النهايـــات Limits

هناك كثير من الدوال التي تكون معرفة في نطاق معين، ما عدا إحدى القيم، أو بعض القيمِ، من ذاك النطاق تكون فيها الدالة غير معرفة، **فمثلاً:** الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ غير معرفة عندما $x=1$

حيث $f(1)=\dfrac{1-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ فهي غير معرفة (ليس لها قيمة حقيقية على خط الأعداد الحقيقية)

وبالتالي نطاقها يكون $D\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

ولفحص هذه الدالة عند اقتراب x من 1 نجد أن الدالة تقترب من 2 كما هو مبين بالجدال التالي:

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$	اقتراب من اليمين $x>1$	$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$	اقتراب من اليسار $x<1$
2.05	1.05	1.95	0.95
2.04	1.04	1.96	0.96
2.03	1.03	1.97	0.97
2.02	1.02	1.98	0.98
2.01	1.01	1.99	0.99
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

من خلال الجدول السابق **نلاحظ:** أن الدالة تقترب شيئًا فشيئًا من 2 كلما اقتربت x من 1.

$\therefore$ لهذا نقول أن نهاية الدالة هو 2 عندما تؤول X إلى 1.

أي أنه بالرغم من عدم تعريف الدالة عند $x=1$ إلا أنه توجد لها نهاية عندما $x=1$

تعريف:

لتكن f دالة معرفة على فترة مفتوحة حول قيمة حقيقية a باستثناء القيمة a نفسها.

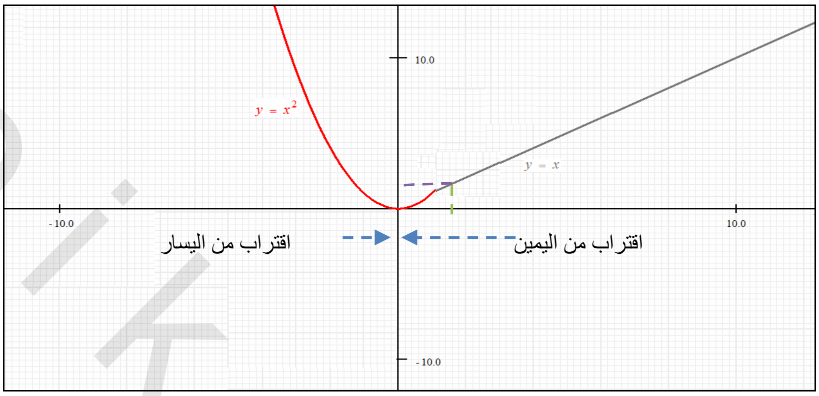
فإذا كانت $f(x)$ تقترب اختياريًا من قيمة حقيقية L, كلما اقتربت x من a . فإننا نقول أن $f(x)$ تقترب من النهاية L كلما اقتربت x من a ونكتب ذلك على الصورة الآتية :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ونقراها نهاية الدالة f عندما تؤول x إلى a هي L .

مثال:

وضح نهاية الدالة بالرسم: $f(x)=\left\{\begin{matrix} x & , & x\geq 1 \\ x^2 & , & x<1 \end{matrix}\right\}$.

الحل:



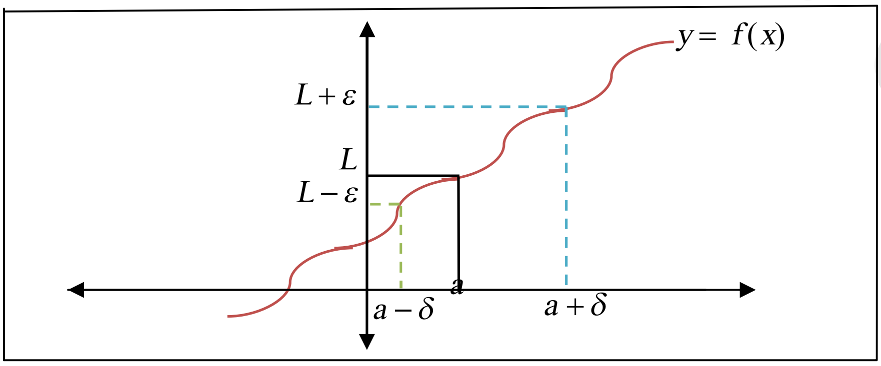
التعريف الرياضي للنهاية

لتكن f دالة معرفة على فترة مفتوحة تحتوي على عدد a ، فيما عدا العدد a نفسه، وليكن L عددًا حقيقيًا عندئذ العبارة: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

تعني أنه لكل عدد حقيقي صغير $\varepsilon>0$ يوجد عدد حقيقي $\delta>0$ بحيث يكون: $|f(x)-L|<\varepsilon \Rightarrow 0<|x-a|<\delta$ الرمز ε يقرأ "epsilon" وهو مقدار موجب صغير جدًا.

والرمز δ يقرأ "delta" وهو مقدار موجب صغير جدًا ملائم للعدد ε .

$$|x-a|<\delta \;\leftarrow\; |f(x)-L|<\varepsilon$$
$$-\delta<x-a<\delta \;\leftarrow\; -\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon$$
$$a-\delta<x<a+\delta \leftarrow\; L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$$
$$x\in(a-\delta\,,a+\delta) \;\leftarrow\; f(x)\in(L-\varepsilon\,,L+\varepsilon)$$



مثال:

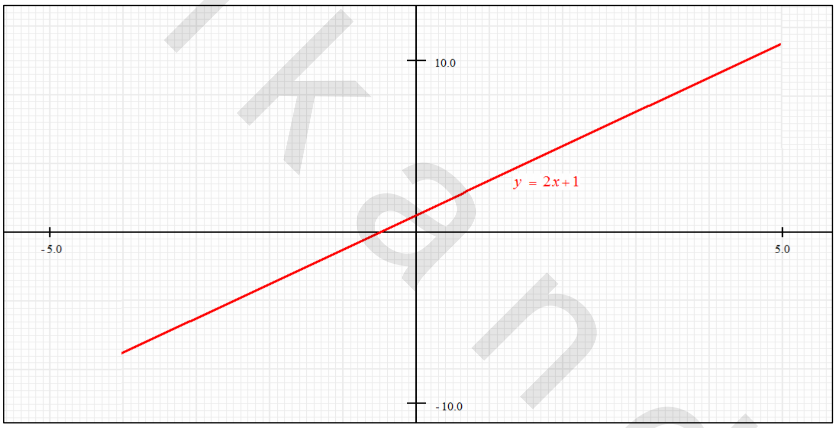
إذا كان لدينا الدالة $f(x)=2x+1$ ، فأوجد نهاية هذه الدالة عندما $x\to 1$.

لاحظ الجدول التالي:

x	0.5	0.9	0.99	0.999	1.0001	1.001	1.1	1.5
$f(x)$	2	2.8	2.98	2.998	3.00002	3.002	3.2	4

$$\lim_{x\to 1}(2x+1)=2(1)+1=3$$

بتطبيق التعريف الرياضي نجد:



$$|f(x)-L|<\varepsilon$$
$$|2x+1-3|<\varepsilon$$
$$|2x-2|<\varepsilon$$
$$|2(x-1)|<\varepsilon$$
$$|2||x-1|<\varepsilon \quad \div 2$$
$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

يمكن اعتبار $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ إذا كان $|x-1|<\delta$ فإن

$$|f(x)-3|<\varepsilon$$

إذا كان $\varepsilon=0.2$ فإن: $2.8<f(x)<3.2 \leftarrow 0.9<x<2.1$

إذا كان $\varepsilon=0.02$ فإن: $2.98<f(x)<3.02 \leftarrow 0.99<x<1.01$

إذا كان $\varepsilon=0.002$ فإن: $2.998<f(x)<3.002 \leftarrow 0.999<x<1.001$

إذا كان $\varepsilon=0.0002$ فإن: $2.9998<f(x)<3.0002 \leftarrow 0.9999<x<1.0001$

إذا كان $\varepsilon=0.00002$ فإن: $2.99998<f(x)<3.00002 \leftarrow 0.99999<x<1.00001$

النهايتان اليسرى واليمنى Left and Right limits

إن قيمة حدود المتوالية $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, ..., \frac{2n-1}{n}$ هي باستمرار أصغر من 2 وعلى هذا فإننا نقول عن قيمة حد x تقترب من 2 من اليسار، وتكتب $x \to 2^-$. وبالمثل قيمة x في حدود المتوالية $2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, ...2+\frac{1}{10^n}, ...$ هي باستمرار أكبر من 2 ونقول في مثل هذه الحالة أن x تقترب من 2 من اليمين، وتكتب. $x \to 2^+$ ومن الواضح أن وجود العبارة $\lim\limits_{x\to a} f(a)$ تستلزم وجود تساوي كل من نهاية اليسار $\lim\limits_{x\to a^-} f(a)$ ونهاية اليمين $\lim\limits_{x\to a^+} f(a)$ على أن وجود نهاية اليمين، لا يستلزم وجود نهاية اليسار، والعكس صحيح.

مثال:

إن مجال التعريف (النطاق) للدالة $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ هو الفترة $-3 \le x \le 3$، فإذا كان a أي عدد في الفترة المفتوحة $-3 < x < 3$، فإن $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{9-x^2}$ موجودة وتساوي $\sqrt{9-a^2}$، لنعتبر الآن $a = 3$ ولنجعل x تقترب إلى 3 من اليسار أولا، فنجد $\lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$ أما إذا جعلنا x بعد ذلك تقترب من 3 من اليمين فإننا نجد أن $\lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{9-x^2}$ غير موجودة ؛ لأن $9-x^2$ يكون سالباً عندما $x > 3$، وهكذا نجد أن $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{9-x^2}$ غير موجودة.

بالمثل:

نجد أن $\lim\limits_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2}$ موجودة ومساوية للصفر ولكن $\lim\limits_{x\to -3^-} \sqrt{9-x^2}$ غير موجودة وبالتالي $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{9-x^2}$ غير موجودة.

مبرهنة Theorem:

يكون للدالة $f(x)$ نهاية معرفة وموجودة $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

مثال:

أدرس نهاية الدالة $f(x)$ عند $x=1$ حيث: $f(x)=\begin{cases} 2-x & , \quad x<1 \\ x^2+1 & , \quad x>1 \end{cases}$ مع رسم الدالة .

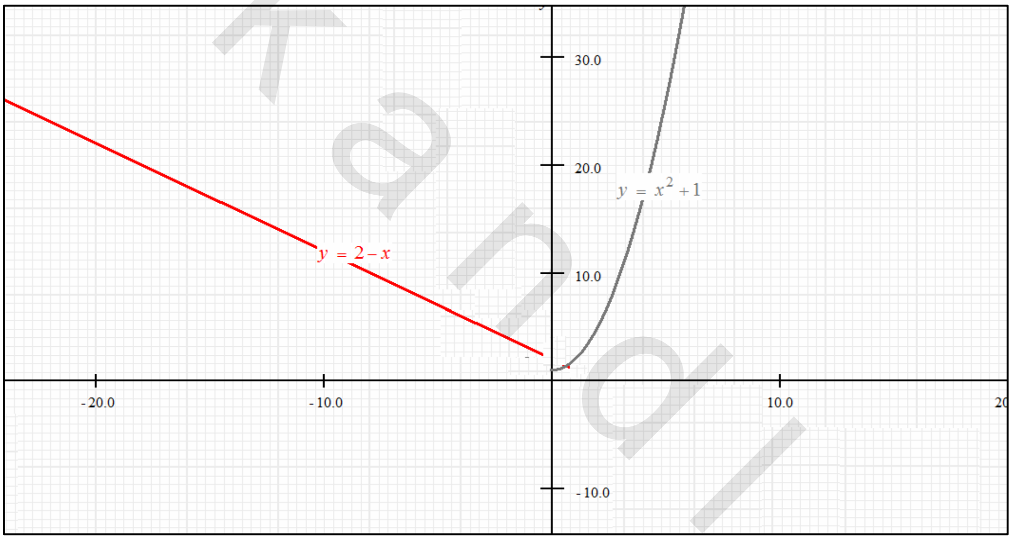
الحل:

نوجد النهاية نمن اليسار واليمين فنحصل على القيم التالي:

النهاية من اليسار $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2-x)=1$

النهاية من اليمين $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+1) = 2$

بما أن $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ إذا $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة



تعريف:

يقال إن $F(x)$ دالة أصلية (تكامل) لدالة $f(x)$ إذا تحققت العلاقة التالية :

$d\,F(x) = f(x)dx$

أي أن بمعنى أن تفاضل $F(x)$ هو $f(x)$ أو المشتقة $\dfrac{d\,F(x)}{d\,x} = f(x)$.

مثال:

هل توجد للدالة نهاية عندما x تؤول إلى 2

$$f(x)=\begin{cases} 3-x & , \quad x<2 \\ \frac{x}{2}+1 & , \quad x>2 \end{cases}$$ مع رسم الدالة .

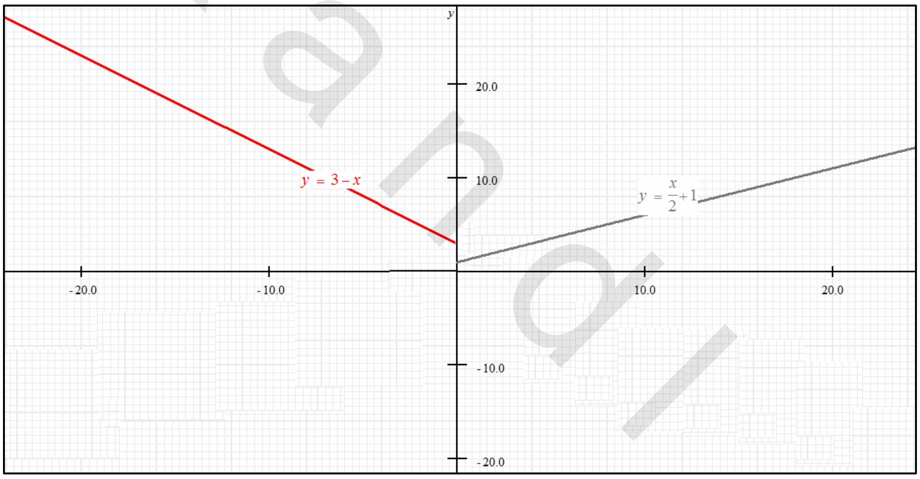
الحل:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(3-x)=1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2$$

$$\because \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

ومنها نستنتج إن $\lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة



مثال:

أوجد نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ عندما $x\to 0$ مع رسم الدالة .

