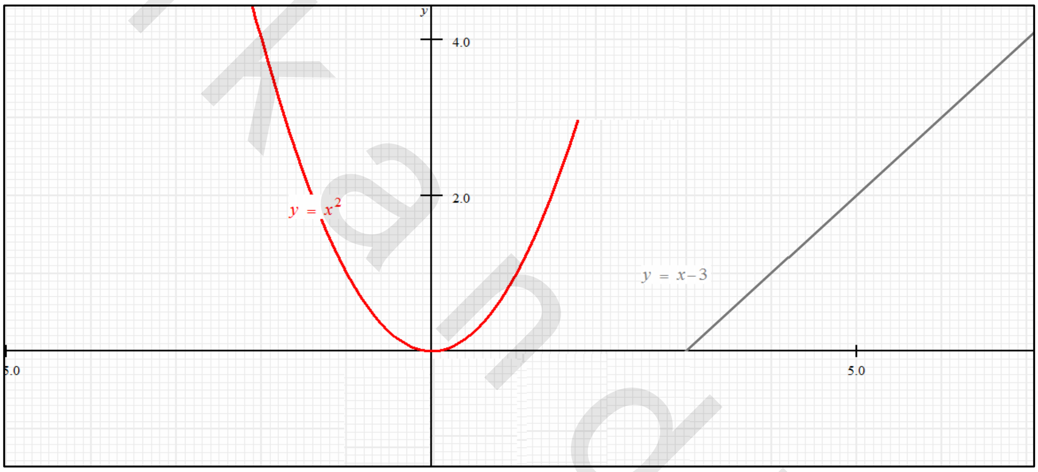
مثال :

ارسم منحنى الدالة f حيث :

$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x<3 \\ x-3 & , \quad x\geq 3 \end{cases}$ وحدد مجموعة النطاق ومجموعة المدى.

الحل:

واضح أن نطاق ومدى الدالة هو: $\therefore\ D_f = IR$ و $R_f=[0,\infty)$



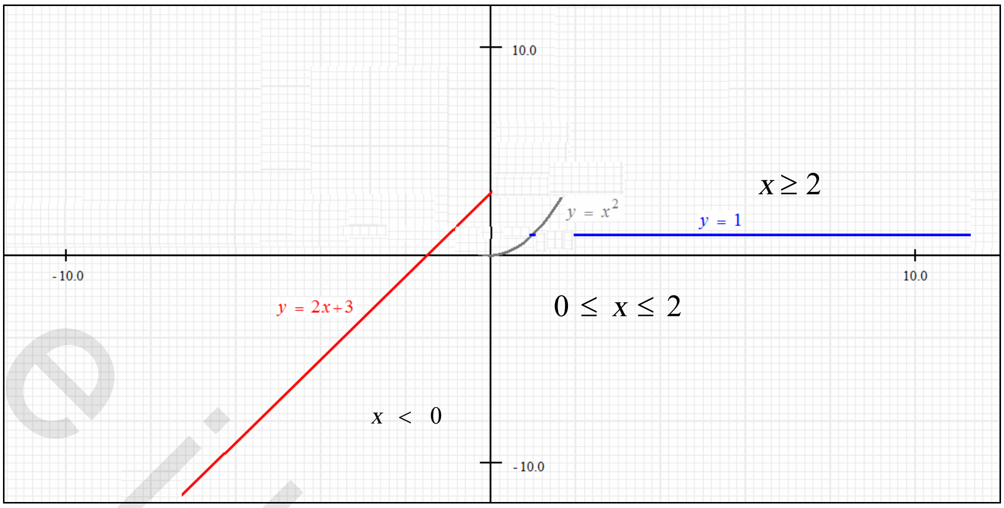
مثال :

ارسم منحنى الدالة في كل حالة

$$y(x)=\begin{cases} 2x+3 & , \quad x<0 \\ x^2 & , \quad 0\leq x\leq 2 \\ 1 & , \quad x\geq 2 \end{cases}$$

الحل:

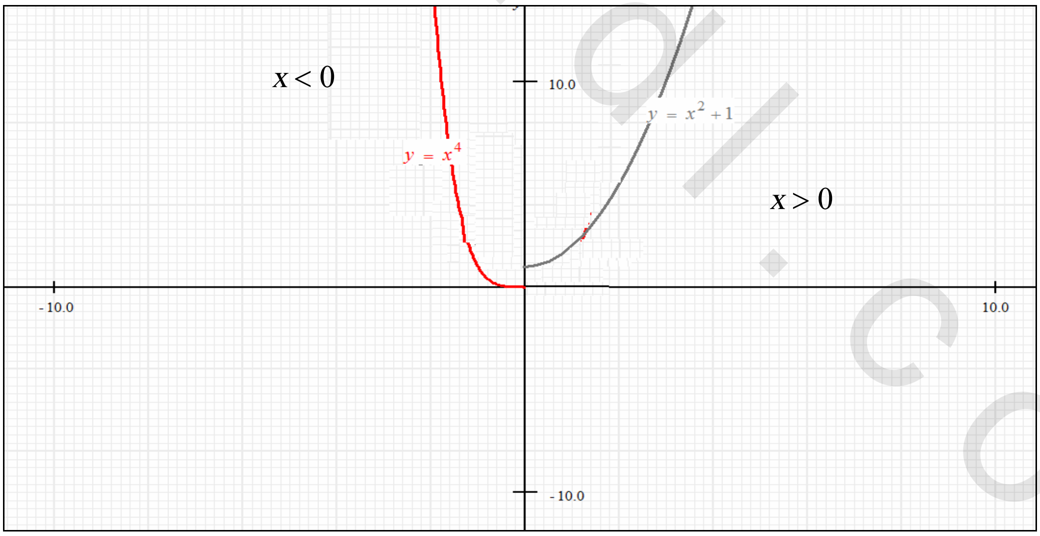
واضح أن نطاق ومدى الدالة هو $D_g = IR$ و $R_g=(-\infty,4)$



مثال :

ارسم منحنى الدالة في كل حالة $y(x) = \begin{cases} x^4 & , \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$.

الحل:



obeikandl.com

الدولة المحدودة وغير المحدودة Bounded and unbounded functions

تعريف 1: إذا وجد عدد M وحقق $(\forall \quad x \in D_f : f(x) \leq M)$ عندها نقول أن الدالة $f(x)$ محدودة من الأعلى ونسمي العدد M حداً أعلى للدالة.

تعريف 2: إذا وجد عدد m وحقق العلاقة $(\forall \quad x \in D_f : f(x) \geq m)$ عندها نقول أن الدالة $f(x)$ محدودة من أسفل (أدنى) ونسمي العدد m حداً أسفل أدنى) للدالة.

تعريف 3: إذا وجد عددان M و m ،وحقق $(\forall \quad x \in D_f : m \leq f(x) \leq M)$ نقول عن الدالة $f(x)$ أنها محدودة.

ملاحظات:

1- كل دالة محدودة $f(x)$ تحقق الخاصة $(\forall \quad x \in D_f : |f(x)| \leq L)$.

2- إذا كانت $f(x)$ دالة محدودة فإن مجموعة مداها R_f تكون محدودة .

3- يقال عن دالة إنها غير محدودة إذا لم تكن دالة محدودة .

4- كل دالة غير محدودة يجب أن تحوي مجموعة مداها $+\infty$ أو $-\infty$.

مثال:

حدد فيما إذا كانت الدالة $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ محدودة أم لا.

الحل:

نحدد نطاق الدالة $D_f = \{x: \quad 9 - x^2\}$ منها يكون لدينا $9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 9$ $0 \geq x^2 - 9$ بذلك نحصل على $0 \geq -x^2 \geq -9 \Rightarrow 9 \geq 9 - x^2 \geq 0$ ومن هذه العلاقة نوجد قيمة $3 \geq \sqrt{9 - x^2} \geq 0 \Rightarrow 3 \geq f(x) \geq 0$ بذلك نصل إلى أن $R_f = [0,3]$ والدالة $f(x)$ محدودة .

الدوال الدورية Periodic Functions

تعريف 1: يقال عن الدالة $f(x)$ إنها دالة دورية إذا أعادت مجموعة قيمها ضمن دورة محدودة.

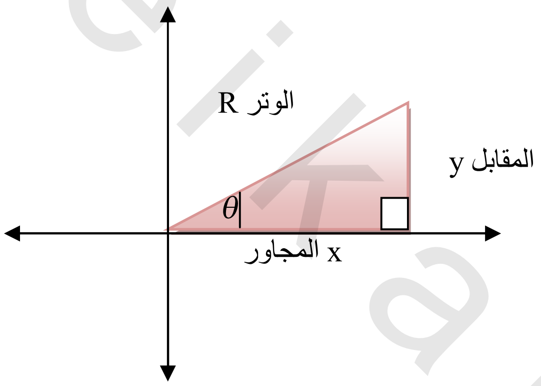
تعريف 2: يسمى أصغر مدى لقيم X التي تتم فيها الدالة $f(x)$ كامل قيمها (تمسح دورة كاملة من القيم) دورة الدالة.

obeikandi.com

هناك الكثير من الدوال الدورية المحدودة وغير المحدودة المتعلقة بالظواهر الطبيعية والفيزيائية والبيولوجية ومن هذه الدوال الساعة الزمنية ونبضات القلب وكذلك الموجات الصوتية والمكروية .

الدوال المثلثية Trigonometric Functions

نعلم بأن النسب المثلثية لمثلث قائم الزاوية هي:



$$\frac{1}{\sin\theta} = c\sec\theta = \frac{R}{y}$$

معكوسها $\sin\theta = \frac{y}{R}$

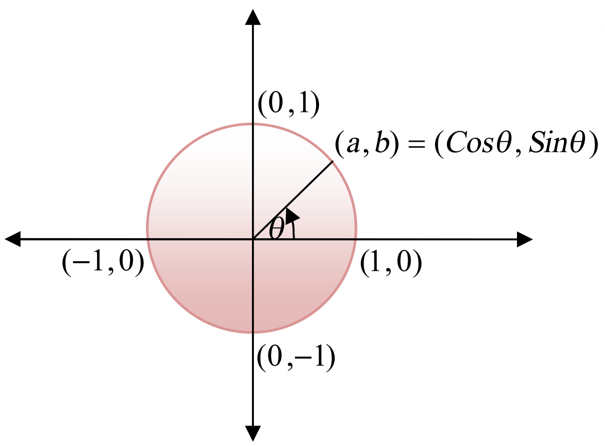
$$\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta = \frac{R}{x}$$

معكوسها $\cos\theta = \frac{x}{R}$

$\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta = \frac{x}{y}$ معكوسها $\tan\theta = \frac{y}{x}$

التمثيل البياني للدوال المثلثية :

إذا أخذنا دائرة الوحدة (دائرة مركزها نقطة الأصل $(0\,,0)$ ونصف قطرها يساوي 1 وأخذنا النقطة (a,b) وجعلناها تتحرك على الدائرة نجد أن: $\cos\theta = a \quad , \quad \sin\theta = b$



أي أن النقطة (a,b) هي النقطة $(\cos\theta , \sin\theta)$ ، التي إذا تحركت في اتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة، نجد أن الإحداثي الصادي $\sin\theta$ يزداد من الصفر حتى1، كلما زادت θمن $\theta = 0$ إلى $\theta = \frac{\pi}{2}$، ثم ينقص $Sin\theta$ من 1 حتى 0، كلما زادت θ من $\theta = \frac{\pi}{2}$ إلى $\theta = \pi$، ونلاحظ كذلك أن $Sin\theta$ يأخذ في النقصان من 0 حتى (-1)، كلما زادت θ من $\theta = \pi$ حتى $\theta = \frac{3\pi}{2}$، ثم يزداد $Sin\theta$ من-1 حتى 0 ، كلما زادت θ من $\theta = \frac{3\pi}{2}$ حتى $\theta = 2\pi$، أي أن المسار يعاد من جديد (أي يتكرر كل 2π) وبالتالي نجد :

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$$
$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

كذلك نجد إن: $\sin x$, $\cos x$ دالتان دوريتان، ودورة كل منهما 2π .

ملاحظة:

الدالتان $\sin x$, $\cos x$ دالتان محددتان لأن: $-1 \le \sin x \le 1, -1 \le \cos x \le 1$.

1- دالة الجيب $y = \sin x$

خواصها :

هي دالة دورية تكرر نفسها كل دور 2π، وهى دالة فردية؛ لأن $\sin(-x) = -\sin x$

ونطاق الدالة هو $D \in (-\infty , \infty)$

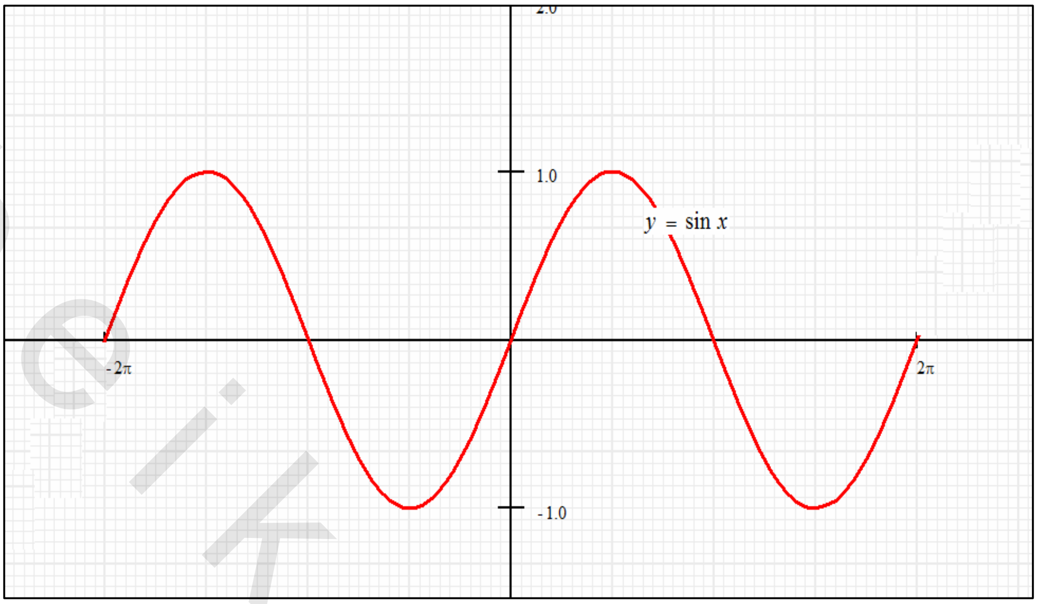
ومداها هو $R \in [-1 , 1]$

وهى معرفة ومتصلة وقابلة للاشتقاق لجميع قيم IR

وهى ليست أحادية على نطاقها ولكن أحادية على الفترة $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$ وأيضا على الفترة $\left[\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

obeikandi.com



نلاحظ : على الشكل :

إن شكل الدالة يتكرر من جديد كل 2π لهذا فإن : $\sin(x+2\pi) = \sin x$

(وهذا يعنى أن $y = \sin x$ دالة دورية ودورتها 2π)

مثال:

برهن صحة العلاقات التالية:

$\sin(\pi - x) = \sin x$ ، $\sin(-x) = -\sin x$.

الحل:

نعلم أن $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

وبالتالي: $\sin(\pi - x) = \sin \pi \cos x - \cos \pi \sin x$

منها
$$\sin(\pi - x) = 0 \cos x - (-1)\sin x$$
$$= \sin x$$

وكذلك:

$$\sin(-x) = \sin(0 - x)$$

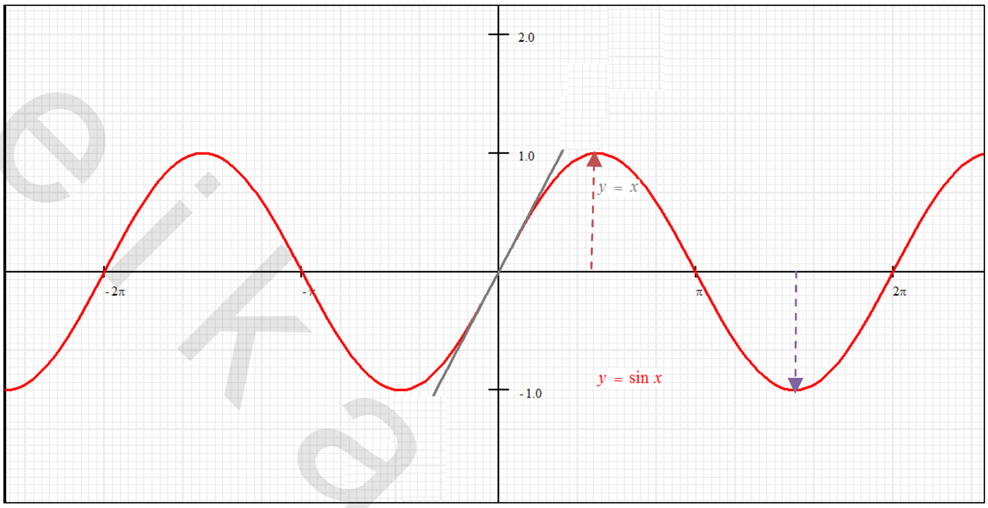
منها نحصل على
$$\sin(-x) = \sin(0)\cos(x) - \cos(0)\sin(x)$$
$$= 0\cos(x) - (1)\sin(x) = -\sin x$$

obeikandl.com

مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}\sin x & : |x|\geq 1\\ x & : |x|<1\end{cases}$.

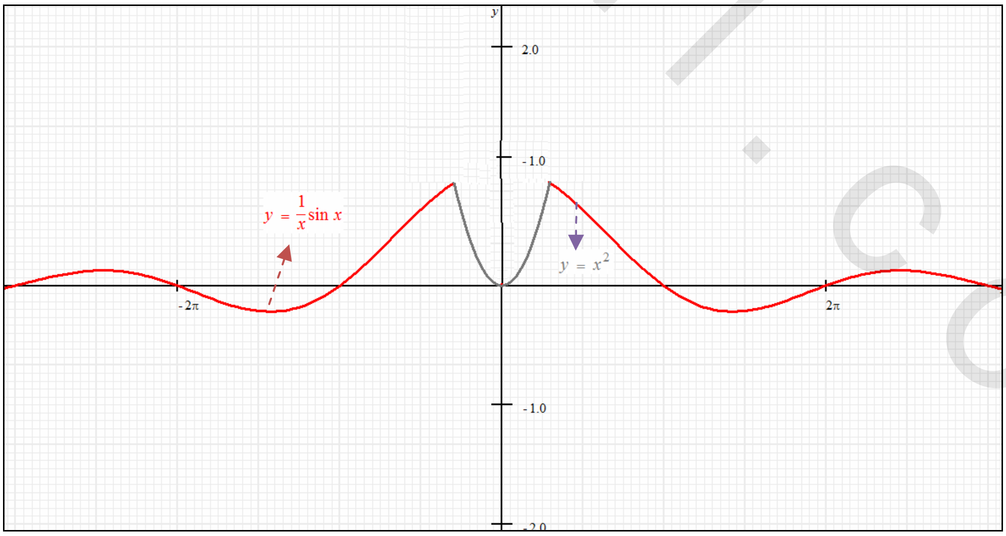
الحل:



مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin(x)\,, & |x|\geq 1\\ x^2 & , \quad |x|<1\end{cases}$.

الحل:



obeikandl.com

2- دالة جيب التمام $y = \cos x$.

خواصها :

النطاق هو $D \in (-\infty , \infty)$

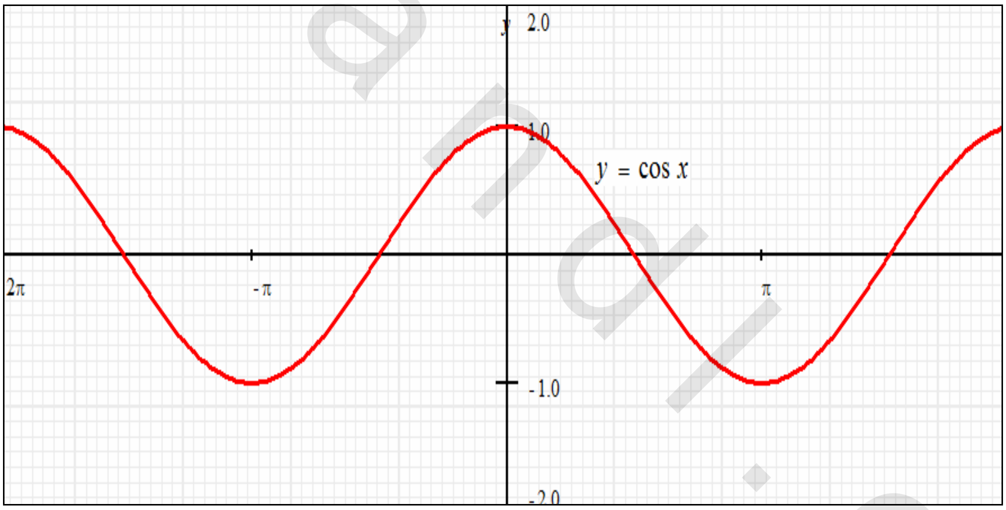
المدى هو $R \in [-1 , 1]$

الدالة زوجية لأن $\cos(-x) = \cos x$

الدالة ليست أحادية (متباينة) على نطاقها وهي متباينة في الفترة $[0 , \pi]$.

الدالة دورية ودورتها 2π أي أن $\cos(x + n2\pi) = \cos x$ حيث $n \in IR$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



obeikandi.com

مثال:

برهن صحة العلاقات التالية:

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ ، $\cos(-x) = \cos x$.

الحل:

نعلم أن $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

ومنها $\cos(\pi - x) = \cos\pi \cos x + \sin\pi \sin x$

وبذلك يكون لدينا

$$\cos(\pi - x) = (-1)\cos x + 0\sin x$$
$$= -\cos x$$

وكذلك:

$$\cos(-x) = \cos(0 - x)$$

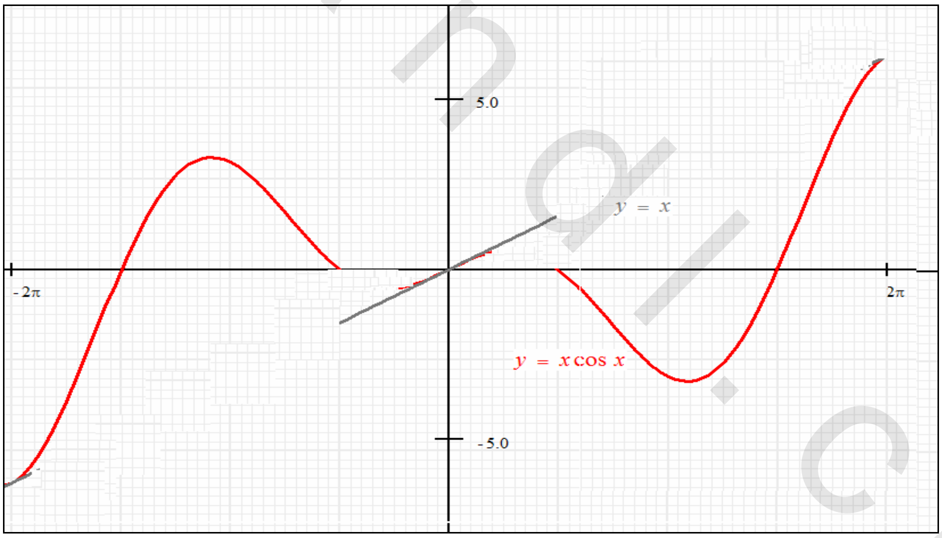
منها نحصل على:

$$\cos(-x) = \cos(0)\cos(x) + \sin(0)\sin(x)$$
$$= 1\cos(x) + 0\sin(x) = \cos x$$

مثال:

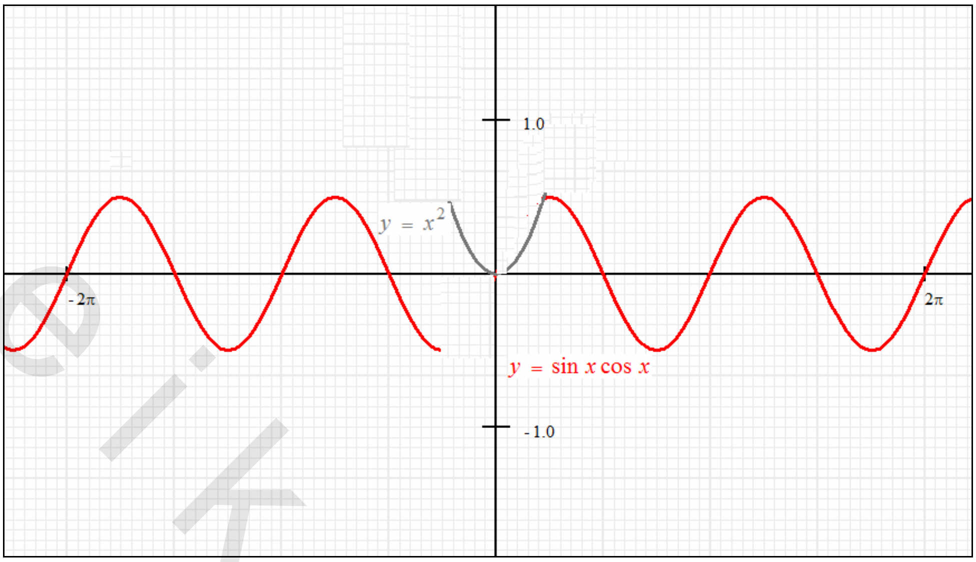
ارسم الدالة $f(x) = \begin{cases} x\cos(x): & |x| \geq \frac{\pi}{4} \\ x : & |x| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

الحل:



مثال: ارسم الدالة $f(x) = \begin{cases} \sin(x)\cos(x): & |x| \geq \frac{\pi}{4} \\ x^2 : & |x| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

الحل:



3- دالة الظل $y = \tan x$.

