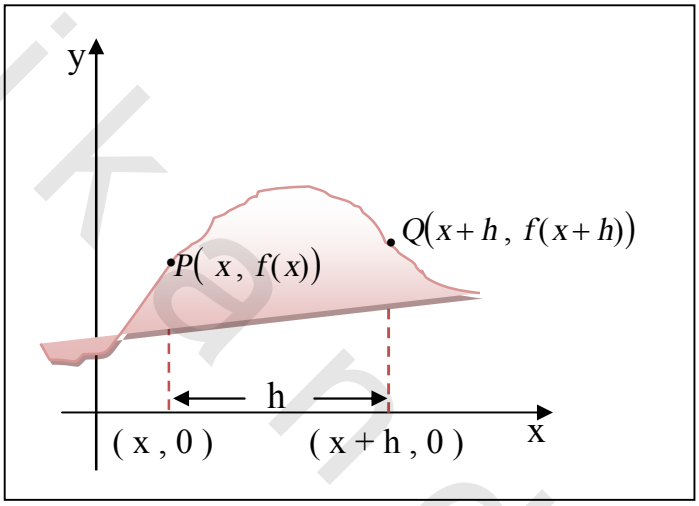
The Derivatives المشتقة

ليكن لدينا منحني الدالة $f(x)$ ، ونأخذ النقطتين $(x,\ f(x))$ و $Q[\,x+h\ ,\ f(x+h)\,]$ وعندها يكون h البعد بين النقطتين $(x,0)$ و $(x+h,0)$ على المحور X كما في الشكل التالي:



عندها يكون ميل الخط المستقيم $\overline{PQ}$:

$$m_{pQ}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

وعندما $h\to 0$ فإن النقطة Q تقترب من النقطة P ، ويصبح المستقيم PQ مماسًا لمنحنى الدالة f عند النقطة $P(x,\ f(x))$ ، ويكون ميله هو النهاية:

$$m_{pQ}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=L$$

حيث L عدد حقيقي محدود وحيث رمزنا لقيمة النهاية بالرمز $f'(x)$.

تسمى $f'(x)$ بالمشتقة الأولى للدالة f عند النقطة $(x,\ f(x))$ وللمشتقة تفسير هندسي هام. فالشكل البياني لدالة نمطية f مخطط كما في الشكل التالي:

لتكن $P(x,\ f(x))\ ,\ Q(u\ ,\ f(u))$ نقطتين على منحنى الدالة f ، وميل الخط PQ المار

بالنقطتين Q و P والمستنتج من إحداثيات هاتين النقطتين هو: $\frac{(f(u)-f(x))}{(u-x)}$ إذا كانت الدالة f مستمرة عند x.

فإنه عندما تقترب u من x ، تتحرك Q على المنحنى ناحية P ، والخط المستقيم PQ يدور حول P ، وتقترب من المماس للمنحنى عند P.

لنفترض أنه في نفس الوقت يقترب ميل PQ من ميل المماس، ويمكن جعله يقترب منه كما نريد باختيار u قريبة قربًا كافيًا من x ، لكن ذلك مجرد عملية نهائية ، ويمكن أن نقول:

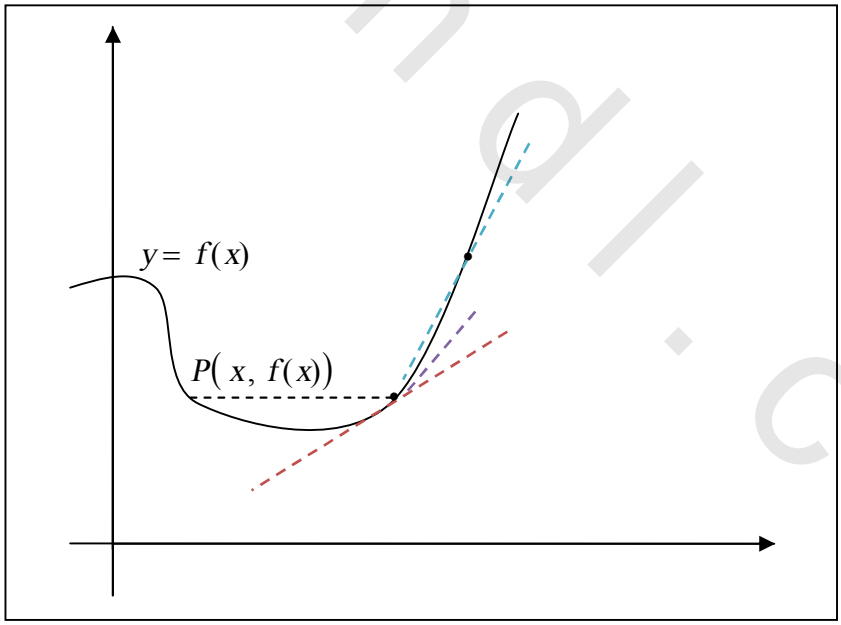
ميل المماس عند P يساوى (ميل PQ) $\lim_{u\to x}$ ؛ إي أن:

$$\lim_{h\to 0} PQ = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

حيث h تعبر عن المسافة الأفقية بين Q و P بشرط وجود هذه النهاية

(يجب أن نأخذ في الاعتبار قيم u الأقل من و الأكبر من x)

أي أن مشتقة الدالة f عند x هي ميل المماس للمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$.



إن للمشتقة أيضا معنى فيزيائي هام، فهي تعيين معدل تغير الدالة في أي موضع بالنسبة لمتغيرها كما أنها تمثل القيمة العددية لميل المماس لمنحني الدالة في الموضع المحدد بـــ X .

obeikandl.com

مثال:

إذا كانت $f(x)=x^2$. فاوجد $f'(a)$ لأي a باستخدام التعريف السابقة.

الحل:

$$f'(x)=\lim_{h\to a}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to a}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

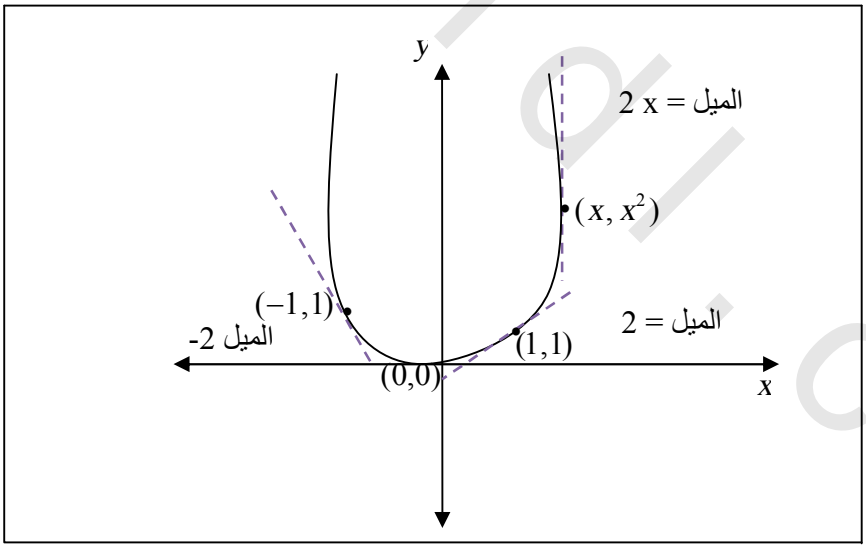
$$=\lim_{h\to a}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to a}\frac{h(2x+h)}{h}$$

$$=2x$$

$$\lim_{x\to a}2x=2a$$

في هذا المثال أثبتنا أن الدالة $f(x)=x^2$ لها المشتقة $f'(x)=2x$. هذا هو ميل المماس للمنحنى y عند النقطة (x,x^2) في منحنى الدالة $y=x^2$ ، مثلا يكون ميل المماس عند النقطة $(1,1)$ هو $f'(1)=2$.

وميل المماس عند النقطة $(2,4)$ هو $f'(2)=4$ وعندما تزداد x تتحرك النقطة (x,x^2) لأعلى على طول النصف الأيمن للمنحنى والميل $2x$ للمماس يزداد.



عند نقطة الأصل $x=0$ تكون $f'(0)=0$ ، و ميل المماس عند النقطة $(-1,1)$ هو $f'(-1)=-2$ و للنقط على النصف الأيسر للمنحنى $(x<0)$ يكون ميل المماس عند كل نقطة سالباً.

obeikandl.com

تعريف:

إذا كانت f دالة معرفة على فترة مفتوحة تحتوي العدد x ؛فإن المشتقة الأولى للدالة f عند النقطة $P=(x, f(x))$ تعرف بالنهاية:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ بشرط وجود النهاية .

ملاحظات عامة:

1. المشتقة الأولى للدالة f عند النقطة $(x=a)$ هي النهاية:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

وتمثل ميل المستقيم المماس لمنحني الدالة f عند النقطة $(a , f(a))$.

2. نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة a إذا كانت النهاية التالية موجودة:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

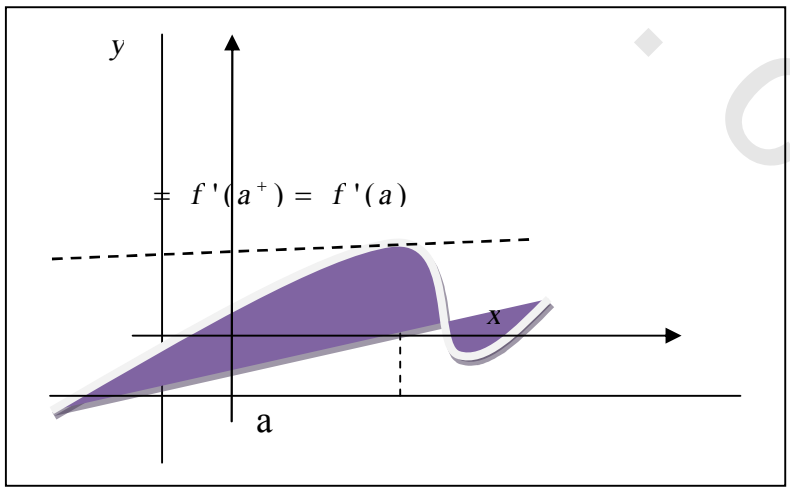
وهذا يعني أن النهايتان:

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad ، \quad f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

معرفتان ومتساويتان.

وتسمى $f'(a^-)$ بالمشتقة اليسرى عند العدد (a)

$f'(a^+)$ بالمشتقة اليمنى عند العدد (a)



مثال:

أوجد $g'(x)$ إذا كانت:

$$g(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, & x<1 \\ -x^2+x, & x\geq 1 \end{cases}$$

الحل:

$$g'(1^-)=\lim_{u\to 1^-}\frac{g(u)-g(1)}{u-1}=\lim_{u\to 1^-}\frac{(u^2-3u+2)-0}{u-1}$$

$$=\lim_{u\to 1^-}\frac{(u-2)(u-1)}{u-1}=\lim_{u\to 1^-}(u-2)=-1$$

$$g'(1^+)=\lim_{u\to 1^+}\frac{g(u)-g(1)}{u-1}=\lim_{u\to 1^+}\frac{(-u^2+u)-0}{u-1}$$

$$=\lim_{u\to 1^+}\frac{-u(u-1)}{u-1}=\lim_{u\to 1^+}(-u)=-1$$

إذن $g'(1^+)=g'(1^-)$ وبالتالي فإن $g'(1)$ موجودة وتساوي (-1)

مثال:

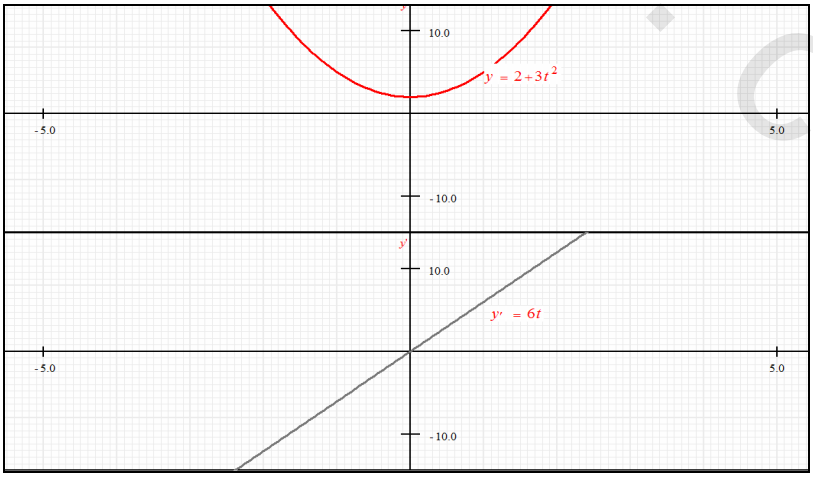
أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(t)=2+3t^2$ مع رسم الدالة ومشتقاتها.