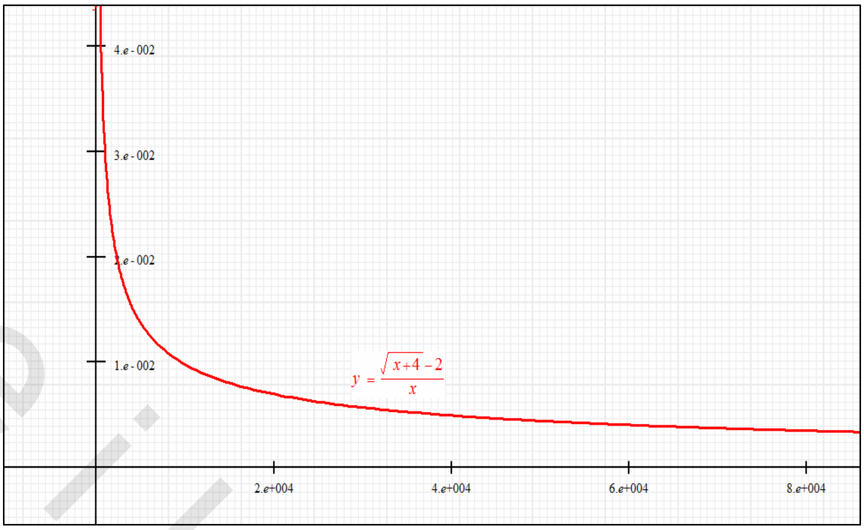
الحل:

بالضرب في مرافق البسط

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\times\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$



مثال:

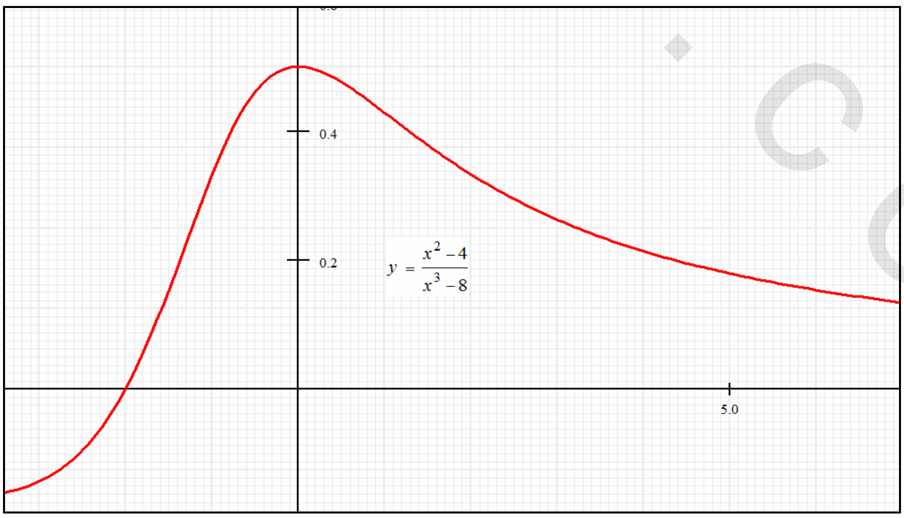
أوجد نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$ عندما $x\to 2$ مع رسم الدالة.

الحل:

نعلم أن $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x^m-a^m}=\dfrac{n}{m}a^{n-m}$ وبالتالي يكون لدينا:

حيث أن $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$ وباعتبار $a=2$ و $n=2$ و $m=3$ بذلك يكون لدينا :

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x^3-2^3}=\frac{2}{3}2^{2-3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$



حساب نهاية الدالة Algebraic Techniques For Farcing Limits

لحساب نهاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to a$ نعوض في هذه الدالة عند $x = a$ وقد نحصل على المطلوب كما يبين المثال أدناه وقد لا نحصل عليها عندئذ نتبع طرق أخرى سنتطرق إليها أسفلة.

مثال:

أوجد نهاية الدالة $f(x) = x^2$ عندما $x \to 2$.

الحل:

بما أن $f(x) = x^2$ نبحث عن نهاية $f(x)$ عندما x تؤول إلى 2

$$\underset{x\to 2}{Lim}\ f(x) = \underset{x\to 2}{Lim}\ x^2 = 4$$

وهذا يعني أن $f(x)$ تقترب من 4 عندما تقترب x إلى العدد 2.

مبرهنات في النهايات: Theorems in Limits

1. نهاية المقدار الثابت Limit of Constant.

لدالة $f(x) = b$ نجد أن $\underset{x\to a}{Lim}\ f(x) = \underset{x\to a}{Lim}\, b$.

مثال:

أوجد نهاية الدالة $f(x) = 5$ عندما $x \to 3$.

الحل:

$\underset{x\to 3}{Limt}\ f(x) = 5$ منها نجد أن النهاية تساوي قيمة ثابتة وهي 5.

2. نهاية دالة كثيرة الحدود:

لدالة $f(x) = x$ نجد أن $\underset{x\to a}{Lim}\ f(x) = \underset{x\to a}{Lim}\, x$.

مثال:

أوجد نهاية الدالة $f(x) = x$ عندما $x \to -3$.

الحل:

$\underset{x\to -3}{Limt}\ f(x) = \underset{x\to -3}{Limt}\ x = (-3)$ منها نجد أن النهاية تساوي قيمة ثابتة وهي -3.

3. نهاية مجموع دالتين .Limit of Sum functions

لتكن الدالة $F(x) = f(x) + g(x)$ حيث $f(x)\ ,\ g(x)$ دالتان في x فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة $f(x) = (6x^3 + 5x^2)$ عندما $x \to -2$.

الحل:

$$\lim_{x\to -2} (6x^3 + 5x^2) = \lim_{x\to -2} 6x^3 + \lim_{x\to -2} 5x^2 = 6(-2)^3 + 5(-2)^2 = -48 + 20 = -28$$

4. نهاية فرق دالتين .Limit of Difference functions

لتكن $F(x) = f(x) - g(x)$ حيث $f(x)\ ,\ g(x)$ دالتان في x فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a}\left(f(x) - g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة $f(x) = (2x^4 - x^3)$ عندما $x \to 1$.

الحل:

$$\lim_{x\to 1} (2x^4 - x^3) = \lim_{x\to 1} 2x^4 - \lim_{x\to 1} x^3 = 2(1)^4 - (1)^3 = 1$$

وعمومًا إذا كانت:

$$F(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \dots\dots\dots \pm f_{n-1}(x) \pm f_n(x) \pm$$

حيث $f_1(x)\,,\ f_2(x)\,,\ f_3(x)\,, \dots\dots\dots,\ f_{n-1}(x)\,,\ f_n(x)$ دوال في x فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \pm \lim_{x\to a} f_3(x) \pm \dots\dots \pm \lim_{x\to a} f_{n-1}(x) \pm \lim_{x\to a} f_n(x)$$

مثال:

لتكن الدالة $F(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x$ أوجد نهاية الدالة عندما $x \to 1$.

الحل:

$$\lim_{x\to 1} \mathrm{F(x)} = \lim_{x\to 1} x^4 - \lim_{x\to 1} 2x^3 + \lim_{x\to 1} 3x^2 + \lim_{x\to 1} x$$
$$= (1)^4 - 2(1)^3 + 3(1)^2 + 1 = 3$$

5. نهاية جداء (ضرب) دالتين .Limit of products functions

لتكن $F(x)= f(x).g(x)$ حيث $g(x)$, $f(x)$ دوال في x ، فإن

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x)\times \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال:

لتكن الدالة $F(x)=(-2x^3-1)(5x^2+1)$ أوجد نهاية الدالة عندما $x\to -1$.

$$\lim_{x\to -1} F(x) = \lim_{x\to -1}(-2x^3-1)(5x^2+1)$$
$$= \lim_{x\to -1}(-2x^3-1)\times \lim_{x\to -1}(5x^2+1)$$
$$=\left(-2(-1)^3-1\right)\times\left(5(-1)^2+1\right)=6$$

وعمومًا إذا كان $F(x)$ عبارة عن جداء عدة دوال

$$f_1(x)\times f_2(x)\times f_3(x)\times ....\times f_n(x)$$

فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} f_1(x)\times \lim_{x\to a} f_2(x)\times \lim_{x\to a} f_3(x)\times ....\times \lim_{x\to a} f_n(x)$$

6.نهاية قسمة دالتين .Limit of quotient functions

لتكن الدالة $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ حيث $g(x)$, $f(x)$ دالتان في x و $g(x)\neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad , \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

مثال:

لتكن الدالة $F(x)=\dfrac{2x+6}{5x^2-1}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+6}{5x^2-1}\right)=\frac{\lim_{x\to 0}(2x+6)}{\lim_{x\to 0}(5x^2-1)}=\frac{6}{-1}=-6$$

مثال:

إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\neq 2 \\ 0 & , \quad x=2\end{cases}$ اوجد $\lim_{x\to 2} f(x)$

الحل:

نلاحظ هنا أنه إذا كان $x\to 2$ هذا يعني أن $x\neq 2$ دائما هي قربها من اليسار واليمين إذن

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة 3 = x إذا كانت $f(x)$ معرفة بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5 & , \quad x\le 3 \\ \sqrt{x+13} & , \quad x>3 \end{cases}$$ مع رسم الدالة .

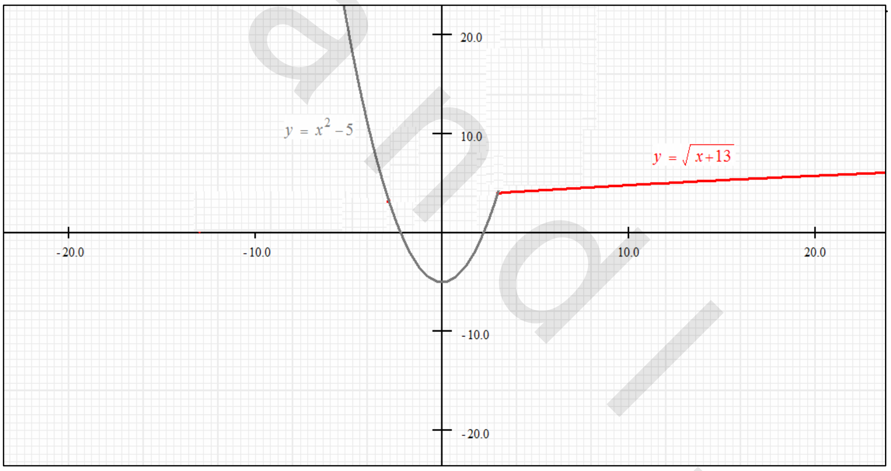
الحل:

عندما تقترب x إلى العدد 3 من اليسار فإن عبارة الدالة $f(x)$ هي $f(x)=x^2-5$ ، وبالتالي:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-5)=(3)^2-5=4$$

عندما تقترب x إلى العدد 3 من اليمين؛ فإن عبارة الدالة $f(x)$ هي $f(x)=\sqrt{x+13}$ وبالتالي نجد أن:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x+13}=\sqrt{3+13}=4$$



مثال:

أوجد نهاية الدالة إذا كانت $g(t)$ معرفة بالعلاقة:

$$g(t)=\begin{cases} t^2 & , \quad t\ge 0 \\ t-2 & , \quad t<0 \end{cases}$$ عندما $t\to 0$.

الحل:

عندما تقترب t إلى العدد 0 من اليسار فإن عبارة الدالة g (t) هي $g(t)=t-2$ ، وبالتالي:

$$\lim_{t\to 0^-} g(t)=\lim_{t\to 0^-}(t-2)=0-2=-2$$

عندما تقترب t إلى العدد 0 من اليمين فإن عبارة الدالة g (t) هي $g(t)=t^2$ ، وبالتالي:

$$\lim_{t\to 0^+} g(x) = \lim_{t\to 0^+} t^2 = 0^2 = 0$$

إذا النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار، وبالتالي فليس للدالة نهاية عند هذه النقطة.

7. نهاية الدالة المثلثية .Limit of trigonometric functions

نهاية الدالة المثلثية عندما $x\to c$ هو قيمة الدالة عند $x=c$

مثلا:

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos(0) = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \sin x = \sin(0) = 0$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة المعرفة بالعلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & , \quad x<\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \cos x & , \quad x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$ مع رسم الدالة .

الحل:

نوجد نهاية الدالة عندما $x\to \frac{\pi}{2}^-$:

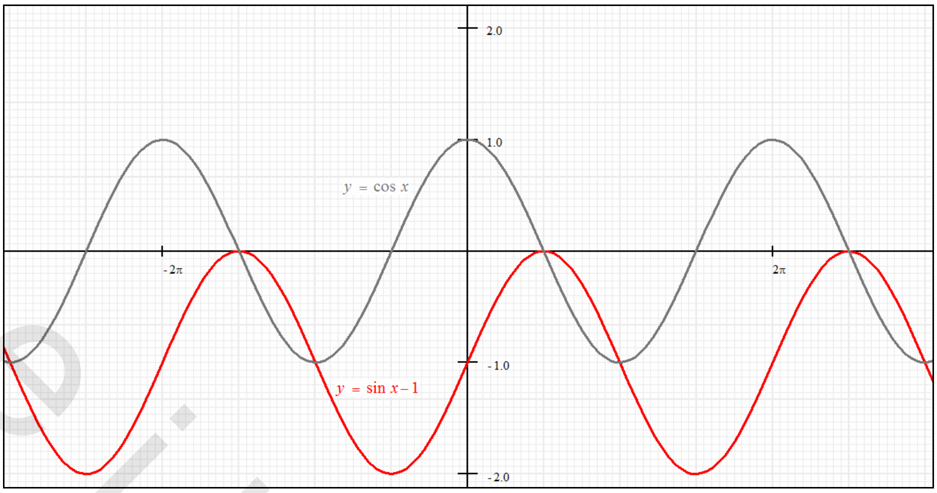
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sin x - 1) = 1-1 = 0$$

نوجد نهاية الدالة عندما $x\to \frac{\pi}{2}^+$:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (\cos x) = 0$$

إذا:

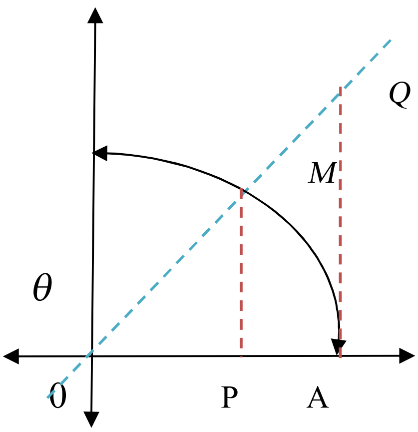
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0$$



مبرهنة Theorem:

أثبت أن : $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$

البرهان:



لدينا من الشكل المقابل: $\tan\theta = \dfrac{QA}{oA} = QA$

$MP = \sin\theta \quad , \quad 0 < \theta < \pi$

واضح أن: $\sin\theta < \tan\theta$ لأن $MP < AQ$.

كذلك فإن: مساحة المثلث $\Delta AQ0$ < من مساحة القطاع الدائري ΔOPA < مساحة المثلث ΔAQP .

$$\Delta \quad AOP = \frac{1}{2}OA \times PM = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\Delta \quad AOP = \frac{1}{2}OA \times AM = \frac{1}{2}\tan\theta$$

مساحة القطاع الدائري $AOP:\ \frac{1}{2}r^2\theta\frac{1}{2}\theta$

إذا:

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

بفرض أن: $0<\theta$ فإن $\frac{\sin\theta}{\theta}<1<\frac{\tan\theta}{\theta}$

وبالتالي يكون لدينا:

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta} \quad \text{أو} \quad 1>\frac{\theta}{\sin\theta}>\cos\theta$$

وبما أن $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta=1$ يكون لدينا $1\geq \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\geq 1$

إذا: $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ وهو المطلوب

مبرهنة Theorem:

أثبت أن : $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$

البرهان:

نستخدم طريقة الضرب في المرافق نحصل على:

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}\times\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=1\times 0=0\end{aligned}$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة المعرفة بالعلاقة: $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{2\theta}$.