خواصها :

النطاق $D \in IR - \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\ldots\ldots \quad \ldots. \right\}$

$D = IR - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \right\}$ حيث $n \in IZ$

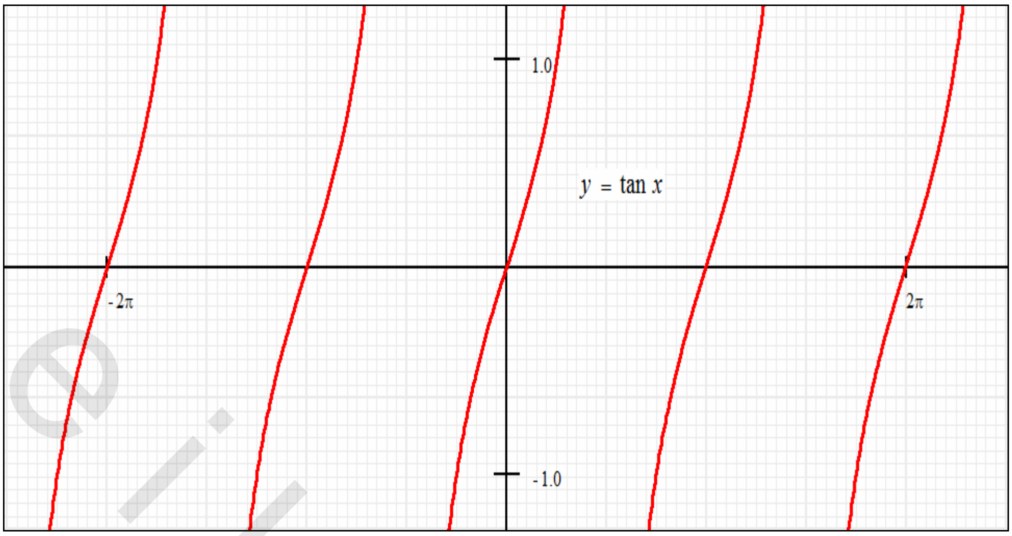
المدى $= IR$

الدالة فردية ؛ لان $\tan(-x) = -\tan x$

الدالة أحادية (متباينة) ضمن دورة واحدة لها.

الدالة دورية ودورها π أي أن $\tan(x + n\pi) = \tan x$ حيث $n \in IZ$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**كمية غير معرفة**



مثال:

برهن صحة العلاقات التالية: $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ ، $\tan(-x) = -\tan x$.

الحل:

نحن نعلم بأن $\tan(a-b) = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}$ وبالتالي:

$\tan(\pi - x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \dfrac{\sin(x)}{-\cos(x)} = -\tan(x)$ وكذلك: $\tan(a) = \dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}$

ومنها نحصل على $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

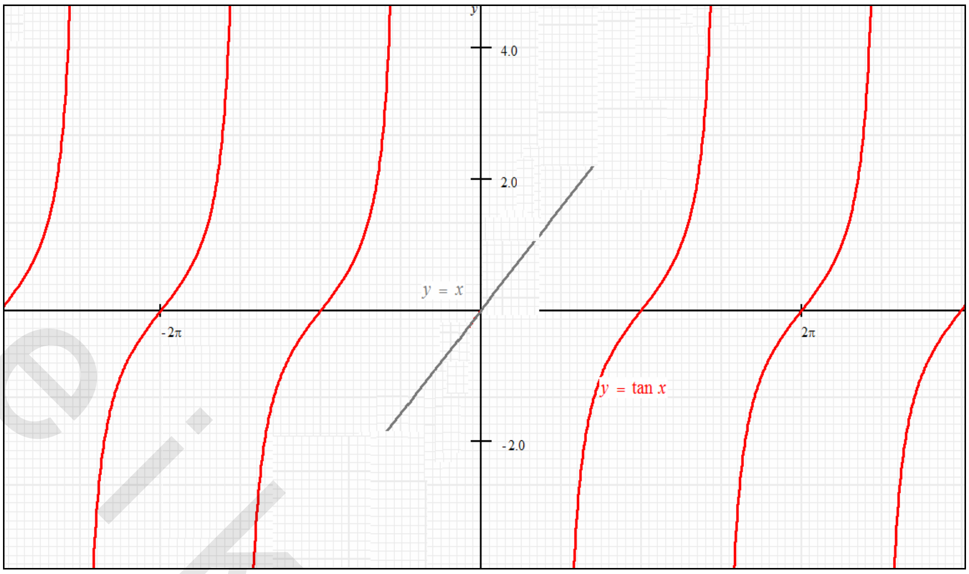
مثال:

ارسم الدالة $f(x) = \begin{cases} \tan(x): & |x| > \dfrac{\pi}{2} \\ x \quad : & |x| \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

الحل:

نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:

obeikandl.com

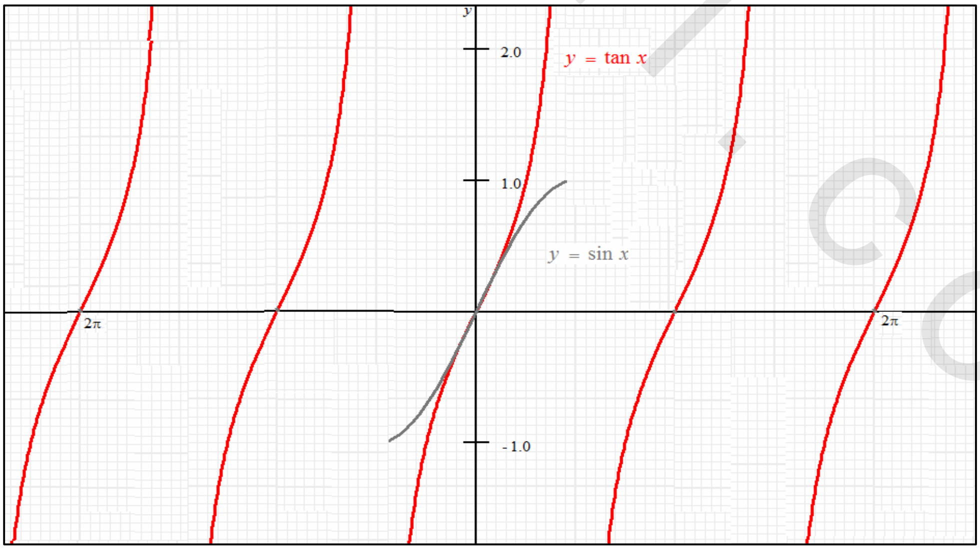


مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}\tan(x): & |x|>\frac{\pi}{2}\\ \sin(x): & |x|\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

الحل:

نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:



obeikandl.com

4- دالة القاطع $y = \sec x$.

يمكن كتابة دالة القاطع بطريقتين :

$$y = \sec x \quad or \quad y = \frac{1}{\cos x} \quad , \ \cos x \neq 0$$

خواصها:

النطاق هو $D \in IR - \left\{ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, ... \right\}$

أي $IR - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \right\} \ , \ N \in IZ$

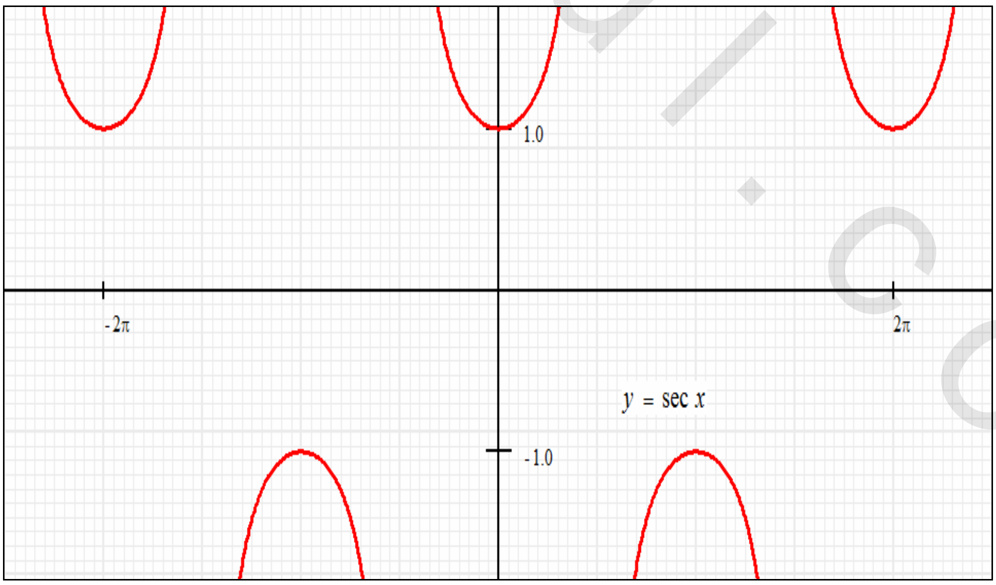
المدى هو $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

الدالة زوجية ؛ لان $\sec(-x) = \sec x$

الدالة ليست أحادية(متباينة) .

الدالة دورية ودورتها 2π أي أن $\sec x = \sec(x + 2n\pi) \ \ ; \ n \in IZ$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sec x$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	**كمية غير معرفة**	-1

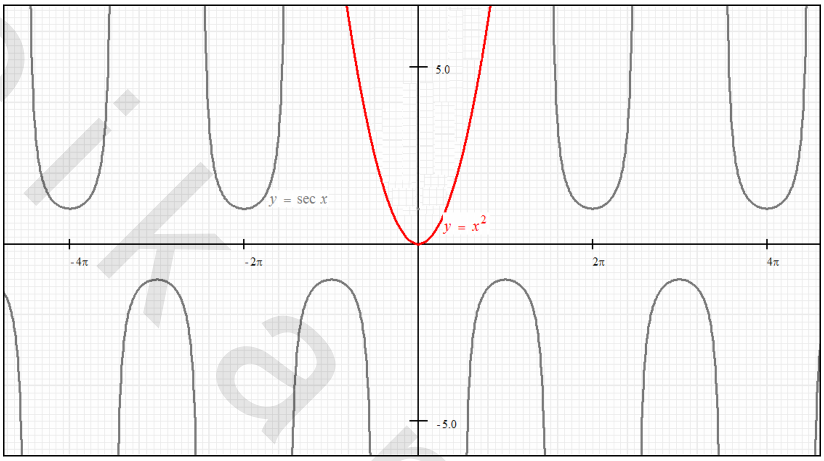


obeikandl.com

مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases} \sec(x): & |x|\le \frac{\pi}{2} \\ x^2 \quad : & |x|>\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

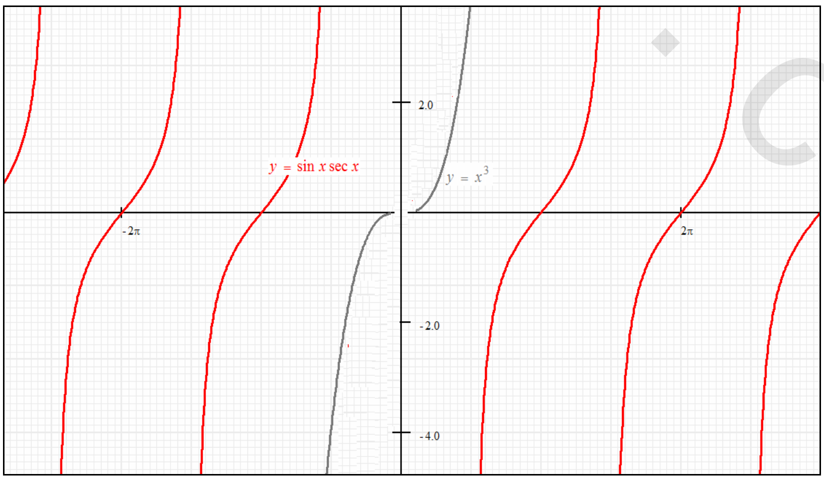
الحل: نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:



مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases} \sin x\sec(x) & : |x|>\frac{\pi}{2} \\ x^3 & : |x|\le \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

الحل: نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:



obeikandi.com

5-دالة قاطع التمام $y = \csc x$.

يمكن كتابة دالة قاطع التمام بطريقتين :

$$y = \csc x \quad or \quad y = \frac{1}{\sin x} \quad , \ \sin x \neq 0$$

خواصها :

النطاق $D_f \in IR - \{ n\pi \} \ ; \ n \in IZ$

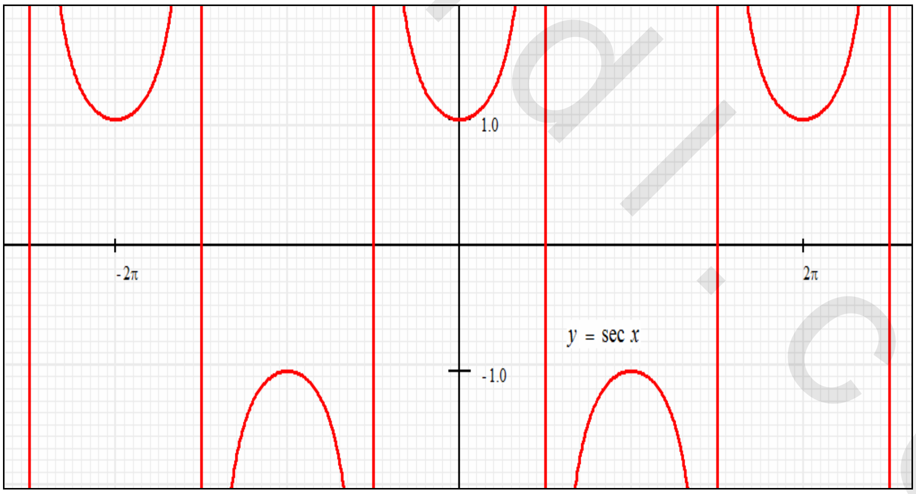
المدى هو $R_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

الدالة فردية وليست أحادية (متباينة).

الدالة دورية ودورها 2π أي $\csc x = \csc(x + 2n\pi) \ ; \ n \in IZ$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\csc x$	0	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	**1**	**كمية غير معرفة**

نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:



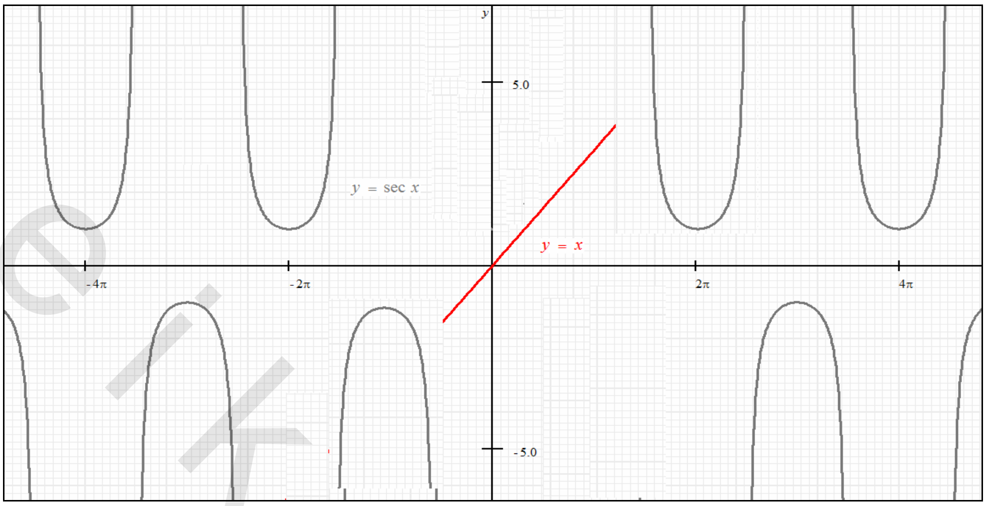
مثال:

ارسم الدالة $f(x) = \begin{cases} x & : |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \csc(x) & : |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

obeikandi.com

الحل:

نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:

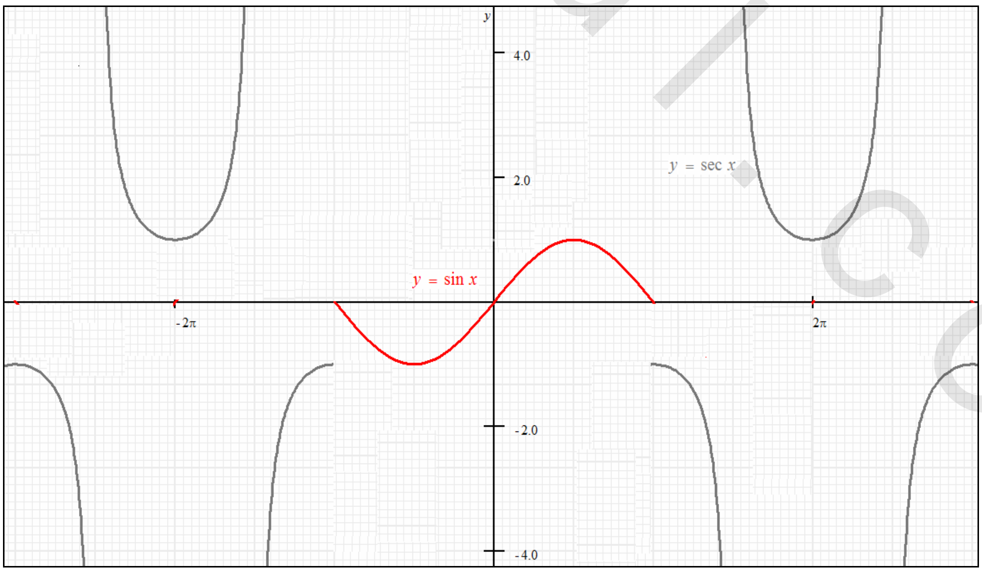


مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases} c\sec(x) & : \ |x|\le \pi \\ \sin x & : \ |x|>\pi \end{cases}$.

الحل:

نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:



obeikandl.com

6- دالة ظل التمام $y = \cot x$

$$y = \frac{1}{\tan x} \quad , \quad \tan x \neq 0$$

خواصها :

النطاق $D \in IR - \{\pm\pi , \pm 2\pi , \pm 3\pi ,..............\}$ أي :

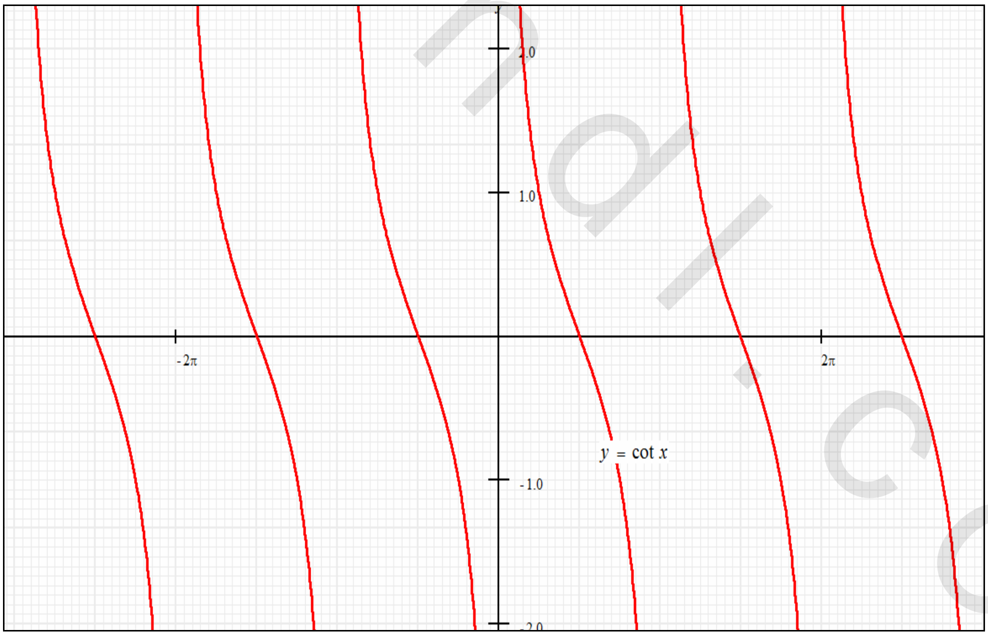
$$D_f = IR - \{n\pi\} \quad ; \quad n \in IZ$$

المدى هو $R_f = (-\infty , \infty)$.

الدالة فردية، وليست أحادية .

الدالة دورية ، ودورتها π أي أن : $\cot x = \cot(x + n\pi) \quad , \quad n \in IZ$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$\tan x$	كمية غير معرفة	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	**0**

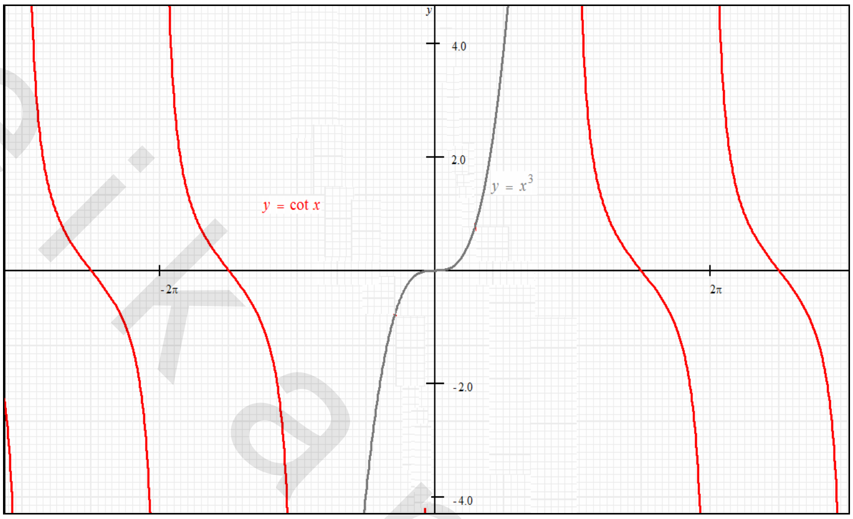


نلاحظ : أن الدوال المثلثية $\cot$, $\sec$, $\csc$, $\tan$ هي دوال دورية لها دورة تساوي π .

مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}\cot(x) & : |x|>\pi \\ x^3 & : |x|\le\pi\end{cases}$.

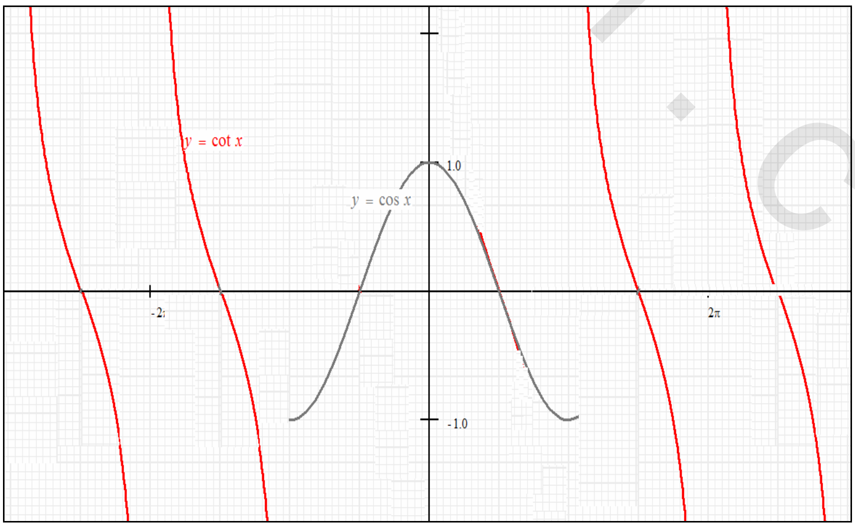
الحل: نقوم بحساب الدالة بذلك نحصل على الشكل على النحو التالي:



مثال:

ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}\cot(x) & : |x|>\pi \\ \cos(x) & : |x|\le\pi\end{cases}$.

الحل: نقوم بحساب قيم الدالة منها نحصل على الشكل على النحو التالي:



obeikandl.com

بعض القوانين الأساسية للدوال المثلثية:

هناك بعض القوانين الهامة في الدوال المثلثية والتي منها:

1- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

3- $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

4- $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

5- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

6- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$

7- $\cos(x \mp y) = \cos x \sin y \pm \sin x \sin y$

8- $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$

9- $\tan(\pi - x) = -\tan x$

10- $\cot(\pi - x) = -\cot x$

11- $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$

12- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

13- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

14- $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

15- $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

16- $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$

17- $\cot(\frac{\pi}{2} + x) = -\tan x$

18- $\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$, $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

19- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

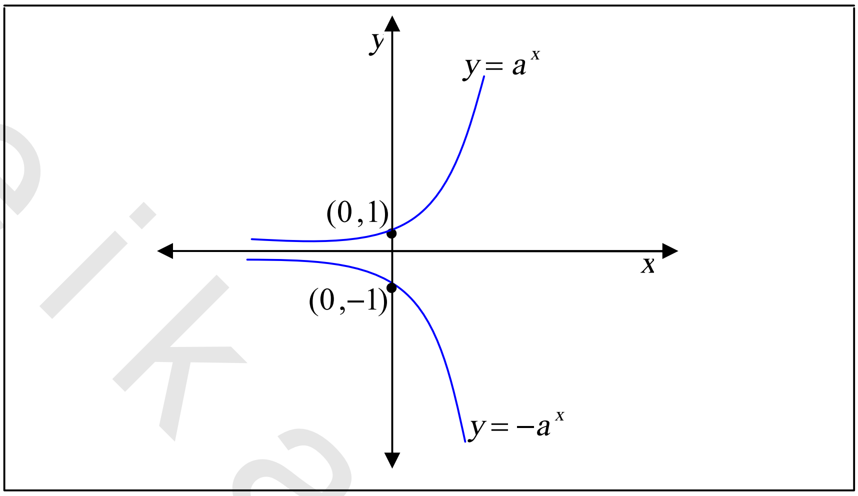
20- $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

obeikandi.com

الدوال الأسية exponential functions

1- الدالة الأسية للأساس a :

هي الدالة من الشكل $y = a^x$ حيث a عدد حقيقي موجب و $a \neq 1$.



ملاحظة:

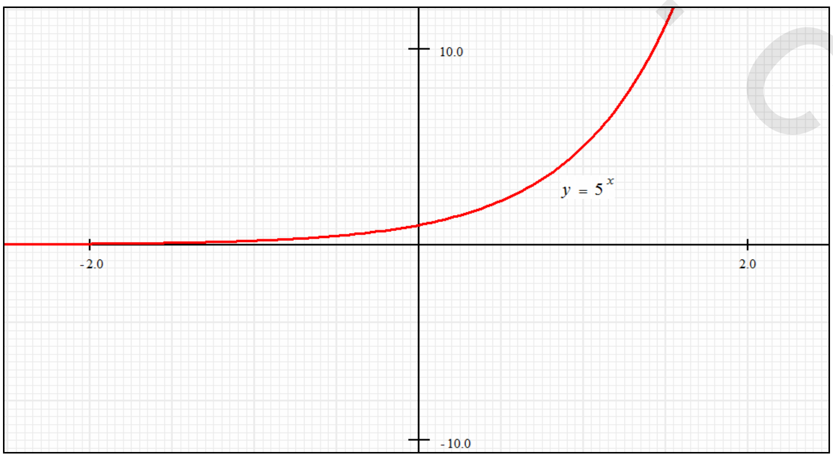
رسم أي دالة آسية $y = a^x$ يمر عبر النقاط $C(1,a)$, $B(0,1)$, $A\left(-1,\frac{1}{a}\right)$

مثال :

وضح مع الرسم نطاق ومدى الدالة الآسية $y = 5^x$.