الحل:

$$S'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(x)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2+3(t+\Delta t)^2-2-3t^2}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2+3t^2+6t\Delta t+3(\Delta t)^2-2-3t^2}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{6t\Delta t+3(\Delta t)^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}=(6t+3\Delta t)=6t$$



3. نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b)، إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في $a < c < b$.
4. نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المغلقة $[a,b]$، إذا كانت قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة ومعرفة عند الطرفين أي أن:

$$\lim_{h \to a^+} f(x) = \lim_{h \to a^+} f(a)$$

$$\lim_{h \to b^-} f(x) = \lim_{h \to b^-} f(b)$$

5. إذا كانت $y = f(x)$ فإنه يرمز للمشتقة الأولى بالرموز التالية:

$$f'(x) = D_x[f(x)] = D_x y = y'$$
$$= \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

علمًا بأنه:

بوضع $u = x + h$ فإنه عندما $h \to 0$ فإن $u \to x$ وإن:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

فتصبح المعادلة:

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

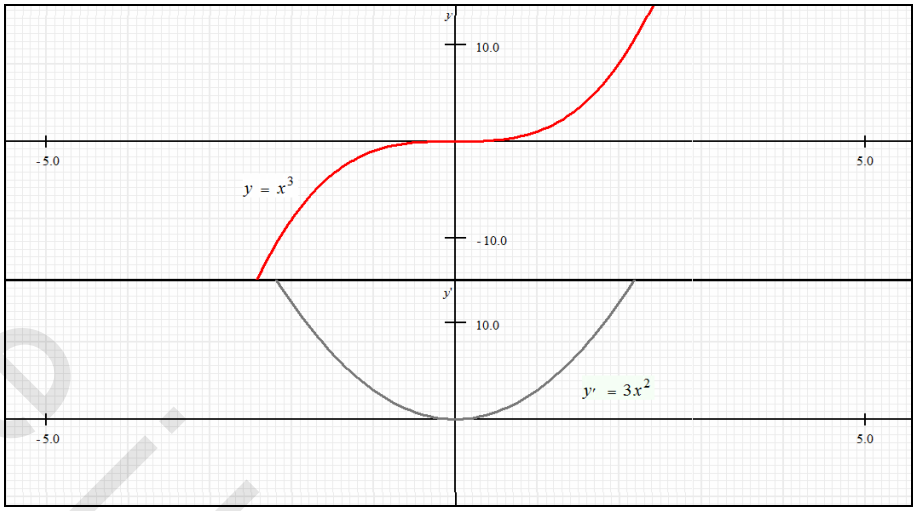
مثال:

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة: $f(x) = x^3$ مع رسم الدالة ومشتقاتها.

الحل:

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$
$$f(x+h) - f(x) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 = h(3x^2 + 3xh^1 + h^2)$$
$$\therefore \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$
$$\therefore \quad f'(x) = 3x^2$$

obeikandl.com



مثال:

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة: $f(x)=\sqrt{3x-7}$ مع رسم الدالة ومشتقاتها.

الحل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)-7}-\sqrt{3x-7}}{h}$$

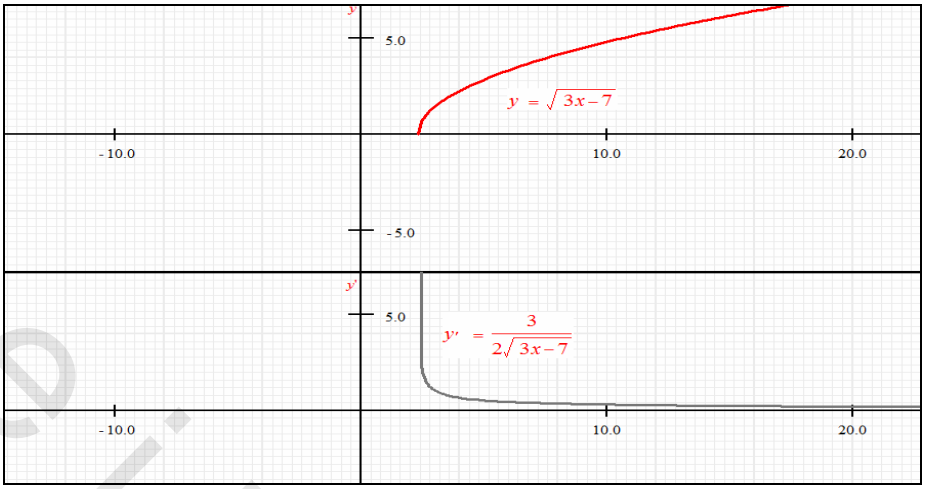
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)-7}-\sqrt{3x-7}}{h}\times\frac{\sqrt{3(x+h)-7}+\sqrt{3x-7}}{\sqrt{3(x+h)-7}+\sqrt{3x-7}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-7-(3x-7)}{h\left(\sqrt{3(x+h)-7}+\sqrt{3x-7}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x+3h-7-3x+7}{h\left(\sqrt{3(x+h)-7}+\sqrt{3x-7}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h\left(\sqrt{3x+3h-7}+\sqrt{3x-7}\right)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3x-7}+\sqrt{3x-7}}=\frac{3}{2\sqrt{3x-7}}$$



مثال:

اثبت أن الدالة $f(x)=|x|$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة التي فاصلتها $x=0$.

الحل:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}\ \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\frac{h}{h}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

$\therefore$ المشتقة غير موجودة عند $x=0$

مثال:

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة:

$$f(x)=2x^3-5x^2+x$$.

الحل:

$$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

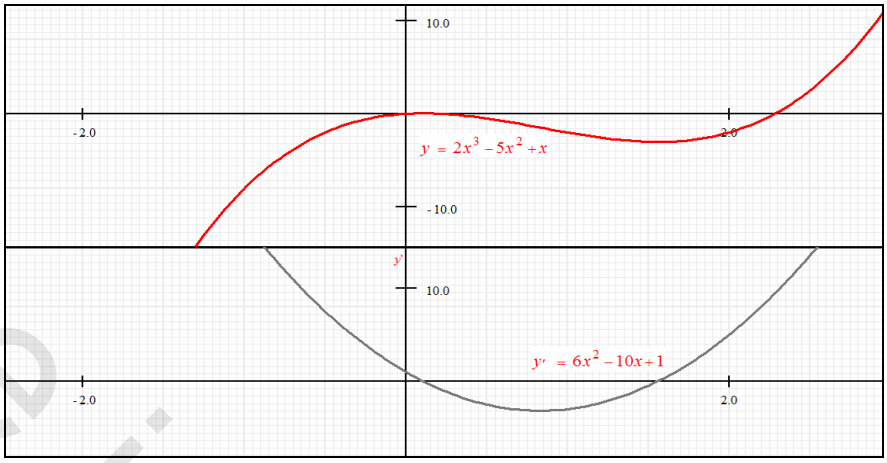
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3-5(x+h)^2+(x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3-5x^2-10xh-5h^2+x+h-2x^3+5x^2-x}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x^2+6xh+2h^2-10x-5h+1)}{h}$$

$$\therefore\ f'(x)=6x^2-10x+1$$

openkanal.com



مثال:

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة: $f(x) = -6x^2 + x + 5$

الحل:

$$\therefore \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) + 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6x^2 - 12x\Delta x - 6\Delta x^2 + x + \Delta x + 5 + 6x^2 - x - 5}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-12x - 6\Delta x + 1)}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad f'(x) = -12x + 1$$

قواعد الاشتقاق: Derivative Rules

المشتقة الأولى للدوال الجبرية: First Derivative for Algebraic Functions

نلاحظ إنه إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند X_1 فإن الدالة f مستمرة عند X_1 والعكس غير صحيح.

1- إذا كانت الدالة f دالة ثابتة $f(x)=k$ حيث k مقدار ثابت فإن: $f'(x)=0$

مثلا:

$$f(x)=2^6$$

$$f'(x)=0$$

2- إذا كانت $f(x)=x^n$ حيث n عدد صحيح موجب فإن: $f'(x)=nx^{n-1}$

مثلا:

$$f(x)=x^{18}$$

$$f'(x)=18\,x^{17}$$

3- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق فإن الدالة $k\,f$ تكون قابلة للاشتقاق أيضًا حيث:

$$\frac{d}{dx}k\,f=k\frac{d\,f}{dx}$$

مثال:

إذا كانت $f(x)=9x^2$ ***فإن*** $f'(x)$

$$\frac{d}{dx}(9x^2)=9\frac{dx^2}{dx}$$

$$f'(x)=9(2x)=18x$$

4- إذا كانت f,g دالتين قابلتين للاشتقاق فإن: الدالة $f+g$ تكون قابلة للاشتقاق أيضًا

$$\frac{d}{dx}(f+g)(x)=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

مثلا:

إذا كانت $f(x)=3x^5+x^7+x^2$ ، فإن: $f'(x)=15\,x^4+7\,x^6+2\,x$

5- إذا كانت f,g دالتين قابلتين للاشتقاق فإن الدالة $f\pm g$ تكون قابلة للاشتقاق أيضًا.

$$\frac{d}{dx}(f-g)(x)=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

obeikandi.com

مثلا:

إذا كانت $f(x) = x^5 - x^2$

فإن: $f'(x) = 5x^4 - 2x$

إذا كانت $f_1 , f_2 , f_3 , ... , f_n$ **دوال قابلة للاشتقاق:**

فإن الدالة $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n$ التي تمثل مجموع أو فرق هذه الدوال تكون قابلة للاشتقاق منها نجد أن:

$$\frac{d}{dx}\left(f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n\right)(x) = \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x) + ... + \frac{d}{dx} f_n(x)$$

مثلا:

إذا كانت $g(t) = 11 - 3t^2 + 6t^4$ فإن: $g'(t) = -6t + 24t^3$

6- قانون الجداء (الضرب):

إذا كانت f , g دالتين قابلتين للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x) = f(x).\frac{d}{dx} g(x) + g(x).\frac{d}{dx} f(x)$$

مثلا:

إذا كانت $f = (x^2 - 5x)$, $g = (x^3 - 10)$ فإن:

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x) = \frac{d}{dx}\left[(x^2 - 5x).(x^3 - 10)\right]$$

$$= (x^2 - 5x)(3x^2) + (x^3 - 10)(2x - 5)$$

$$= 3x^4 - 15x^3 + 2x^4 - 5x^3 - 20x + 50$$

$$= 5x^4 - 20x^3 - 20x + 50$$

7- قانون القسمة:

إذا كانت f , g دالتين قابلتين للاشتقاق عند x وكان $g(x) \neq 0$ فإن الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)$ تكون قابلة للاشتقاق عند x وتكون:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x).\frac{d}{dx} f(x) - f(x).\frac{d}{dx} g(x)}{[g(x)]^2}$$

obeikandi.com

إذا كان $f(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{(x-1)\frac{d}{dx}(x)-(x)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)(1)-x(1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

8- إذا كانت $y=x^{-n}$ **عندما يكون** n **عددًا صحيحًا موجبًا فإن:**

$$\frac{dy}{dx}=(-n)x^{-n-1}$$

مثلا: إذا كانت $f(x)=x^{-2}$ فإن:

$$f'(x)=(-2)(x^{-2-1})=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3} \quad , \quad x\neq 0 \qquad \text{حيث} \quad x\neq 0$$

9- إذا كانت $y=\sqrt{f(x)}$ **فإن:** $y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

مثلا: إذا كانت $y=\sqrt{2x^3+5x}$ فإن:

$$y'=\frac{1\times(6x^2+5)}{2\times\sqrt{2x^3+5x}} \quad \rightarrow \quad y'=\frac{6x^2+5}{2\sqrt{2x^3+5x}}$$

10- إذا كانت $y=\left(f(x)\right)^n$ **فإن:** $y'=n\left(f(x)\right)^{n-1}\times f'(x)$

مثلا: إذا كانت $y=\left(2x^2+2x\right)^3$ فإن:

$$y'=3\left(2x^2+2x\right)^2(4x+2)$$

11- إذا كانت $y=\sqrt[n]{f(x)}$ **فإن:** $y'=\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}\times f'(x)$

مثلا: إذا كانت $y=\sqrt[6]{x^3+2x^2+1}$ فإن:

$$y'=(x^3+2x^2+1)^{\frac{1}{6}}$$
$$y'=\frac{1}{6}(x^3+2x^2+1)^{\frac{-5}{6}}(3x^2+4x)$$

obeikandl.com

المشتقة الأولى للدالة التركيبية (قاعدة السلسلة) Chain Rule Functions

لقد سبق أن درسنا الدالة التركيبية، وسنحاول الحصول على قانون لإيجاد المشتقة الأولى للدالة التركيبية:

إذا كانت f , g دالتين قابلتين للاشتقاق وكان $u = g(x)$ فإن الدالة التركيبية هي:

$$y = (fog)(x) = f(g(x)) = f(u)$$

تكون قابلة للاشتقاق كالتالي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(fog)(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

مثال:

إذا كانت $y = \frac{1}{(x^3+1)^5}$

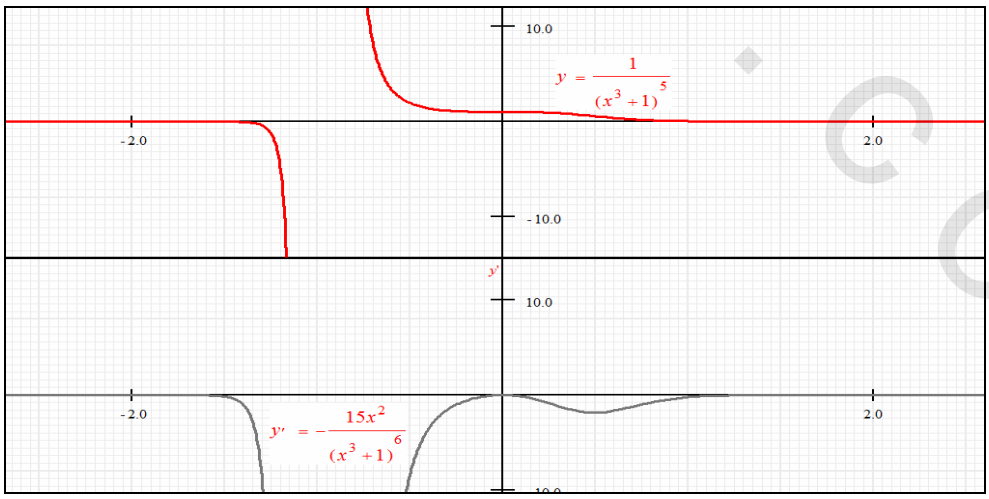
فاوجد $\frac{dy}{dx}$ مع رسم الدالة ومشتقاتها.

الحل:

نفرض أن $u = x^3 + 1$, $y = \frac{1}{u^5}$ منها يكون لدينا:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^5}\right).\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-5}{u^6}.3x^2 = \frac{-15x^2}{(x^3+1)^6}$$



obeikandl.com

مثال:

إذا كانت $y = v^5 - 6$, $v = x^4 + 3x^2$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}.\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5v^4.(4x^3 + 6x) = 5(x^4 + 3x^2)^4(4x^3 + 6x)$$

مثال :

بفرض أن $y = \sin u^2$, $u = \ln x$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل:

نعلم بأن: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ بذلك يكون لدينا $y' = 2uu'\cos u^2$

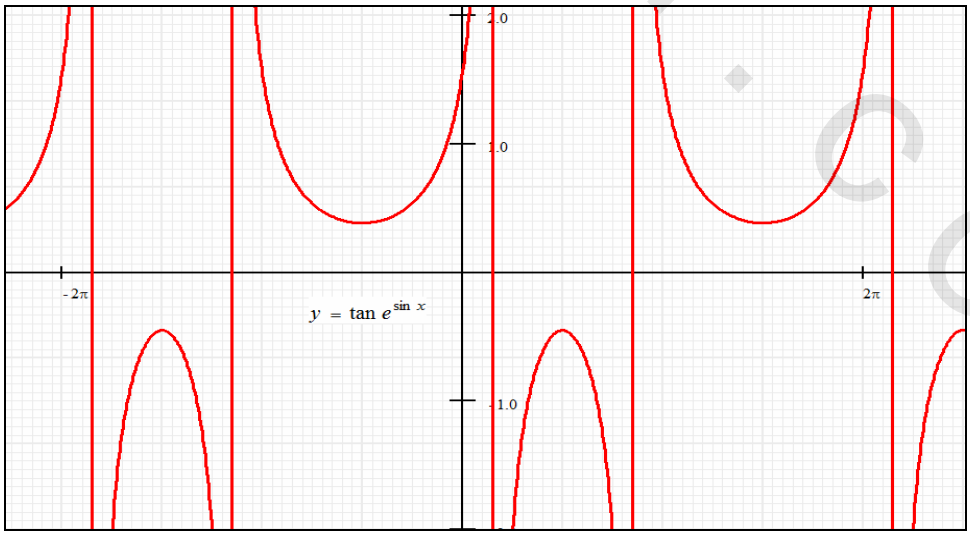
بما أن $u' = \frac{1}{x}$ منها يكون لدينا $\frac{dy}{dx} = \frac{2\ln x}{x}\cos(\ln x)^2$

مثال :

بفرض أن $y = \tan u$, $u = e^{\sin x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ مع رسم الدالة التركيبية.

الحل:

نعلم بأن: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ واضح أن $u' = \cos x e^{\sin x}$ منها يكون لدينا $\frac{dy}{dx} = \sec^2(e^{\sin x})\cos x e^{\sin x}$



المشتقة الأولى لدوال القوى: First Derivative for Power functions

1- إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن المشتقة الأولى للدالة $y = x^{\frac{1}{n}}$ هي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{حيث} \quad x \neq 0$$

إذا كانت $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ حيث أن n, m أعداد صحيحة ؛فإن المشتقة هي:

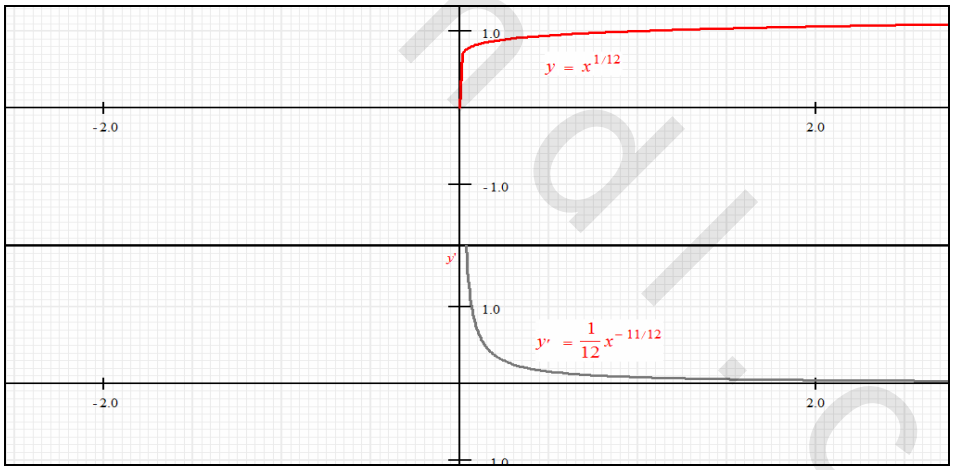
$$f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \quad \text{حيث } x \neq 0$$

مثال:

إذا كان $y = x^{\frac{1}{12}}$ ، فأوجد y'.

الحل:

$$y' = \frac{1}{12} x^{\frac{1}{12}-1} = \frac{1}{12} x^{\frac{-11}{12}} = \frac{1}{12\, x^{\frac{11}{12}}}$$



مثال:

إذا كانت $y = x^{\frac{5}{6}}$ ، فأوجد y'.

الحل:

$$y' = \frac{5}{6} x^{\frac{5}{6}-1} = \frac{5}{6} x^{\frac{-1}{6}} = \frac{5}{6\, x^{\frac{1}{6}}}$$

obeikandi.com

اشتقاق الدوال المثلثية: The Derivative of the Trig functions

1- إذا كانت $f(x)=\sin x$ فإن: $f'(x)=\cos x$:

الإثبات:

$$f(x)=\sin x$$

$$\because \quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

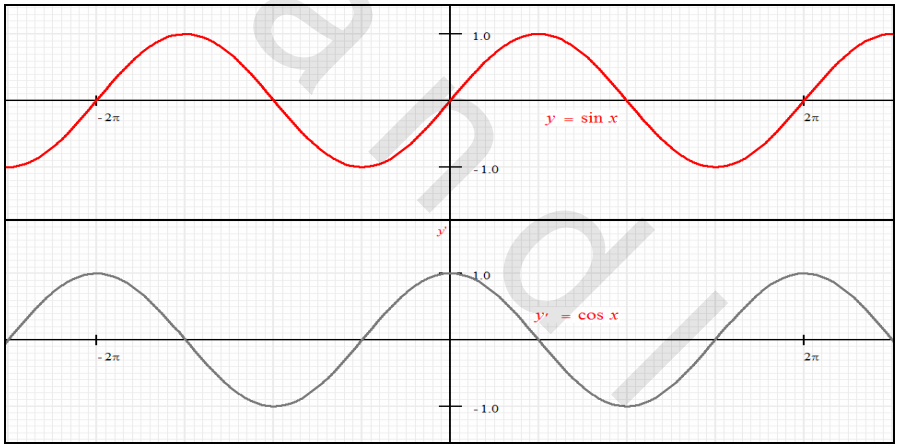
$$\therefore \quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos(h)+\cos x\sin(h)-\sin x}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos(h)-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\sin x\times\lim_{h\to 0}\frac{(\cos(h)-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$$

$$f'(x)=\sin x.(0)+\cos x.(1)=\cos x$$



2- إذا كانت $f(x)=\cos x$ فإن: $f'(x)=-\sin x$

3- إذا كانت $f(x)=\tan x$ فإن: $f'(x)=\sec^2 x$

الإثبات:

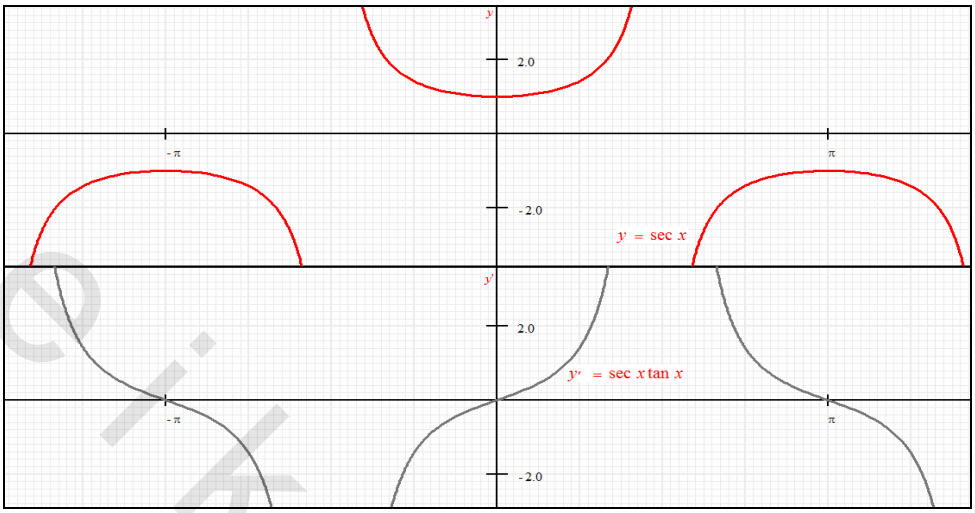
$$f(x)=\tan x \quad \rightarrow \quad \therefore \quad f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{\cos x(\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\sec^2 x$$

4- إذا كانت $f(x)=\sec x$ فإن: $f'(x)=\sec x\tan x$



5- إذا كانت $f(x)=\csc x$ فإن: $f'(x)=-\cot x\csc x$

الإثبات:

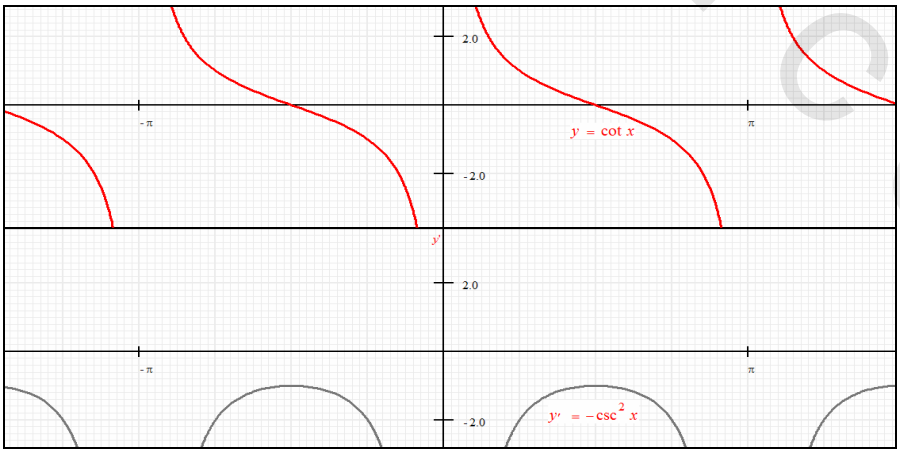
$$f(x)=\csc x \quad \rightarrow \quad \therefore \quad f(x)=\frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore \quad f'(x)=\frac{\sin x.(0)-(1).(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-\cos x-}{\sin^2 x} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\frac{-\cos x}{\sin x}.\frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore \quad f'(x)=-\cot x.\csc x$$

6- إذا كانت $f(x)=\cot x$ فإن: $f'(x)=-\csc^2 x$



obeikandl.com

اشتقاق الدوال المثلثية العكسية:The derivative of the inverse Trig functions

– لقد وجدنا عند دراسة الدوال المثلثية أن الدالة:

$$\sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1] \quad , \quad x\to\sin x$$

دالة مستمرة ومتزايدة وتحقق $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ وهي دالة أحادية والدالة العكسية هي $\sin^{-1}$ بذلك تكون: $\sin^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

لحساب مشتقة الدالة $y=\sin^{-1}x$ نعلم أن:

$$y=\sin^{-1}x\Leftrightarrow x=\sin y$$

باشتقاق الطرفين نجد:

$$1=\cos y\,y'\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}}$$

منها $$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

– لقد وجدنا عند دراسة الدوال المثلثية أن الدالة:

$$\cos:[0,\pi]\to[-1,1] \quad , \quad x\to\cos x$$

دالة مستمرة ومتناقصة وتحقق $\cos(0)=1$ و $\cos(\pi)=-1$ وهي دالة أحادية والدالة العكسية هي $\cos^{-1}$ بذلك تكون: $\cos^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$.

لحساب مشتقة الدالة $y=\cos^{-1}x$ نعلم أن:

$$y=\cos^{-1}x\Leftrightarrow x=\cos y$$

باشتقاق الطرفين نجد:

$$1=-\sin y\,y'\Rightarrow y'=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{\sin^2 y}}$$

منها نحصل على:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

– لقد وجدنا عند دراسة الدوال المثلثية أن الدالة:

$$\tan:[0,\pi]\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad x\to\tan x$$

obeikandi.com

دالة مستمرة ومتزايد وتحقق $\lim_{x\to+\frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty$ و $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan x=-\infty$ وهي دالة أحادية والدالة العكسية هي $\tan^{-1}$ بذلك تكون: $\tan^{-1}: R\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

لحساب مشتقة الدالة $y=\tan^{-1}x$ نعلم أن: $y=\tan^{-1}x\Leftrightarrow x=\tan y$

باشتقاق الطرفين نجد:

$$1=\sec^2 y y'\Rightarrow y'=-\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$\left(\sec^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}=\frac{\cos^2 y+\sin y}{\cos^2 y}\right)$$

وبالتالي يكون لدينا: $y'=\frac{1}{1+x^2}$

مثال:

اثبت انه إذا كان $y=\cot^{-1}x$ ، فإن $y'=\frac{-1}{1+x^2}$.

الحل:

بما أن $y=\cot^{-1}x$ فإن $x=\cot x$ وباشتقاق الطرفين نجد:

$$1=-\cos ec^2 y y'\Rightarrow y'=\frac{1}{c\sec^2 y}$$

$$=\frac{1}{1+\cot^2 y}=\frac{-1}{1+x^2}$$

مثال:

اثبت انه إذا كان $y=\sec^{-1}x$ ، فإن $y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

الحل:

بما أن $y=\sec^{-1}x$ فإن $x=\sec y$ وباشتقاق الطرفين نجد: $1=\sec y\tan y y'$

وبالتالي يكون لدينا: $y'=\frac{-1}{\sec y\tan y}$

وبما أن $\left(1+\tan^2 y=\sec^2 y\Rightarrow\tan y=\sqrt{\sec^2 y-1}\right)$

يكون لدينا $y'=\frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y-1}}=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

obeikandi.com

مثال:

اثبت أنه إذا كان $y=\cos ec^{-1}x$ ، فإن $y'=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

الحل:

بما أن $y=\cos ec^{-1}x$ فإن $x=\cos ecx$

وباشتقاق الطرفين نجد: $1=-\cos ecyy'$

ويكون لدينا: $y'=\frac{-1}{\cos ecy\cot y}=\frac{1}{\cos ecy\sqrt{\cos ec^2y-1}}=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

نتيجة:

من قاعدة السلسلة نستنتج العلاقات التالية:

1- إذا كانت $y=\sin^{-1}(u(x))$ فإن: $y'=\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$

2- إذا كانت $y=\cos^{-1}u(x)$ فإن: $y'=\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$

3- إذا كانت $f(x)=\tan^{-1}u(x)$ فإن: $y'=\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

4- إذا كانت $f(x)=\cot^{-1}u(x)$ فإن: $y'=\frac{-u(x)}{1+u(x)^2}$

5- إذا كانت $f(x)=\sec^{-1}u(x)$ فإن: $y'=\frac{u(x)}{u(x)\sqrt{u(x)^2-1}}$

6- إذا كانت $f(x)=\cos ec^{-1}u(x)$ فإن: $y'=\frac{-u(x)}{u(x)\sqrt{u(x)^2-1}}$

obeikandi.com

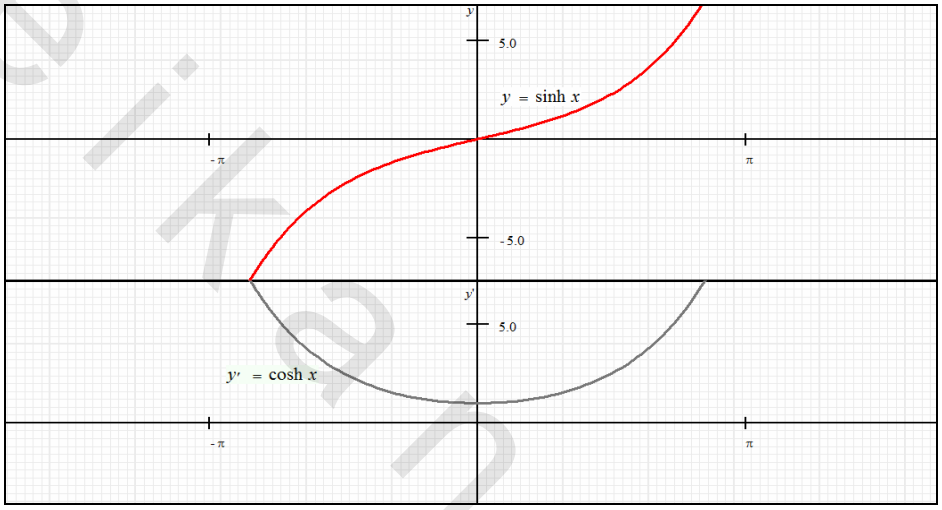
اشتقاق الدوال الزائدية: Derivative of Hyperbolic functions

من تعريف ودراسة خواص الدوال الزائدية نحصل على:

1) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ وبالتالي فإن $(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

ومنها نحصل على: $(\sinh x)' = \cosh x$

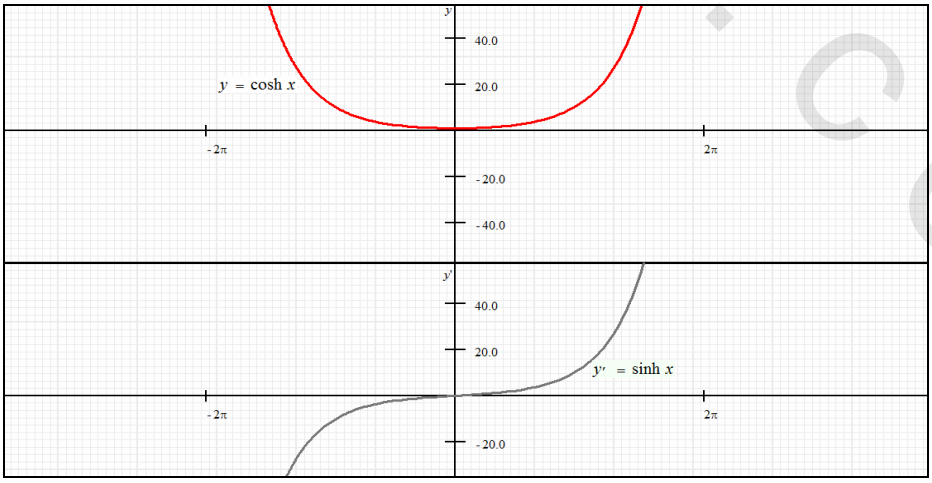
كما موضح بالشكل التالي:



2) علم بأن: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ وبالتالي فإن $(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