الحل:

باستخدام المبرهنات السابقة:

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{2\theta} &= \frac{5}{2}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{5\theta}\\ &= \frac{5}{2}\times 1=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة المعرفة بالعلاقة: $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{4\theta}$.

الحل:

باستخدام المبرهنات السابقة:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{4\theta} = \frac{1}{4} \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة المعرفة بالعلاقة: $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 3 - 3\cos x}{4x}$.

الحل:

باستخدام المبرهنات السابقة:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x + 3 - 3\cos x}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \left(2 + \frac{3(1 - \cos x)}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \times (2 + 3x0) = \frac{1}{2}$$

مثال:

عين النهاية التالية: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

الحل:

باستخدام المبرهنات السابقة:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \cos x} \right\} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال:

أوجد نهايات التالية:

$$1-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} \qquad 2-\lim_{x\to 0}\frac{x^3\tan x}{\sin^4 x}$$

$$3-\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x}{x^2+1}$$

الحل:

1− نهاية الدالة $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ بفرض أن: $x-\frac{\pi}{2}=t$ يكون

$$t\to 0 \quad \Leftarrow \quad x\to\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1$$

2− نهاية الدالة $\lim_{x\to 0}\frac{x^3\tan x}{\sin^4 x}$ يكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin x}{\sin^4 x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to\theta}\frac{x^3}{\sin^3\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}=1\times 1=1$$

3− نهاية الدالة $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x}{x^2+1}$ بالتعويض المباشر يكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x}{x^2+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\cos x}{x^2+1}=\frac{0+2}{0+2}=1$$

8. نهاية قوة الدالة Limit 0f a Power Function

نهاية دالة مرفوعة إلى أس:

$$\lim_{t\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{t\to a}f(x)\right]^n$$

مثال:

أحسب نهاية الدالة $f(x)=(3x+4)^5$ عندما $x \to 2$.

الحل:

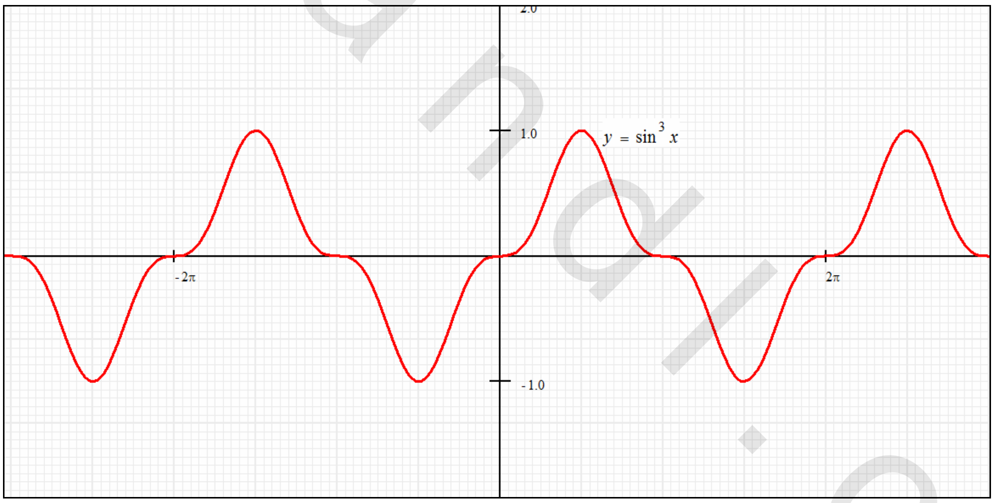
$$\lim_{x\to 2}(3x+4)^5=\left[\lim_{x\to 2}(3x+4)\right]^5=(10)^5$$

مثال:

أحسب نهاية الدالة $f(x)=\sin^3 x$ عندما $x \to \frac{\pi}{2}$ مع رسم الدالة .

الحل:

نوجد نهاية الدالة على الشكل التالي: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\right)^3=(1)^3=1$



ملاحظة:

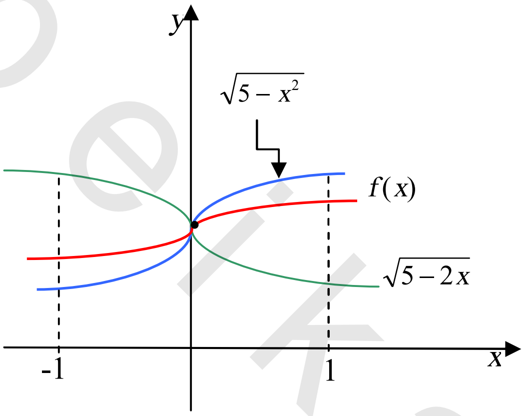
إذا كانت $f(x)\le h(x)\le g(x)$ لجميع قيم x التي تنتمي إلى فترة مفتوحة حول العدد a عدا $x=a$ وإذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} g(x)=L$

فإن $\lim_{x\to a} h(x)=L$

مثال:

إذا كان $\sqrt{5-2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$ في الفترة $[-1,1]$ أوجد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ مع رسم الدالة .

الحل:



$$\because \lim_{x\to 0} \sqrt{5-x^2} = \sqrt{5}$$

$$\because \lim_{x\to 0} \sqrt{5-2x^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{5}$$

ملاحظة:

في هذا المثال نجد أنه بالرغم من عدم معرفتنا للصيغة الجبرية للدالة $f(x)$ إلا أنه باستخدام الخاصية 7 نستطيع أن نقول أن نهايتها هي $\sqrt{5}$ عندما x تؤول إلى الصفر.

مثال:

أحسب نهاية الدالة $f(x)=\cos 7x.e^{2x}$ عندما $x\to 0$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\cos 7x.e^{2x} = \left(\lim_{x\to 0} \cos 7x\right)\times\left(\lim_{x\to 0} e^{2x}\right) = \cos 0 \times e^0 = 1\times 1 = 1$$

مثال:

بفرض أن $\sin x \le f(x) \le x$ أوجد نهاية $f(x)$ عند $x=0$.

الحل:

نعلم أن: $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

إذن: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

حالات عدم التعيين: Indeterminate Cases

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\frac{0}{0}$ (2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty\times 0$ (4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty-\infty$

في هذه الحالات تكون النهاية غير معينة، وهناك طرق لإزالة عدم التعيين.

أولاً: عدم التعيين: $\frac{0}{0}$ Indeterminate form

ويزال بالتحليل وقسمة البسط على المقام وبالاختصار أو بالقيام بعملية طرح أو جمع، أو باستعمال طرق أخرى مثل الضرب بمرافق بسط أو مقام يحوي جذر.

مثال:

احسب نهاية الدالة $f(x)=\frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}$ عندما $x\to 4$.

الحل:

$$\lim_{x\to 4} = \frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}=\frac{0}{0}$$

يجب إزالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}\times\frac{\sqrt{x+12}+4}{\sqrt{x+12}+4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x+12-16}{(x-4)\left(\sqrt{x+12}+4\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x+12}+4\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4+12}+4}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 4}=\frac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}=\frac{1}{8}$$

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}$.

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}=\frac{0}{0}$$ عدم التعيين

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1\quad ;\ x\neq 0$$ من أجل

مثال:

احسب النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^6-2x^5+x^4+5x^3-11x^2+7x-1}{x^6-x^5-x^3+x^2+2x-2}\right)$

الحل:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^6-2x^5+x^4+5x^3-11x^2+7x-1}{x^6-x^5-x^3+x^2+2x-2}\right)=\frac{0}{0}$$ عدم التعيين

في هذه الحالة للتخلص من عدم، التعيين نقوم بإخراج $(x-1)$ عامل مشترك من البسط والمقام معا، وبالتحليل نجد:

$$\text{البسط}=(x-1)^2(x^4-5x-1)$$

$$\text{المقام}=(x-1)(x^5-x^2+2)$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^6-2x^5+x^4+5x^3-11x^2+7x-1}{x^6-x^5-x^3+x^2+2x-2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x^4-5x-1)}{(x-1)(x^5-x^2+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^4-5x-1)}{(x^5-x^2+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-1)(1^4-5(1)-1)}{((1)^5-(1)^2+2)}=0$$

مثال:

احسب النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$

الحل:

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}=\frac{0}{0}$$ عدم التعيين

فمن أجل

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{x^2-9}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to-3}\frac{x-2}{x-3}=\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6}\quad ;\ x\neq-3$$

مثال:

احسب النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-2x-12}{x-3}$

الحل:

عدم التعيين $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-2x-12}{x-3}=\dfrac{0}{0}$

من أجل $x\neq 3\;;$ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-2x-12}{x-3}=\dfrac{2x^2-2x-12}{x-3}=\dfrac{(2x+4)(x-3)}{(x-3)}=2x+4$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 3}\frac{2x^2-2x-12}{x-3}=\lim_{x\to 3}(2x+4)=10$$

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}$.

الحل: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ حيث x عدد موجب

عدم التعيين $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=\dfrac{-8+24-24+8}{-2+2}=\dfrac{0}{0}$

باستخدام القسمة المطولة نحصل على: $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=\dfrac{(x^2+4x+4)(x+2)}{(x+2)}$

ومنه من أجل $x\neq -2\;;$ $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=x^2+4x+4$

وبالتالي فإن

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}x^2+4x+4=4-8+4=0$$

نظرية:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ حيث x عدد موجب

مثال:

لدينا $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}=0\;,\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^5}=0$

نظرية:

$$\lim_{x\to\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots\dots\dots\dots+a_1x+a_\circ)=\infty$$

حيث أن $a_n, a_{n-1},\dots\dots, a>0$

مثال:

أحسب نهاية الدالة: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$ عندما تسعى X إلى اللانهاية.

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3 + 2x^2 + 5x + 3) = \infty$$

ثانيًا: عدم التعيين: $\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminate form

لإزالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$ عندما يؤول المتغير x إلى ∞، نقسم البسط والمقام على المتغير حاملاً أكبر أس في البسط أو المقام.

مثال:

احسب النهاية التالية: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1}$

الحل:

عدم التعيين $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty}$

نقسم حدود الدالة على x^2 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2/x^2}{x^2/x^2 + 1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+0} = 1$$

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^3}$.

الحل:

عدم التعيين $\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^3} = \frac{\infty}{\infty}$

نقسم دوال الدالة على x^3 فيكون لدينا.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x/x^3 + 5/x^3}{x^3/x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2 + 5/x^3}{1} = \frac{0+0}{1} = 0$$

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5+3}{x^2}$.

الحل:

عدم التعيين $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5+3}{x^2} = \dfrac{\infty}{\infty}$ ، تقسم حدود الدالة على x^2 فيكون لدينا

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5/x^2+3/x^2}{x^2/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3/x^2}{1} = \infty$$

ثالثاً: عدم التعيين $\infty\times 0$: **Indeterminate form**

لإزالة عدم التعيين $0\times\infty$ نطبق طريقة التحليل الجبري ثم نقوم بالاختصار والقيام بعملية الضرب والقسمة في حالة وجودهما للوصول إلى حالة $\dfrac{\infty}{\infty}$ أو $\dfrac{0}{0}$ وهذا ممكن دوماً أو الوصول إلى حل مباشر.

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2-x}\right)$.

الحل:

عدم التعيين $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2-x}\right) = 0\times\infty$

$$\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right) = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x(x-1)}\right) = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{1}{x}\left[3+\frac{2}{x-1}\right]\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(3+\frac{2}{x-1}\right) = 3+\frac{2}{0-1} = 1$$

مثال:

احسب نهاية الدالة $f(x) = \sin x\cot x$ عندما x تسعى إلى الصفر.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x\to 0} \sin x\cot x = \lim_{x\to 0} \sin x \lim_{x\to 0}\cot x = 0\times\infty$$

منها:

$$\lim_{x\to 0} \sin x\cot x = \lim_{x\to 0} \sin x \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

مثال:

احسب نهاية الدالة $f(x)=x\,e^{x}$ عندما X تسعى إلى ∞.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\ f(x)=\underset{x\to\infty}{Lim}\ xe^{-x}=0\times\infty$$

منها: $$\underset{x\to\infty}{Lim}\ f(x)=\underset{x\to\infty}{Lim}\ \frac{x}{e^{x}}=0$$

رابعًا: نستعمل نفس الطريقة السابقة لإزالة عدم التعيين $\infty-\infty$:

مثال:

احسب النهاية التالية: $\underset{x\to 1}{Lim}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^{2}-1}\right)$

الحل:

عدم التعيين $\underset{x\to 1}{Lim}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^{2}-1}\right)=\infty-\infty$

$$\underset{x\to 1}{Lim}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^{2}-1}\right)=\underset{x\to 1}{Lim}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right)$$

$$=\underset{x\to 1}{Lim}\ \frac{1}{x-1}\left(3-\frac{1}{(x+1)}\right)=\infty\times\frac{5}{2}=\infty$$

مبرهنة Theorem:

$$\underset{x\to a}{Lim}\frac{x^{n}-a^{n}}{x-a}=n\,a^{n-1}\quad:\qquad a\in R$$

وبشكل عام فإن:

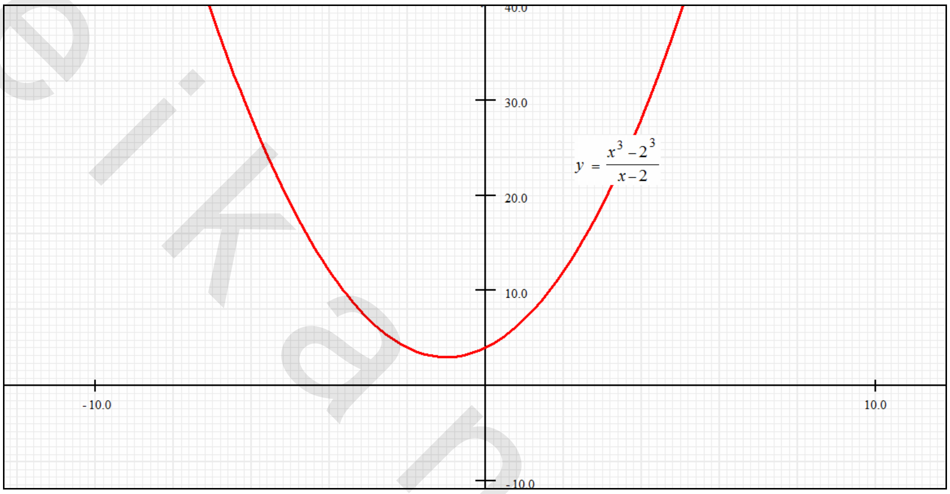
$$\underset{x\to a}{Lim}\frac{x^{n}-a^{n}}{x^{m}-a^{m}}=\frac{n}{m}a^{n-m}\quad:\qquad a\in R$$

مثال:

احسب النهاية التالية $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2}$ مع رسم الدالة.