الحل:

واضح إن نطاق ومدى الدالة هو $D_f = (-\infty,\infty)$ و $R_f = (0,\infty)$



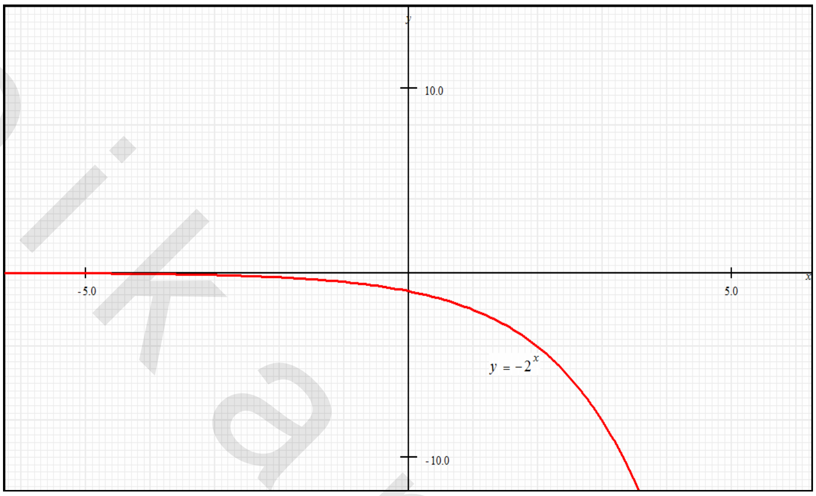
obeikandl.com

مثال :

وضح مع الرسم نطاق ومدى الدالة الآسية $y=-2^x$.

الحل:

من الواضح إن نطاق ومدى الدالة هو $D_f=(-\infty,\infty)$ و $R_f=(-\infty,0)$.

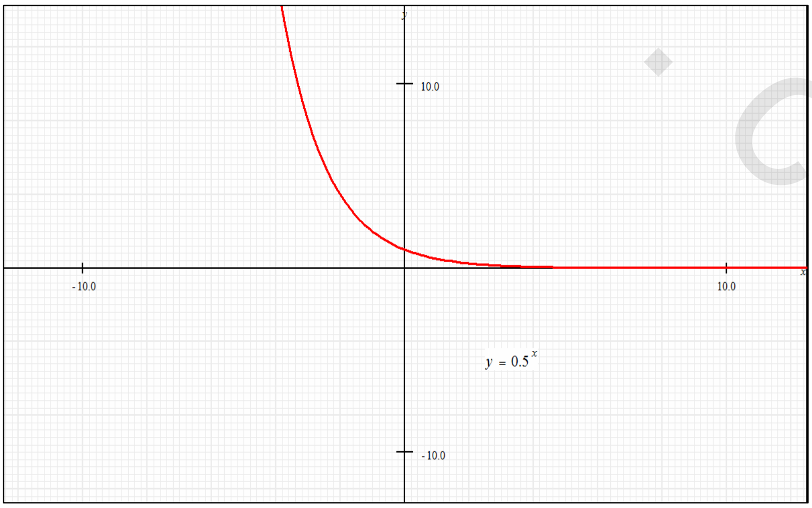


مثال :

وضح مع الرسم نطاق ومدى الدالة الآسية $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

الحل:

من الواضح إن نطاق ومدى الدالة هو $D_f=(-\infty,\infty)$ و $R_f=(0,\infty)$.



obeikandl.com

مثال:

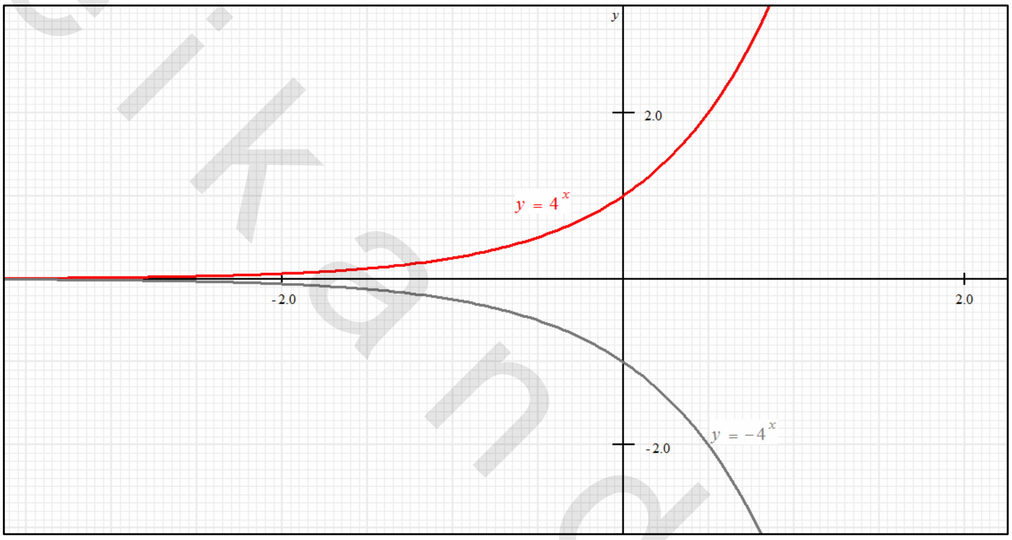
أرسم على الشكل ذاته كلاً من الدوال التالية: $f_1(x)=4^x$ و $f_3(x)=-4^x$

وأوجد نطاق ومدى كلاً منها .

الحل:

نطاق الدالة $f_1(x)=4^x$ هو $D_{f_1}=(-\infty,\infty)$ و ومداها $R_{f_1}=(0,\infty)$.

نطاق الدالة $f_3(x)=-4^x$ هو R و ومداها $R_f=(-\infty,0)$.



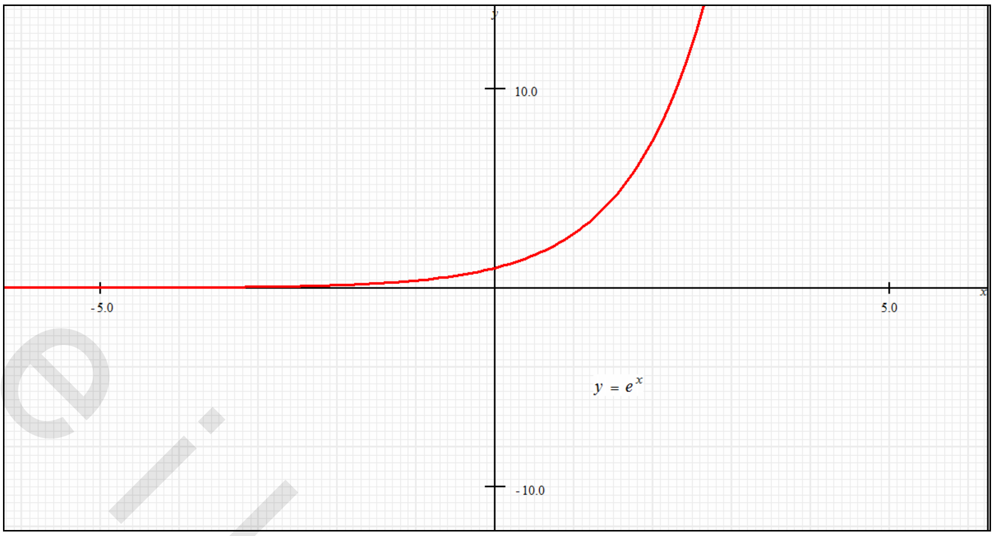
2- دالة الأساس الطبيعي :

يعرف العدد الطبيعي e كالأتي

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{أو} \quad e=\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}$$

ويساوي على درجة التقريب .... $e=2.7182818$

ودالة الأساس الطبيعي لها الشكل $y=e^x$ أي $y=\exp(x)$.

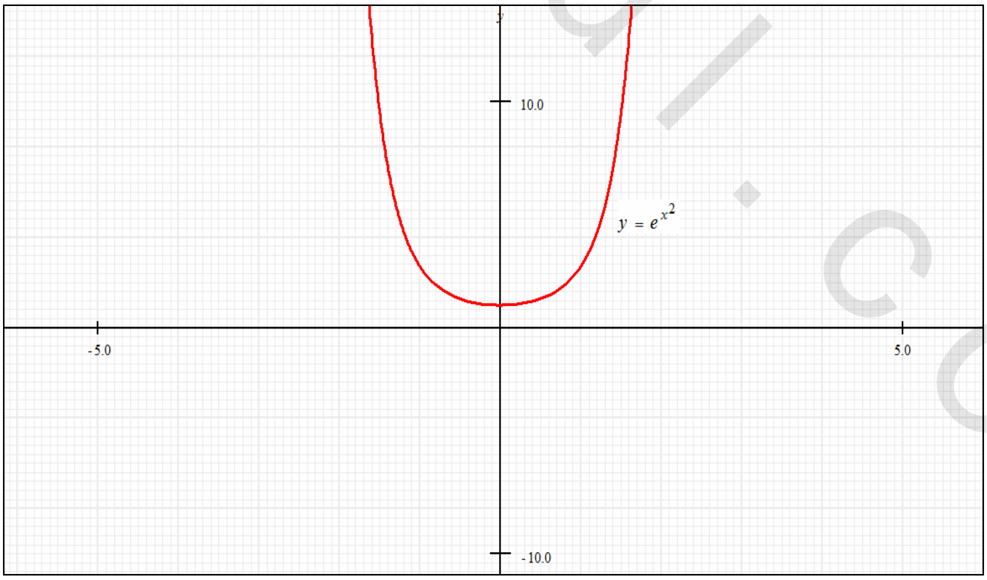


مثال :

أوجد نطاق ومدى الدالة $y = e^{x^2}$ مع رسم منحني الدالة.

الحل:

نطاق الدالة هو $D_f \in (-\infty , \infty)$ و مدى الدالة هو $R_f \in (1 , \infty)$.



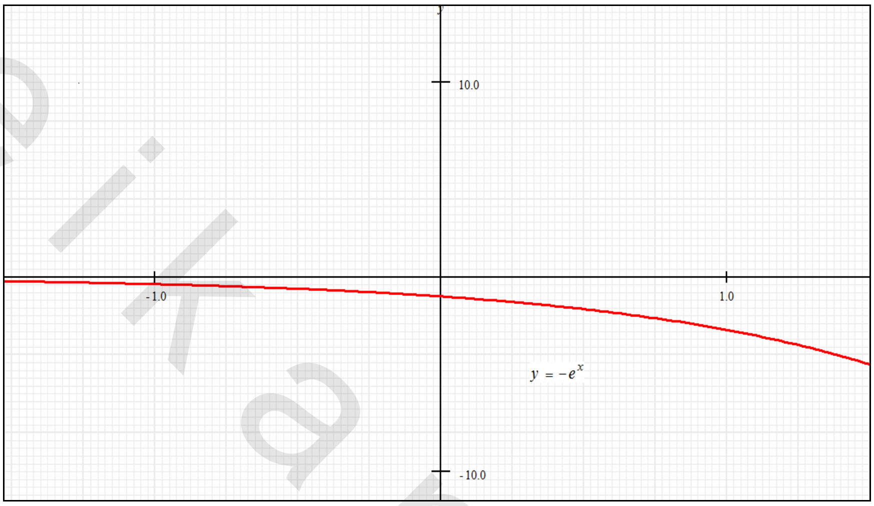
obeikandl.com

مثال :

أرسم منحني الدالة $y=-e^{x^2}$.

الحل:

نطاق الدالة هو $D_f \in (-\infty , \infty)$ و مدى الدالة هو $R_f \in (-\infty,-1)$.



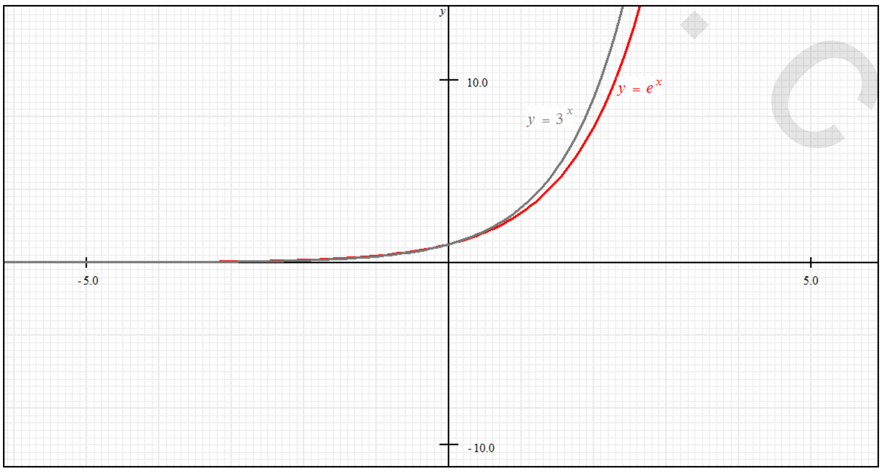
مثال :

أرسم على الشكل ذاته الدالتين $f_1(x)=e^x$ $f_2(x)=3^x$ و قارن بينهما.

الحل:

من الواضح إن نطاق الدالة هو $D_{f_1}=R$ و مدى الدالة هو $R_{f_1}=(0,+\infty)$

وكذلك نطاق الدالة هو $D_{f_2}=R$ و مدى الدالة هو $R_{f_2}=(0,+\infty)$.

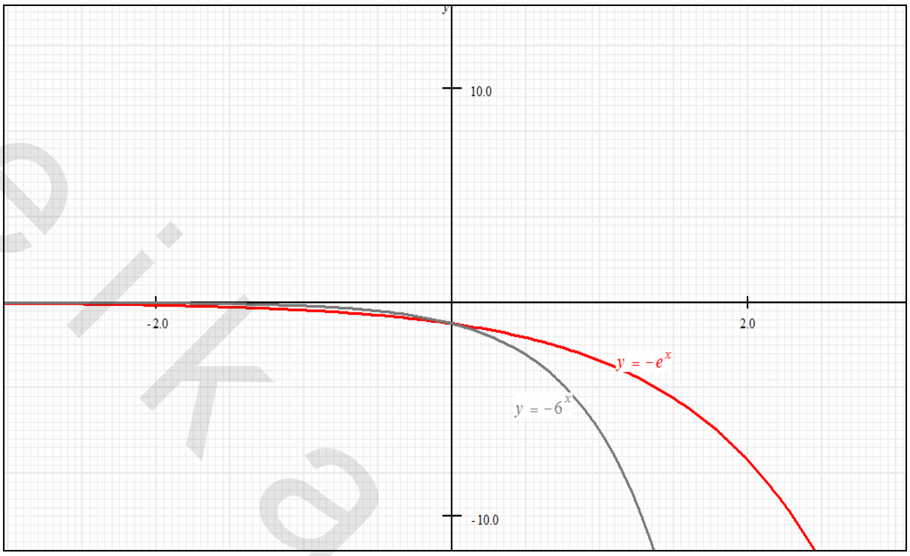


obeikandi.com

مثال :

أرسم على الشكل ذاته الدالتين $f_1(x) = -e^x$ و $f_2(x) = -6^x$ وقارن بينهما.

الحل:



وبشكل عام إذا كان b, a عددان حقيقيان موجبان فإن

$a^x > b^x \Leftarrow a > b$ من أجل $x > 0$

$a^x < b^x \Leftarrow a > b$ من أجل $x < 0$

وبالتالي فإن : $3 > e \Rightarrow f_1 > f_2 \;;\; x > 0$

و $3 > e \Rightarrow f_1 < f_2 \;;\; x < 0$

obeikandl.com

الدوال اللوغارثمية Logarithmic functions

تعريف:

إذا كان $a>0$ و $a\neq 1$ فإنا ندعو الدالة x الدالة $y=f(x)=\log_a x$ اللوغاريثمية ذات الأساس a وذلك يعني أن $x=a^y$:

ملاحظات:

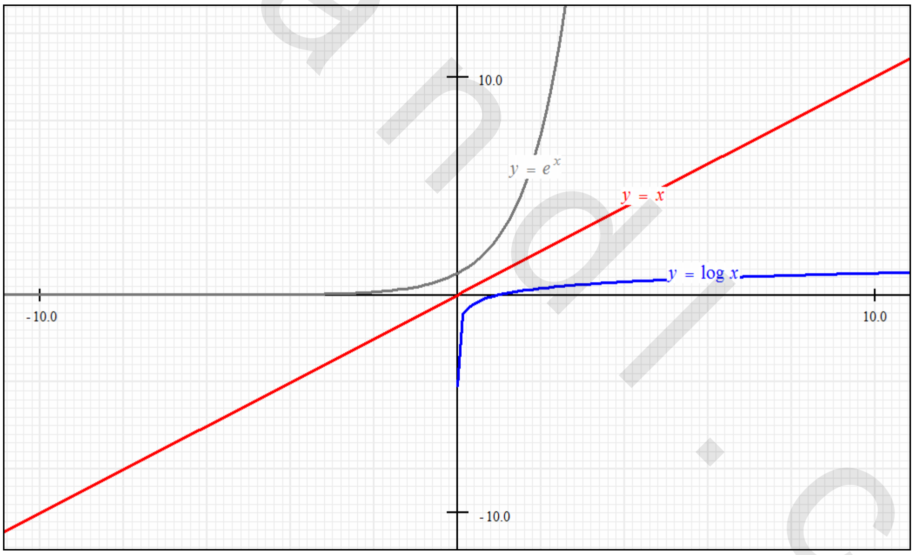
1- النطاق $D_f=(0,\infty)$

2- المدى $R_f=IR$

3- بيان أي دالة لوغاريتمية تمر عبر النقاط:

$$A\left(\frac{1}{a},-1\right) \quad , \quad B(1,0) \quad , \quad C(a,1)$$

4- بشكل عام الدالتان a^x ، $\log_a x$ دالتان متعاكستان .



مقارنة بين الدالة الآسية a^x والدالة اللوغاريثمية $\log_a x$:

الدالة الآسية a^x	**اللوغاريثمية $\log_a x$**
النطاق IR	النطاق $(0,\infty)$
المدى $(0,\infty)$	المدى IR
تمر بالنقاط $(1,0)$, $(0,1)$, $\left(-1,\frac{1}{a}\right)$	تمر بالنقاط $(a,1)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1}{a},-1\right)$

نلاحظ :

أن هناك تناظر (تماثل) بين الدالتين الآسية واللوغاريثمية بالنسبة لمنتصف الربع الأول لان الدالتين متعاكستان.

خواص اللوغريتمات :

1. قانون الضرب (الجداء): من أجل القيم الموجبة x ، y يكون :

$$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$$

2. قانون القسمة : من أجل القيم الموجبة x ، y يكون :

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

3. قانون القوى a و x عددان موجبان و $a > 0$ يكون :

$$\log_a a^x = x \quad , \quad a^{\log_a x} = x$$

ملاحظة:

إذا كان $a = 10$ عندها يدعى اللوغاريتم عشري ويكتب بلا أساس على الشكل $f(x) = \log x$ يكون:

$$y = \log x \quad \Rightarrow \quad x = 10^y$$

بعض القواعد المساعدة على حل المعادلات الآسية واللوغاريتمية:

1. إذا كان $x = y$ عندها $a^x = a^y$.
2. إذا كان، $a^x = a^y$ $a \neq 1$ عندها $x = y$.
3. إذا كان $x = y$ فإن $\log_a x = \log_a y$ حيث x, y موجبان و $a \neq 1$.
4. إذا كان $y = \log_a x$ فإن $x = a^y$.
5. إذا كان $\log_a x = \log_a y$ فإن $x = y$ بشرط $a \neq 1$.

الدالة اللوغارثمية للأساس e (دالة اللوغاريتم الطبيعي):

تعرف الدالة على النحو التالي: $f(x) = \log_e x$ و يعرف اللوغاريتم الطبيعي بالرمز $\ln(x)$ حيث :

- $\ln(x > 1) > 0$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(0 < x < 1) < 0$

ولكن في حالة $x \leq 0$ تكون الدالة غير معروف.

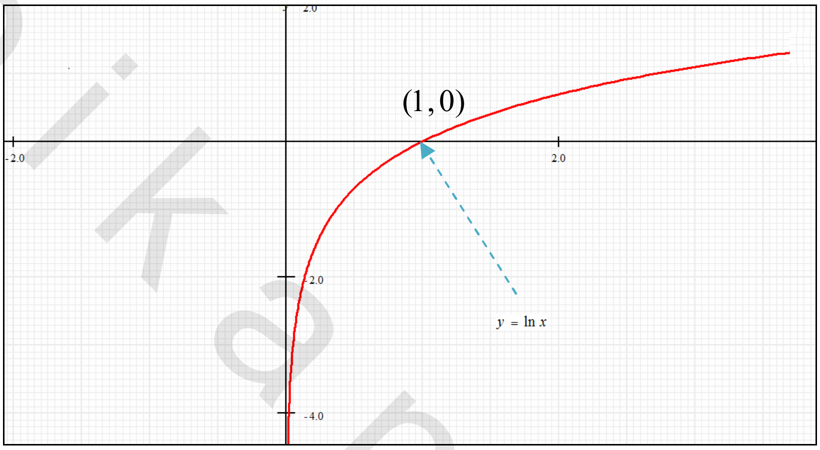
obeikandi.com

ملاحظة:

لا يمكن التعويض بقيم سالبة في الدالة اللوغارثمية لأنها تعطي كمية غير معرفة.

صورة الدالة اللوغارثمية:

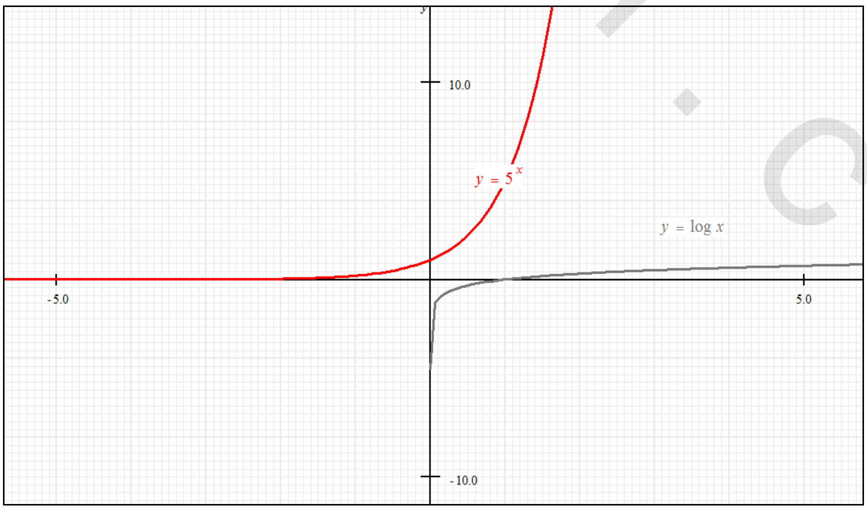
هي $y=\ln x$ نطاقها هو $D\in(0,\infty)$ ومداها هو $Range\in(-\infty,\infty)$ و تأخذ الشكل التالي:



مثال :

أرسم منحنى الدالة $y=5^x$ و $y=\ln 5$.

الحل:



obeikandl.com

الدوال الزائدية Hyperbolic Functions

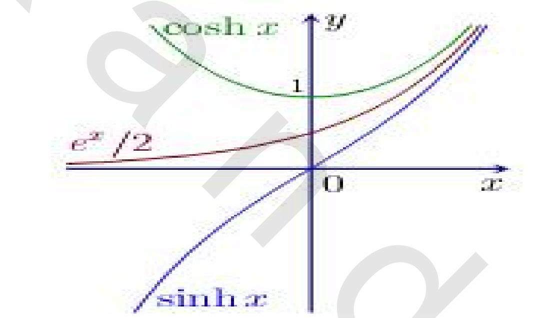
يعبر عن الدوال الزائدية بدلالة الدوال الآسية e^{x} و e^{-x} وهي مشابهة في خواصها لحد كبير للدوال المثلثية ولذلك تسمى بأسماء مشابهة للدوال المثلثية وهذه الدوال معرفة كالتالي:

$$\sinh : R \to R \quad , \quad x \to \frac{e^{x} - e^{x}}{2}$$

أما دالة جيب التمام الزائدي تعرف على الشكل التالي :

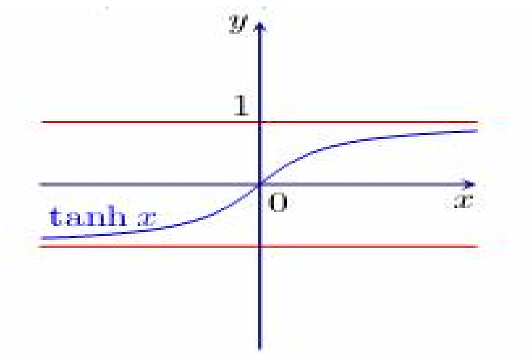
$$\cosh : R \to R \quad , \quad x \to \frac{e^{x} + e^{x}}{2}$$

الشكل التالي يوضح الدالتين $\sinh x$ و $\cosh x$:



وكذلك دالة الظل الزائدي تعرف على الشكل التالي :

$$\tanh : R \to R \quad , \quad x \to \frac{\sinh}{\cosh} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$



obeikandl.com

أما باقي الدوال تعرف على الشكل التالي:

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\sec h(x) = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$c\sec h(x) = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

بعض خواص الدوال الزائدية:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\tanh^2 x + \sec h^2 x = 1$$

$$\coth^2 x - c\sec h^2 x = 1$$

وهذا الخواص يمكن استنتاجها من التعاريف التالية:

$$\sinh(-x) = -\sinh x \Rightarrow \sinh x$$ دالة فردية

$$\cosh(-x) = \cosh x \Rightarrow \cosh x$$ دالة زوجية

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \mp y) = \frac{\tanh x \mp \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

وبوضع $x = y$ نحصل على المتطابقات التالية:

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$$

$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

إذا يمكن كتابة المعادلات التالية:

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

obeikandl.com

الدوال المتناظرة: symmetric functions

هناك ثلاثة أنواع من التماثل(التناظر):

1−التماثل(التناظر) حول المحور y :

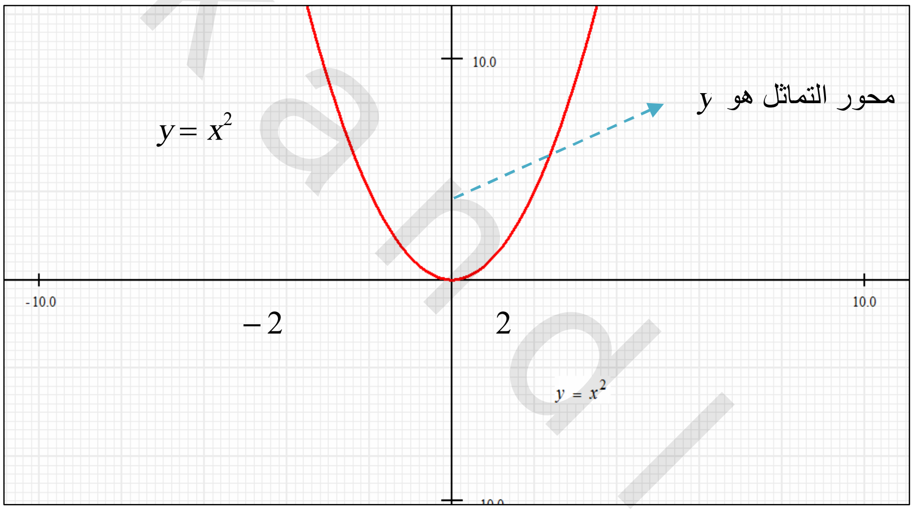
إذا عوضنا في أي دالة بالمتغير $(-x)$ بدلا من (x)،وكان الناتج هو الدالة ذاتها؛ فيقال عن هذه الدالة أنها متماثلة(متناظرة) حول المحور y .