منها نحصل على: $(\cosh x)' = \sinh x$

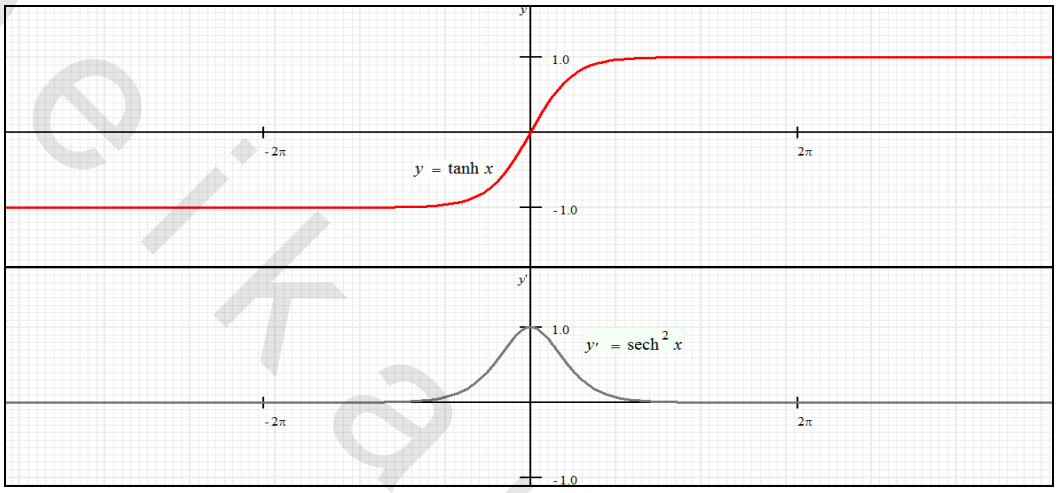
ما موضح بالشكل التالي:



3) نعلم بأن: $\tanh\ x = \frac{\sinh\ x}{\cosh\ x}$ وبالتالي فإن:

$$(\tanh\ x)' = \frac{\cosh^{\ 2} x - \sinh^{\ 2} x}{\cosh^{\ 2} x} = \frac{1}{\cosh^{\ 2} x} = 1 - \tanh^{\ 2} x = \sec h^2 x$$

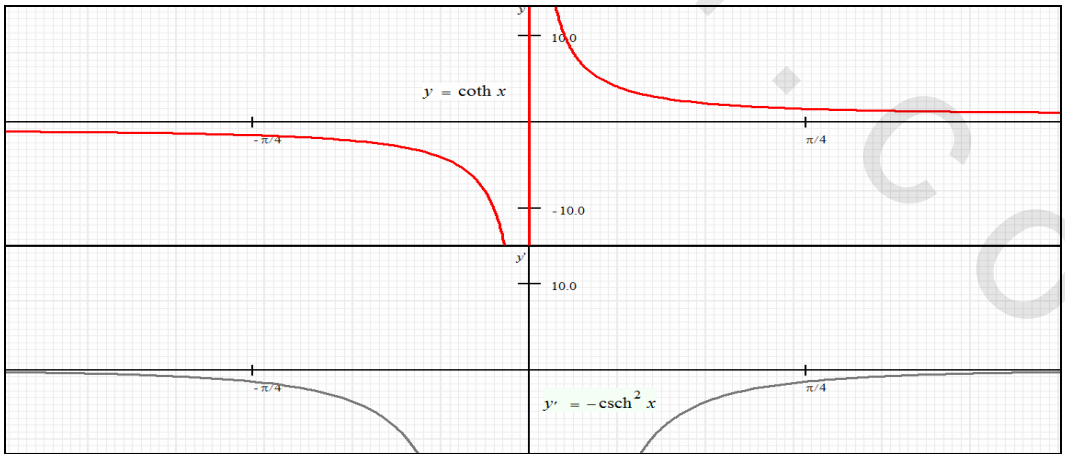
كما موضح بالشكل التالي:



4) علم بأن: $\coth\ x = \frac{\sinh\ x}{\cosh\ x}$ وبالتالي فإن:

$$(\coth\ x)' = \frac{\sinh^{\ 2} x - \cosh^{\ 2} x}{\sinh^{\ 2} x} = \frac{1}{\sinh^{\ 2} x} = 1 - \coth^{\ 2} x = -c\sec h^2 x$$

كما موضح بالشكل التالي:

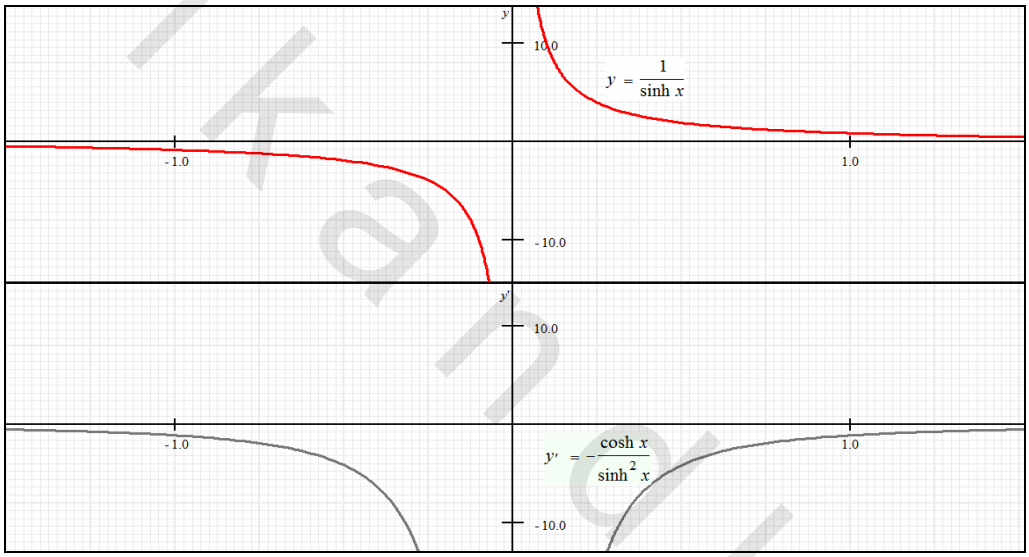


obeikandi.com

5) $c\sec hx = \frac{1}{\sinh x}$ بالتالي فإن:

$$(c\sec hx)' = \frac{-\cosh x}{\sinh x}$$
$$= -\frac{-\cosh x}{\sinh x} \times \frac{1}{\sinh x}$$
$$= 1 - \coth^2 x$$
$$= -c\sec hx \coth x$$

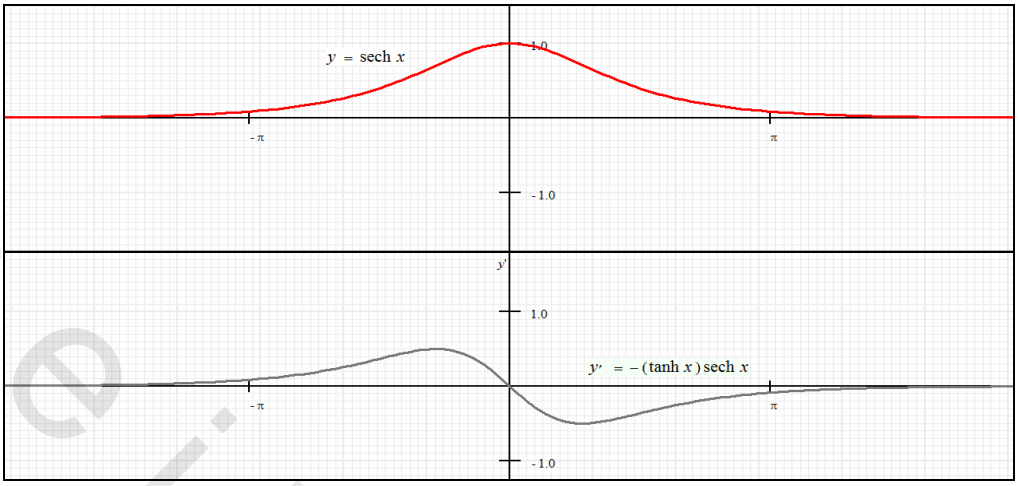
كما موضح بالشكل التالي:



6) $\sec hx = \frac{1}{\cosh x}$ وبالتالي فإن:

$$(\sec hx)' = \frac{-\sinh x}{\cosh^2 x} = -\frac{\sinh x}{\cosh x} \times \frac{1}{\cosh x} = -\sec hx \tanh x$$

كما موضح بالشكل التالي:



مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\sinh x^2+\cosh(\sqrt{x^3})$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا: $\frac{dy}{dx}=2x\cosh\ x^2+\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}\sinh(\sqrt{x^3})$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\tanh x+\cosh(\sin(e^x))$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا: $\frac{dy}{dx}=\sec h^2 x+e^x\sinh(\sin(\ e^x))\cos(\ e^x)$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\cosh(\cos x)$.

الحل:

واضح أن الدالة تركيبية بذلك يكون لدينا:

$$y'=\sinh(\cos\ x)(\cos\ x)'=\sinh(\cos\ x)(-\sin\ x)=-\sin\ x\sinh(\cos\ x)$$

obeikandl.com

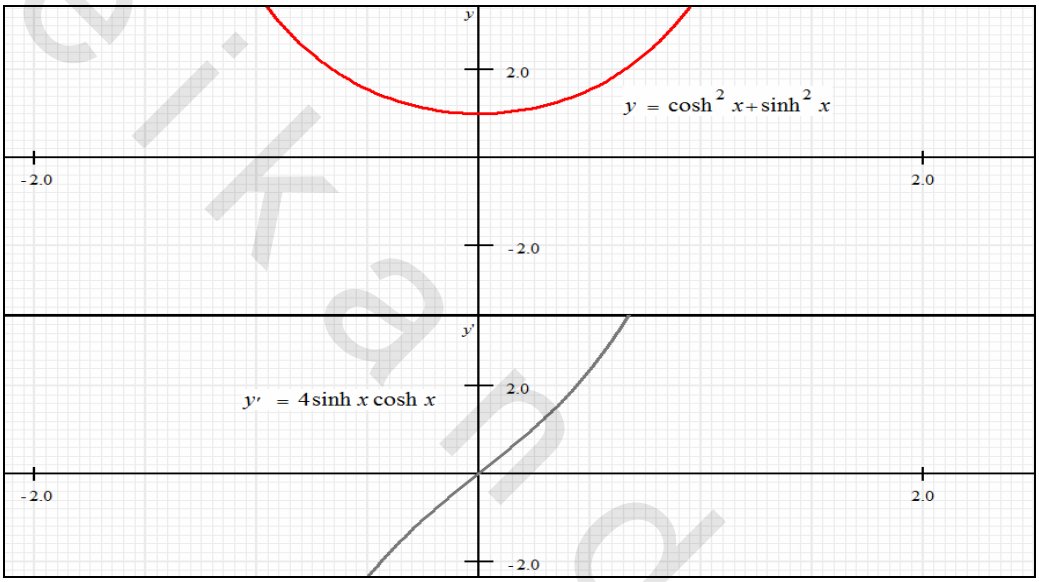
مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\cosh^2 x+\sinh^2 x$.