الحل:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$$



مثال:

احسب النهاية التالية $\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 64}{x + 4}$.

الحل:

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 64}{x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{(x+4)(x^2 - 4x + 16)}{(x+4)} = \lim_{x \to -4} (x^2 - 4x + 16) = 48$$

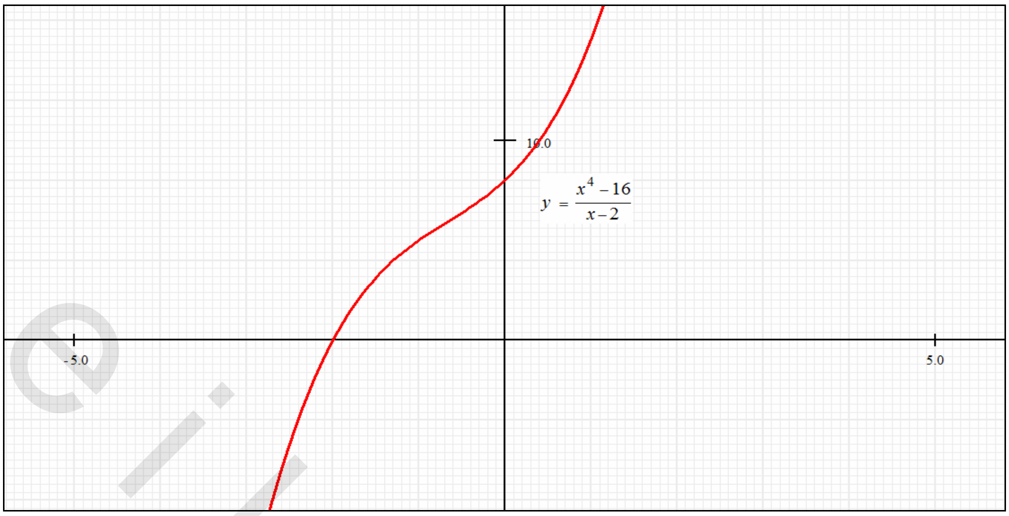
مثال:

احسب النهاية التالية $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$.

الحل:

الحل بالتعويض المباشر واستخدام بعض الطرق التحليلية:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 4 \times 2^{4-1} = 4 \times 2^3 = 32$$



مثال:

احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x^3-27}$.

الحل:

الحل بالتعويض المباشر واستخدام بعض الطرق التحليلية:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x^3-27} = \lim_{x\to 3} \frac{x^4-3^4}{x^3-3^3} = \frac{4}{3} \times 3^{4-3} = 4$$

مثال:

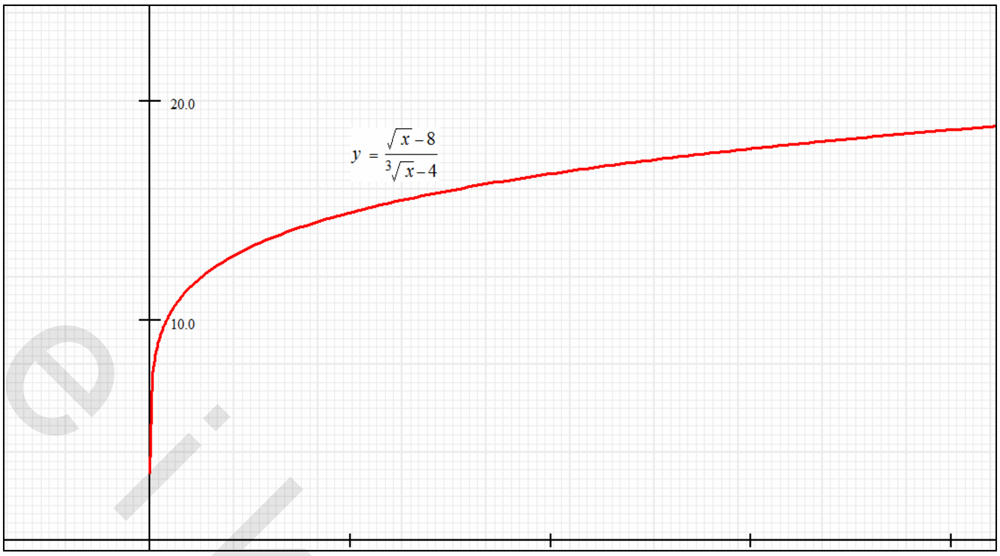
احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

الحل:

الحل بالتعويض المباشر واستخدام بعض الطرق التحليلية:

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{x\to 64} \frac{x^{\frac{1}{2}}-8}{x^{\frac{1}{3}}-4} = \lim_{x\to 64} \frac{x^{\frac{1}{2}}-(64)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}-(64)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{2} \Big/ \frac{1}{3} \times (64)^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{2} \times (64)^{\frac{1}{6}} = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$



مثال:

احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}$.

الحل:

الحل بالتعويض المباشر واستخدام بعض الطرق التحليلية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+27)^{\frac{1}{3}}-3}{x}$$

$$=\lim_{x\to 27}\frac{(x+27)^{\frac{1}{3}}-(27)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 27}\frac{(x+27)^{\frac{1}{3}}-(27)^{\frac{1}{3}}}{x+27-27}$$

$$=\lim_{x\to 27}\frac{(x+27)^{\frac{1}{3}}-(27)^{\frac{1}{3}}}{(x-27)+27}$$

$$=\frac{1}{3}\times(27)^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$$

نهاية بعض الدوال الشائعة: Limits some of Common functions

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx 2.718$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)=0$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$ 5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)=1$

نـظرية :

لنفرض أن $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

و $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n$

إذا كانت $R(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ ، فإن :

$$\lim_{x\to\pm\infty} R(x) = \begin{cases} \pm\infty & , \quad n>m \\ \frac{a_n}{b_n} & , \quad n=m \\ 0 & , \quad n<m \end{cases}$$

مثال:

أوجد النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+3x+6}{x^5+2x^2+9}$.

الحل:

بقسمة حدود الدالة بسط ومقام على x^5

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^5}}{1+\frac{2}{x^3}+\frac{9}{x^5}}$$

$$= \frac{0+0+0}{1+0+0} = 0$$

مثال:

أوجد نهاية الدالة: $f(x) = \frac{2x+3}{3x+2}$ عندما $x\to\infty$.

الحل:

بقسمة البسط والمقام على x نجد: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{3x+2}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}}{3+\dfrac{2}{x}}=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

مثال:

إذا كانت $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2}{3x-6}}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x\to\infty$.

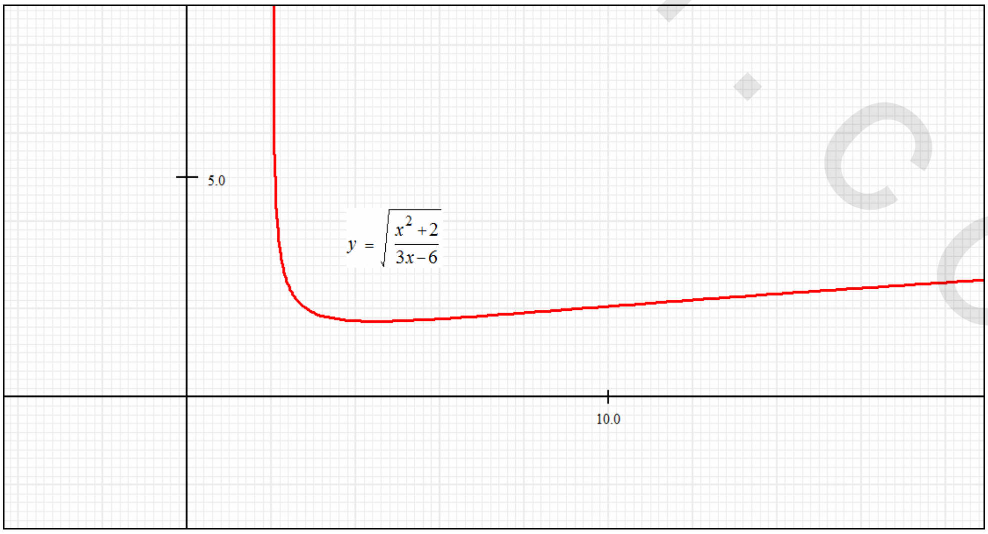
الحل:

نعوض عن $x=\infty$ منها نحصل على $\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+2}{3x-6}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+2}{3x-6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}\,/\,|x|}{(3x-6)\,/\,|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}\,/\sqrt{x^2}}{(3x-6)\,/\,x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+2/x^2}}{(3-6/x)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+2/x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}(3-6/x)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2/x^2)}}{\lim\limits_{x\to+\infty}(3-6/x)}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}1+2\lim\limits_{x\to+\infty}1/x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}3-6\lim\limits_{x\to+\infty}1/x}=\frac{\sqrt{1+2(0)}}{3-6(0)}=\frac{1}{3}$$



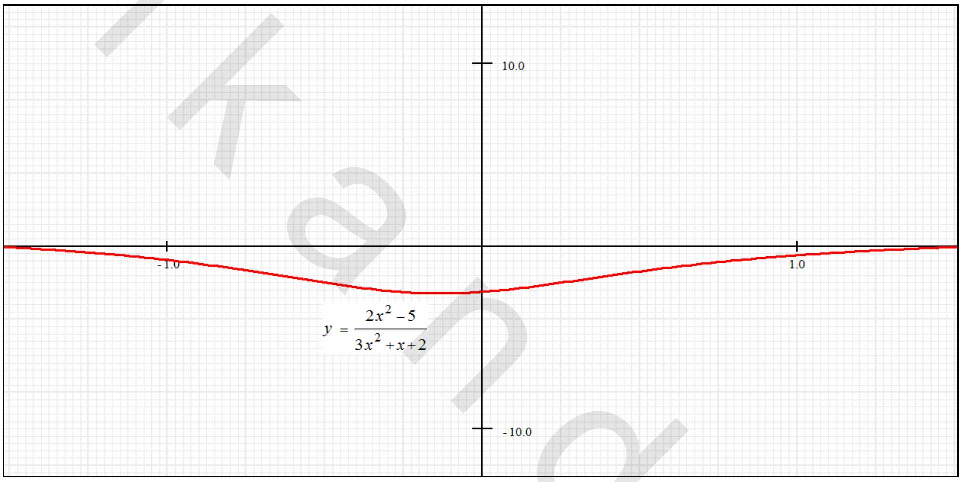
مثال:

إذا كانت $f(x)=\dfrac{2x^2-5}{3x^2+x+2}$, أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

بالقسمة على x^2 نحصل على:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\dfrac{5}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = \frac{2}{3}$$



مثال:

احسب نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{x}$ عندما x تؤول إلى الصفر.

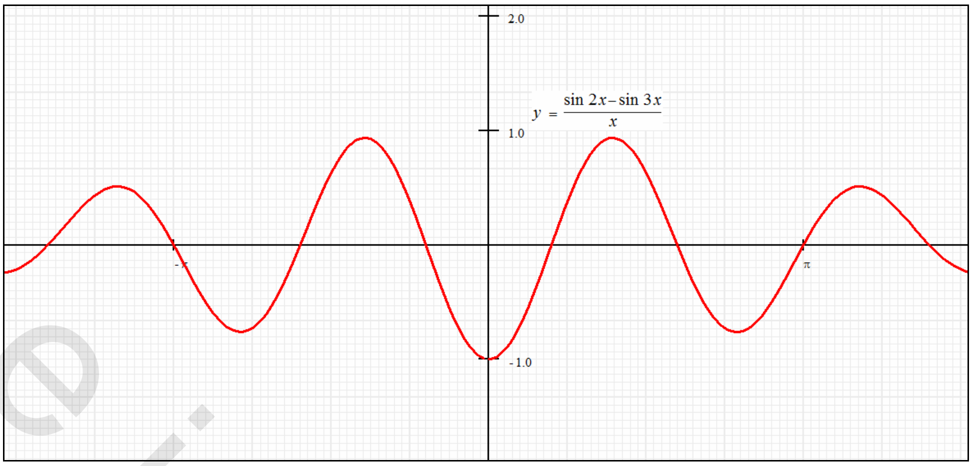
الحل:

نعلم أن: $\displaystyle Lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ وبالتالي:

$$Lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{x} = Lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} - Lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$= Lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} - Lim_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{3x}$$

$$= 2 - 3 = -1$$



مثال:

احسب قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$.

الحل:

نقسم على 2^x ونوجد النهاية عندما $x \to \infty$ على الشكل التالي:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^x}}{1 + \frac{1}{2^x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

مثال:

احسب نهاية الدالة $f(x) = \frac{\tan 3x}{x}$ عندما $x \to 0$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{x} = \frac{0}{0}$ لذلك نعوض عن $\tan 3x$ بمتساوية فنحصل على:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\sin x}{3x} \times \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 3 \times 1 = 3$$

الدوال المتصلة (المستمرة) :Continuous of Functions

يقال عن الدالة أنها متصلة (مستمرة) في المجال $[a,b]$ إذا كان بالإمكان رسمها بدون انقطاع في النطاق $a \le x \le b$ "أي لا يوجد أي نوع من الانقطاع في المنحنى"

يعرف اتصال (استمرار) الدالة رياضيًا كالآتي:

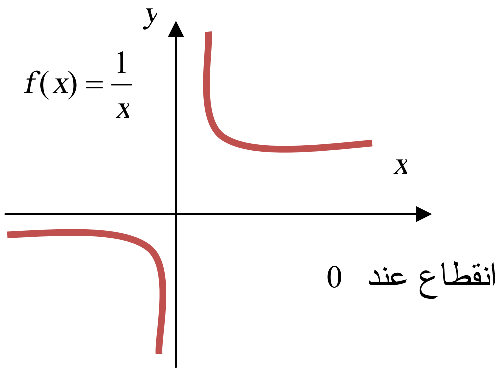
يقال عن الدالة f أنها متصلة (مستمرة) عند $x=a$ إذا توفرت في الدالة الشروط التالية:

شروط الاتصال: Continuous Condition

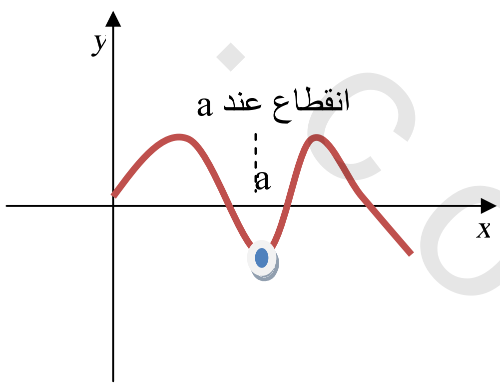
1. الدالة معرفة عند $x=a$ "قيمة الدالة عند a، $f(a)$ معرف " أي موجودة ومحدودة.
2. توجد نهاية للدالة عند $x \to a$ أي أن $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجودة.
3. إذا كانت للدالة قيمة عند $f(a)$ فإنه يجب أن تساوي نهاية الدالة عند نفس النقطة $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

أما إذا كانت لم تتحقق الشروط السابقة "أو إحداها" فلن تكون الدالة متصلة (مستمرة).