فمثلاً:

من أهم الدوال المتماثلة(المتناظرة) حول المحور y هي $y = x^2$.

$$y = x^2 \leftrightarrow y = (-x)^2$$

$$y = x^2 = (-x)^2$$



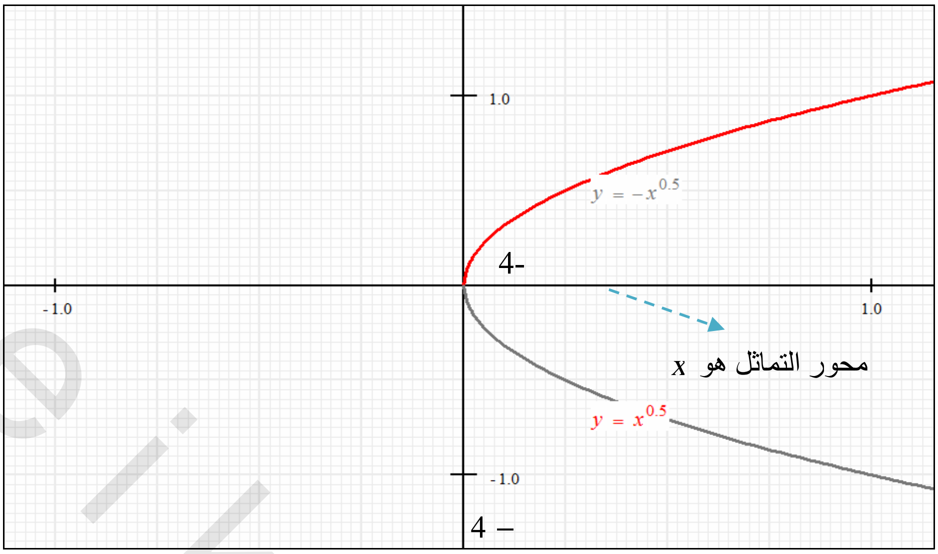
إذا الدالة متماثلة(متناظرة) حول المحور y

2− التماثل (التناظر) حول المحور X .

إذا عوضنا بالمتغير $(-y)$ بدلا من المتغير (y) في أي دالة وكان الناتج هو الدالة ذاتها؛ فيقال عن هذه الدالة أنها متماثلة(متناظرة) حول المحور X .

فمثلاً:

من أهم الدوال المتماثلة حول المحور X هي $y = x^2$ أي أن : $x = y^2$ ومنها $(-y)^2 = y^2 = x$.



3–التماثل(التناظر) حول نقطة الأصل:

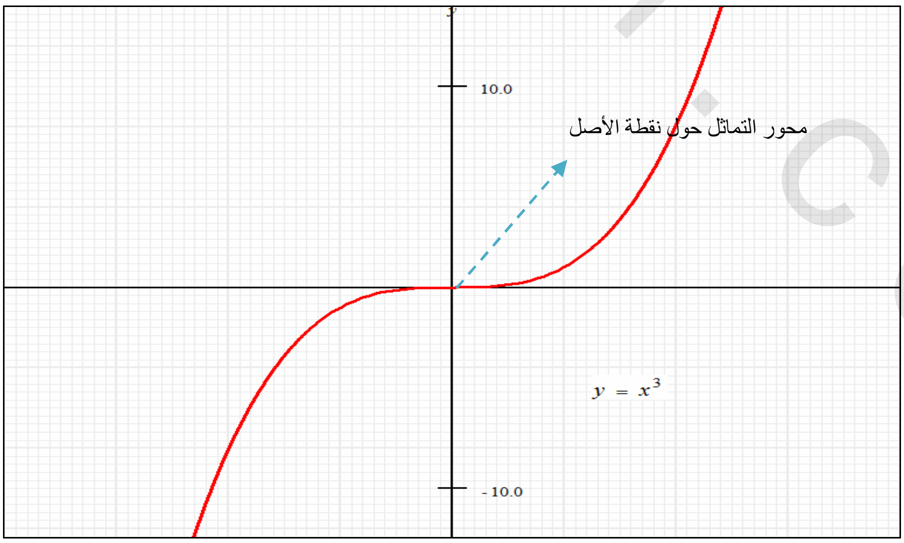
إذا عوضنا بالمتغير $(-x)$ بدلا من (x)وكذلك بالمتغير $(-y)$ بدلا من (y)، وكان الناتج الدالة ذاتها؛ فيقال أن الدالة متماثلة (متناظرة) حول نقطة الأصل .

فمثلاً:

من أهم الدوال المتماثلة (المتناظرة) حول نقطة الأصل هي $y = x^3$.

$$y = x^3 \rightarrow -y = (-x)^3$$

$$y = x^3 \rightarrow -y = -x^3$$



obeikandl.com

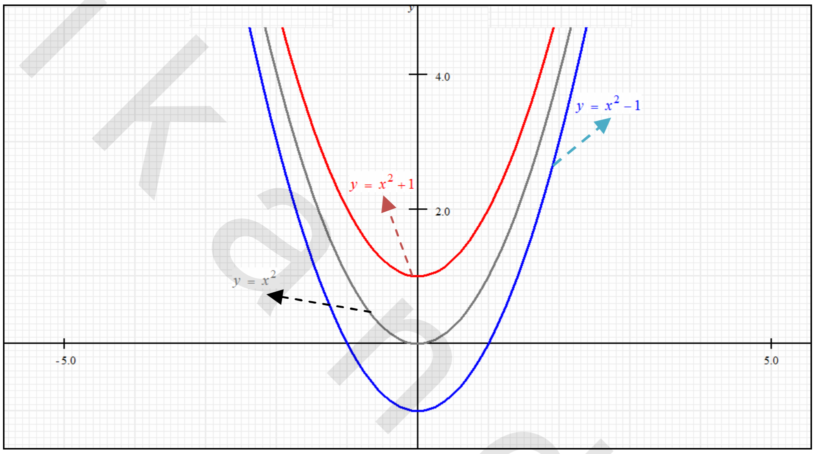
استخدام التحويلات الخطية Use of liner transformations

نعلم أن بيان دالة $f(x)$ يعطي صورة واضحة عن الدالة ويسهل دراستها والتحويلات الخطية تسهل رسم هذا البيان وهي الإزاحة والتمدد والانضغاط والانكماش.

1- الإزاحة Shift

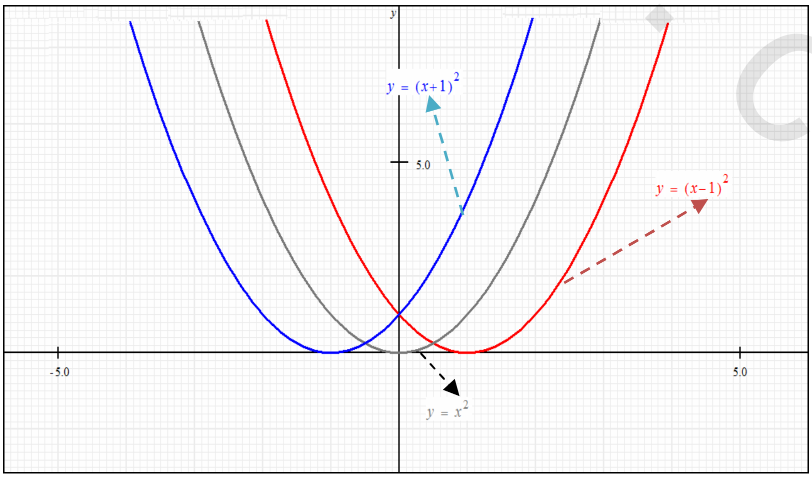
أ- الإزاحة الراسية Vertical shift :

يسبب إضافة أو طرح مقدار ثابت موجب C لقيمة الدالة $f(x)$ إزاحة رأسية فالإضافة تزيح الدالة للأعلى مسافة C والطرح يزيح المنحنى للأسفل مقدار C كما يوضح الشكل التالي:



ب- الإزاحة الأفقية Horizontal shift :

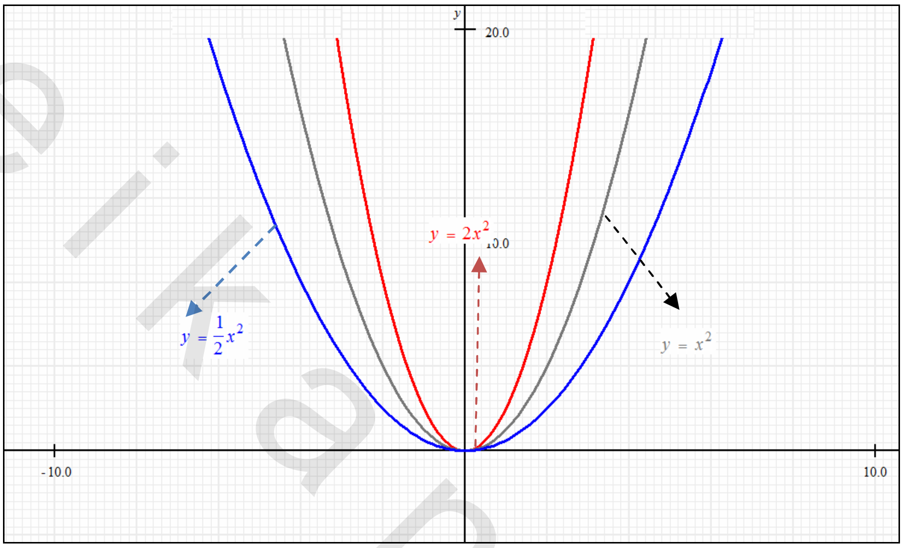
تؤدي الإزاحة الأفقية $f(x+c)$ إلى إزاحة المنحنى $f(x)$ لليسار وتؤدي الإزاحة الأفقية $f(x-c)$ إلى إزاحة المنحنى $f(x)$ لليمين كما يبين الشكل التالي (إذا كان $c>0$):



2− التمدد والانضغاط Stretch and compression :

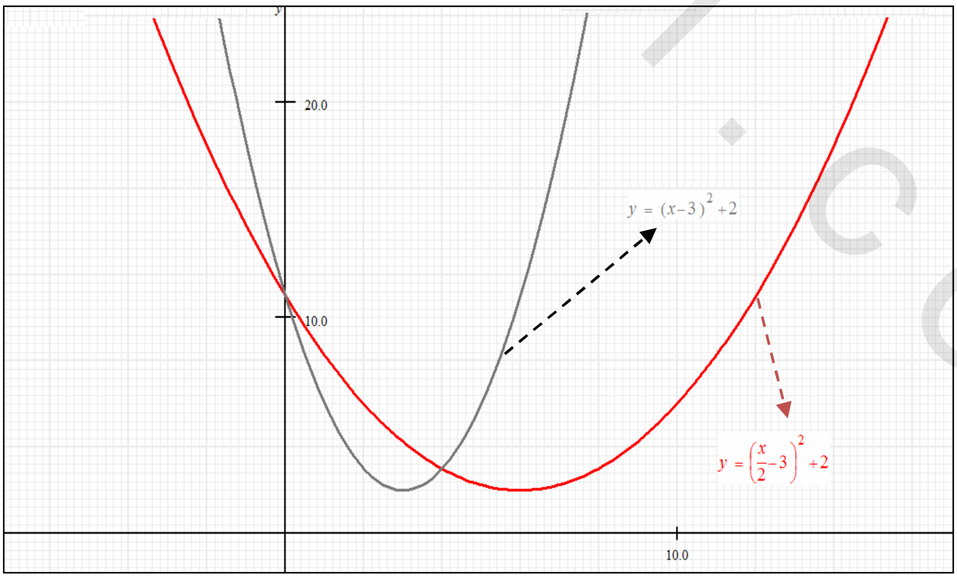
أ−التمدد والانضغاط الراسي Vertical stretch and retrial compression

إذا ضربنا قيم الدالة $f(x)$ بمقدار ثابت C نحصل على تمدد راسي عندما تكون $C>1$ وانضغاط راسي عندما $0<C<1$ كما يبين الشكل التالي:



ب−التمدد والانضغاط الأفقي: Horizontal stretch and compression

إن بيان $f(\frac{x}{c})$ هو تمدد أو انضغاط أفقي بنسبة C كما يبين الشكل التالي:



2- الانعكاس: Reflection

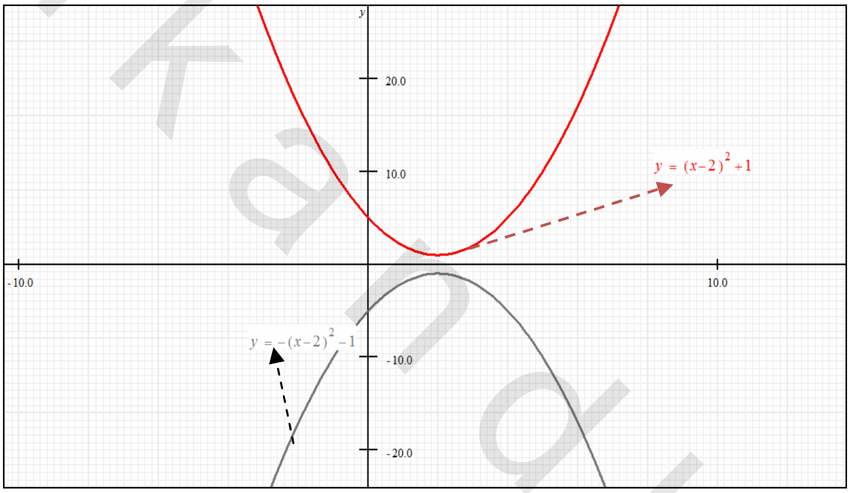
مجموعة الدوال $y=(x-a)^2+b$ وهي مجموعة القطوع المكافئة التي ذروتها في النقطة $(a,-b)$ حيث تمثل هذه النقطة أدنى نقطة من هذه المنحنيات أي أن:

$y \geq b$ عندما $y=b$ و $-\infty \leq x \leq \infty$ هو حد أدنى لهذه الدوال .

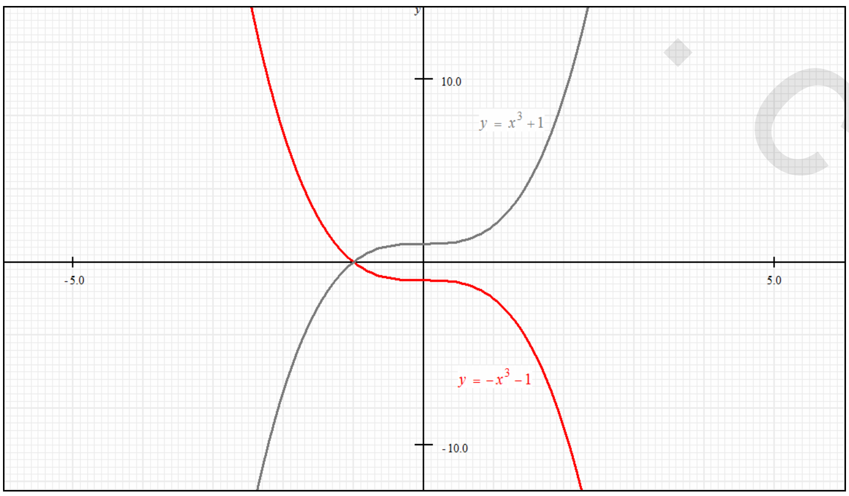
كذلك فإن مجموعة الدوال $y=-(x-a)^2+b$ هي انعكاس لمجموعة القطوع تلك وبالتالي فهي محدودة من الأعلى وتمثل النقطة (a,b) ذروتها العليا أي أن:

$y=-b$ و هو حد أعلى لهذه الدوال .

يقال عن الدالة $y=-f(x)$ انعكاس للدالة $f(x)$ عبر المحور $0X$ كما يبين الشكل التالي:



وكذلك الشكل التالي:



الدالة العكسية : Inverse function

إذا كانت $f : x \rightarrow y$ دالة تقابلية (أحادية) فتسمى الدالة $g : y \rightarrow x$ بالدالة العكسية للدالة f ،بشرط أن $fog = I_y$, $go\,f = I_x$ ، وفي هذه الحالة تكتب $g = f^{-1}$.

لاحظ أنه إذا كانت f ليست تقابلية؛ فإن f^{-1} لا تمثل دالة ، وللحصول على معكوس الدالة نتبع الخطوات التالية :

1. نتأكد من أن الدالة تقابلية ، ونحدد نطاقها ومداها .
2. نضع الدالة على الصورة الصريحة في المتغير y أي نكتبها على الشكل $x= g(y)$.
3. نضع x بدلا من y ، ونضع y بدلا من x فنحصل على معكوس الدالة $y= g(x)$

مثال :

أوجد معكوس الدالة $f(x) = 3x+1$

الحل :

1- واضح أن الدالة تقابلية لأنها متباينة و غامرة ونحدد نطاقها ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية.

2- نضع y بدلا من $f(x)$ أي أن $x=3y+1$

3- نوجد x بدلالة y أي أن $x = \dfrac{y-1}{3}$

4- نضع $f^{-1}(y)= \dfrac{y-1}{3}$

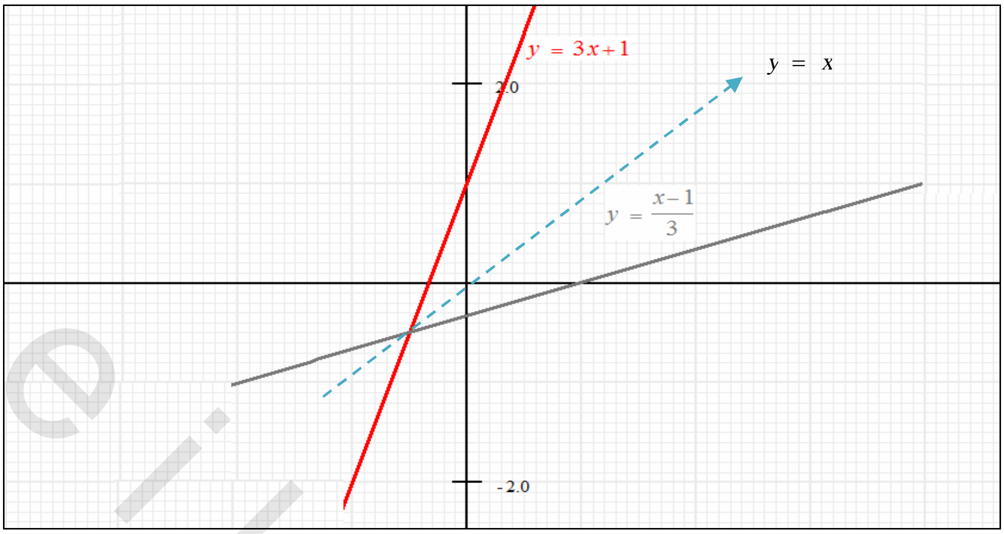
5-نضع x بدلاً من y أي أن: $f^{-1}(x)= \dfrac{x-1}{3}$

لتتأكد من عملك أوجد fog و $go\,f$ كلاهما يجب أن يساوي x . كما في الشكل التالي:

واضح أن $fog(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x-1}{3}\right)$ منها نحصل على $fog(x) = 3\left(\dfrac{x-1}{3}\right)+1 = x$

وكذلك $g\circ f(x) = g(f(x)) = g(3x+1)$ منها نحصل على $go\,f(x) = \dfrac{3x+1-1}{3} = x$

obeikandl.com



مثال :

أوجد الدالة العكسية للدالة $f: D_f \to R_f$ حيث $f(x)=\sqrt{2x-3}$.

الحل :

يجب أن نبرهن أن الدالة تقابلية؛ بما أن الدالة $f(x)=\sqrt{2x-3}$ فإن نطاقها $D_f=\{x:2x-3\ge 0\}=\left[\frac{3}{2},\infty\right)$ أي أن $D_f=\left\{\frac{3}{2}\le x\le\infty\right\}$ منه $3\le 2x\le\infty$

وبذلك تصبح $\frac{3}{2}\le x\le\infty$ ومنها $R_f=[0,\infty)$

نتحقق من أن الدالة تقابلية $\forall \; x_1,x_2 \in D_f$ بحيث

منها $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{2x_1-3}=\sqrt{2x_2-3}$

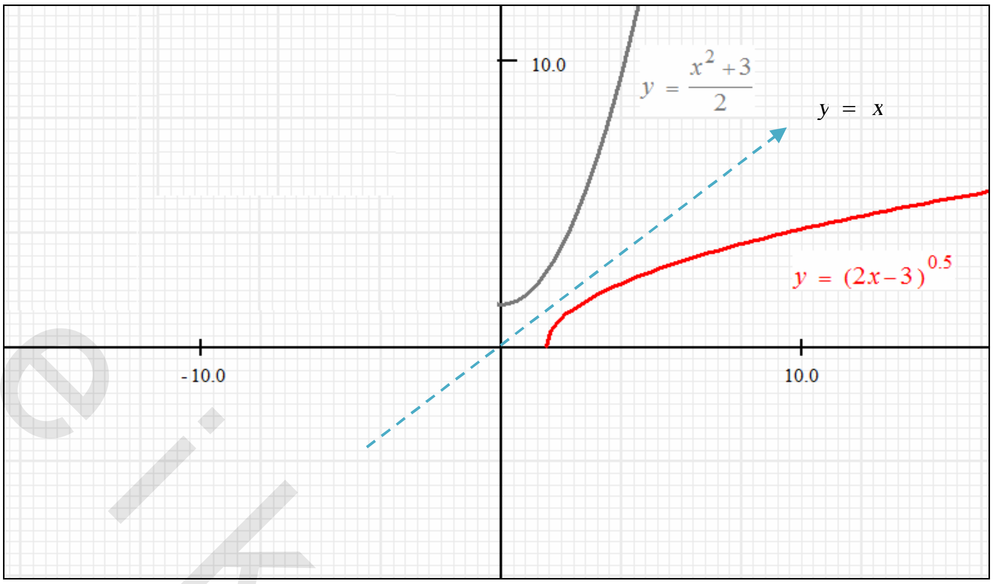
$2x_1-3=2x_2-3\Rightarrow x_1=x_2$ بذلك تكون f متباينة وغامرة إذا f تقابلية.

نربع طرفي المعادلة نحصل على $y^2=2x-3$ نوجد x بدلالة المتغير y فيكون لدينا

$$x=\frac{y^2+3}{2}$$

منها $f^{-1}(y)=\frac{y^2+3}{2}$ بتعويض عن y بـ x فنحصل على $f^{-1}(x)=\frac{x^2+3}{2}$

obeikandi.com



ملاحظة:

بيان رسم الدالة العكسية للدالة f يناظر بيان الدالة f بالنسبة للمستقيم $x = y$ منصف الربع الأول (صورة f عبر المستقيم $x = y$) .

obeikandi.com

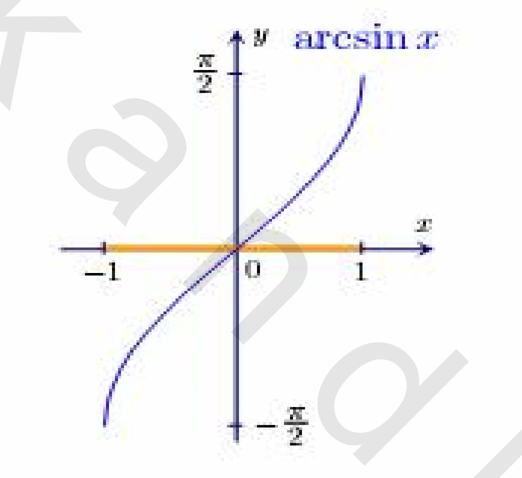
الدوال المثلثية العكسية Inverse Trigonometric functions

1- الدالة العكسية للدالة sin $(\arcsin x)$:

بفرض أن $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ عندئذ نعرف الدالة العكسية للدالة المثلثية sin على الشكل التالي:

$$\sin^{-1} x = y \Leftrightarrow x = \sin y$$

وعندها يكون $\sin^{-1}(\sin x) = x$ ومنها تكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ وكذلك $\sin(\sin^{-1} x) = x$، كما أن $-1 \le x \le 1$ كما هو موضح بالشكل التالي:



مثال:

أحسب قيمة $x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

الحل:

بالتأثير بالدالة sin على طرفي المعادلة $x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في نحصل على :

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \sin x = \sin(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)) \Rightarrow \sin x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ منها $x = \frac{\pi}{3}$

obeikandl.com

مثال:

إذا كان $y=\sin^{-1}\left(x^{2}-1\right)$ فأوجد نطاق الدالة $f(x)$.