الحل:

واضح أن الدالة تركيبية بذلك يكون لدينا:

$$y'=2\cosh x\sinh x+2\sinh x\cosh x'$$
$$=4\sinh x\cosh x$$



مثال:

اوجد y' للدالة $y=\sinh^2 x-\cosh^2 x$ مع الرسم ؟

الحل:

واضح أن مشتقة الدالة هي :

$$y'=2\sinh x\cosh x-2\cosh x\sinh x'$$
$$=0$$

طريقة ثانية للحل :

نعلم بأن : $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ *وبالتالي يكون لدينا:*

$$y=\sinh^2 x-\cosh^2 x=-(\cosh^2 x-\sinh^2 x)=-1$$

منه تكون قيمة المشتقة هي $y'=0$

اشتقاق الدوال الزائدية العكسية: Derivation of Inverse Hyperboli functions

من تعريف ودراسة خواص الدوال الزائدية العكسية والدوال الزائدية نستنتج العلاقات التالية:

1- مشتقة الدالة $\sinh^{-1}$ **:**

نعلم بأن: $y=\sinh^{-1} x \quad \Leftarrow \quad x=\sinh y$ باشتقاق الطرفين نجد أن:

$$1=\cosh\ yy' \Rightarrow y'=\frac{1}{\cosh\ y}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^{2} y}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^{2} y}}$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{منها}$$

2- مشتقة الدالة $\cosh^{-1}$ **:**

نعلم بأن: $y=\cosh^{-1} x \quad \Leftarrow \quad x=\cosh y$ باشتقاق الطرفين نجد أن:

$$1=\sinh\ yy' \Rightarrow y'=\frac{1}{\sinh\ y}=\frac{1}{\sinh^{2} y}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^{2} y-1}}$$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{و منها}$$

3- مشتقة الدالة $\tanh^{-1}$ **:**

نعلم بأن: $y=\tanh^{-1} x \quad \Leftarrow \quad x=\tanh y$ باشتقاق الطرفين نجد أن:

$$1=\sec h^{2}\ yy'=\left(1-\tanh^{2} y\right)y'$$

منها نحصل على: $$y'=\frac{1}{1-\tanh^{2} y}=\frac{1}{1-x^2}$$

4- مشتقة الدالة $\coth^{-1}$ **:**

نعلم بأن: $y=\coth^{-1} x \quad \Leftarrow \quad x=\coth y$ باشتقاق الطرفين نجد أن:

$$1=\left(1-\coth^{2} y\right)y' \Rightarrow y'=\frac{1}{1-\coth^{2} y}=\frac{1}{1-x^2}$$

منها نحصل على:

$$y'=\frac{1}{1-\tanh^{2} y}=\frac{1}{1-x^2}$$

obeikandi.com

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\sinh^{-1}\left(x^4+4x^3-4\right)e^{3x+1}$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا:

$$y=\sinh^{-1}\left(x^4+4x^3-4\right)3e^{3x+1}+e^{3x+1}\frac{4x^3+12x^2}{\sqrt{1+\left(x^4+4x^3-4\right)}}$$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\cosh^{-1}(\sin(3x+23))\sinh\frac{1}{x}$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x^2}\cosh^{-1}\sqrt{(\sin(3x+23)}\cosh\left(\frac{1}{x}\right)+\sinh\left(\frac{1}{x}\right)\frac{3\cos(3x+23)}{\sqrt{(\sin(3x+23)^2-1}}$$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\tanh^{-1}\left(x^3+3x+6\right)+\frac{1}{x^2}$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+3}{1-\left(x^3+3x+6\right)^2}-\frac{1}{x^3}$$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\sec h^{-1}x$.

الحل:

باستخدام خواص الدوال المثلثية العكسية نجد أن:

$$y=\sec h^{-1}x \quad \Rightarrow \quad x=\sec hy=\frac{1}{\cosh y}$$

obeikandi.com

بذلك تكون $x=\frac{2}{e^{y}+e^{-y}}$ وباشتقاق الطرفين نجد:

$$1=\frac{-\sinh\ yy'}{\cosh^{2}\ y}$$

ولكن: $\sinh^{2}x=\cosh^{2}x-1$ وبالتالي يكون لدينا:

$$y'=\frac{-\cosh^{2}\ y}{\sinh\ y}=\frac{-\cosh^{2}\ y}{\sqrt{\cosh^{2}\ y-1}}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{x^{2}}}{\sqrt{\frac{1}{x^{2}}-1}}=-\frac{1}{x^{2}\sqrt{\frac{1-x^{2}}{x^{2}}}}=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^{2}}}$$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=u^{2}-2u+5$ إذا كان $u=\sinh x+\cos x$ مع رسم الدالة التركيبية ؟

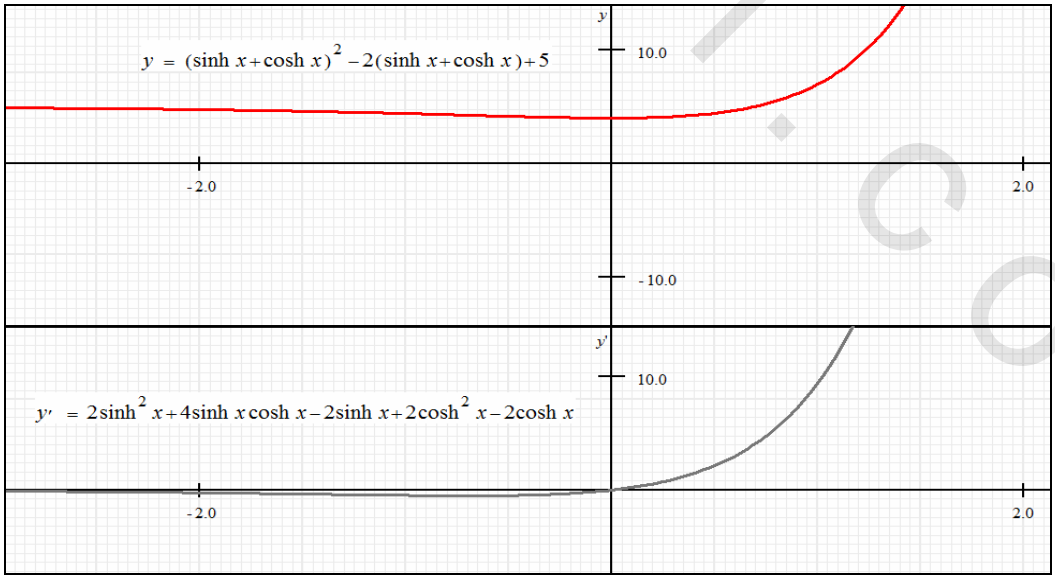
الحل:

نوجد مشتقة الدالة u والتي تكون على الصورة :

$$u'=\cosh x+\sinh x$$

نعلم بأن: $y'=2uu'-2u'=2u'(u-1)$

بذلك تكون المشتقة على النحو التالي: $y'=(\cosh x+\sinh x)(\sinh x+\cosh x-1)$

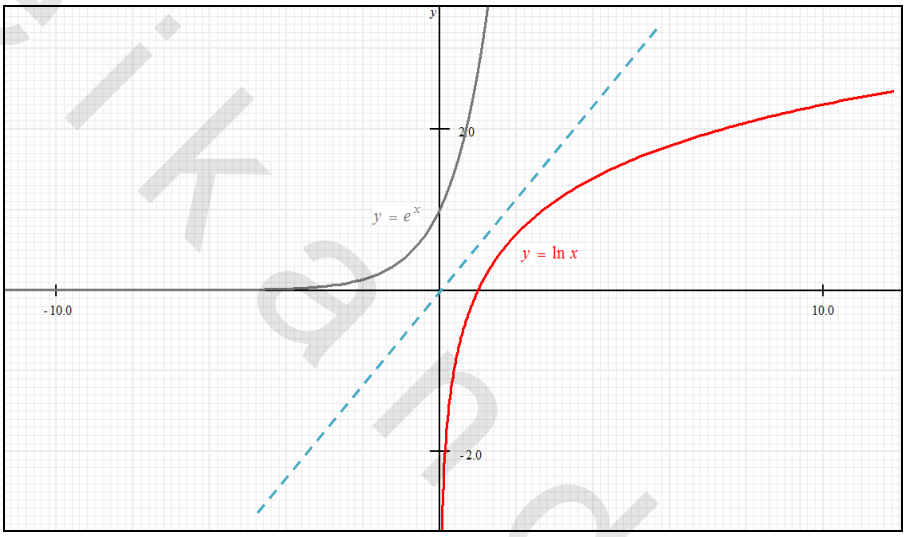


اشتقاق الدوال الأسية و اللوغاريثمية:

The Derivation of Exponential and Logarithm functions

نلخص فيما يلي بعض الخواص الأساسية للدوال الآسية و اللوغاريثمية:

- الدالة الأسية نرمز لها بالرمز exp تعرف $x \to e^x$, $\exp: IR \to IR$ وهي دالة تقبل الاشتقاق على R ومشتقاتها بشكل عام $(\exp(x))' = \exp(x)$ وإذا كانت $x = 0$ فإن $\exp(0) = e^0 = 1$ وهي دالة حقيقية والوحيدة التي تحقق هذه الخواص.



- الدالة الآسية دالة مستمرة ومتزايدة على R وبصفة عامة:

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 .$$

- الدالة الأسية تحقق الخاصية التالية:

$$e^{x+y} = e^x . e^y \quad \text{لكل} \quad (x, y) \in R^2 .$$

- الدالة $x \to e^x$ مستمرة ومتزايدة على R وهي الدالة العكسية للدالة اللوغاريثمية وتعرف على الشكل التالي:

$$\ln : R \to R \quad , \quad x \to \ln x$$

$$\left(y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y\right) \text{ إذا } \text{لكل } (x, y) \in R^2 .$$

- الدالة اللوغاريثمية قابله للاشتقاق على R ومشتقاتها بشكل عام $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ لكل $x \in R$.

- الدالة الأسية دالة مستمرة ومتزايدة على R وبصفة عامة:

$$\lim_{x \to +0} \ln(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty .$$

اشتقاق الدوال الأسية: The derivation of Exponential functions

1- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

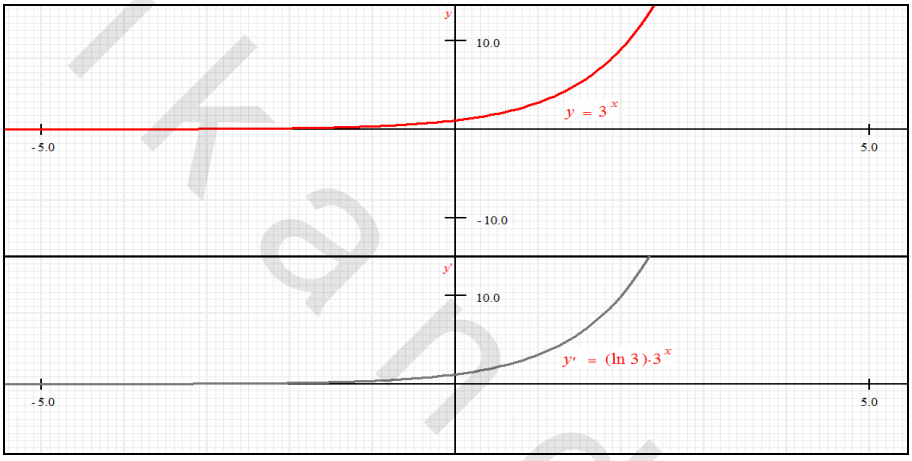
$$y = f(x) = a^x \quad ; a > 0$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى : $y' = a^x \ln a$

مثلا:

إذا كانت $y = 3^x$ فإنه كما هو موضح بالرسم:

$$y' = 3^x \ln 3$$



2- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$y = f(x) = ba^x \quad ; \quad a > 0$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى : $y' = ba^x \ln a$

مثلا:

إذا كانت $f(x) = 5 \times 6^x$ فإن:

$$f'(x) = 5 \times 6^x \ln 6$$

3- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f(x) = ba^{f(x)}$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى كما يلي:

بوضع $u = f(x)$ حيث u قابلة للاشتقاق في x.