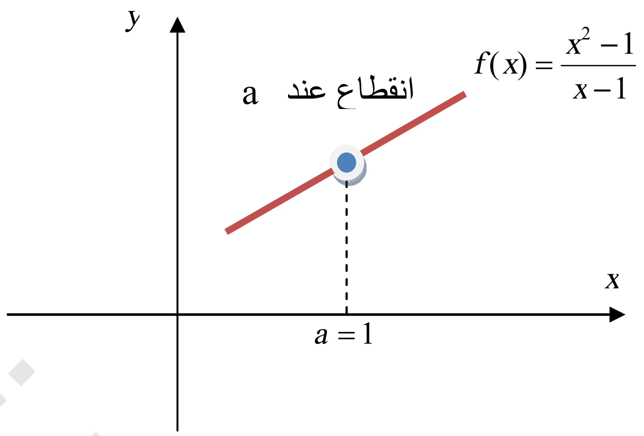
بعض أشكال الدوال غير المتصلة (المستمرة) منفصلة(منقطعة) عند نقطة أو أكثر



الحالة (1)



الحالة (2)



الحالة (3)

نلاحظ:

أنه بالنسبة للحالة رقم (1) مثلاً يمكن جعل هذه الدالة متصلة عند $x=1$ ،إذا تم تعريف الدالة عند 1 بالآتي $f(1)=\frac{1}{1}=1$ ، وبهذا تصبح نهاية الدالة عند $x\to 1$ تساوي قيمة الدالة عند $x=1$. $\lim\limits_{x\to 1} f(1) = f(1)$

في الحالة رقم (3) لا يمكن جعل الدالة متصلة عند نقطة الانقطاع، وذلك لعدم وجود نهاية للدالة عند نقطة الانقطاع.

أما في حالة رقم (2) يمكن أن تصبح الدالة مستمرة عند $x=a$ ، إذا أمكن تعريف قيمة للدالة $f(a)$ بحيث تصبح $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

مثال:

ناقش استمرار الدالة: $x \neq 3$, $f(x) = \frac{2x^2-5x-3}{x-3}$ مع رسم الدالة.

الحل:

$$\because \quad f(x) = \frac{(2x+1)(x-3)}{x-3} = 2x+1 \quad , \quad x \neq 3$$

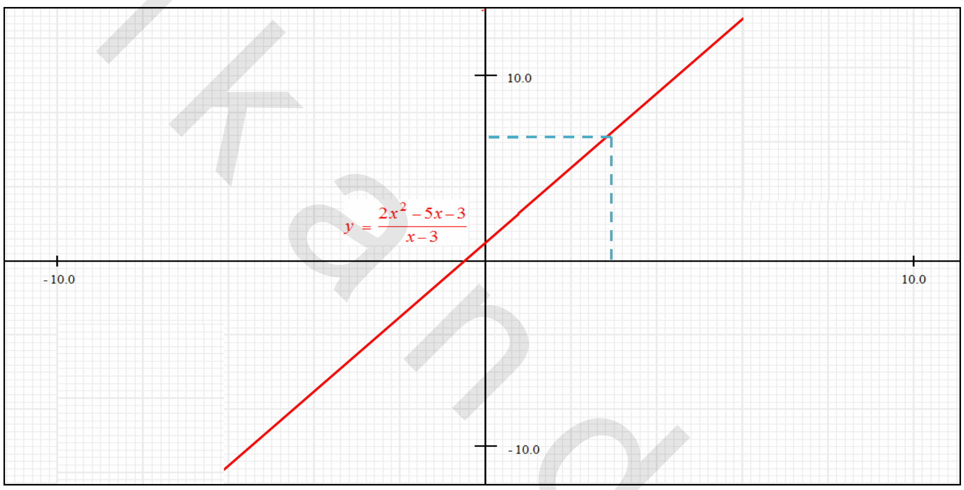
الآن نطبق شروط الاستمرارية:

الدالة غير معرفة عند $x=3$ أي أن $f(3)$ غير معرفة و

$$\lim_{x\to3}\frac{2x^2-5x-3}{x-3}=\lim_{x\to3}(2x+1)=7$$

وبالتالي لو وضعنا $f(3)=7$ تصبح الدالة مستمرة ومعرفة كما في الشكل التالي:

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}2x^2-5x-3 & ,\ x\neq3\\ 7 & ,\ x=3\end{cases}$$



مثال:

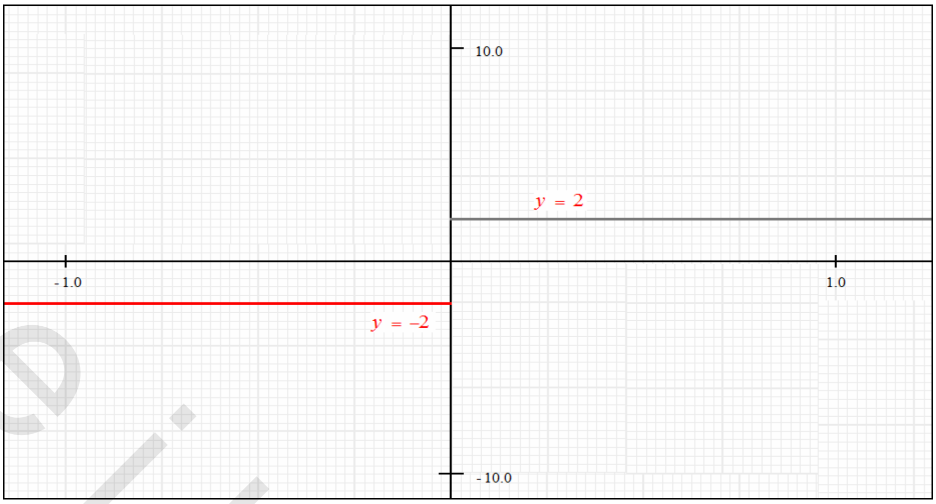
ناقش استمرارية الدالة $f(x)=\begin{cases}-2 & ,\quad x<0\\ 2 & ,\quad x\geq0\end{cases}$ مع رسم الدالة .

الحل:

$$f(0)=2$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)\neq\lim_{x\to0^-}f(x)$$

أي أن $\lim_{x\to0}f(x)$ غير موجودة، إذا الدالة غير مستمرة، لعدم توفر الشرطين الأول والثالث.



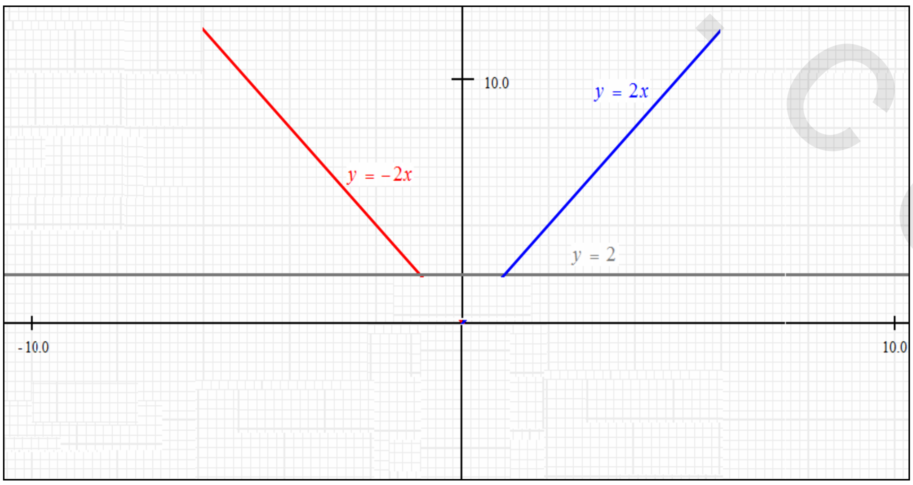
مثال:

ناقش اتصال الدالة $-1 \le x \le 1$
$$f(x) = \begin{cases} -2x & , \quad x < 1 \\ 2 & , \quad |x| \le 1 \\ 2x & , \quad x > 1 \end{cases}$$
مع رسم الدالة.

الحل:

حيث أن $\underset{x\to1^-}{Lim} f(x) = \underset{x\to1^-}{Lim} 2 = 2$ و $\underset{x\to1^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to1^+}{Lim} 2x = 2$ بذلك فإن النهاية معرفة وتساوي 2

وكذلك قيمة الدالة عند $f(1) = \underset{x\to1}{Lim} f(x) = 2$ هذا يعنى أن الدالة متصلة عند النقطة $x = 1$

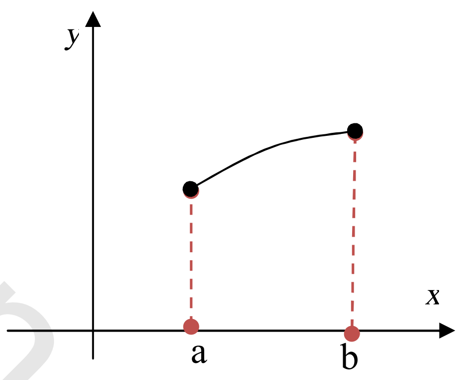


استمرار الدالة f خلال فترة محددة: Continuous Function on Bounded interval

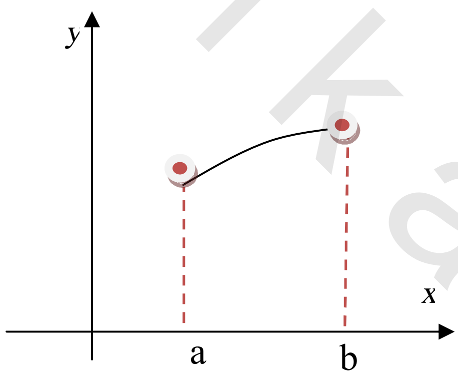
a. يقال للدالة f أنها دالة مستمرة في فترة مفتوحة، (a,b) إذا كانت الدالة مستمرة عند كل قيم x التي تنتمي إلى (a,b).

b. يقال للدالة f أنها دالة مسمرة في فترة مغلقة $[a,b]$ إذا كانت متصلة في (a,b) وكانت:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$



دالة مستمرة فى [a , b]



دالة مستمرة فى (a , b)

مثال:

ناقش استمرارية الدالة الآتية: $\quad x \neq 4 \quad , \quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$.

الحل:

$$x^2-9 \geq 0 \;\rightarrow\; x^2 \geq 9 \;\rightarrow\; |x| \geq 3 \;\rightarrow\; -3 \geq x \geq 3$$

البسط $\quad x \in (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$

المقام $\quad x-4 \neq 0 \rightarrow x \in (-\infty,-4) \cup (4,\infty)$

$$\therefore\; x \in (-\infty,-3) \cup [3,4) \cup (4,\infty)$$

وبهذا تكون الدالة مستمرة في هذا النطاق المبين فقط.

مبرهنة Theorem:

إذا كانت الدالتان $f\,,g$ مستمرتين فإن :

دول الجمع $f+g$ ، والطرح $(f-g)\,,(g-f)$ ، والضرب $(f*g)$ ، والقسمة $\left(\frac{f}{g}\right),\left(\frac{g}{f}\right)$ عدا قيم $f(x)\,,g(x)$ التي تجعل المقام صفرًا ، دوال مستمرة .

ملاحظة:

1. كل دوال كثيرة الحدود مستمرة وكل دالة قياسية مستمرة أيضًا عند كل نقطة بحيث لا يساوي مقامها صفرًا على خط الأعداد الحقيقية.
2. كل دالة مثلثيه مستمرة عند كل نقطة تكون عندها الدالة معرفة.

مثال:

ناقش استمرار الدالة: $f(x) = \dfrac{x^5+x^3-4x^2+2}{x^2-5x+6}$ مع رسم الدالة.

الحل:

من الواضح أن $f(x)$ دالة قياسية.

إذا $f(x)$ دالة مستمرة لكل الأعداد الحقيقية، عدا $x^2-5x+6=0$ ، عدا النقاط التي تحقق

$(x-3)(x-2)=0$ وهذا يعني $x=3 \quad , x=2$

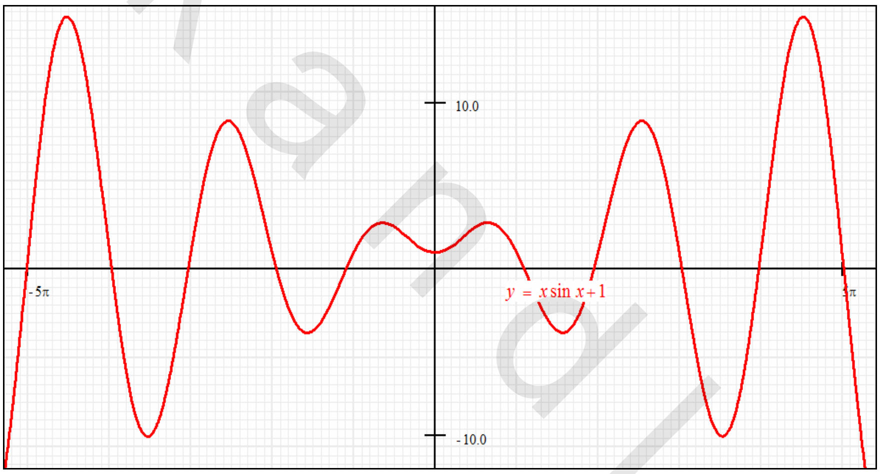
إذا $f(x)$ مستمرة على $R-\{2,3\}$.

مثال:

اثبت أن الدالة $f(x)=x\sin x+1$ دالة مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

نعلم أن $g(x)=x$ دالة مستمرة عند أي عدد حقيقي، وكذلك الدالة $h(x)=\sin x$ دالة مستمرة على نطاقها وهو مجموعة كل الأعداد الحقيقية، وكذلك الدالة $L(x)=1$ دالة ثابتة، وهي دالة مستمرة عند أي عدد حقيقي $f(x)=g(x)\times h(x)+L(x)$ أي أن $f(x)$ هي حاصل ضرب دالتين متصلتين، مضافاً إلى ذلك دالة مستمرة إذا $f(x)$ دالة مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية.



مثال:

إذا كانت $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ارسم مخطط الدالة f واثبت أنها متصلة على الفترة $[-2,2]$

الحل:

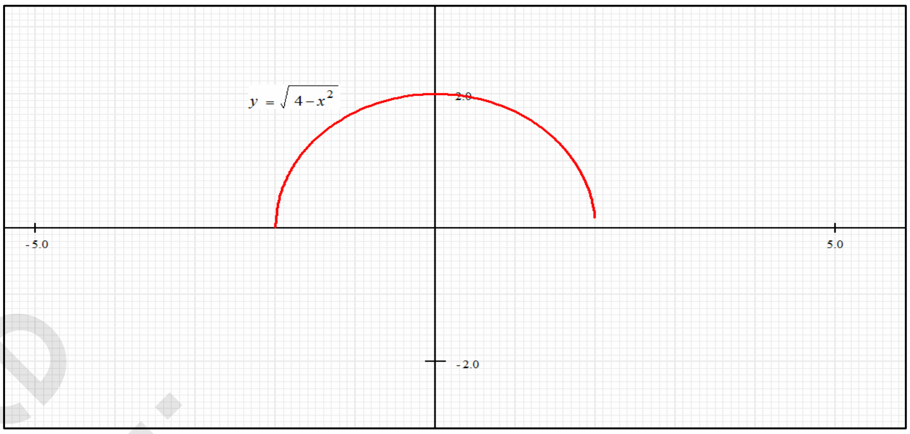
نفرض أن c أي عدد بحيث

$$-2\le c\le 2 \quad \lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-c^2}=f(c)$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2}=0=f(-2)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0=f(2) \quad \text{و}$$

إذا الدالة f مستمرة على الفترة $[-2,2]$.