الحل:

بما أن الدالة المثلثية محدودة ضمن المجال $[-1,1]$ فإن نطاق الدالة المدروسة هو :

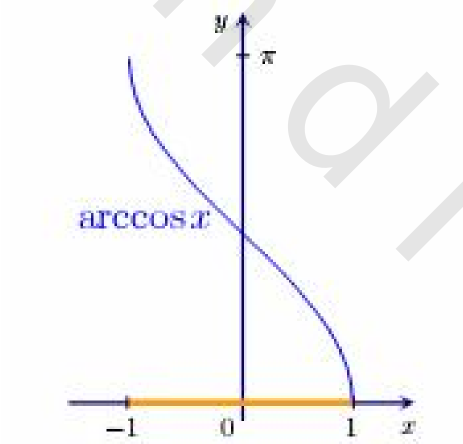
$$\begin{aligned}\{x:\quad -1\le x^{2}-1\le 1\} &= \{x:\quad 0\le x^{2}\le 2\}\\ &= \{x:\quad -\sqrt{2}\,|x|\le\sqrt{2}\}\\ &= \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\end{aligned}$$

2- الدالة العكسية للدالة cos $(\arccos x)$:

بفرض أن $0\le x\le\pi$ عندئذ نعرف الدالة العكسية للدالة المثلثية cos على الشكل التالي:

$$\cos^{-1}x=y\Leftrightarrow x=\cos y$$

وعندها يكون $\cos^{-1}(\cos x)=x$ ومهنا تكون $0\le x\le\pi$ وكذلك $\cos(\cos^{-1}x)=x$ كما أن $-1\le x\le 1$ كما هو موضح بالشكل التالي:



مثال:

أحسب قيمة $x=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

الحل:

بالتأثير بالدالة cos على طرفي المعادلة $x=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ في نحصل على:

obeikandl.com

بضرب طرفي المعادلة في نحصل على :

$$x=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow \cos\ x=\cos(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right))\Rightarrow \cos\ x=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ منها $x=\frac{\pi}{6}$

مثال:

إذا كان $y=\cos^{-1}\left(x^2-2\right)$ فأوجد نطاق الدالة $f(x)$.

الحل:

بما أن الزاوية $\left(1\le x^2-2\le 1\right)$ بذلك يكون لدينا $1\le x^2\le 3$ بذلك تكون قيمة x على النحو التالي $\pm 1\le |x|\le\sqrt{3}$ منها يكون لدينا :

$x\ge 1$ أو $x\le -1$ و $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ هذا يؤدي إلى

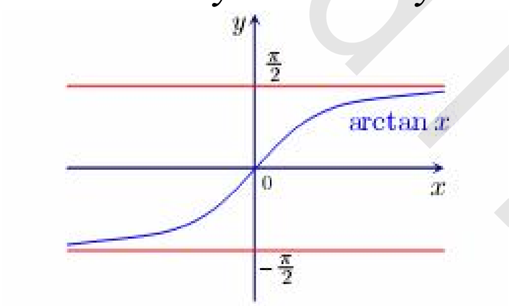
$x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ و $x\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ منها نحصل على :

$$x\in\left(-\sqrt{3},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{3}\right)$$

3- الدالة العكسية للدالة $\tan\left(\arctan x\right)$:

بفرض أن $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ عندئذ نعرف الدالة العكسية للدالة المثلثية tan على الشكل التالي:

$$\tan^{-1}x=y\Leftrightarrow x=\tan y$$



4- بشكل مشابه نعرف الدوال العكسية التالية:

- إذا كان $y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ فإن :

$$y=c\sec^{-1}x\quad ,\quad |x|\ge 1\Leftrightarrow x=c\sec\ y$$

$$y=\sec^{-1}x\quad ,\quad |x|\ge 1\Leftrightarrow x=\sec\ y$$

- إذا كان $y\in(0,\pi)$ فإن : $y=\cot^{-1}x\Leftrightarrow x=\cot\ y$

obeikandl.com

مثال:

أحسب قيم الدوال التالية:

1: $y = \cos\left[\tan^{-1}(-1) + \tan(1)\right]$

2: $y = \tan^{-1}\sqrt{3} + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل:

أولا: نوجد قيمة $y = \cos\left[\tan^{-1}(-1) + \tan(1)\right]$ على الشكل التالي:

$\left(y_1 = \tan^{-1}(-1) \Rightarrow \tan y_1 = -1\right)$ منها $y_1 = -\frac{\pi}{4}$

$\left(y_2 = \tan^{-1}(1) \Rightarrow \tan y_2 = 1\right)$ منها $y_2 = \frac{\pi}{4}$ بتعويض عن y_1 و y_2 في

$$\cos\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right] = \cos(0) = 1$$

ثانيا: نوجد قيمة $y = \tan^{-1}\sqrt{3} + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ على الشكل التالي:

$\left(y_1 = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{3} = \tan y_1\right)$ منها $y_1 = \frac{\pi}{3}$

$\left(y_2 = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin y_2\right)$ منها $y_2 = -\frac{\pi}{4}$ بتعويض عن y_1 و y_2 في

$$y = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

الدوال الزائدية العكسية Inverse Hyperbolic Functions

تعرف الدوال الزائدية العكسية بدلالة الدوال اللوغارثمية كالآتي:

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad , \quad \forall x$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad , \quad \forall |x| \geq |1|$$

$$\sec h^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad , \quad o < x \leq 1$$

$$\csc h^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right) \quad , \quad x \neq 0$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad , \quad |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad , \quad |x| > 1$$

مثال:

برهن أن $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

الحل:

نعلم بأن : $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ و $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ وبالتالي:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

مثال:

برهن أن $\tanh^2 x + \sec h^2 x = 1$.

الحل:

نعلم بأن : $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ و $\sec hx = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ منها

$$\tanh^2 x+\sec h^2 x=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2+\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^2$$

$$=\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}+4}{e^{2x}-2+e^{-2x}}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{e^{2x}+e^{-2x}+2}=1$$

مثال:

برهن أنه $\forall x \quad , \quad \sinh^{-1} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

الحل:

بفرض أن $y=\sinh^{-1} x$ عندها $\sinh y=x$ ومن تعريف $\sinh y$ يكون لدينا : بالتعويض $\sinh y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$ في الطرف الثاني من العلاقة السابقة نحصل على :

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}+\sqrt{\frac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}+1}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}+\sqrt{\frac{e^{2y}+e^{-2y}+2}{4}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}+\sqrt{\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)^2}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}+\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)$$

$$=\ln\left(e^y\right)=y=\sinh^{-1} x$$

مثال:

برهن أنه $|x|\geq 1 \quad , \quad \cosh^{-1} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

الحل:

بفرض أن $y=\cosh^{-1} x$ عندها $\cosh y=x$ ومن تعريف $\sinh x$ يكون لدينا :

$x=\cosh y=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}$ وبالتعويض في الطرف الثاني من العلاقة السابقة نحصل على:

obeikandi.com

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\sqrt{\frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4}-1}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\sqrt{\frac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)\right)$$

$$=\ln\left(e^y\right)=\ y=\cosh^{-1}x$$

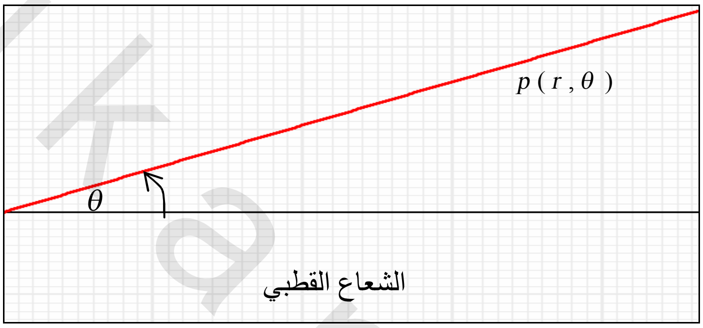
obeikandl.com

الإحداثيات القطبية Polar Coordinates

لتمثيل نقطة بالإحداثيات القطبية نثبت نقطة الأصل، والتي تسمى بالقطب، وشعاع أوله نقطة الأصل ، ونهايته النقطة الممثلة ، والذي يسمى بالشعاع القطبي .

والنقطة p تمثل الإحداثيات القطبية (r,θ) حيث أن :

r هو المسافة من القطب إلى النقطة p و θ هي الزاوية المحصورة بين الشعاع القطبي والشعاع op.



ملاحظات:

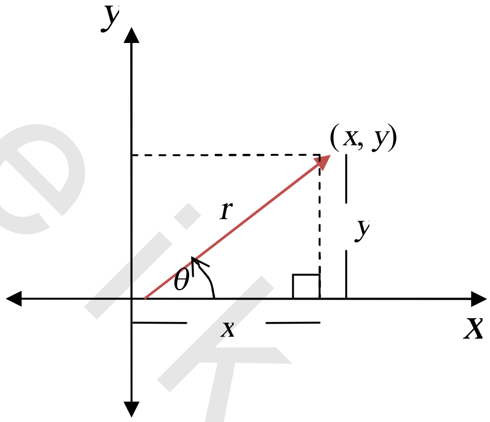
1. تكون الزاوية موجبة إذا تحركنا في اتجاه عكس عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كانت حركتنا مع اتجاه عقارب الساعة.
2. عند إضافة N من الدورات فإن الزاوية لا تتغير وبالتالي نحصل على تمثيل أخر للنقطة نفسها .
3. عند طرح N من الدورات فإن الزاوية لا تتغير وبالتالي نحصل على تمثيل جديد للزاوية .

obeikandi.com

العلاقة بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الكارتيزية

Relation Between Polar and Cartesian Coordinates

من الرسم نجد أن:



$r^2 = x^2 + y^2$ (من نظرية فيثاغورث)

$\therefore \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightarrow (1)$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad \rightarrow (2)$

نستخدم المعادلتين 1،2 لتحويل الإحداثيات الكارتيزية إلى إحداثيات قطبية .

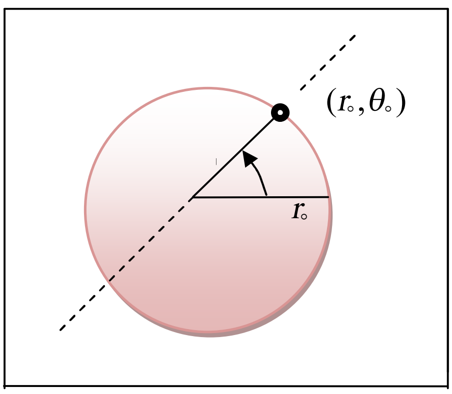
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\theta \rightarrow (3)$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\theta \rightarrow (4)$$

وكذلك نستخدم المعادلتين 3 ، 4 لتحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات كارتيزية.

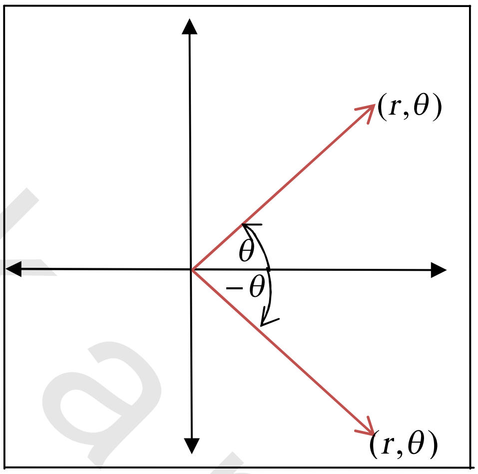
ملاحظة:

لتعيين نقطة $(r_\circ, \theta_\circ)$ نرسم دائرة نصف قطرها $r_\circ$ ومستقيم يصنع مع المحور الأفقي زاوية قدرها $\theta_\circ$ ثم نعين تلك النقطة كما بالشكل أسفلة .

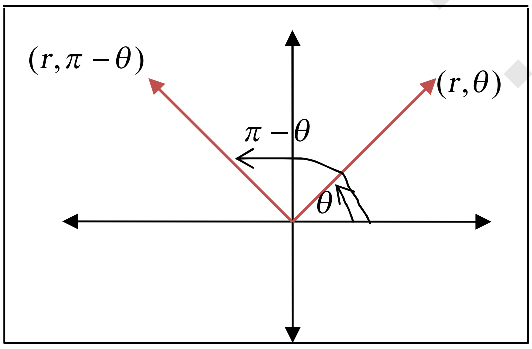


التناظر في الإحداثيات القطبية: Symmetric In Polar Coordinates

1. تكون المعادلة متماثلة حول المحور القطبي إذا لم تتغير المعادلة القطبية عند استبدال $(\theta$ بـ $-\theta)$ وبالتالي يمكن رسم المعادلة المتناظرة حول المحور القطبي بأخذ الزاوية θ من $0^\circ \leftarrow 180^\circ$ وعكس الرسم الناتج .

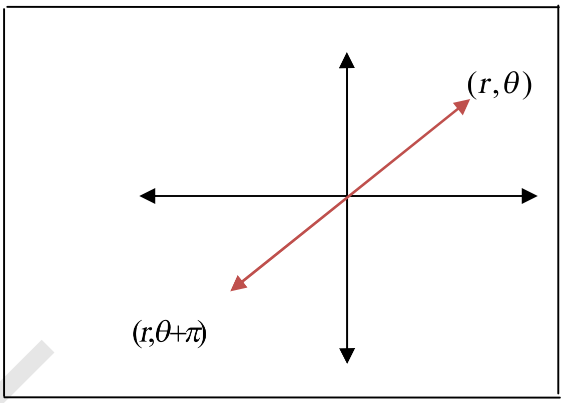


2. تكون الدالة متناظرة حول المحور y أو $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا لم تتغير المعادلة القطبية عند استبدال $(\theta$ بـ $\pi-\theta)$ وبالتالي عند رسم المعادلة القطبية المتناظرة حول $\theta = 90^\circ$ نحتاج لرسم المعادلة بالربع الأول والربع الثالث وعكس الرسم .



obeikandi.com

3. تكون الدالة متناظرة حول القطب إذا لم تتغير المعادلة عند استبدال θبـــ $\theta+\pi$ كما بالشكل :



قاعدة :

رسم أي معادلة من النوع $r=c$ هو دائرة نصف قطرها c ، ومركزها نقطة الأصل .

$$r=c$$
$$\because \quad r^2=x^2+y^2$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$c^2=x^2+y^2$$

وهى معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها c .

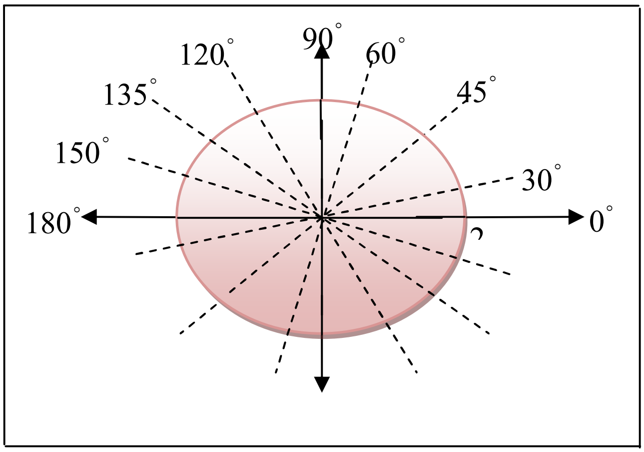
مثال : ارسم المعادلة القطبية $r=2$.

الحل :

أولاً نكون الجدول التالي ثم نرسم لنحصل على الدائرة الموضحة أسفلة :

θ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	2	2	2	2	2	2	2	2

obeikandi.com

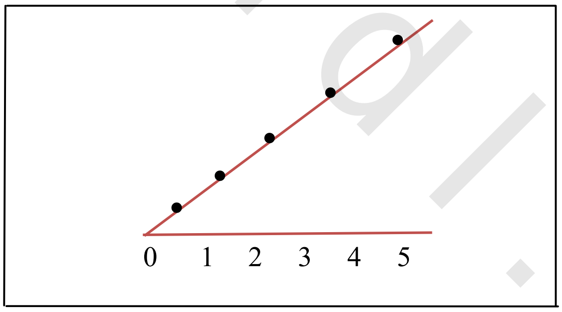


مثال : ارسم المعادلة القطبية $\theta = 45^{\circ}$.

الحل :

أولاً نكون الجدول التالي ثم نرسم لنحصل على الدائرة الموضحة أسفلة:

θ	45°	45°	45°	45°	45°	45°	45°	45°
r	0	1	2	3	4	5	6	7



مثال :

ارسم المعادلة القطبية $r = \cos\theta$.

الحل :

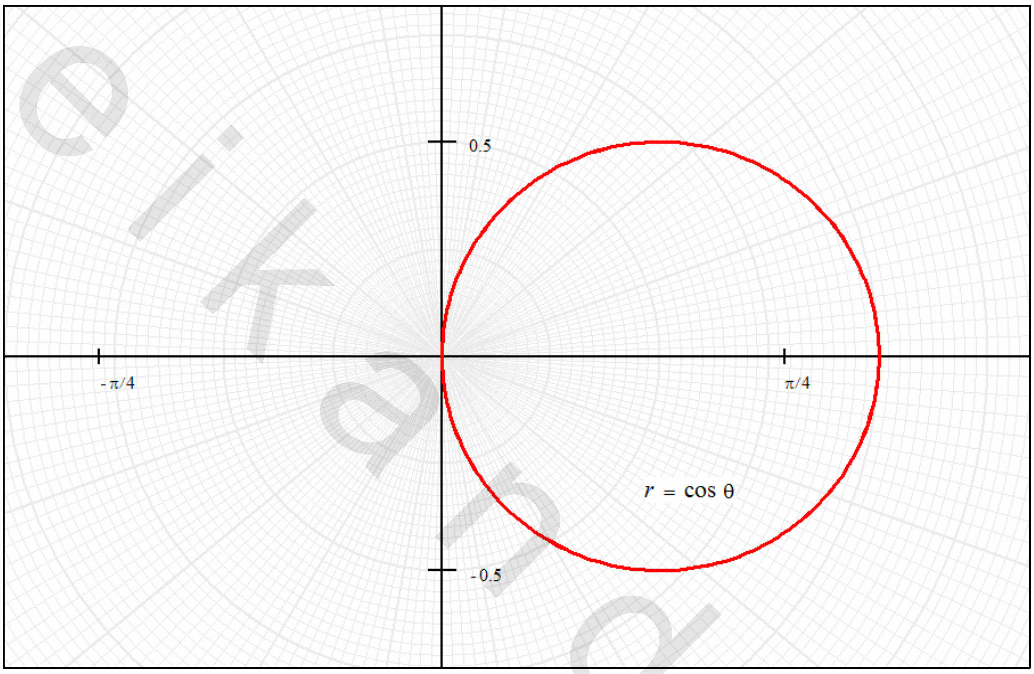
$$\because \quad \cos\theta = \cos(-\theta)$$

$\therefore$ نرسم المعادلة القطبية بأخذ الزوايا من $0^{\circ} \leftarrow 180^{\circ}$، ونعكس الرسم الناتج حول المحور القطبي .

obeikandi.com

نكون الجدول التالي أولاً:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	1	0.866	0.707	0.5	0	-0.5	-0.707	-0.866	-1



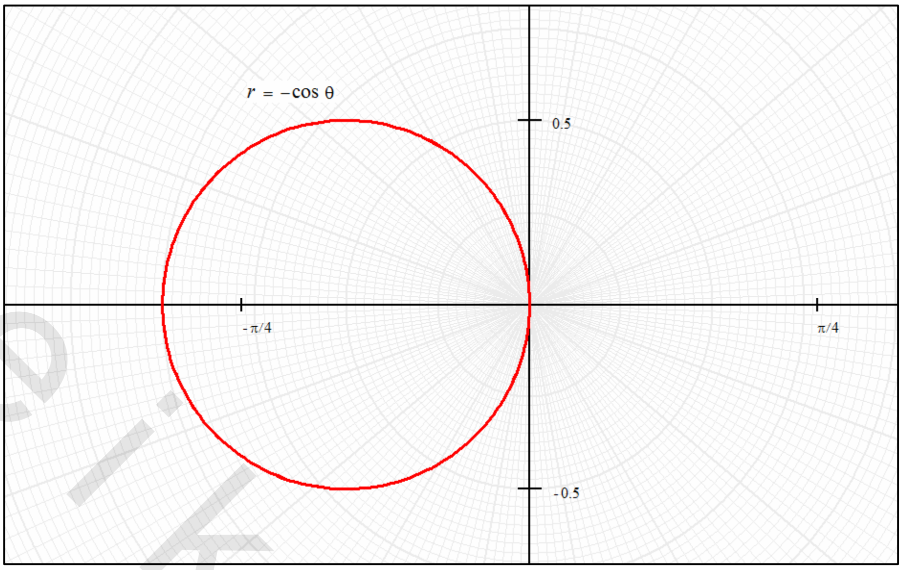
قاعدة1:

أي معادلة من النوع $r = a\cos\theta$ هي دائرة متناظرة حول المحور القطبي مركزها $(0.5a, 0)$ ونصف قطرها $0.5a$

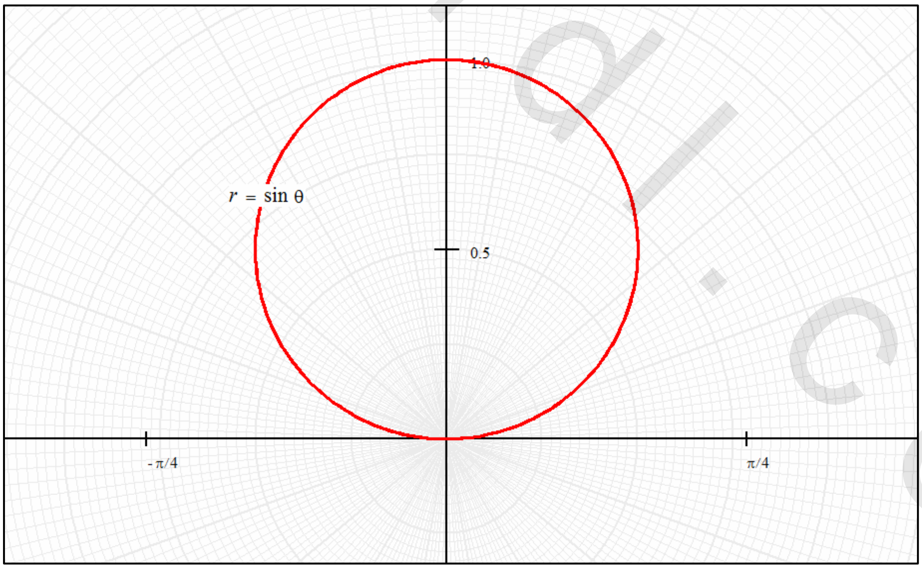
قواعد 2:

1− منحنى الدالة القطبية $r = -a\cos\theta$ هو دائرة مركزها $(-0.5a, 0)$ ونصف قطرها 0.5.

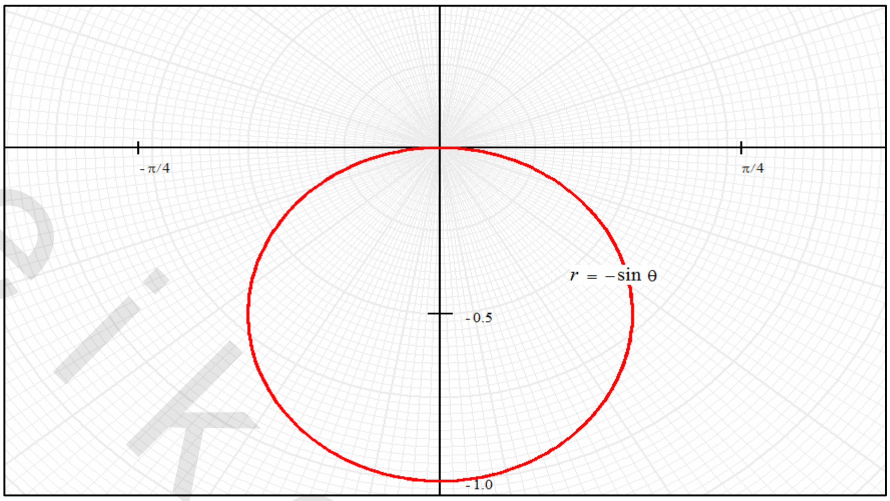
obeikandl.com



2- منحنى الدالة القطبية $r = \sin\theta$ هو دائرة في الجهة العليا متناظرة حول الزاوية $\theta = 90^\circ$ ونصف قطرها 0.5 ومركزها $(0.5, 0)$



3- منحنى الدالة القطبية $r=-\sin\theta$ يكون دائرة في الجهة السفلى متناظرة حول الزاوية $\theta=-90^{\circ}$ ونصف قطرها 0.5 ومركزها $(-0.5,0)$.

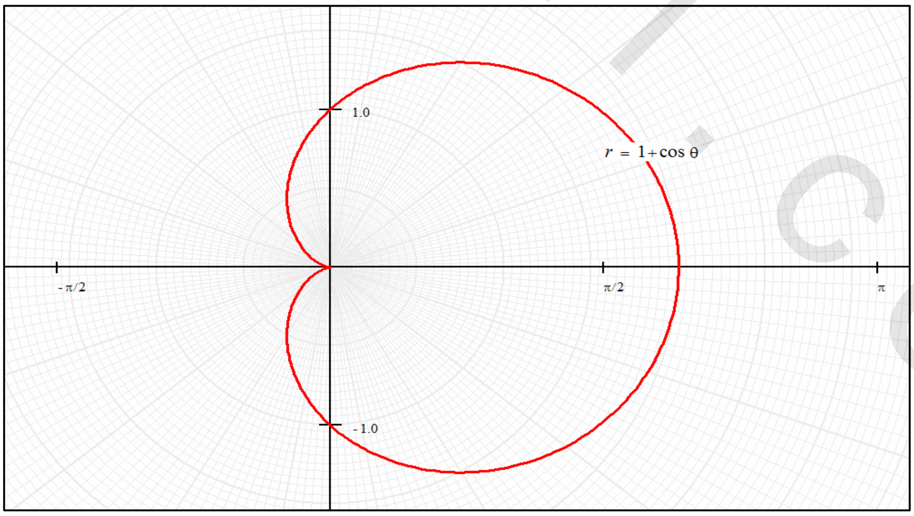


مثال :

ارسم المعادلة القطبية $r=1+\cos\theta$.