$\therefore \quad y = ba^u$

obeikandl.com

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{d\ y}{d\ x} = ba^{\ u} \ln\ a\quad u\ '$$

مثال:

إذا كانت $f(x) = 8\,2^{(3x^2+4x+5)}$ فأوجد $f'(x)$.

الحل:

$$f'(x) = 8\times 2^{(3x^2+4x+5)} \times \ln 2 \times (6x+4)$$

$$f'(x) = (48x+32)\times 2^{(3x^2+4x+5)} \times \ln 2$$

4- اشتقاق الدالة الأسية ذات الأساس $e \cong 2.718$

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة $y = be^x$ فإن:

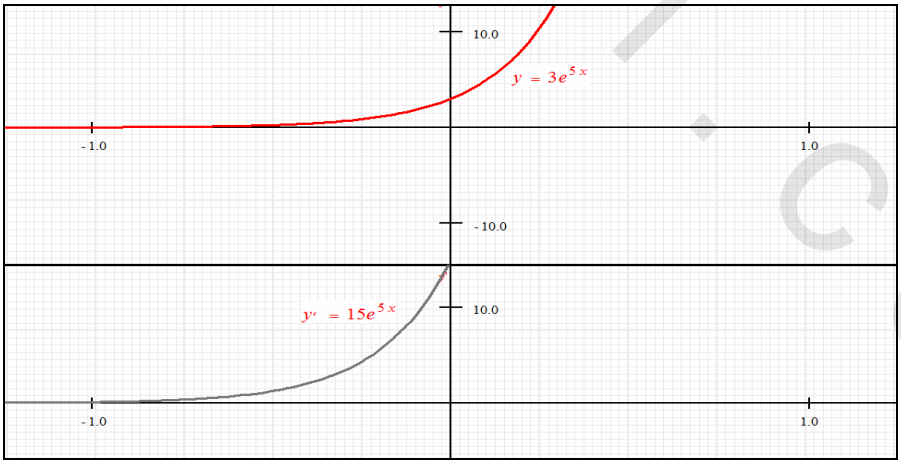
$$y' = be^x \ln e \frac{d}{d\ x}(x)$$

وحيث أن: $\ln e = 1$ عليه فإن: $y' = be^x$

مثلا:

إذا كانت $f(x) = 3e^{5x}$ فإن:

$$f'(x) = 15e^{5x}$$



obeikandi.com

اشتقاق الدوال اللوغارثمية: The Derivative of Logarithm functions

1- إذا كانت $f'(x)$ معرفة كما يلي:

$$y = b\log_a x \quad ; \quad a > 0 \ , \ a \neq 1$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى:

$$y' = \frac{b \log_a e}{x}$$

مثلا:

إذا كانت $y = 3Log_6(x)$ فإن:

$$y' = \frac{3 \log_6 e}{x}$$

2- إذا كانت $y = b\log_a f(x)$ حيث $a > 0 \ , \ a \neq 1$ فإن المشتقة الأولى تكون كما يلي:

بوضع $u = f(x)$ حيث u قابلة للاشتقاق في x $\qquad y = bLog_a u$

ومنه فإن المشتقة الأولى:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = b \frac{u'}{u} Log_a e$$

مثلا:

إذا كانت $y = 3\,Log(6x^5)$ فإن:

$$y' = \frac{3(30x^4)Logx}{6x^5} = \frac{15x^4}{x^5} Loge = \frac{15}{x} Loge$$

3-إذا كانت $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$y = b\ln x$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ هي :

$y' = \frac{b \ln e}{x}$ وحيث أن $\ln e = 1$ بذلك $y' = \frac{b}{x}$

مثلا:

إذا كانت $y = \ln v$ فإن: $\frac{dy}{dv} = \frac{1}{v}$

مثلا:

إذا كانت $y = 2\ln x$ فإن: $y' = \frac{2}{x}$

obeikandl.com

4- إذا كانت الدالة $y = b\ln f(x)$ فإن المشتقة الأولى يتم إيجادها كما يلي:

بوضع $u = f(x)$ حيث u قابلة للاشتقاق في x أي أن $y = b\ln u$

وبالتالي فإن المشتقة الأولى تكون:

$$\frac{d\ y}{d\ x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{d\ x} = b\ \frac{u'}{u} \ln\ e \quad ;\quad \ln\ e = 1$$

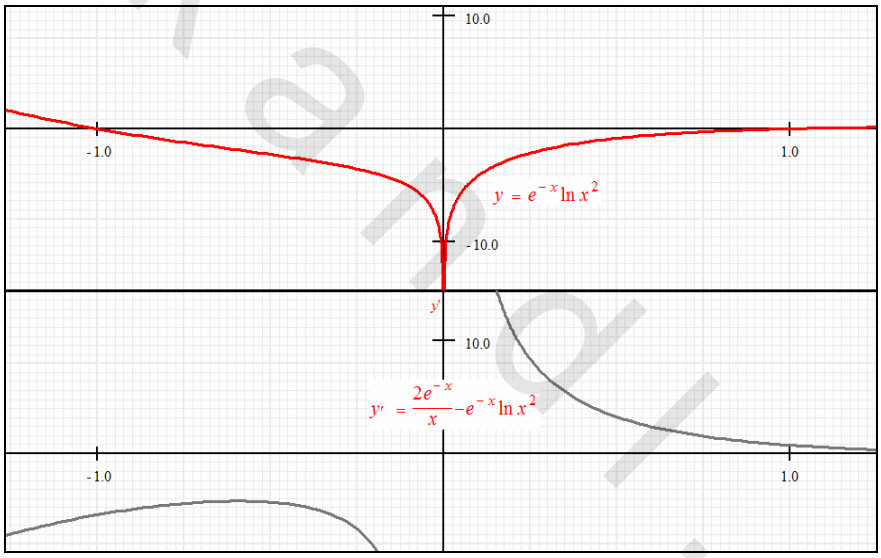
$$\therefore\quad y' = \frac{d\ y}{d\ x} = b\ \frac{u'}{u}$$

مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = e^{-x}\ln x^2$

الحل:

$$y' = -\ e^{-x}\ \ln\ x^2 + e^{-x}\left(\frac{2\ x}{x}\right) = \left(\frac{2}{x} - \ln\ x^2\right) e^{-x}$$



مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = e^{-2x}\ln x\ \sin 2x$.

الحل:

تفاضل حاصل ضرب ثلاثة دوال:

$$y' = -2\,e^{-2x}\ \ln\ x\ \ \sin\ 2\,x + e^{-2x}\ \frac{1}{x}\sin\ 2\,x + 2\,e^{-2x}\ \ln\ x\cos\ 2\,x$$

التفاضل الضمني للدوال: derivative of Implicit functions

يقال عن الدالة $y=f(x)$ دالة صريحة لأنه يمكن فيها التعبير عن الدالة بواسطة المتغير x وبشكل عام وهذا هو الحال في معظم الأحيان كما في الدوال المدروسة في هذا الكتاب على سبيل المثال كل الدوال التالية صريحة:

$$y=|x+8| \ , \quad y=\sin x \ , \quad y=\sqrt{x+3} \ , \quad y=3x^3+2x^2-7x-10$$

ولكن نتداول أحياناً مع الصيغ دالية لا يمكن فيها فصل المتغير x عن الدالة y وتعطى المعادلة بالصيغة $f(x,y)=0$ وهنا تسمى الدالة ضمنية فمثلاً المعادلة: $y^2-2x^2y+\sqrt{x^2+3y^2}=2x$ يصعب فيها فصل y وحسابها بدلالة x ، لإيجاد y' في دالة ضمنية نتبع الخطوات التالية:

1. بطريقة المباشرة:

أ. نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x .

ب. نحل المعادلة الناتجة لحساب y' بدلالة كلاً من x و y .

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $xy^3-3x^2=xy+5$.

الحل:

المطلوب هنا اشتقاق y بالنسبة لـــ x وهذا يعنى أن y متعلقة بـــ x يعنى وجود دالة f حيث $y=f(x)$ ولكن f غير واضحة لدينا ، لذلك علينا الاشتقاق ضمنيا فنحصل على:

$$y^3+x(3y^2y')-6x=xy'+y$$
$$3xy^2y'-xy'=y-y^3+6x$$
$$y'(3xy^2-x)=y-y^3+6x$$
$$\therefore \quad y'=\frac{y-y^3+6x}{3xy^2-x}$$

مثال:

إذا كانت المعادلة: $y^4+3y-4x^3=5x+1$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل:

نفاضل بالنسبة للمتغير x :

obeikandi.com

$$\frac{d}{dx}\left(y^4 + 3y - 4x^3\right) = \frac{d}{dx}(5x + 1)$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} - 12x^2 = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}$$

2. تفاضل الدوال الضمنية بوساطة اللوغاريتم Logarithm differentiation

لنفرض $f(x)$ و $g(x)$ دالتان قابلتان للتفاضل عندئذ لإيجاد المشتقة الأولى للدالة $y=[f(x)]^{g(x)}$ نتبع الخطوات التالية:

1. نأخذ ln الطرفين وعندها يكون لدينا:

$$\ln y = \ln[f(x)]^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

2. نشتق طرفي المعادلة (1) لنحصل على:

$$\frac{y'}{y} = g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x)\ln f(x)$$

3. نضرب طرفي المعادلة (2) بـــ y لنحصل على:

$$y' = y\left[g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x)\ln f(x)\right]$$

4. نعوض عن y بما تساوي فنجد أن:

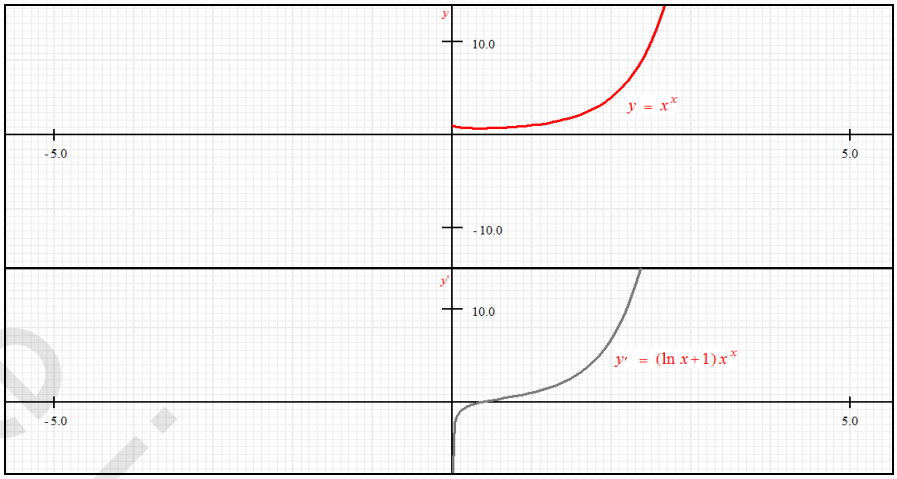
$$y' = [f(x)]^{g(x)}\left[g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x)\ln f(x)\right]$$

مثال:

أوجد y' للدالة $y=x^x$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

نأخذ ln طرفي المعادلة $y=x^x$ نحصل على $\ln y = \ln x^x = x\ln x$ نشتق طرفي المعادلة على النحو التالي $\frac{y'}{y} = \ln x + x\times\frac{1}{x} = \ln x + 1$ نضرب طرفي المعادلة بـــ y نحصل على: $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.