مثال:

اوجد الفترات التي تكون الدالة $f(x) = \dfrac{x^5 + x^3 + 4x^2 + 2}{x^2 - 5x + 6}$ عندها مستمرة .

الحل:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(x-3) = 0$$
$$\therefore \quad x = 2 \quad or \quad x = 3$$

إذا f مستمرة عند كل النقط ما عدا $x = 3$, $x = 2$

إذا f مستمرة عند $(-\infty, 2) \cup (2,3) \cup (3, +\infty)$

IR

$(-\infty, 2) \cup (2,3) \cup (3, +\infty)$

مثال:

إذا كانت
$$f(x) = \begin{cases} a & if \quad x = -3 \\ \dfrac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} & if \quad -3 < x < 3 \\ b & if \quad x = 3 \end{cases}$$

اوجد b , a بحيث تكون الدالة f مستمرة على $[-3,3]$.

الحل:

بما أن f دالة مستمرة على $[-3,3]$ نوجد النهاية من اليسار و اليمين

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = f(-3) = a$$
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = f(3) = b$$

$$\lim_{x \to -3^{+}} f(x) = \lim_{x \to -3^{+}} \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} \times \frac{4 + \sqrt{x^2 + 7}}{4 + \sqrt{x^2 + 7}}$$

$$= \lim_{x \to -3^{+}} \frac{(9 - x^2)(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{16 - x^2 + 7} = \lim_{x \to -3^{+}} \frac{(9 - x^2)(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{(9 - x^2)}$$

$$= 4 + \sqrt{9 + 7} = 4 + 4 = 8$$

$$\therefore \quad a = 8$$

$$\text{and} \quad \lim_{x \to 3^{-}} f(x) = \lim_{x \to 3^{-}} \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} \times \frac{4 + \sqrt{x^2 + 7}}{4 + \sqrt{x^2 + 7}}$$

$$= \lim_{x \to 3^{-}} \frac{(9 - x^2)(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{16 - x^2 + 7} = \lim_{x \to 3^{-}} \frac{(9 - x^2)(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{(9 - x^2)}$$

$$= 4 + \sqrt{9 + 7} = 4 + 4 = 8$$

$$\therefore \quad b = 8$$

مثال:

ادرس استمرارية الدالة $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin x}$

الحل:

لدينا: $D_f = \left\{ x \in R \,:\, x \neq \left(-\frac{1}{2} \pm (n-1)\pi \right) \;;\; n \in N \right\}$

$$\lim_{x \to y} f(x) = \lim_{x \to y} \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{1 + \sin y} \quad ; \quad y \in D_f$$

إذا الدالة مستمرة في الفترات المفتوحة: $\left(\left(-\frac{2}{3} + 2n \right) \pi \;;\; \left(-\frac{1}{2} + 2n \right) \pi \right) \;; n \in N$

$$\left(\left(-\frac{1}{2} + 2n \right) \pi \;;\; \left(\frac{3}{2} - 2n \right) \pi \right) \;; n \in N$$

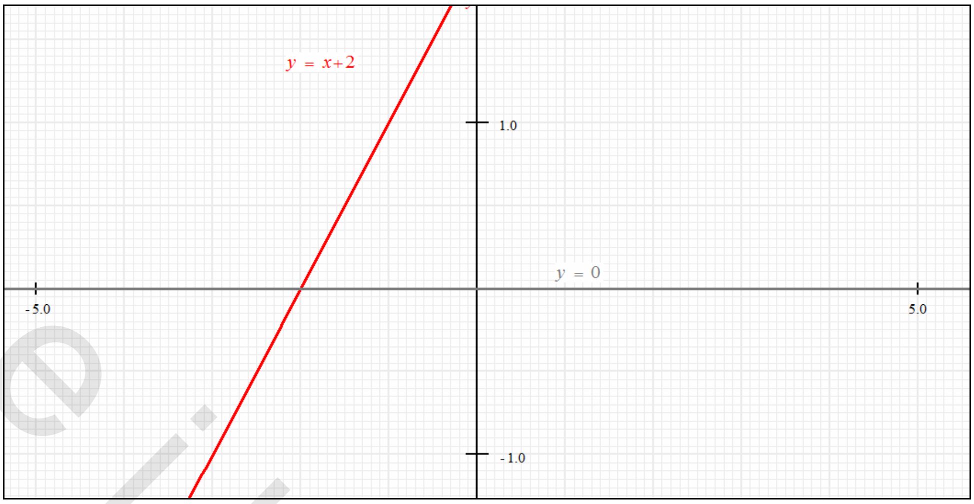
مثال:

إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ بين إذا كانت الدالة مستمرة أم لا.

الحل:

واضح أن $f(0) = 0$ بينما $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

بذلك تكون: $f(0) \neq \lim_{x \to 0} f(x)$ بذلك فإن الدالة غير مستمرة.



مثال:

إذا كانت $f(x)$ هي الجدر النوني فإننا نحصل على.

الحل:

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

وعليه إذا كانت $g(x)$ دالة مستمرة فإن $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$

بذلك فإن الدالة مستمرة ولكن بشرط إن الجدر النوني موجود.

أمثلة محلولة

أوجد نـهاية الدوال التالية:

1-إذا كانت $f(x) = \left(\dfrac{4x^2 + x}{2x}\right)^5$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \leftarrow 1$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 1$ نحصل على:

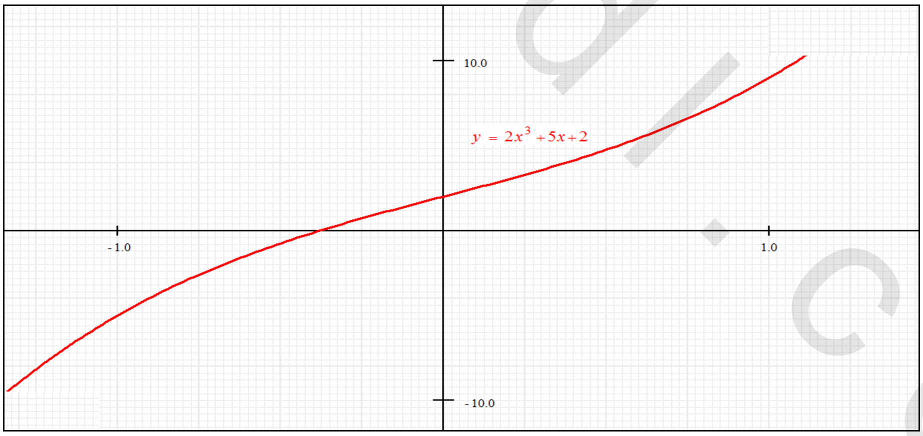
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{4x^2 + x}{2x}\right)^5 = \left(\frac{4(1)^2 + 1}{2(1)}\right)^5 == \left(\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{3125}{16}$$

2- إذا كانت $f(x) = (2x^3 + 5x + 2)$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \leftarrow 0$ موضحاً شكل الدالة.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 0$ نحصل على:

$$\lim_{x \to 0} (2x^2 + 5x + 2) = 2(0)^3 + 5(0) + 2 = 2$$



3- إذا كانت $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{x + 1}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \leftarrow 1$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 1$ نحصل على:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2x}{x+1} = \frac{3(1)^2+2(1)}{(1)+1} = \frac{5}{2}$$

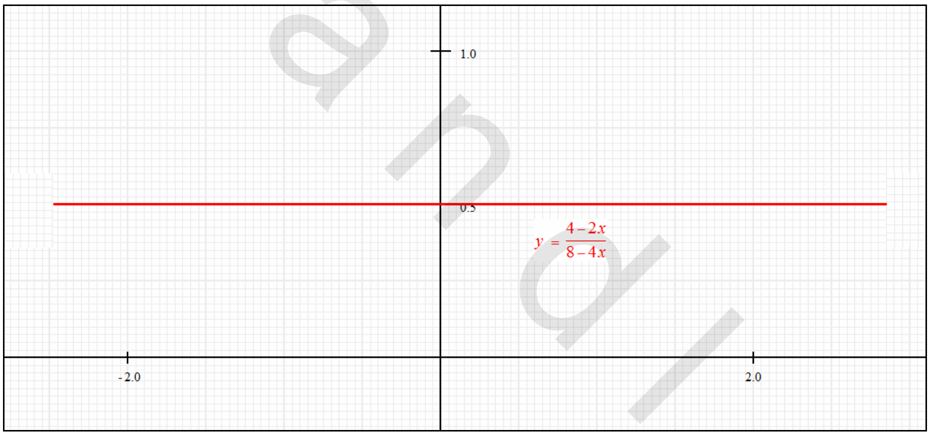
4- إذا كانت $f(x) = \frac{4-2x}{8-4x}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \leftarrow 2$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على: $\lim_{x\to 2} \frac{4-2x}{8-4x} = \frac{0}{0}$ نحصل على حالة عدم التعيين.

نحصل على: باستخدام الطرق التحليلية

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-2x}{8-4x} = \lim_{x\to 2} \frac{2(2-x)}{4(2-x)} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



5- إذا كانت $f(x)_{x\to 1} = \frac{x^3-1}{x-1}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \leftarrow 1$.

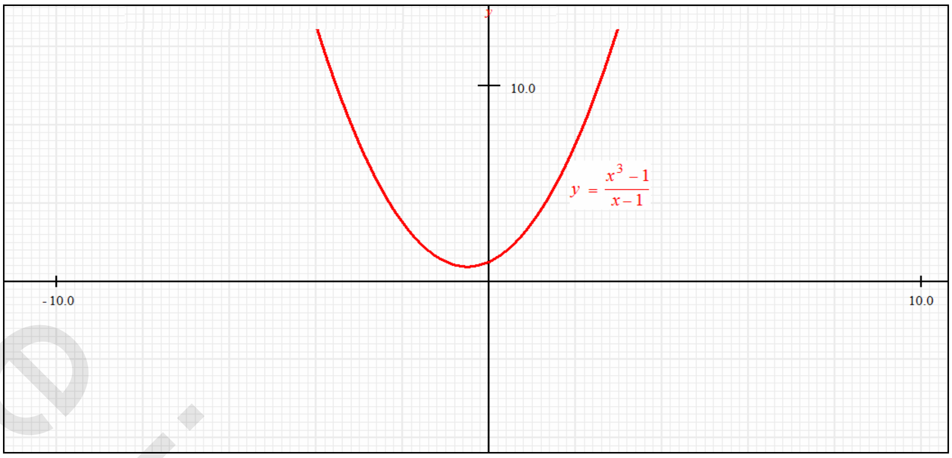
الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 1$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{0}{0}$$ عدم التعيين

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x^2+x+1) = 3$$



6–إذا كانت $f(x) = \frac{u^2 + 2u + 1}{u + 1}$، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to -1$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = -1$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\lim_{u \to -1} \frac{u^2 + 2u + 1}{u + 1} = \frac{0}{0}$$ عدم التعيين

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

$$\lim_{u \to -1} \frac{u^2 + 2u + 1}{u + 1} = \lim_{u \to -1} \frac{(u + 1)^2}{u + 1} = \lim_{u \to -1} (u + 1) = -1 + 1 = 0$$

7– إذا كانت $f(y) = \frac{1 - y}{1 - \sqrt[3]{y}}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $y \to 1$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $y = 1$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\lim_{y \to 1} \frac{1 - y}{1 - \sqrt[3]{y}} = \frac{0}{0}$$ عدم التعيين

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

$$\lim_{y \to 1} \frac{1 - y}{1 - \sqrt[3]{y}} = \lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{\sqrt[3]{y} - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{(\sqrt[3]{y} - 1)\left((\sqrt[3]{y})^2 + \sqrt[3]{y} + 1\right)}{\sqrt[3]{y} - 1}$$

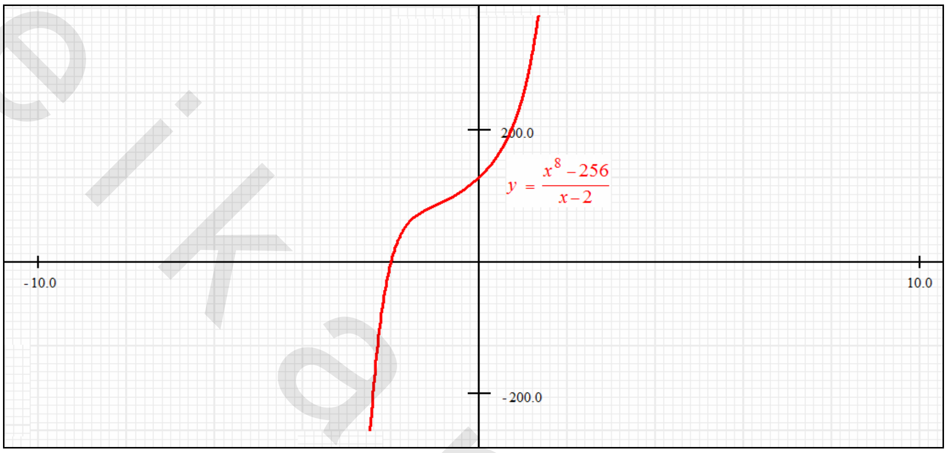
$$= \lim_{y \to 1} \left[(\sqrt[3]{y})^2 + \sqrt[3]{y} + 1\right] = 1 + 1 + 1 = 3$$

8- أوجد نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{x^8-256}{x-2}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x\to 2$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية نحصل على:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^8-256}{x-2}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^8-2^8}{x-2}=8\times 2^7=8\times 128=1024$$



9- أوجد نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{2x^3-128}{x^2-16}$ عندما $x\to 4$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية نحصل على:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^3-128}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x^3-2^3)}{x^2-16}$$

$$=2\lim_{x\to 4}\frac{x^3-4^3}{x^2-4^2}=2\times\frac{3}{2}\times 4=12$$

10- أوجد نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt[4]{x+81}-3}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x\to 4$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية نحصل على:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt[4]{x+81}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+8)^{\frac{1}{3}}-8^{\frac{1}{3}}}{(x+81)^{\frac{1}{4}}-81^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x+8)^{\frac{1}{3}}-8^{\frac{1}{3}}}{(x+8)-8}\times\frac{(x+81)-81}{(x+81)^{\frac{1}{4}}-81^{\frac{1}{4}}}$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{3}}{1}\times 8^{\frac{1}{3}-1}\right)\times\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\times 81^{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{64}}\left(4\times\sqrt[4]{81^3}\right)=\frac{1}{4}\times 4\times 27=27$$

11- أوجد نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x\to 81$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية نحصل على:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{x^{\frac{1}{2}}-81^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}-81^{\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}81^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$=2\times 3=6$$

12- إذا كانت $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x\to 2$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x=2$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}\qquad \text{عدم التعيين}$$

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-2x+1)}{(x-2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 2}(x-1)=2-1=1$$

13- إذا كانت $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to 3$.