الحل : نكون الجدول التالي:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	2	1.866	1.707	1.5	1	-0.5	0.3	0.13	0

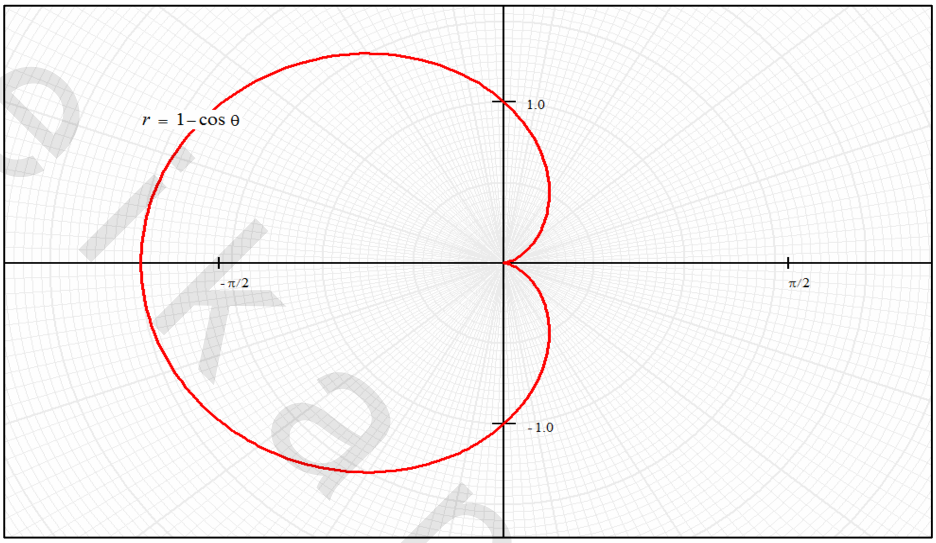


والمنحني الناتج هو ما يعرف بالمنحني القلبي(السكلوئيد)

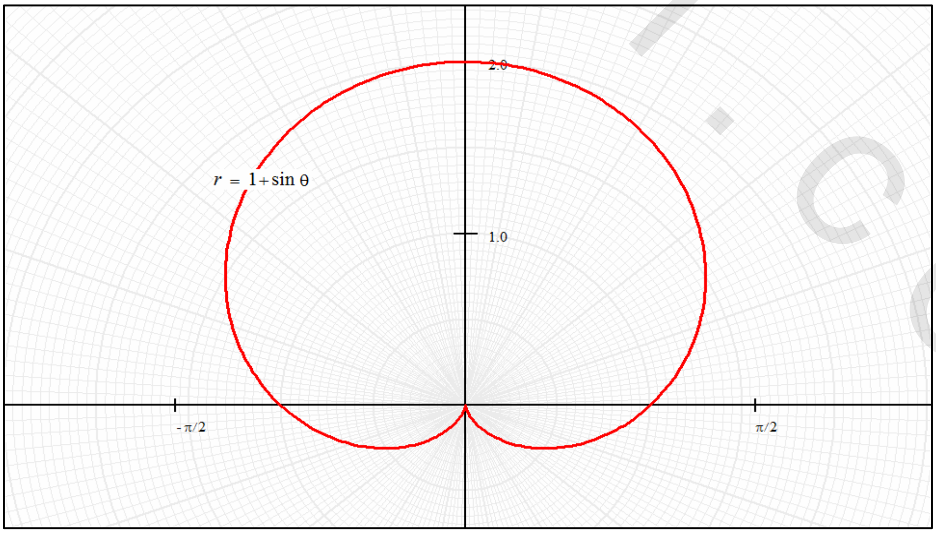
obeikandl.com

قواعد 3:

1− منحنى المعادلة القطبية $r=1-\cos\theta$ هو منحنى قلبي "Cardioid" متناظر حول المحور القطبي، ولكن يكون بالاتجاه المعاكس وذيله لليسار ،وطول محوره الأكبر = 2 ،وطول محوره الأصغر =1 .

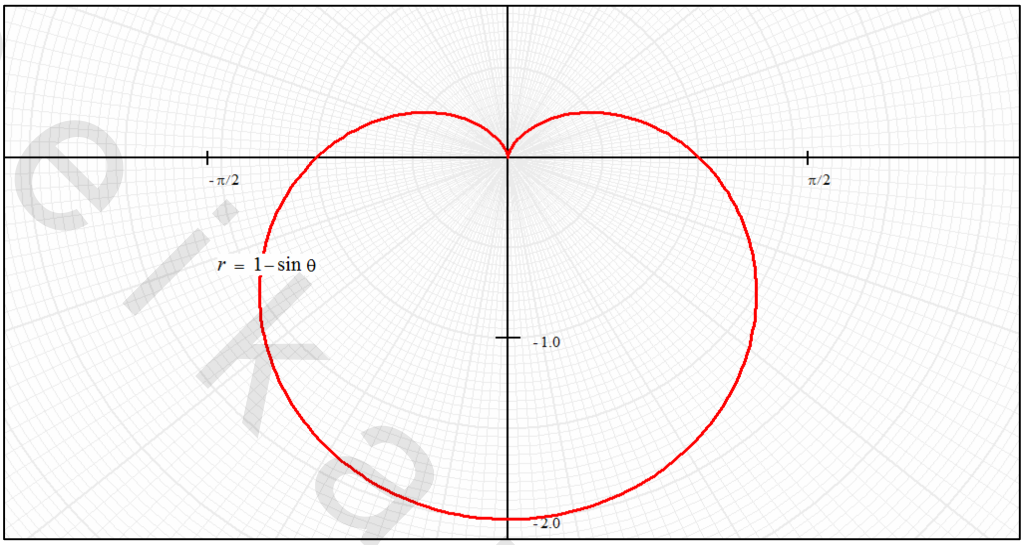


2− منحنى المعادلة القطبية $r=1+\sin\theta$ هو أيضا منحنى قلبي قمته للأسفل، وذيله للأعلى متناظر حول المحور $\theta=90^{\circ}$ ، وطول محوره الأكبر = 2، وطول محوره الأصغر = 1 .



obeikandi.com

3- منحنى المعادلة القطبية $r = 1 - \sin\theta$ هو منحنى قلبي أيضا قمته للأعلى ، وذيله للأسفل متناظر حول المحور $\theta = 90^\circ$ وطول محوره الأكبر $= 2$، وطول محوره الأصغر $= 1$.



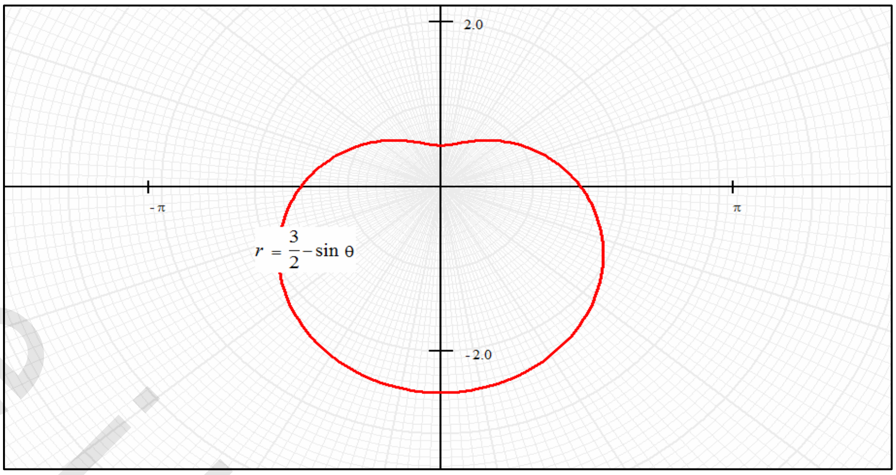
1. منحنى المعادلة القطبية $: b = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ $r = a \pm b$ هو منحنى قلبي طول احد محوريه $a \mp 1$ وطول محوره الأخر a .

مثال:

ارسم المعادلة القطبية $r = \frac{3}{2} - \sin\theta$.

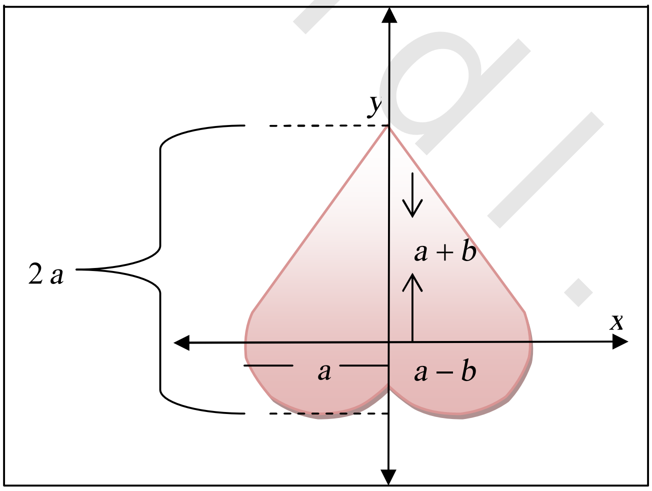
الحل : نكوّن الجدول التالي أولاً ثم نقوم بالرسم كما هو موضح أسفلة:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	270°	300°	315°	330°	360°
r	1.5	1	0.7	0.6	0.5	2.5	2.3	2.2	2	1.5



ملاحظة:

بصورة عامة يكون منحنى المعادلة القطبية $r = a \pm b\begin{Bmatrix}\sin\theta \\ \cos\theta\end{Bmatrix}$، عندما يكون $a < b$ حلزونيا "Limacine" يكون قطره $2a$، بحيث تكون المسافة من نقطة الأصل إلى الرأس $a+b$، ومن نقطة الأصل إلى القمة $a-b$، أما محوره الأصغر فهو a .

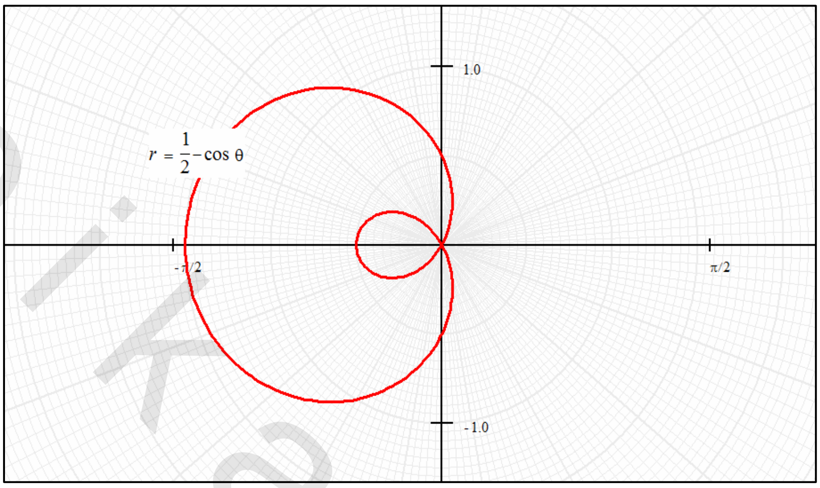


بصورة عامة يكون رسم المعادلة القطبية $r = a \pm b\begin{Bmatrix}\sin\theta \\ \cos\theta\end{Bmatrix}$ و $a < b$ يكون حلزوني مع لفة "Limacine with loop"، طول محوره الأكبر $a+b$ وطول محوره الأصغر $b-a$، وطول قطر الدورة a.

مثال :

ارسم منحنى الدالة $r = \frac{1}{2} - \cos\theta$.

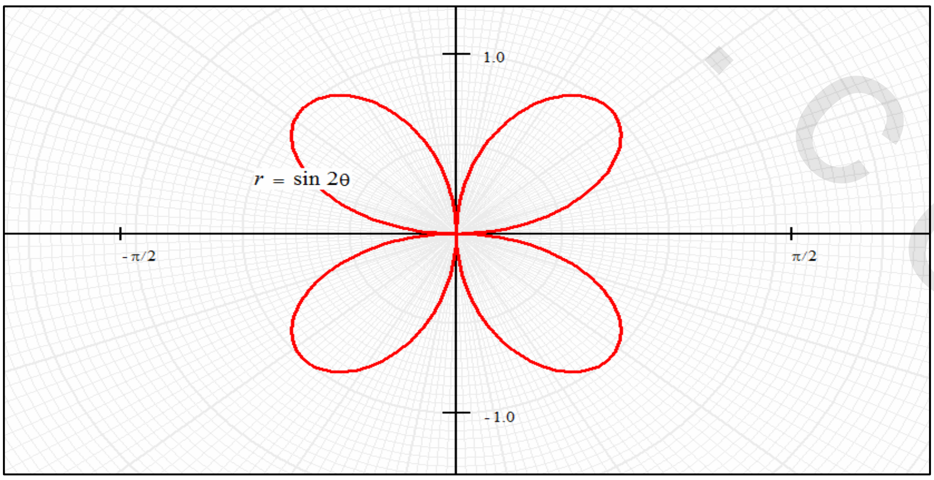
الحل:



مثال: ارسم المعادلة القطبية التالية : $r = \sin 2\theta$.

الحل :

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°
r	0	0.8	1	0.8	0	-0.8	-1	-0.8	0	0.8	1	0.8	0



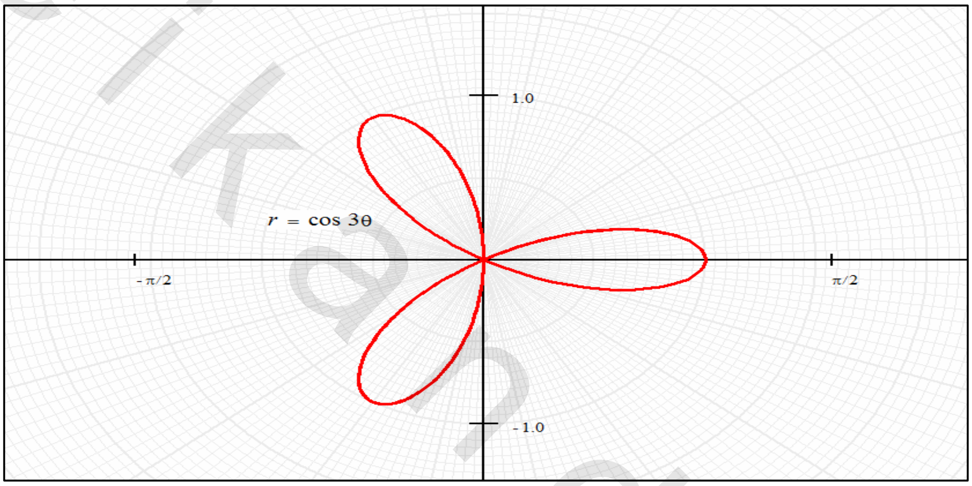
obeikandl.com

مثال :

ارسم المعادلة القطبية التالية : $r = \cos 3\theta$.

الحل: نكون الجدول التالي ثم نرسم لنحصل على الدائرة الموضحة أسفلة:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
r	1	0.866	0.707	0.5	0	-0.5	-0.707	-0.866	-1



ملاحظة: لرسم أي معادلة قطبية من النوع $r = a\cos(n\theta)$ أو $r = a\sin(n\theta)$ فإن الرسم عبارة عن زهرة ذات $2n$ ورقة إذا كانت n عدد زوجي ويكون زهرة ذات n ورقة إذا كانت n عدد صحيح فردى .

مثال

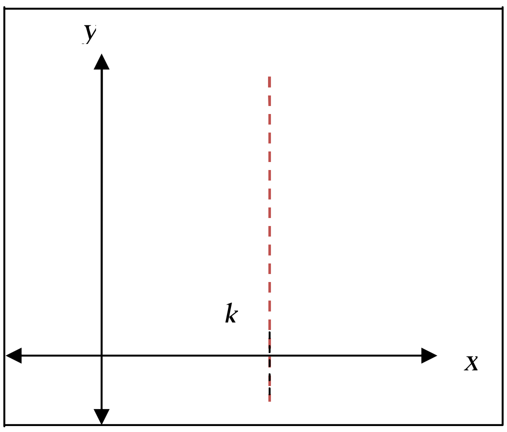
ارسم المعادلة $r = k\sec\theta$

الحل :

$$\because \quad r = k\frac{1}{\cos\theta} \quad \rightarrow \quad r\cos\theta = k$$

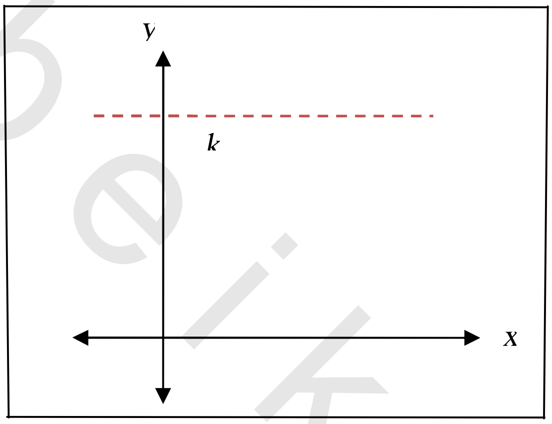
$$\therefore \quad x = k$$

وهو خط مستقيم يوازي محور الصادات وعلى بعد k منه.



نتيجة1:

منحنى المعادلة $r = k\sec\theta$ هو خط مستقيم عمودي، يقطع جزءاً من محور x بمقدار k.



مثال : ارسم المعادلة $r = k\csc\theta$

الحل :

$$\because \quad r = k\frac{1}{\sin\theta} \quad \rightarrow \quad r\sin\theta = k$$

$$\therefore \quad y = k$$

(أنظر الشكل المرافق)

نتيجة2:

منحنى المعادلة $r = k\csc\theta$ هو خط مستقيم أفقي يقطع جزءاً من محور y بمقدار k .

obeikandl.com

✍ أمثلة محلولة

1- أوجد نطاق ومدى العلاقات التالية:

$$R_1=\{(a,1),(b,2),(c,3)\} \quad , \quad R_2=\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$$

الحل:

- نطاق العلاقة R_1 هي $D(R_1)=\{a,b,c\}$

مدى العلاقة R_1 هي $R(R_1)=\{1,2,3\}$

- نطاق العلاقة R_2 هي $D(R_2)=\{1,3,5\}$

مدى العلاقة R_2 هي $R(R_2)=\{2,4,6\}$

2- إذا كانت R علاقة نطاقها $\{1,2,3,4\}$ معرفه كالآتي:

$$R=\{(x,y): y=4x\}$$

أوجد مدى العلاقة R ، ونطاق ومدى العلاقة العكسية R^{-1} .

الحل:

نوجد مدى العلاقة $R=\{(1,4),(2,8),(3,12),(4,16)\}$

$D(R^{-1})=\{4,8,12,16\}$ $D(R)=\{1,2,3,4\}$

$R(R^{-1})=\{1,2,3,4\}$ $R(R)=\{4,8,12,16\}$

3- أوجد نطاق الدالة $f(x)=\sqrt{3x-5}$.

الحل:

$$D_f=\{x\in R : f(x)\in R\} \rightarrow D_f=\{x\in R : 3x-5\geq 0\}$$

$$\left\{x\in IR : x\geq \frac{5}{3}\right\}=\left[\frac{3}{5},\infty\right)$$

obeikandi.com

4- أوجد النطاق الدالة $f(x)=\sqrt{x^2-9}$.

الحل:

$$D_f=\{\,x\in R\ :\ x^2-9\ge 0\,\}$$
$$x^2-9=(x-3)(x+3)$$
$$x^2-9\ge 0\ \rightarrow\ x^2\ge 9$$
$$\sqrt{x^2}\ge\sqrt{9}\ \rightarrow\ |\,x\,|\ge 3\quad \therefore\ x\ge 3\ \ or\ \ x\ge -3$$
$$D_f=\{\,x\in R:\ \ x\ge 3\ \ or\ \ x\ge -3\,\}=(-\infty\,,-3]\cup[3\,,\infty)$$

5- أوجد نطاق الدالة $f(x)=\sqrt[3]{3x-5}$.

الحل:

$$D_f=\{\,x\in R\ :\ f(x)\in R\,\}=R$$
$$D_f=IR$$

لأن الجذر التكعيبي معرف دوماً.

6- أوجد نطاق الدالة $g(x)=\dfrac{x+1}{x^3-9x}$.

الحل:

$$D_g=IR-\{\,x\in IR\ :\ x^3-9=0\,\}=\{\,x\in IR\ :\ x^3-9x\ne 0\,\}$$
$$x^3-9x=0\ \rightarrow\ x(x^2-9)=0$$
$$x(x-3)(x+3)=0$$
$$x=0\quad or\quad x=\pm 3$$
$$\therefore\quad D_g=IR-\{\,0\,,\pm 3\,\}=(-\infty\,,-3)\cup(-3\,,0)\cup(0,3)\cup(3,\infty)$$

7- أوجد نطاق الدالة $h(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}$.

الحل:

$$D_h=\left\{x\in IR\ :\ \frac{2-x}{2+x}\in IR\right\}=\{\,x\in IR\ :\ x\ne -2\,\}$$
$$=R-\{-2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$$

8- أوجد نطاق الدالة $k(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-2x}}$.

الحل:

$$D_k = \{\ x \in IR\ :\ 1-2x>0\ \} = \left(-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right)$$

9- بينّ أن الدالة $f(x)=2x+3$ دالة أحادية(متباينة).

الحل:

إذا كانت $f(a)=f(b)$ فإن $2a+3=2b+3$

منها $a=b$ إذا الدالة أحادية(متباينة) حسب التعريف.

10- بينّ أن الدالة $f(x)=x^2$ ليست دالة أحادية (متباينة).

الحل:

بما أنه هناك قيمتان للمتغير x هما $x_1=-2, x_2=-2$ لهما صورة واحدة $f(2)=f(-2)=4$ وهذا تناقض إذا دالة $f(x)=x^2$ ليست متباينة أحادية.

11- إذا كان $f(x)=(x-2)(x-8)$ أوجد الدالة $f(x)$ على شكل كثيرة حدود ثم أوجد $f(3)$ ، $f(-1)$.

الحل:

$$f(x)=x^2-10x+16$$

بتعويض عن $x=3$ في المعادلة نحصل على $f(3)=9-30+16=-5$ وكذلك

$$f(-1)=1+10+16=27$$

12- إذا كانت $y-3=\sqrt{9-x^2}$ ، أوجد الدالة $f(x)$ ، ثم أوجد $f(2)$.

الحل:

$f(x)=\sqrt{9-x^2}+3$ بتعويض عن $x=2$ في المعادلة نحصل على $f(x)=\sqrt{5}+3$.

obeikandl.com

13- بينّ ما إذا كانت الدوال الآتية زوجية أم فردية؟

(1) $f(x)=x^4+4x^2-6$

(2) $f(x)=\sqrt{4x^2}$

(3) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+9}$

(4) $f(x)=x^7+2x^3+16x$

(5) $f(x)=x^4-2x^3-4$

الأجوبة:

الدالة (1) دالة زوجية.

الدالة (2) دالة زوجية.

الدالة (3) دالة فردية.

الدالة (4) دالة فردية

الدالة (5) دالة ليست فردية ولا زوجية.

14- إذا كان لدينا الدالتان $f(x)=x^5-2x^3-5$ و $g(x)=\sqrt{x^2+4}$ فأنجز العمليات التالية عليهما : $\left(\dfrac{f}{g}\right)$, $f\times g$, $f\pm g$ ، $(f\circ g)(x)$.

الحل:

واضح أن نطاق ومدى الدالة $f(x)$ هو $D_f=IR$ وبما أن $x^2+4>0$ فإن $D_f=IR$

نوجد عملية الجمع $f(x)+g(x)=x^5-2x^3-5+\sqrt{x^2+4}$

نوجد عملية الطرح $f(x)-g(x)=x^5-2x^3-5-\sqrt{x^2+4}$

عملية الضرب

$$f(x)\times g(x)=(x^5-2x^3-5)\times(\sqrt{x^2+4})$$
$$=x^5\sqrt{x^2+4}-2x^3\sqrt{x^2+4}-5\sqrt{x^2+4}$$

أما عملية التركيب تكون بالشكل التالي

$$f\circ g(x)=f(\sqrt{x^2+4})$$
$$=(\sqrt{x^2+4})^5-2(\sqrt{x^2+4})^3-5$$

obeikandl.com

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^5-2x^3-5}{\sqrt{x^2+4}}$$

بشرط $x\in D_f\cap D_g=IR$

15- إذا كان لدينا الدالتان $f(x)=x^2$ $g(x)=\frac{1}{x-1}$ فأنجز العمليات التالية عليهما:
$f\pm g$ ، $f\times g$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)$ ، $(g\circ f)(x)$.

الحل:

واضح أن نطاق ومدى الدالة $f(x)$ هو $D_f=IR$ وكذلك فإن $D_g=IR-\{1\}$، ومنها $D_f\cap D_g=IR-\{1\}$

نوجد عملية الجمع

$$f+g(x)=x^2+(\frac{1}{x-1})$$
$$=\frac{x^3-x^2+1}{x-1}$$

بنفس الطريقة نوجد عملية الطرح.

عملية الضرب $f\times g\ \ (x)=(x^2)\times(\frac{1}{x-1})=\frac{x^2}{(x-1)}$

أما خارج القسمة يكون بالشكل التالي: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=x^2\div(\frac{1}{x-1})$
$$=(x^3-x^2)$$

$x\neq\mp1$ ، نوجد $(g\circ f)(x)=g(x^2)=\frac{1}{x^2-1}$

بشرط $R-\{1\}\cap R=R-\{1\}\neq\varphi$: $D_f\cup D_g\neq\varphi$

16- إذا كان لدينا الدالتان $f(x)=1+\sqrt{x}$ $g(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}$ فأنجز العمليات التالية عليهما: $f\times g$, $f\pm g$ $(f\circ g)(x)$.

الحل:

واضح أن نطاق ومدى الدالة $f(x)$ هو $D_f=[0,\infty)$، و $D_g=IR-\{-2\}$ منها $D_f\cap D_g=IR-\{-2\}$

نوجد عملية الجمع

$$f(x)+g(x)=(1+\sqrt{x})+\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}\right)$$

$$=\frac{x+x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+\sqrt{x^2+4}+2}{x+2}$$

نوجد عملية الطرح

$$f(x)+g(x)=(1+\sqrt{x})-\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}\right)$$

$$=\frac{x+x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-\sqrt{x^2+4}+2}{x+2}$$

عملية الضرب

$$f(x)\times g(x)=(1+\sqrt{x})\times\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}\right)$$

$$=\frac{(1+\sqrt{x})\times(\sqrt{x^2+4})}{x+2}$$

أما عملية التركيب فتكون بالشكل التالي

$$f\circ g(x)=f\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}\right)=1+\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}}$$

$$=(\sqrt{x^2+4})^5-2(\sqrt{x^2+4})^3-5$$

بشرط $x\in D_f\cap D_g$

17- إذا كان لدينا الدالتان $f(x)=x^2$ $g(x)=1+x$ فأنجز العمليات التالية عليهما:

$f\pm g$ ، $f\times g$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)$ ، $(g\circ f)(x)$ ، $(f\circ g)(x)$ ، $(g\circ f)(x)$.

الحل:

نوجد عملية الجمع $f(x)+g(x)=x^2+x+1$

نوجد عملية الطرح $f(x)-g(x)=x^2-x-1$

عملية الضرب $f(x)\times g(x)=x^3+x^2$

أما عملية التركيب فتكون بالشكل التالي

$$f(x)\circ g(x)=f(1+x)$$

$$=(1+x)^2$$

$$=x^2+2x+1$$

بشرط $x\in D_f\cap D_g=IR$

obeikandi.com

18- أوجد $g(x)$ ، $f(x)$ إذا كان $(f\circ g)(x)=(1+x^2)^3$.

الحل:

بفرض الدالة $g(x)=1+x^2$ بذلك تكون $f(x)=x^3$

(ملاحظة أن الحل ليس وحيداً)

19- أوجد $g(x)$ ، $f(x)$ إذا كان $(f\circ g)(x)=\sqrt{(2x+3)}$.

الحل:

بفرض الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ بذلك تكون $g(x)=(2x+3)$

(ملاحظة أن الحل ليس وحيداً)

20- أوجد $g(x)$ ، $f(x)$ إذا كان $(f\circ g)(x)=\sqrt[5]{(x^3-3x+8)}$.

الحل:

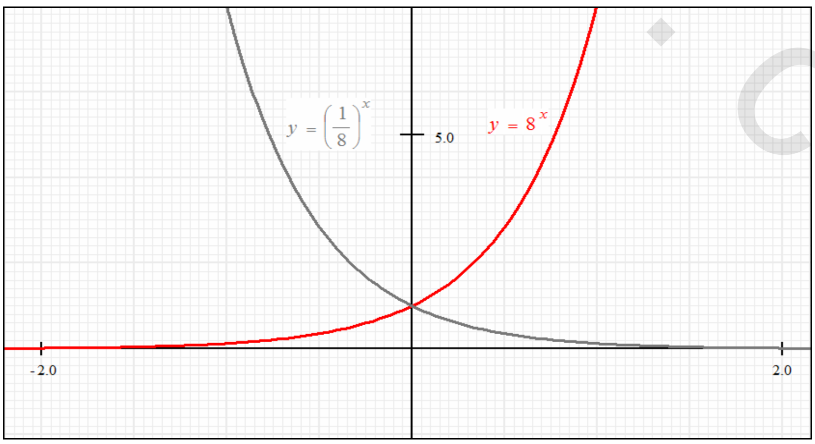
بفرض الدالة $f(x)=\sqrt[5]{x}$ بذلك تكون $g(x)=(x^3-3x+8)$

(ملاحظة أن الحل ليس وحيداً)

21-أرسم الدوال التالية على الشكل ذاته:

$$f(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^x \quad \text{و} \quad f(x)=8^x$$

الحل :



obeikandl.com

22- حل المعادلة $2\cos(6x)+4\cos(6x)\sin(3x)=0$.

الحل:

نلاحظ أن: $\cos 6x$ عامل مشترك وبالتالي يكون لدينا :

$$\cos 6x(2+4\sin 3x)=0$$

وبالتالي أما $\cos 6x=0$ أو $(2+4\sin 3x)=0$

الاحتمال الأول يعطي : $\cos 6x=0$ بالتالي فإن :

$$6x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad \Rightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$$

أو

$$6x=\frac{\pi}{3}+2\pi k \quad \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3}$$

الاحتمال الثاني يعطي :

$$(2+4\sin 3x)=0 \quad \Rightarrow \quad \sin 3x=\frac{-1}{2}$$

$$3x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k \quad \Rightarrow x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$$

أو

$$3x=\pi+\frac{\pi}{3}+2\pi k \quad \Rightarrow 3x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow \quad x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$$

حيث $k=0,1,2,......$

23- حل المعادلة $\frac{1}{2}\sin(2x)-\cos^2 x=0$.

الحل:

نعلم أن $\sin 2x=2\sin x\cos x$ وبالتالي نعوض بالمعادلة فنجد :

$$\sin x\cos x-\cos^2 x=0$$

وتكون على الشكل التالي:

$$\cos x(\sin x-\cos x)=0$$

إما

$\cos x=0$ ومنها $x=\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi$

obeikandl.com

أو

$$\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \quad \Leftarrow \quad \sin x=\cos x \quad \Leftarrow \sin x-\cos x=0$$

وبالتالي يكون لدينا :

$$k=0,1,2,......\text{حيث} \quad \frac{\pi}{4}+\pi k \quad \Leftarrow \quad x=\frac{\pi}{2}-x+2\pi k$$

24- برهن صحة المتطابقة : $\sec^2 x\cos^2 x=\sec^2 x+\csc^2 x$.

الحل:

$$\begin{aligned}\sec^2 x+\csc^2 x&=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\\&=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\\&=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\csc^2 x\sec^2 x\end{aligned}$$

25- برهن صحة المتطابقة : $\sec^4 x-\sec^2 x=\tan^4 x+\tan^2 x$.

الحل:

$$\begin{aligned}\tan^4 x+\tan^2 x&=\tan^2 x\left(\tan^2 x+1\right)\\&=\tan^2 x\sec^2 x\\&=\left(\sec^2-1\right)\sec^2 x\\&=\sec^4 x-\sec^2 x\end{aligned}$$

26- برهن صحة المتطابقة : $2\csc x=\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}$.

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}&=\frac{\sin^2 x+(1+\cos x)^2}{\sin x(1+\cos x)}\\&=\frac{\sin^2 x+1+2\cos x+\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\end{aligned}$$

obeikandl.com

$$= \frac{2+2\cos x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$= \frac{2(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{2}{\sin x} = 2\csc x$$

27- برهن صحة المتطابقة :

$$\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1+\sin x}.$$

الحل:

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$= \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

28- برهن صحة المتطابقة :

$$\frac{\sec x - \csc x}{\sec x + \csc x} = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}.$$

الحل:

$$\frac{\sec x - \csc x}{\sec x + \csc x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}}$$

بضرب البسط والمقام بـــ $\sin x$ فنجد :

$$\frac{\sec x - \csc x}{\sec x + \csc x} = \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\frac{\sin x}{\cos x} + 1} = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$$

29- برهن صحة المتطابقة : $\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\sec x}{1+\cos x}.$

الحل:

$$\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{\sin x - \sin x\cos x}{\cos x\sin^3 x}$$

obeikandl.com

$$= \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x \sin^3 x}$$
$$= \frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos^2 x)}$$
$$= \frac{1}{\cos x(1-\cos x)} = \frac{\sec x}{1+\cos x}$$

30- برهن صحة المتطابقة :

$$\frac{\cos x \cot x - \sin x \tan x}{\csc x - \sec x} = 1+\sin x \cos x .$$

الحل:

$$\frac{\cos x \cot x - \sin x \tan x}{\csc x - \sec x} =$$
$$= \frac{\cos x \cot x - \sin x \tan x}{\csc x - \sec x} = \frac{\cos x \dfrac{\cos x}{\sin x} - \sin x \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\cos x}}$$
$$= \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x)}{\cos x - \sin x}$$
$$= \cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x = 1 + \sin x \cos x$$

31- أوجد القيمة العددية لكل من التعابير التالية :

1- $\tanh(0), \cosh(0), \sinh(0)$

2- $\tanh(1), \cosh(3), \sinh(2)$

3- $\cosh(\ln 3), \sinh(\ln 2)$

الحل :

1- قيمة الدوال الزائدية عندما $x = 0$:

$$\sinh(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$
$$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$\tanh(0) = \frac{0}{1} = 0$$

obeikandi.com

2- قيمة الدوال الزائدية عند القيم المعطاة:

$$\sinh(2) = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$$

$$\cosh(3) = \frac{e^3 + e^{-3}}{2}$$

$$\tanh(1) = \frac{\sinh(1)}{\cosh(1)} = \frac{\frac{e - e^{-1}}{2}}{\frac{e + e^{-1}}{2}} = \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}}$$

3- قيمة الدوال الزائدية عند القيم المعطاة:

$$\sinh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\cosh(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{10}{6}$$

$$\tanh(\ln 2) = \frac{\sinh(\ln 2)}{\cosh(\ln 2)} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

32- برهن صحة العلاقات التالية :

$$\cosh x + \sinh x = e^x \quad -1$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \quad -2$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x} \quad -3$$

$$\coth^2 x - 1 = \csc h^2 x \quad -5 \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x - \sinh^2 x \quad -4$$

$$\tanh(\ln x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad -6$$

الحل :

$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$$

$$\sinh 2x = \sinh x \cosh x + \cosh x \sinh x = 2\sinh x \cosh x$$

$$\cosh x - \sinh x = \frac{e^{-x} + e^x}{2} + \frac{e^{-x} - e^x}{2} e^{-x}$$

$$\cosh 2x = \cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x = \cosh^2 x - \sinh^2 x$$

obeikandl.com

$$\coth^2 x - 1 = \frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} - 1$$
$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{1}{\sinh^2 x} = \csc h^2 x$$

$$\tanh(\ln x) = \frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{e^{\ln x} + e^{-\ln x}} = \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

33- أكتب كلاً من المعادلات التالية على شكل لوغاريتم :

$5^{-2} = \frac{1}{25}$ و $81^{\frac{1}{4}} = 3$ و $7^2 = 49$.

الحل :

- نأخذ Ln الطرفين $\ln 5^{-2} = \ln \frac{1}{25}$ منها نحصل على $-2\ln 5 = \ln 1 - \ln 25$ نعلم بأن $\ln 1 = 0$ منها $-2\ln 5 = -\ln 25$.
- نأخذ Ln الطرفين $\frac{1}{4}\ln 81 = \ln 3$.
- نأخذ Ln الطرفين $7^2 = 49$ منها نحصل على $2\ln 7 = \ln 49$.

34- أكتب كلاً من المعادلات التالية على شكل أسي :

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$ و $\log_2 16 = 4$.

الحل :

من خواص اللوغاريتمات نحصل على $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$ فإن المقدار يصبح

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2 \Rightarrow \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

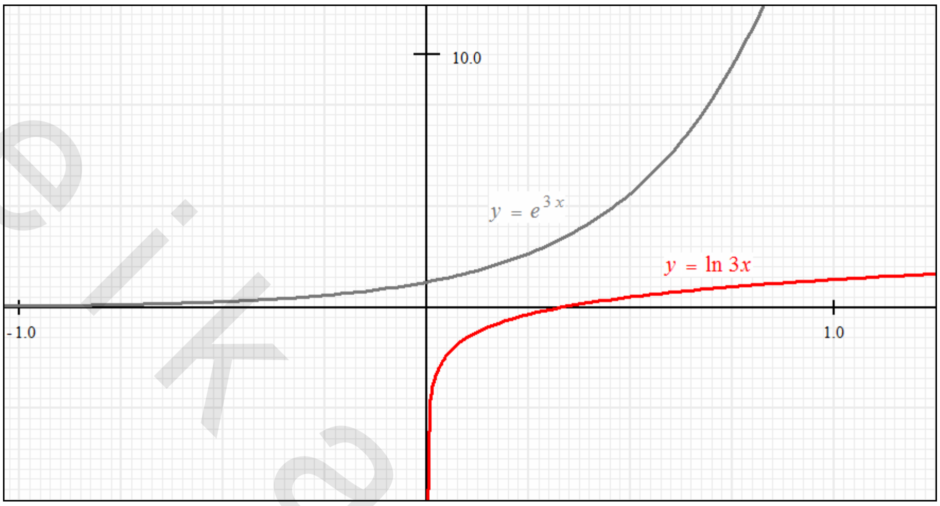
من خواص اللوغاريتمات نحصل على $\log_2 16 = 4$ فإن المقدار يصبح $16 = 4^2$.

obeikandi.com

35- أرسم الدوال التالية على الشكل ذاته:

$y=\ln 3x$ و $y=e^{3x}$.

الحل :



36- أكتب التعابير اللوغارثمية التالية على شكل تعبير وحيد:

$3(\log 2+\log x)-\log y$ و $\frac{1}{2}[\ln x-\ln(x+2)]-\ln 2$.

الحل :

من خواص اللوغاريتمات نحصل على $3(\log 2+\log x)-\log y=3\log\frac{2}{x}-\log y$ منها

نحصل على: $3\log\frac{2}{x}-\log y=\log\left(\frac{2}{x}\right)^{2}-\log y=\log\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^{2}}{y}$

من خواص الدالة Ln نحصل على $\frac{1}{2}[\ln x-\ln(x+2)]-\ln 2=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}-\ln 2$ منها

نحصل على $\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x+2}-\ln 2=\ln\frac{\sqrt{\frac{x}{x+2}}}{2}$.

obeikandi.com

37- حل المعادلات اللوغارثمية التالية:

$\log_3(5x+1)=4$ و $\ln(x+1)-\ln(x-2)=\ln 4$.

الحل :

- من خواص اللوغاريتمات نحصل على $\log_3(5x+1)=4 \Rightarrow 5x+1=3^4=81$ منها نحصل على $5x=80 \Rightarrow x=\frac{80}{5}$ هذا يؤدي إلى أن $x=16$

- من خواص الدالة Ln نحصل على $\ln(x+1)-\ln(x-2)=\ln 4 \Rightarrow \ln\frac{x+1}{x-2}=\ln 4$

منها نحصل على $\frac{x+1}{x-2}=4 \Rightarrow x-1=4(x-2) \Rightarrow x-1=4x-8$ منها تكون $x=\frac{7}{3}$.

38- حل المعادلة التالية:

$x-xe^{2x-1}=0$.

الحل :

نساوي المعادلة بالصفر فنحصل على:

$x\left(1-e^{2x-1}\right)=0$ في هذه الحالة يكون لدينا احتمالين :

1. الاحتمال الأول: $x=0$
2. الاحتمال الثاني: $1-e^{2x-1}=0 \quad \Leftarrow \quad e^{2x-1}=1=e^0 \quad \Leftarrow \quad 2x-1=0$

منها $x=\frac{1}{2}$.

39- أوجد مع الرسم الدالة العكسية إذا كانت $f(x)=\frac{(x+1)}{(x-1)}$.

الحل :

واضح إن $f: IR \to IR-\{1\}$

أولاً: نبرهن أن الدالة تقابلية $y=\frac{x+1}{x-1}$ ونطاقها $D_f=IR-\{1\}$ و $x_1,x_2\in D_f \quad \forall$ بحيث

obeikandl.com

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1}$ منها نحصل على $(x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1)$

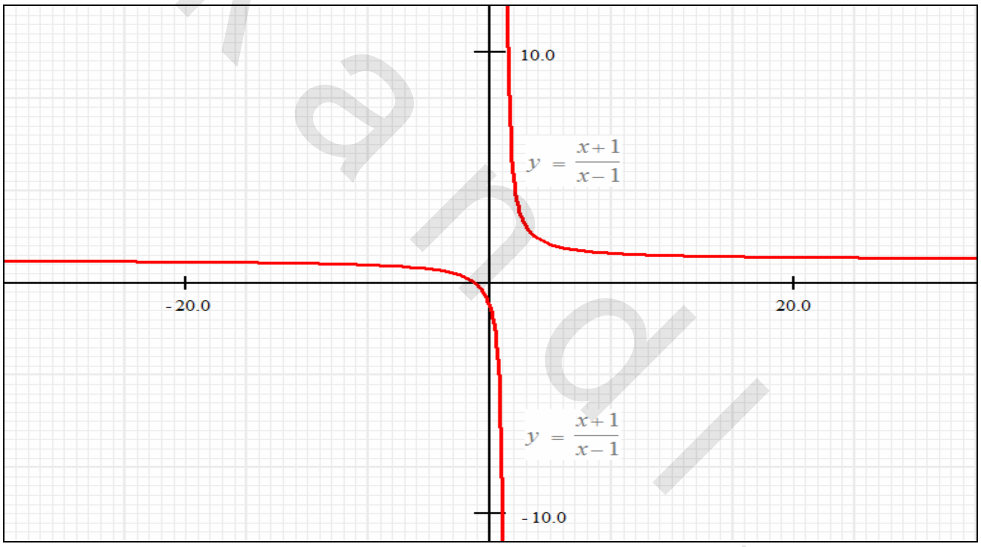
وبفك المقدار السابق نحصل على $x_1x_2 - x_1x_2 - 1 = x_1x_2 - x_1x_2 - 1$ منها

$-x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ إذا الدالة متباينة وكذلك فإن الدالة غامرة على مداها $R_f = IR$ إذا $f(x)$ تقابلية .

بالتعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $y = \frac{x+1}{x-1}$ منها نحصل على $y(x-1) = x+1$

هذا يؤدي إلى $yx - y = x+1$ منها نوجد x من العلاقة السابقة $x = \frac{y+1}{y-1}$

$\therefore$ الدالة العكسية هي $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$



40- أوجد (مع الرسم) الدالة العكسية إذا كانت $f: IR \to IR$ و $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$.

الحل:

يمكن بسهولة برهان إن الدالة $f(x)$ تقابلية و نطاقها $D_f = IR$ و $\forall \quad x_1, x_2 \in D_f$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1+1)^{\frac{1}{3}} = (x_2+1)^{\frac{1}{3}}$ منها نحصل على

$(x_1+1) = (x_2+1) \Rightarrow x_1 = x_2$

ob ei kan di.com

إذا الدالة متباينة وكذلك فإن الدالة غامرة على مداها

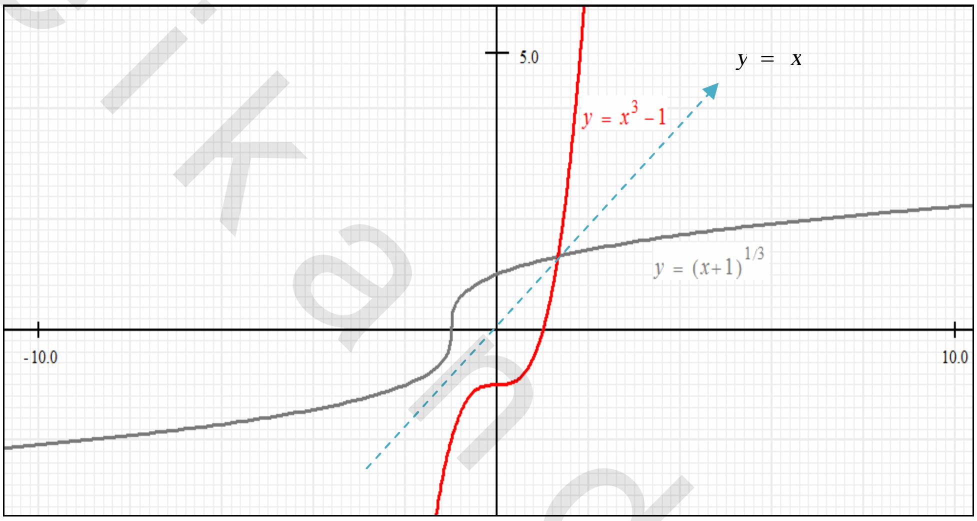
$R_f = IR$ إذا $f(x)$ تقابلية .

التعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $y=(x+1)^{\frac{1}{3}}$

التغيير يعطينا $y^3 = x+1$

التحليل بدلالة x يوصلنا إلى $x = y^3 - 1$

$\therefore$ الدالة العكسية هي $f^{-1}(x) = x^3 - 1$



41- أوجد (مع الرسم) الدالة العكسية إذا كانت $f(x)=\ln(x+2)-3$ حيث $f:(2,\infty)\to IR$.

الحل:

أولاً: نبرهن أن الدالة تقابلية $f(x)=\ln(x+2)-3$ ونطاقها

$D_f=\{x\in IR: x+2>0\}$ ومداها $R_f = IR$ و $\forall \quad x_1, x_2 \in D_f$ نجد أن

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \ln(x_1+2)-3=\ln(x_2+2)-3$ منها نحصل على

$\ln(x_1+2)=\ln(x_2+2)$ وبفك المقدار السابق نحصل على

$(x_1+2)=(x_2+2)\Rightarrow x_1 = x_2$

إذا الدالة متباينة وكذلك فإن الدالة غامرة على مداها $R_f = IR$ إذا $f(x)$ تقابلية .

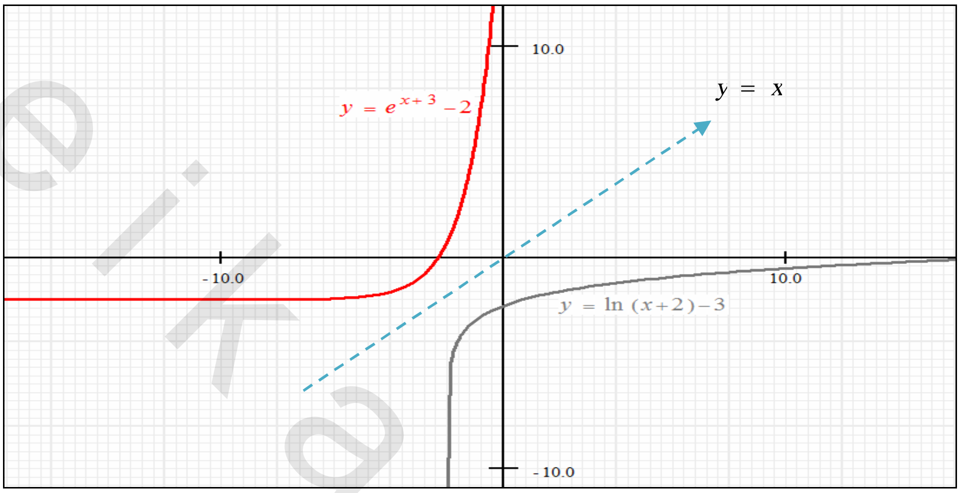
obeikandi.com

التعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $y=\ln(x+2)-3$ التغيير يعطينا

$e^y=(x+2)-e^3$

التحليل بدلالة x يوصلنا إلى $f^{-1}(y)=x=e^y+e^3-2$

$\therefore$ الدالة العكسية هي $f^{-1}(x)=e^{x+3}-2$



42- أوجد (مع الرسم) الدالة العكسية إذا كانت $f: IR \to (3,\infty)$ و $f(x)=e^{(x-1)}+3$.

الحل:

أولاً: نبرهن أن الدالة تقابلية $f(x)=e^{(x-1)}+3$ ونطاقها $D_f=IR$ و نحدد مدى الدالة

بما إن $10<e^{(x-1)}<\infty$ منها $3<e^{(x-1)}+3<\infty$ إذا $R_f=[3,\infty)$ و $\forall \quad x_1,x_2\in D_f$ نجد أن

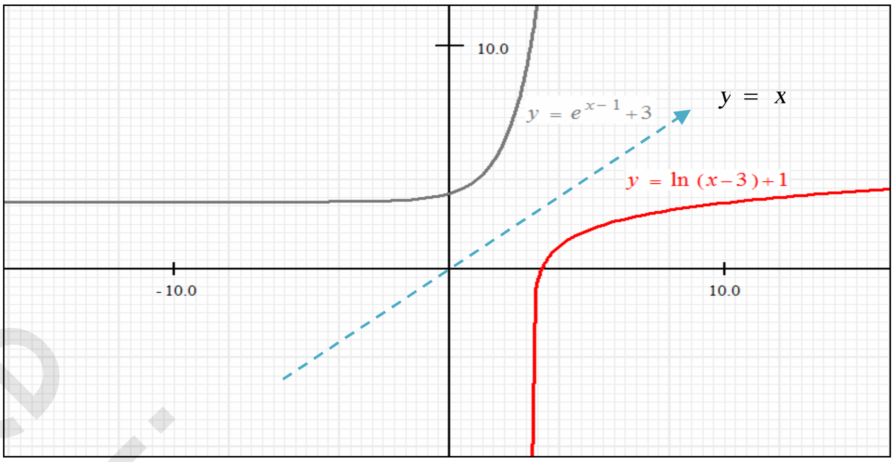
$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow e^{(x_1-1)}+3=e^{(x_2-1)}+3$ منها نحصل على $e^{x_1}=e^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$ إذا

الدالة متباينة وكذلك فإن الدالة غامرة على مداها $R_f=IR$ إذا $f(x)$ تقابلية التعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $y=e^{(x-1)}+3$ التغيير يعطينا $\ln y=x-1+\ln 3$

التحليل بدلالة x يوصلنا إلى $x=\ln y-\ln 3+1$ منها $x=\ln(y-3)+1$

$\therefore$ الدالة العكسية هي $f^{-1}(x)=\ln(x-3)+1$

obeikandi.com



43- أوجد الدالة العكسية إذا كانت، $f:[0,\infty)\to(-\infty,2]$ $f(x)=-x^2+2$.