الحل:

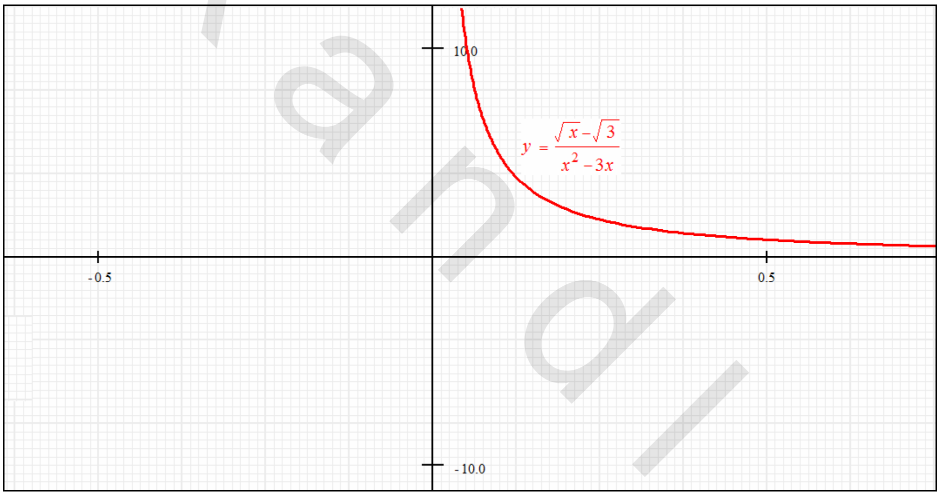
بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 3$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x}=\frac{0}{0}$$ عدم التعيين

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{3(\sqrt{3}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6\sqrt{3}}$$



14- أوجد نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x \to 3$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 3$ نحصل على:

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=\frac{1}{0}=+\infty$$

$+\infty$ تشير إلى السلوك، وليس رقما على خط الأعداد.

15- إذا كانت $\underset{x\to 0}{f(x)} = \dfrac{2x^4 + 4x^2}{x^4 + 3x^2}$ أوجد نهاية الدالة عندما $x \leftarrow 0$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $x = 0$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^4 + 4x^2}{x^4 + 3x^2} = \frac{0}{0}$$

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^4 + 4x^2}{x^4 + 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(2x^2 + 4)}{x^2(x^2 + 3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + 4}{x^2 + 3} = \frac{4}{3}$$

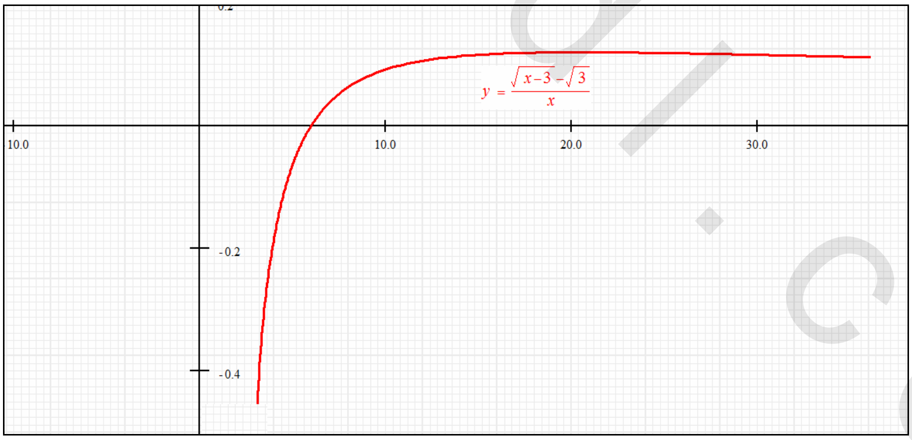
16- إذا كانت $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to 0$.

الحل:

بالضرب في مرافق البسط $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$ نحصل على

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} \times \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+3-3}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$



17- إذا كانت $f(h) = h\left(1 + \dfrac{1}{h}\right)$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $h \to 0$.

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن $h = 0$ نحصل على حالة عدم التعيين

$$\lim_{h\to 0} h\left(1+\frac{1}{h}\right) = 0\times(1+\infty) = 0\times\infty$$ عدم التعيين

باستخدام الطرق التحليلية نحصل على:

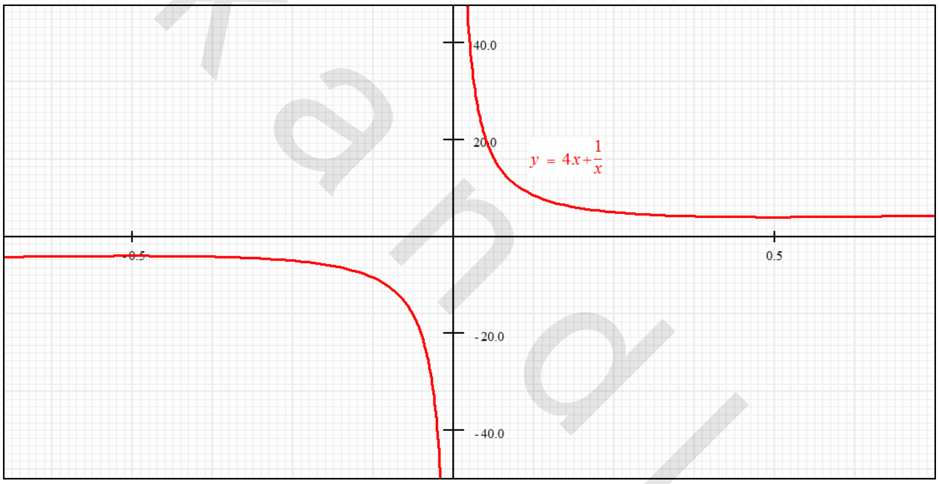
$$\lim_{h\to 0} h\left(1+\frac{1}{h}\right) = \lim_{h\to 0} h\left(\frac{h+1}{h}\right) = \lim_{h\to 0}(h+1) = 1$$

18- إذا كانت $f(x) = \left(4x+\frac{1}{x}\right)$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to 0$

الحل:

نعوض عن $x = 0$ منها نحصل على

$$\lim_{x\to 0}\left(4x+\frac{1}{x}\right) = \infty + 0 = \infty$$



19- احسب نهاية الدالة $f(x) = \frac{\tan 3x}{x}$ عندما $x \to 0$.

الحل:

نستخدم خواص الدوال المثلثية لان التعويض المباشر يعطي كمية غير معرفة كالتالي:

نعلم بأن الدالة $\tan 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$ أي أن:

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\tan 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\times\frac{1}{\cos 3x}$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x} = 3\times 1 = 1$$

20- احسب نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$ عندما $x \to 1$.

الحل:

بالضرب في مرافق المقام $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ نحصل على:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{-(1-x)}\times\sqrt{x}-1$$

$$=\lim_{x\to 1}-\frac{\sin(1-x)}{(1-x)}\times\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}-1)=0$$

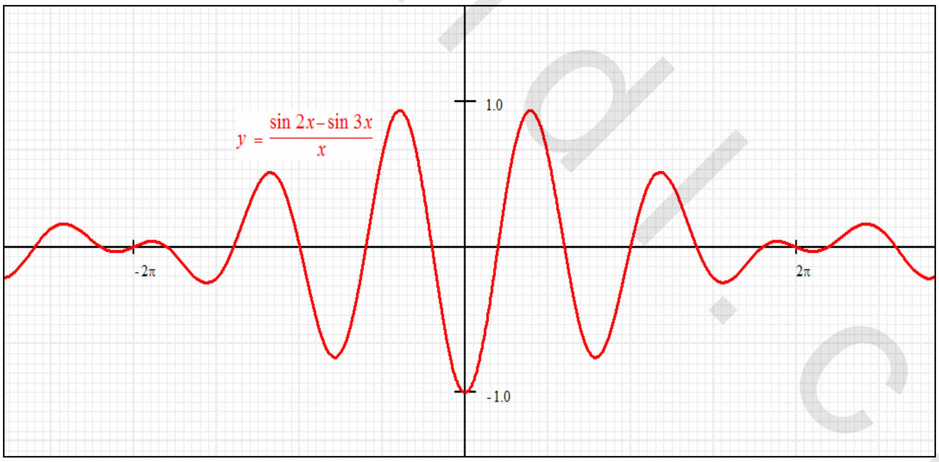
21- احسب نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{x}$ عندما $x \to 0$.

الحل:

نستخدم خواص الدوال المثلثية لان التعويض المباشر يعطي كمية غير معرفة كالتالي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}-\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=2-3=-1$$



22- احسب نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$ عندما $x \to 0$.

الحل:

نستخدم خواص الدوال المثلثية لان التعويض المباشر يعطي كمية غير معرفة كالتالي:

نعلم بأن الدالة $\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$ أي أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\times\frac{1}{\sin 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\times\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3\sin 3x} = 2\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

23- احسب نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{5x+\tan 3x}{7x-\sin 5x}$ عندما $x \to 0$.

الحل:

نستخدم خواص الدوال المثلثية لان التعويض المباشر يعطي كمية غير معرفة كالتالي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+\tan 3x}{7x-\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{5+\dfrac{3\tan 3x}{3x}}{7-\dfrac{5\sin 5x}{5x}} = \frac{5+3}{7-5} = 4$$

24- احسب نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{\tan 2x-\sin 2x}{x^3}$ عندما $x \to 0$.

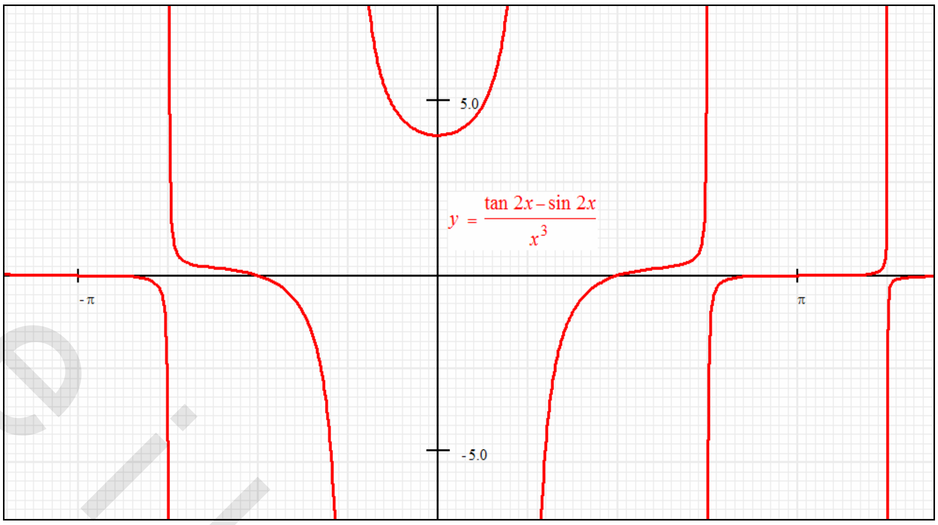
الحل:

نستخدم خواص الدوال المثلثية لان التعويض المباشر يعطي كمية غير معرفة كالتالي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-\sin 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}-\sin 2x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\times\frac{\dfrac{1}{\cos 2x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\times\frac{1-\cos 2x}{x^2}\times\frac{1}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\times\frac{2\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{\cos 2x} = 2\times 2\times 1 = 4$$



25- إذا كانت $f(x) = \dfrac{3x+5}{6x-8}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

بالقسمة على x نحصل على $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+5}{6x-8} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x/x + 5/x}{6x/x - 8/x}$

نعوض عن $x = \infty$ يكون لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+5}{6x-8} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

26- إذا كانت $f(x) = \dfrac{4x^2 - x}{2x^3-5}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

بالقسمة على x^3 والتعويض عن $x = \infty$ نحصل على:

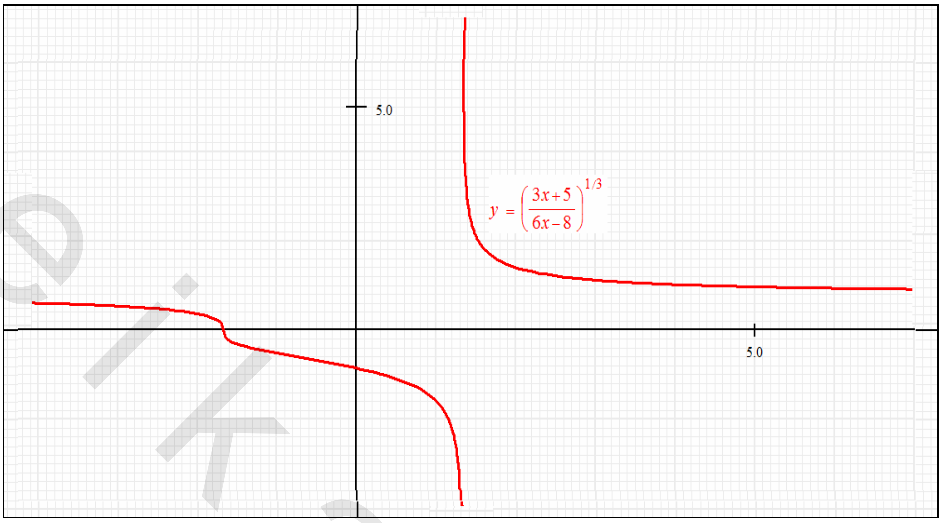
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^3-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2/x^3 - x/x^3}{2x^3/x^x - 5/x^3} = \frac{0}{2} = 0$$

27- إذا كانت $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3x+5}{6x-8}}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

بالقسمة على x والتعويض عن $x = \infty$ نحصل على:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}} = \sqrt[3]{\lim_{x \to +\infty} \frac{3x/x+5/x}{6x/x-8/x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$



28- أوجد نهاية الدالة $f(x)=\dfrac{3x^3-4x+2}{7x^3+5}$ عندما $x \to \infty$.

الحل:

بالقسمة على x^3 والتعويض عن $x = \infty$ نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x+2}{7x^3+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x^3}} = \frac{3}{7}$$

29- احسب نهاية الدالة $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ عندما $x \to \infty$.

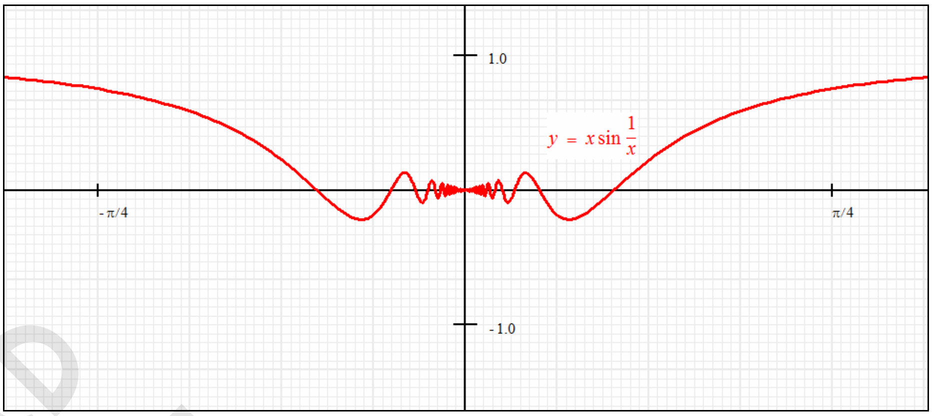
الحل:

نستخدم خواص الدوال المثلثية لان التعويض المباشر يعطي كمية غير معرفة كالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

نفرض متغير أخر $t=\dfrac{1}{x}$ منها نجد أن $x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0$ بذلك يكون لدينا:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$



30- إذا كانت $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-2}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية نحصل على:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-2} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-2}$$

$$= e \times 1 = e$$

31- إذا كانت $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^{x}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية نحصل على:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^{x+4-4}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^{x+4} \times \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^{-4}$$

$$= e$$

32- إذا كانت $f(x) = \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{x+4}$ ، أوجد نهاية الدالة عندما $x \to \infty$.

الحل:

من خواص الدوال الآسية وبفرض $x = 5t$ نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{5t+4}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{5}\times\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4}$$

$$=e^{5}\times 1=e^{5}$$

33- أوجد نهاية الدالة $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\csc x}{x^{2}+1}$.

الحل:

من خواص الدوال المثلثية يكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\csc x}{x^{2}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)}{x^{2}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sin x}}{x^{2}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

34- أوجد نهاية الدالة المعرفة بالعلاقة: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x}$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x}=\frac{0}{0}$$

بضرب النهاية في المقدار $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ يكون لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x}=$$

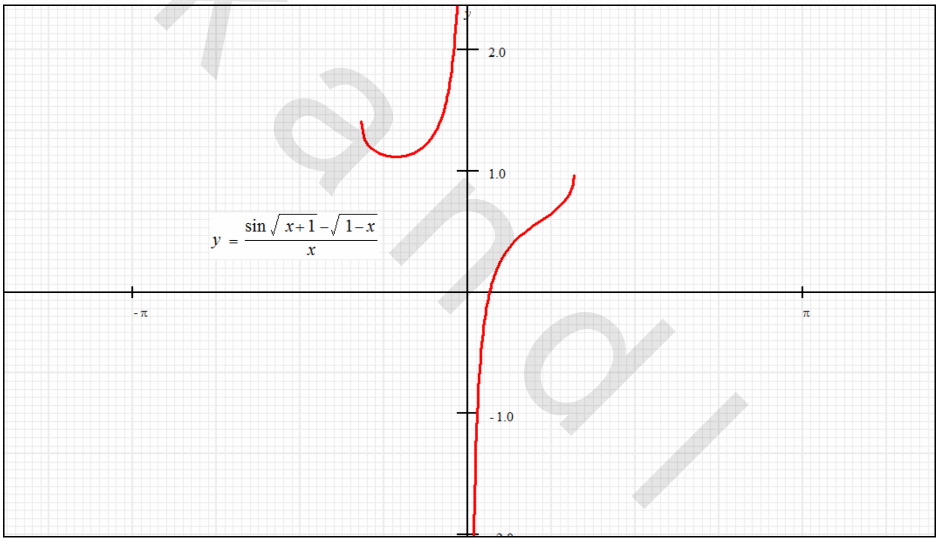
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x}\times\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$=1\times\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

وليجاد نهاية المقدار $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{x}$ نضرب في المرافق على الشكل التالي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{2}=1$$



35- أوجد نهاية الدوال التالية عندما $x\to 0$:

$f(x)=\cosh x$ $\qquad$ $f(x)=\sinh x$

$f(x)=\coth x$ $\qquad$ $f(x)=\tanh x$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\sinh x=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{1-1}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\cosh x=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\tanh x = \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{0}{2} = 0$$
$$\lim_{x\to 0}\coth x = \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{0} = \infty$$

36- أوجد نهاية الدالة:

$1-\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x}{x}$ $\qquad 2-\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\cosh x}{x}$

الحل:

نستخدم خواص الدوال الزائدية:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x}{x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{2x} - \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{2x}$$
$$= \infty - \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{2xe^{x}} = \infty - 0 = \infty$$

وكذلك بنفس الطريقة نحصل على:

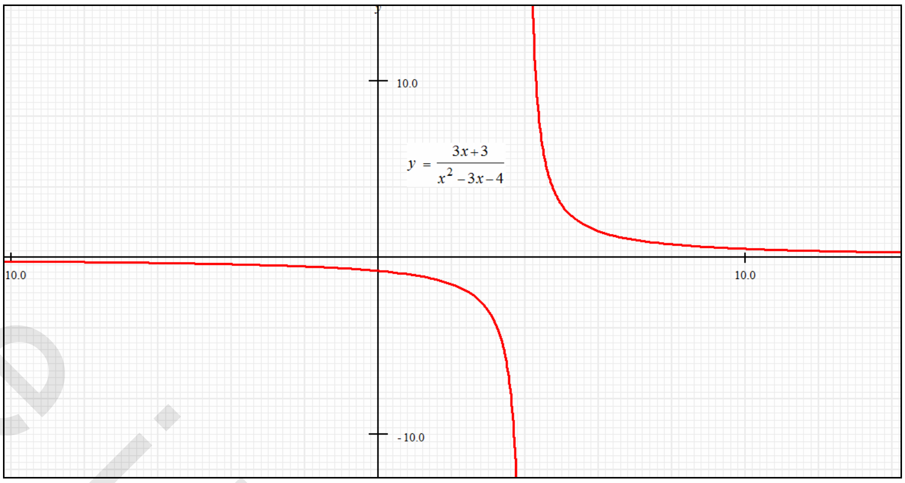
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cosh x}{x} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{2x} + \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{2x}$$
$$= \infty + \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{2xe^{x}} = \infty + 0 = \infty$$

37- أدرس استمرارية الدالة التالية $f(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-3x-4}$

الحل:

$$f(x) = \frac{3x+3}{(x-1)(x-4)}$$

الدالة غير مستمرة عند $x=1$, $x=4$ فتكون مستمرة عند جميع R ماعدا هاتين النقطتين.



38- ادرس استمرارية الدالة عند $x=2$ حيث أنَّ:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \quad x\neq 2 \\ 3 & , \quad x=2 \end{cases}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 0}(x+2)=4$$

الدالة غير مستمرة عند النقطة 2

39- أوجد الفترات التي تكون فيها الدالة مستمرة $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}\ .\ \sqrt{25-x^2}}{x-4}$.

الحل:

نوجد قيمة x .

$x^2-9\geq 0$ منها $-3\geq x\geq 3$

$25-x^2\geq 0$ منها $5\geq x\geq -5$

بذلك نجد إن: $x-4\neq 0$ وهذا يؤدي إلى $R-\{4\}$

يتم إيجاده هو جميع الفترات التي تكون فيها الدالة مستمرة والآن يتم إيجاد تقاطع هذه الفترة لتكون النتيجة $[-5\ ,\ -3]\cup[3\ ,\ 4)\cup(4\ ,\ 5]$

هذه هي الفترات التي تكون عندما الدالة مستمرة.

40- ناقش استمراري الدالة $f(x)=|x-3|$ عند $x=3$.

الحل:

نعلم بأن:

$$f(x)=|x-3|=\begin{cases} x-3 & , \quad x-3\ge 0 \\ -x+3 & , x-3<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x-3 & , \quad x\ge 3 \\ -x+3 & , \quad x<3 \end{cases}$$

وبالتالي يكون:

1. $f(3)=3-3=0$

2. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)=3-3=0$

3. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x-3)=-3+3=0$

إذا: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=0=f(3)$ الدالة مستمرة عند $x=3$ وعند كل نقاط IR.

41- ناقش استمرارية الدالة $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , \quad x\ne 0 \\ 1 & , \quad x=0 \end{cases}$.

الحل:

ندرس خواص الدالة:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , \quad x\ne 0 \\ 1 & , \quad x=0 \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{-x}{x} & , \quad x<0 \\ \dfrac{x}{x} & , \quad x>0 \\ 1 & \quad x=0 \end{cases}=\begin{cases} -1 & , \quad x<0 \\ 1 & , \quad x>0 \\ 1 & , \quad x=0 \end{cases}$$

وبالتالي يكون:

1. $f(0)=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

3. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$

الدالة غير مستمرة عند $x=0$.

42- إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على الأعداد الحقيقية على الشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & , \quad x<1 \\ bx^3+b & , \quad 1\le x\le 2 \\ x & , \quad x<1 \end{cases}$$

أوجد قيمة b,a لتكن $f(x)$ دالة مستمرة.

الحل:

نناقش استمرارية الدالة عند $x=1$ وعند $x=2$ أي نحسب النهايات من اليمين ومن اليسار عند هاتين القيمتين:

1- عندما $x=1$ على النحو التالي:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(bx^3+b)=2b \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1$$

لكي تكون $f(x)$ مستمرة عند $x=1$ يجب أن تكون النهايتان السابقتان متساويتين أي أن $2b=1$ منها تكون قيمة $b=\dfrac{1}{2}$.

2- عندما $x=2$ على النحو التالي:

واضح أن: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4+a$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=9b$

لكي تكون $f(x)$ مستمرة عند $x=2$ يجب أن تكون النهايتان السابقتان متساويتين أي أن $a=\dfrac{1}{2}$.

Summary

- We say that the number L is the limit of $f(x)$ as x approaches to a and write $\lim_{x\to a} f(x) = L$ If for all $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x - a| < \delta$$

- Some common limits :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} a^{n-m} \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

- If $f(x)$ is defined near a for $x > a$, and that as x gets close to a when ever $f(x)$ gets close to L , is the right hand limit of $f(x)$ as x approaches a and we write : $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$
- If $f(x)$ is defined near a for $x < a$, and that as x gets close to a when ever $f(x)$ gets close to L , then we say that L is the left hand limit of $f(x)$ as x approaches a and we write:
  $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

- Theorem:

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ exists if and only if the following conditions hold:

$I - \lim_{x\to a^+} f(x) = L$ *exists*

$II - \lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *exists*

$III - \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *exists*

- The function $f(x)$ is continuous at the point $x = a$ if the following conditions hold:

exists $I - f(a)$

exists $II - \lim_{x\to a} f(x)$

$III - \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

- The function $f(x)$ is continuous on an open interval (a, b) if the function $f(x)$ is continuous at any point of (a, b).
- The function $f(x)$ is continuous on a closed interval $[a, b]$ if the function $f(x)$ is continuous on (a, b) and the function is defined at a, b such that :

- Theorem:

If $f(x)$ is and $g(x)$ are two continuous functions at $x = a$,then:

1. $(Cf)(x) = Cf(x)$ is continuous function at $x = a$.
2. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ is continuous function at $x = a$.
3. $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ is continuous function at $x = a$.
4. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad g(x) \neq 0$ is continuous function at $x = a$.

****

تمارين على الفصل الثالث

س1: أوجد نهاية الدوال التالية أن وجدت ☞

1: $a-\lim\limits_{x\to4^-}\frac{1}{(x-4)^3}$ ، $b-\lim\limits_{x\to4^+}\frac{1}{(x-4)^3}$ ، $c-\lim\limits_{x\to4}\frac{1}{(x-4)^3}$

2: $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}$ 3: $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{1}{(x-4)^3}$

4: $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{1}{(x-4)^3}$ 5: $\lim\limits_{x\to3}(3x+4\sqrt{x})$

س2: أوجد قيم كل من النهايات التالية مع رسم بينها:☞

1: $b-\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x^2-27)}{x-3}$ $a-\lim\limits_{x\to3}\frac{(x^2-27)}{x-3}$

2: $\lim\limits_{x\to4}(x^3-4x^2+2x-6)$

3: $\lim\limits_{x\to4}\frac{1}{(x-4)^3}$ 4: $\lim\limits_{x\to0}\frac{(a+x)^3-a^3}{x}$

5: $\lim\limits_{x\to4}\frac{(1/\sqrt{x})-\frac{1}{2}}{x-4}$

س3: أوجد قيم النهايات التالية مستخدماً نظريات النهايات:☞

1: $\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x^3-3x+1)}{x}$ 2: $\lim\limits_{x\to9}(x^9-3x+4\sqrt{x})$

3: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ 4: $\lim\limits_{x\to81}\frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3}$

5: $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(2x+3)^{-3}-1}{(3x+4)^5-1}$ 6: $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x+\tan3x}{7x-\sin5x}$

7: $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^2-1}{x}$ 8: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x}$

9: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}$ 10: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt[4]{x+81}-3}$

11: $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{x-9}$

12: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^3-128}{x^2-16}$

13: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(2x+3)^{-3}-1}{(3x+4)^5-1}$

14: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}$

س4: أوجد قيم النهايات التالية مستخدماً القواعد السابقة في حالة $x\to\infty$:

1: $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

2: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x-2}$

3: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^3+x+1}$

4: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\tan 2x-\sin 2x}{x^3}$

5: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x+4}$

6: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

7: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+4}\right)^{x}$

8: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x^2+5x}\right)$

9: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2\sqrt{x}}{4x^2-5x-2}$

10: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-2x+5}{x^3+2x^2+7x+3}$

11: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{\sqrt{(3x+2)^5}}\right)$

12: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x-9}{3x^2-3x+7}$

13: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+10}\right)$

14: $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}$

15: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$

س5: أوجد قيم النهايات الآتية:

1: $f(x)=\begin{cases}2x-5 & , \quad x>3\\ 1 & , \quad x<3\end{cases}$ عندما $x\to 3$

2: $f(x)=\begin{cases}x^2 & , \quad x\ge -1\\ 2x+3 & , \quad x<-1\end{cases}$ عندما $x\to -1$

س6: ناقش استمرارية الدوال التالية عند النقطة المبينة:

1: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1} & , \quad x\ne 1\\ 1 & , \quad x=1\end{cases}$ عند $x=1$

2: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & , \quad x\neq 3\\ 6 & , \quad x=3\end{cases}$ عند $x=3$

3: $f(x)=\begin{cases}2x & , \quad x\geq 2\\ 6-x & , \quad x<2\end{cases}$ عند $x=2$

4: $f(x)=\begin{cases}-1 & , \quad x<0\\ 0 & , \quad x=0\\ 1 & , \quad x>0\end{cases}$ عند $x=0$

س7: أوجد قيم النهايات الآتية ثم ادرس اتصال(استمرار) الدوال عند النقط الموضحة أمام كل منها:☞

1: $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x-1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}}$ حيث $x=0, \quad x=1$

2: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x^{-3}-9}{x^2-4x+3}$ حيث $x=3, \quad x=4$

3: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x-6}-\sqrt{x}}$ حيث $x=4, \quad x=2$

4: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ حيث $x=1, \quad x=-3$

****