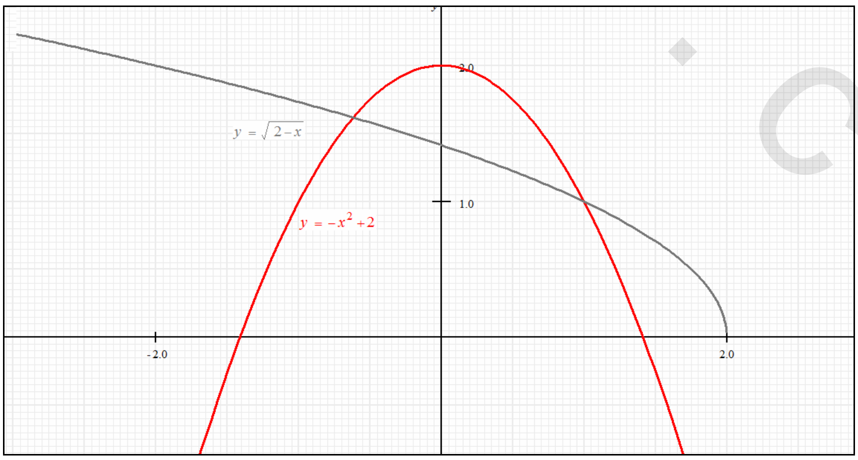
الحل:

أولاً: نبرهن أن الدالة تقابلية $f(x)=-x^2+2$ ونطاقها $D_f=IR$

$\forall \; x_1,x_2\in D_f$ نجد أن $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow -x_1^2+2=-x_2^2+2$ منها نحصل على $-x_1^2=-x_2^2$ وبما أن x_1,x_2 غير سالبان فإن : $x_1=x_2$ إذا الدالة متباينة وكذلك فإن الدالة غامرة على مداها $R_f=IR$ إذا $f(x)$ وبالتالي فهي تقابلية التعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $y=-x^2+2$

التغيير يعطينا $x^2=2-y$ وبما أن $x\in[0,\infty)$ فإن $x=\sqrt{2-y}$

$\therefore$ الدالة العكسية هي $f^{-1}(x)=\sqrt{2-x}$



44- أوجد نطاق الدالة $f(x)=\sqrt{4-x}$ ومداها ثم أوجد دالتها العكسية واذكر نطاقها وارسم بيان الدالتين على نفس الشكل.

الحل:

واضح أن الدالة $f(x)=\sqrt{4-x}$ نطاقها هو : $D_f=\{x: x\in R, 4-x\geq 0\}=\{x: x\leq 4\}$

وبذلك يكون نطاقها $D_f=(-\infty,4]$.

أما مدى هذه الدالة فنعلم أن الجذر موجب دوماً وبالتالي: $R_f=[0,\infty)$.

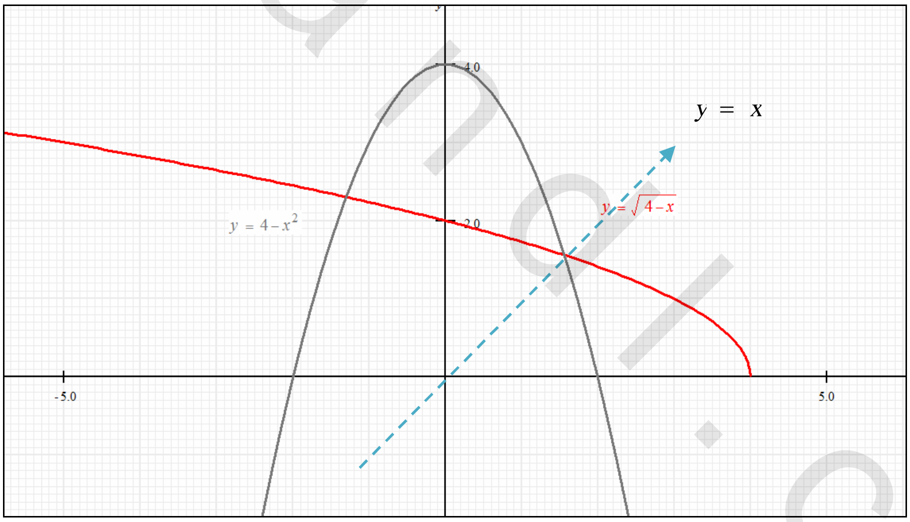
نوجد $f^{-1}(x)$ بما أن $f(x)=\sqrt{4-x}$ منها يكون لدينا :

$$f(x)=\sqrt{4-x} \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{4-x} \quad \Rightarrow \quad y^2=4-x$$

نوجد الدالة بدلالة المتغير y على الشكل التالي:

$$x=4-y^2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=4-x^2$$

بذلك يكون لدينا: $R_f = f^{-1}(x)=[0,\infty)$



45- حل المعادلة $x=\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

الحل: لحل المعادلة السابقة نوجد قيمة x على الشكل التالي:

$$x=\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos x=\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x=0.7227+2\pi k \quad , \quad k=0,\pm1,\pm2,..$$

obeikandl.com

46- حل المعادلة $10\cos 3x = 7$ على الفترة $[-2,5]$.

الحل:

نوجد قيمة x على الشكل التالي:

$$\cos 3x = \frac{7}{10} \quad \Rightarrow \quad 3x = \cos^{-1}\left(\frac{7}{10}\right) = 2.34 + 2\pi k$$

بذلك تكون قيمة $k = 0,\pm1,\pm2,.....$, $x = \frac{2.34}{3} + \frac{2\pi k}{3}$

نلاحظ انه : من أجل قيم k المختلفة نحصل على الجدول التالي:

هذه القيمة مرفوضة	$x = -2.87$	هذه القيمة مرفوضة	$x = -3.4$	$k = -2$
هذه القيمة مقبولة	$x = -0.7821$	هذه القيمة مقبولة	$x = -1.3123$	$k = -1$
هذه القيمة مقبولة	$x = 1.31$	هذه القيمة مقبولة	$x = 0.7821$	$k = 0$
هذه القيمة مقبولة	$x = 3.4067$	هذه القيمة مقبولة	$x = 2.876$	$k = 1$
هذه القيمة مقبولة	$x = 5.5$	هذه القيمة مقبولة	$x = 4.97$	$k = 2$

47- حل المعادلة $6\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ على الفترة $[-20,20]$.

الحل:

نوجد قيمة x على الشكل التالي:

$$6\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{6}\right) = 0.1674$$

يوجد قيمتين لــ x $\frac{x}{2} = \pi - 0.1674 + 2\pi k$, $\frac{x}{2} = 0.1674 + 2k\pi$ بذلك تكون قيمة x على الشكل التالي: $x = 5.9484 + 4k\pi$, $x = 0.3348 + 4k\pi$

نلاحظ انه: من أجل قيم $k = 0,\pm1,\pm2,...$ المختلفة نحصل على الجدول التالي:

هذه القيمة مقبولة	$x = -19.18$	هذه القيمة مرفوضة	$x = -24.79$	$k = -2$
هذه القيمة مقبولة	$x = -6.6$	هذه القيمة مقبولة	$x = -12.23$	$k = -1$
هذه القيمة مقبولة	$x = 5.9484$	هذه القيمة مقبولة	$x = 0.3348$	$k = 0$
هذه القيمة مقبولة	$x = 18.5$	هذه القيمة مقبولة	$x = 12.9012$	$k = 1$
هذه القيمة مرفوضة	$x = 31.08$	هذه القيمة مقبولة	$x = 25.46$	$k = 2$

obeikandl.com

48- حل المعادلة $3\sin(5x)=-2$ على المجال $[0,1]$.

الحل:

نوجد قيمة x على الشكل التالي: $\sin(5x)=\frac{-2}{3} \Rightarrow 5x=\sin^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)=-0.73$

يوجد قيمتين لــ x إما $5x=-0,73+2\pi k=2\pi-0.73=5.55+2\pi k$

أو $5x=\pi+0.73+\pi k=3.87+2\pi k$

حيث $k=0,\pm1,\pm2,...$

وبالتالي يكون: إما $x=1.11+\frac{2\pi k}{5}$ أو $x=0.774+\frac{2\pi k}{5}$ لنجد القيم المناسبة للمجال المعطى:

هذه القيمة مرفوضة	$x=-0.482$	هذه القيمة مرفوضة	$x=-0.146$	$k=-1$
هذه القيمة مقبولة	$x=0.774$	هذه القيمة مرفوضة	$x=1.11$	$k=0$

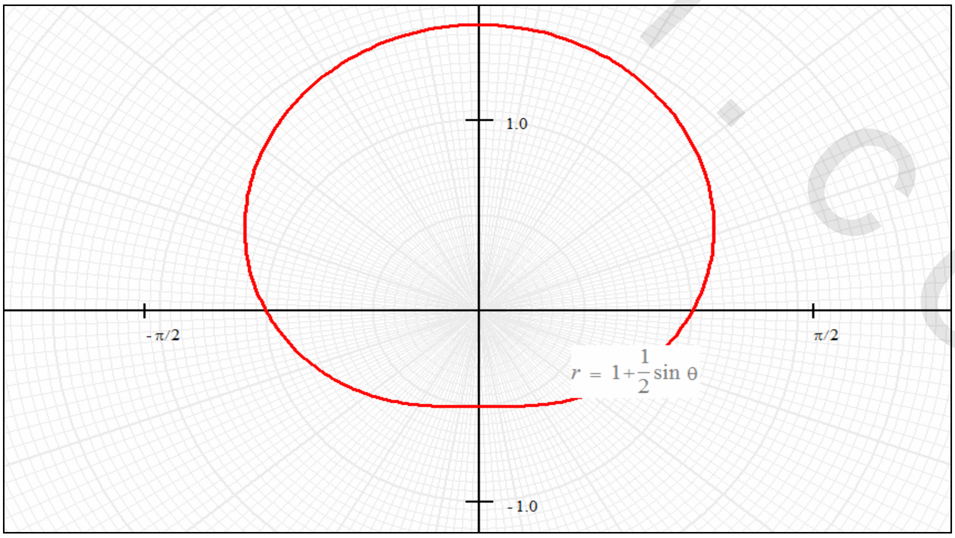
وبقية القيم لــ k كلها تعطى قيم مرفوضة والحل الوحيد هو $x=0.774$.

نلاحظ أن: حل هذه المعادلات يحتاج آلة حاسبة علمية أو جداول الدوال العكسية.

49- ارسم المعادلة القطبية $r=1+\frac{1}{2}\sin\theta$.

الحل :

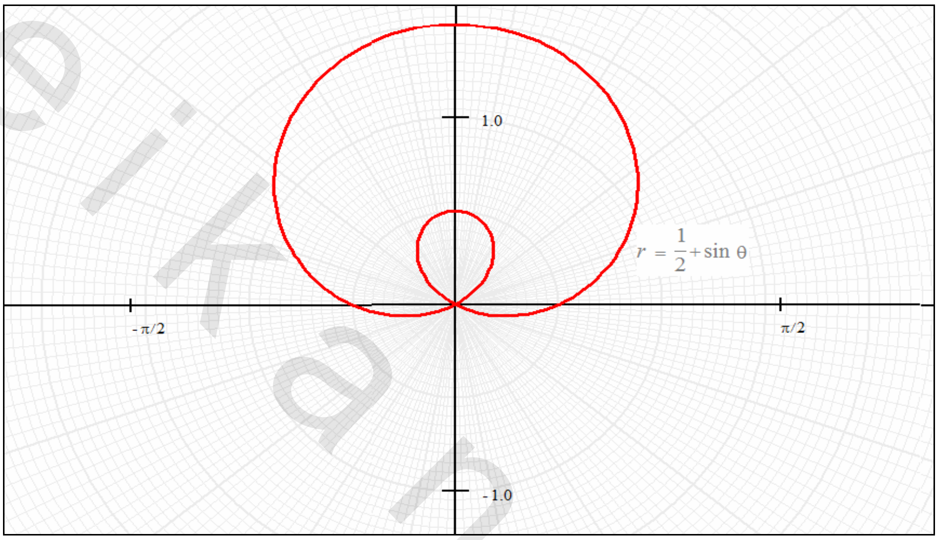
نوجد قيمة كلا من: $b=\frac{1}{2}$, $a=1$ منها $b<a$ $\therefore$ هو منحنى حلزوني.



51–ارسم المعادلة القطبية $r = \frac{1}{2} + \sin\theta$.

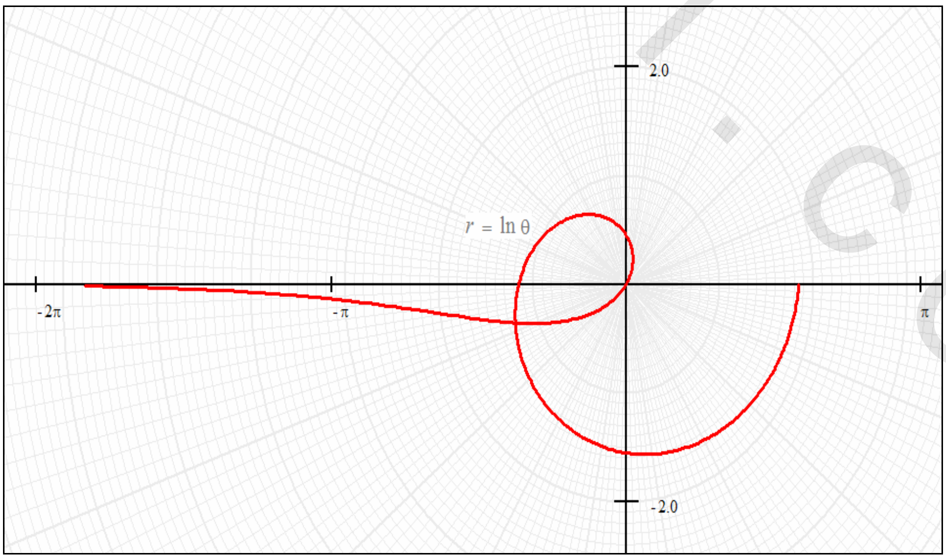
الحل :

θ	0°	30°	45°	60°	90°	270°	300°	315°	330°	360°
r	0.5	1	1.2	1.36	1.5	−0.5	−0.3	−0.2	0	0.5



52– ارسم المعادلة القطبية $r = \ln\theta$.

الحل :



Summary

Let and X be Y town an empty sets then:

The Cartesian product of X and Y ,denoted by $X \times Y$, is the set of ordered

1- Pairs (x, y) where $x \in X$ and $y \in Y$ That is:

$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \quad and \quad y \in Y\}$

2- A relation R from X to Y is any subset of $X \times Y$ that is $R \subseteq X \times Y$.

3- A domain of relation R from X to Y, denoted $Dom(R)$, is the set of all $x \in X$ such that $(x, y) \in R$, That is: $Dom(R) = \{x \in X: \ (x, y) \in R\}$

4- Range of relation R from X to Y, denoted $range(R)$, is the set of all $y \in Y$ such that $(x, y) \in R$, That is : $Range(R) = \{y \in Y: \ (x, y) \in R\}$

5- If R is a relation from X to Y ,the inverse relation of R is a relation from X and is denoted by R^{-1} , that is : $R^{-1} = \{(y, x): \ (x, y) \in R\}$

6- A function f is a relation from X to Y that assigns to each element $x \in X$ one and only one element $f(x) \in Y$.

7- A function f is a relation from X to Y that satisfies the following:

I- $D_f = X$

II- If $(x, y) \in f \ and \ (x, z) \in f \ Then \ y = z.$

Algebraic operations on functions:

If $f(x)$ and $g(x)$ are two functions, then :

$1 - (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

$2 - (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

$3 - \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad g(x) \neq 0 \qquad \forall \quad x \in D_f \cap D_g$

- The Composition of function :

If $f(x)$ and $g(x)$ are two functions , then :

The Composite function $f \circ g$ is defined by: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, where $D_f \cap D_g \neq \varphi$.

The Composite function $f \circ g$ is defined by: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, where

obeikandl.com

$D_f \cap D_g \neq \varphi$.

- The function $f(x)$ is called even function if :

$f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

- The function $f(x)$ is called odd function if :

$f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.

- The function $f: X \to Y$ is called:

One – to- one function if for $x_1, x_2 \in D_f$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ or } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

On –to- function if :

$\forall \; y \in Y, \exists \; x \in X$ such that $y = f(x)$ or if $R_f = Y$

One – to- one correspondence if f is One – to- one and f is onto.

If The function $f: X \to Y, y = f(x)$, is One – to- one correspondence ,then f has an inverse function , denote f^{-1}, such that $f^{-1} = Y \to X$ and $x = f^{-1}(x)$.

-Bounded and unbounded functions :

If there is a number M such that: $f(x) \leq M$, $\forall x \in D_f$

We say that f is bounded from above on D_f and call M an upper bound of the function .

If The function m such that : $f(x) \geq m$, $\forall x \in D_f$

We say that f is bounded from below on D_f and call m a lower bound of The function .

If there exist two numbers M and m such that: $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in D_f$

We say that f is bounded on D_f .

Some types of function:

The function:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0 ,$$

$a_n \neq 0, a_n, a_{n-1}, \dots\dots\dots, a_1, a_0 \in R, n \geq 0$ is called polynomial function , $a_0, a_1, \dots\dots\dots, a_{n-1}, a_n$ coefficients and n degree of polynomial function .

Square root function :

$f(x) = \sqrt{g(x)}$ where $g(x)$ is polynomial function of n degree.

Rational function :

We called the function : $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

Rational function

Where $p(x)$ and $q(x)$ are degree n and m .

Absolute value function :

$$f(x) = |f(x)|\left\{\begin{array}{lll} f(x) & if & f(x) \geq 0 \\ f(x) & if & f(x) < 0 \end{array}\right\}.$$

Greatest integer function (step function): $f(x) = [x]$

Where $[x]$ denote the greatest integer number less than or equal to the number x $(n \leq x \leq n+1)$ then $[x] = n$.

Trigonometric functions:

I- $f(x) = \sin(x)$ is odd function and bounded.

II- $f(x) = \cos(x)$ is even function and bounded

III- $f(x) = \tan(x)$ is odd function and unbounded

IV- $f(x) = \cot(x)$ is odd function and unbounded

V- $f(x) = \sec(x)$ is even function and unbounded

VI - $f(x) = \csc c(x)$ is odd function and unbounded

7- Hyperbolic Functions:

1. $f(x) = \sinh(x)$, where $D_f = R$ And $R_f = R$ is odd function , because

$$f(-x) = \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = f(x)$$

And $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

2. $f(x) = \cosh(x)$, where $D_f = R$ and $R_f = R$ is even function , because

$$f(-x) = \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -f(x)$$

And $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

3. $f(x) = \tanh(x)$, where $D_f = R$ And $R_f = R$ is odd function , because

$$f(-x) = \tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -f(x)$$

and $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tan y}{1 + \tanh x \tan y}$

4. $f(x) = \coth(x)$, where $D_f = R$ And $R_f = R$ is odd function , because

$$f(-x) = \coth(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = \frac{\cosh(x)}{-\sinh(x)} = -f(x)$$

and $\coth(x+y) = \dfrac{\coth x + \coth y}{1 + \coth x \coth y}$

5. $f(x) = \sec h(x)$, where $D_f = R - \{x : \cosh = 0\}$ and $R_f = R$ is even function , because $f(-x) = \sec h(-x) = \dfrac{1}{\cosh(-x)} = \dfrac{1}{\cosh(x)} \; f(x)$

6. $f(x) = cech(x)$, where $D_f = R - \{x : \sinh = 0\}$ and $R_f = R$ is odd function, because $f(-x) = c\sec h(-x) = \dfrac{1}{\sinh(-x)} = \dfrac{1}{-\sinh(x)} = -f(x)$

8- Exponential function:
For any real number $a > 0$ and $a \neq 1$ we called $f(x)=a^x$ an exponential function.

9-Logarithm function:
For all positive numbers a , where $a \neq 1$ we called $y = f(x) = \log_a x$ logarithm function and its mean $x = a^y$.

- If $a = 10$ then the logarithm called common logarithm.
- If $a = e$ then the logarithm called natural logarithm.

10- Inverse Hyperbolic Functions:

$1-\sinh^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \sinh(y)$,

$2-\cosh^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \cosh(y)$, $y \geq 0$

$3-\tanh^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \tanh(y)$, $4-\sinh^{-1}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}$, $x \in R$

$5-\cosh^{-1}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1}$, $x \geq 1$, $6-\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, $-1 < x < 1$

****

obeikandi.com

تمارين على الفصل الثاني

1: أوجد نطاق ومدى الدوال الثابتة موضحاً الإجابة على خط الأعداد:☞

$a)\ f(x)=|x-4|$ $\quad b)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad c)\ f(x)=\dfrac{5x+3}{x^2+8x+7}$

$d)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{9-6x}}{-x+2}$ $\quad e)\ f(x)=\dfrac{5x+4}{|5x+4|}$ $\quad f)\ f(x)=\sqrt[4]{9-x^2}$

$g)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{9-4x}}{\sqrt{2x-1}}$ $\quad h)\ f(x)=\sqrt{\dfrac{8x-4}{x-3}}$ $\quad i)\ f(x)=(9x-2)^{\frac{3}{2}}$

2: إذا كانت $f(x)=5x^2-7x+3$ أوجد $f(0)$ ، $f(a)$ ، $f(\dfrac{-2}{5})$ مع رسم الدالة.

3: أوجد المجموع ، الفرق،الضرب، والقسمة للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ في كل من التمارين التالية:☞

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ ، $g(x)=\sqrt[4]{(x^5+3x-1}$.

(b) $f(x)=(x-1)^{\frac{3}{5}}$ ، $g(x)=\dfrac{3x+9}{7x^3}$.

(c) $f(x)=(9x-2)^{\frac{3}{2}}$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{8x-4}{x-3}}$

(d) $f(x)=4-x$ ، $g(x)=\sqrt[5]{(x-1)}$

ثم عين كلا من $(f\circ g)(x)$ ، $(g\circ f)(x)$ في التمارين السابقة مع تحديد النطاق المشرك للدوال.

4: أوجد أحدى الدوال $g(x)$ إذا كان:☞

(a) $(f\circ g)(x)=(1+x)^2$ وكان $f(x)=x^2$

obeikandi.com

(b) $(f\circ g)(x)=x^2$ وكان $f(x)=\sqrt{x-1}$

(c) $(f\circ g)(x)=x+2$ وكان $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

(d) $(f\circ g)(x)=|x|$ وكان $f(x)=\sqrt{x}$

5: عين أحدى الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ في التمارين التالية مع تحديد النطاق المشرك للدوال:

$$(a)(f\circ g)(x)=\frac{\sqrt{3x-2}}{x^2+3x}$$

$$(b)\ (f\circ g)(x)=\sqrt[3]{\frac{(x^7+1)}{(x^5-3x+1)^2}}$$

$$(c)\ (f\circ g)(x)=\frac{(x+5)}{x^3+4x}$$

6: برهن صحة العلاقات التالية :

$$(a)\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\tan 2x \qquad (b)\ \frac{\sin 2x+\sin 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\tan 3x$$

$$(c)\ \frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{\tan\frac{1}{2}(x+y)}{\tan\frac{1}{2}(x-y)}$$

$$(d)\frac{\cos x+\cos y}{\cos x-\cos y}=-\cot\frac{1}{2}(x-y)\cot\frac{1}{2}(x+y)$$

$$(e)\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=\sin 2\theta+(\sin\theta+\sin 3\theta)=\sin 2\theta(1+\cos\theta)$$

7:برهن صحة العلاقات العدية التالية :

$$(a)\ \cos 220+\cos 100+\cos 20=0$$

$$(b)\cos 130+\cos 110+\cos 20=0$$

8:برهن صحة المتطابقات التالية :

$$(a)\ \cos^2\theta\cos^3\theta=\frac{1}{16}(2\sin\theta+\sin 3\theta-\sin 5\theta)$$

$$(b)\ \cos^2\theta\cos^4\theta=\frac{1}{32}(2-\cos 2\theta-2\cos 4\theta+\cos 6\theta)$$

9: أكتب المعادلات التالية على شكل آسي وأحسب قيمة المجهول في المعادلة :☞

$(a)\ \ -3 = \log_{\frac{1}{4}} x \qquad (b)\ \ 3 = \log_a 8 \qquad (c)\ \ 3 = \log_4 x$

10:استخدم خواص اللوغاريتمات لفك المقادير التالية:☞

$(a)\ \ \log_5 17^3 \qquad (b)\ \ \log_3 \sqrt{x-5}$

$(c)\ \ \log\dfrac{6(a+1)}{b} \qquad (d)\ \ \log\dfrac{x^4}{9(2x+3)^5}$

11: أكتب التعابير اللوغارثمية التالية على شكل تعبير وحيد:☞

$(a)\ \ 2(\log x - 3\log(x+1) - \log y$

$(b)\ \ 3\ln x + \dfrac{1}{2}\ln(x+1)] - 3\ln(x+4)$

12: احسب قيمة كلاً مما يلي:☞

$(a)\ \ \log_4 4^5$

$(b)\ \ 7\log_9 81$

$(c)\ \ 4\log_8 \sqrt{8}$

$(d)\ \ \log 10^5$

$(f) 10^{\log 4}$

13: حل دون استخدام الآلة الحاسبة :

$(a)\ \ 125 = 5^x$

$(b)\ \ 81^x = \dfrac{1}{9}$

$(c)\ \ 2^{3x-1} = 32$

$(d)\ \ 27^x = 3^{2x+5}$

14: حل المعادلات اللوغارثمية التالية:☞

$(a)\ \ \log x + \log(4x-7) = \log 2$

$(b)\ \ \log_3 x + \log_3(2x+1) = 1$

obeikandl.com

15: اثبت أن الدوال التالية تقابلية ثم أوجد الدوال العكسية للدوال الآتية مع رسم هذه الدوال: ☞

$(a)\ f(x)=\sqrt{3x-2}$ $\qquad f:\left[\frac{2}{3},\infty\right)\to[0,\infty)$

$(b)\ f(x)=\sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)}}$ $\qquad f:IR-\{1\}\to IR$

$(c)\ f(x)=\ln(x+5)$ $\qquad f:(-5,\infty)\to IR$

$(d)\ f(x)=4-x^3$ $\qquad f:IR\to IR$

$(f)\ f(x)=\sqrt{(x-5)(x^2-1)}$ $\qquad f:IR\to[-1,1]\cup[5,\infty)$

$(g)\ f(x)=\frac{-1}{2}x^2+3$ $\qquad f:IR\to(-\infty,3]$

16: ارسم كل من المعادلات القطبية التالية في الفترة $[0.\pi]$: ☞

$(a)\quad x=5-3\cos\theta,\quad y=2+2\sin\theta$

$(b)\quad x=3+5\cos\theta,\quad y=-1+5\sin\theta$

$(c)\quad r=2+3\sin\theta$ $\qquad (d)\quad r=\sin 4\theta$ $\qquad (e)\quad r=\cos 5\theta$

****

obeikandl.com