مثال:

أوجد y' للدالة $y = (\sin\ x)^{\tan\ x}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

نأخذ ln طرفي المعادلة $y = (\sin\ x)^{\tan\ x}$ نحصل على

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\tan x} = \tan x \ln \sin x$$

نشتق طرفي المعادلة على النحو التالي

$$\frac{y'}{y} = \sec^2 x \ln \sin\ x + \tan\ x \cot\ x = \sec^2 x \ln \sin\ x + 1$$

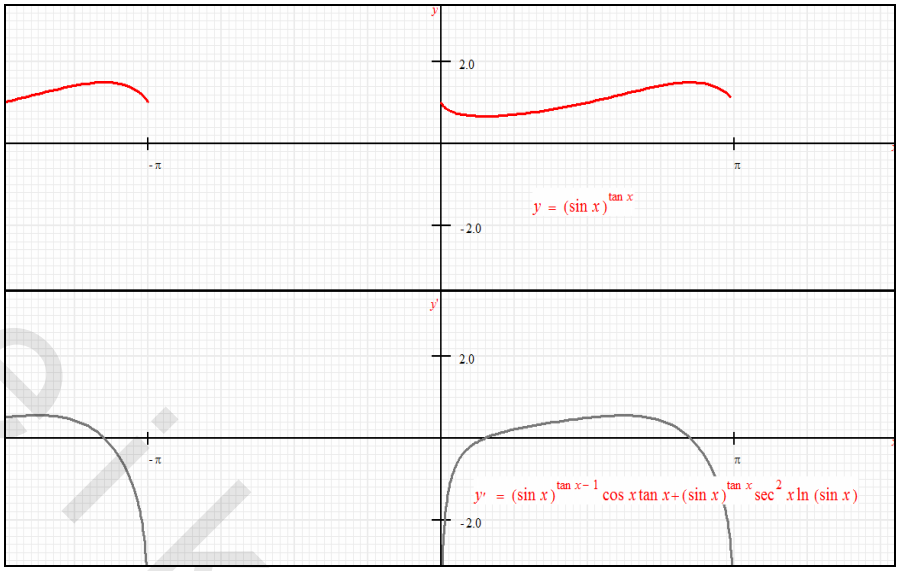
نضرب طرفي المعادلة بـــ y نحصل على:

$$y' = y(\sec^2 x \ln \sin\ x + \tan\ x \cot\ x = \sec^2 x \ln \sin\ x + 1)$$

بالتعويض عن $y = (\sin x)^{\tan x}$ نحصل على:

$$y' = (\sin\ x)^{\tan\ x}(\sec^2 x \ln \sin\ x + \tan\ x \cot\ x = \sec^2 x \ln \sin\ x + 1)$$.

obeikandl.com



مثال:

أوجد y' للدالة $y = (x^2 + 1)^x$

الحل:

نأخذ ln طرفي المعادلة $y = (x^2 + 1)^x$ نحصل على $\ln y = x \ln(x^2 + 1)$ نشتق طرفي المعادلة على النحو التالي

$$\frac{y'}{y} = \ln(x^2 + 1) + x \times \frac{2x}{x^2 + 1} = \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ y نحصل على

$$y' = y(\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1}) :$$

بالتعويض عن $y = (x^2 + 1)^x$ عن نحصل على:

$$y' = (x^2 + 1)^x (\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1})$$

مثال:

أوجد y' للدالة $y = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2}}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

obeikandl.com

نأخذ لوغارثم طرفي المعادلة $y = \left(\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2} \right)^{\frac{1}{5}}$

لنحصل على $\ln y = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2} \right)$

وهذا يعني أن:

$$\ln y = \frac{1}{5} \left(\ln(x+1)^2 + \ln(x^2+1)^3 - \ln(x-1)^3 - \ln(x^2+4)^2 \right)$$

$$= \frac{2}{5} \ln(x+1) + \frac{3}{5} \ln(x^2+1) - \frac{3}{5} \ln(x-1) - \frac{2}{5} \ln(x^2+4)$$

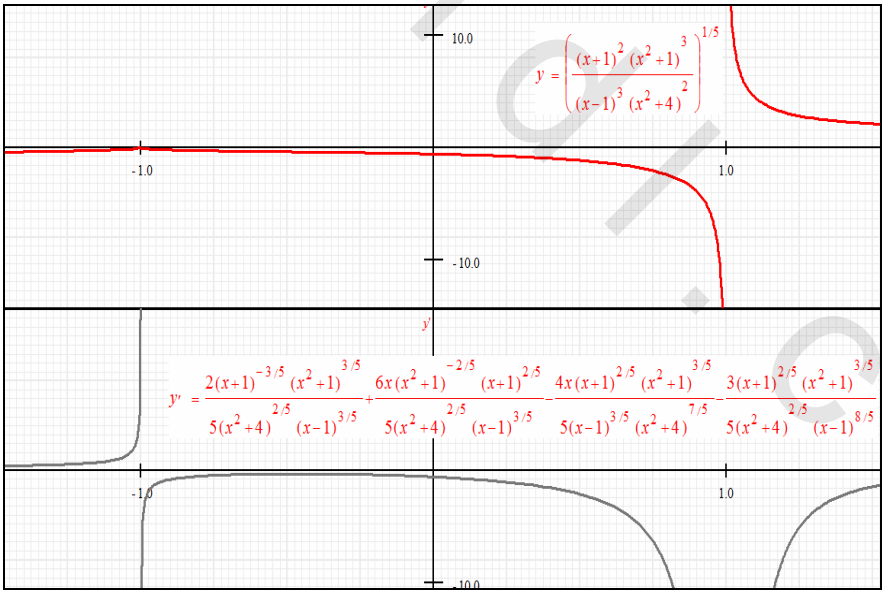
الآن نشتق ضمنيا طرفي المعادلة لنحصل على:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{5} \frac{1}{1+x} + \frac{6}{5} \frac{1}{x^2+1} - \frac{3}{5} \frac{1}{x-1} - \frac{4}{5} \frac{x}{x^2+4}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $y = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2}}$

لنحصل على:

$$y' = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2}} \left[\frac{2}{5} \frac{1}{1+x} + \frac{6}{5} \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{5} \frac{1}{x-1} - \frac{4}{5} \frac{x}{x^2+4} \right]$$



obeikandi.com

المشتقات من مراتب عليا High- order derivatives

لتكن $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق عندها يمكن حساب المشتقة y' فإذا كانت قابلة للاشتقاق يمكن حساب المشتقة الثانية y'' وهكذا نتابع لحساب مشتقات من مراتب أعلى ولنرمز لهذه المشتقات بالشكل:

$$y', y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots\ldots\ldots, y^{(n)}$$

وتسمى $y^{(n)}$ المشتقة من المرتبة n للدالة $f(x)$.

مثال:

أوجد y' ، y'' ، y''' للدالة $y = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 5$.

الحل:

نوجد أولاً: y' على النحو التالي: $y' = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 3$

وكذلك: $y'' = 12x^2 + 12x + 2$

ثم: $y''' = 24x + 12$

منها نحصل على: $y^{(4)} = 24$

مثال:

أوجد، y' ، y'' للدالة $y = x^4 + six\,4x + \frac{1}{x} + e^{3x}$.

الحل:

نوجد أولاً: y' على النحو التالي: $y' = 4x^3 + 4\cos 4x - \frac{1}{x^2} + 3e^{3x}$

ثم: $y'' = 12x^2 - 16\sin x4x + \frac{2}{x^3} + 9e^{3x}$

مثال:

أوجد، y' ، y'' للدالة $y = \sqrt{x} + x^5 + \ln x$.

الحل:

نوجد أولاً: y' على النحو التالي: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5x^4 + \frac{1}{x}$

ثم: $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + 20x^3 - \frac{2}{x^3}$

obeikandl.com

مثال:

إذا كان $y = \sin(m\cos^{-1}x)$ برهن أن:

$$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0$$

الحل:

من الواضح أن $y' = \cos(m\cos^{-1}x)\frac{-m}{\sqrt{1-x^2}}$ بضرب y' في $\sqrt{1-x^2}$

نحصل على $\sqrt{1-x^2}\,y' = -m\cos(m\cos^{-1}x)$ ثم نوجد y'' على الشكل التالي:

$$\sqrt{1-x^2}\,y''-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y' = -m(-\sin(m\cos^{-1}x)\frac{-m}{\sqrt{1-x^2}})$$

$$\sqrt{1-x^2}\,y''-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y' = -m^2\left(\frac{\sin(m\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

بالضرب في المقدار $\sqrt{1-x^2}$ نحصل على:

$$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0$$

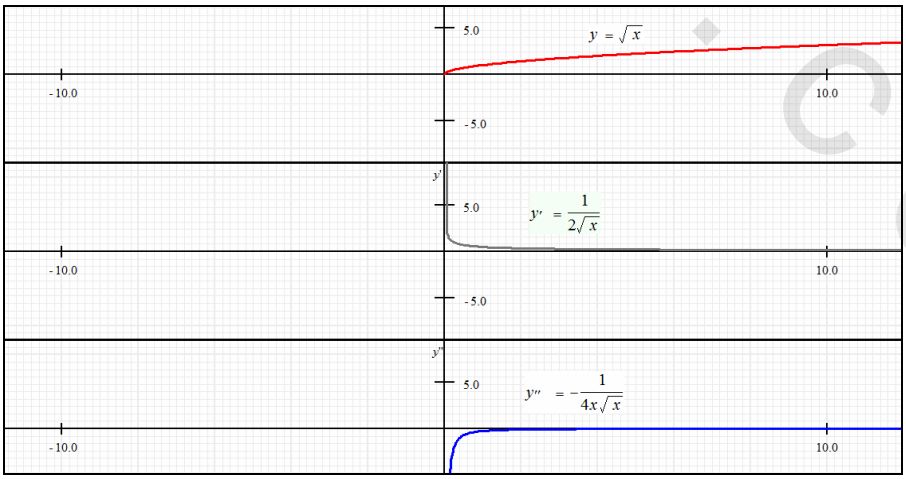
مثال:

إذا كان $y=\sqrt{x}$ أوجد y'' ، y' موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

وجد أولاً: y' على النحو التالي: $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ثم نوجد: $y''=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$



أمثلة محلولة

1- إذا كانت $y=\frac{x}{2}-\frac{5x^{-3}}{2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: من خواص تفاضل كثيرات الحدود نحصل على:

$$\because \quad y=\frac{x}{2}-\frac{5x^{-3}}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{d\,y}{d\,x}=\frac{1}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)(-3)\left(x^{-4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{15}{2}x^{-4}$$

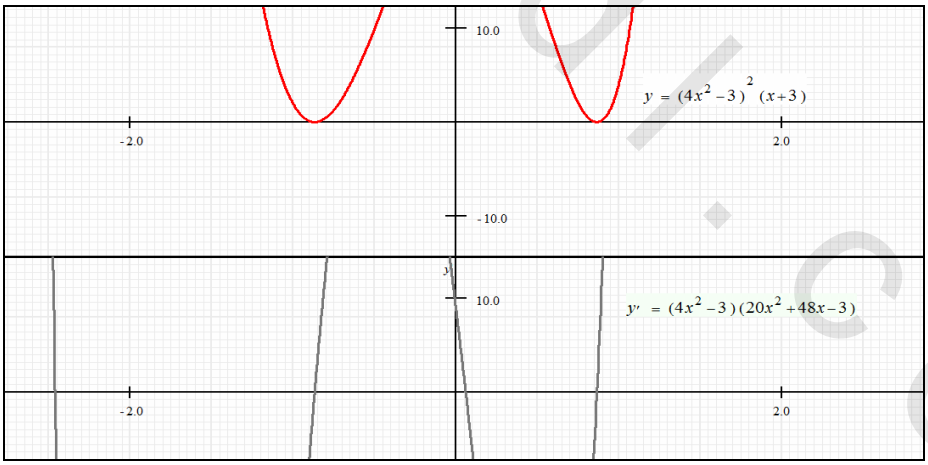
2- إذا كانت $y=(4x^2-3)^2(x+5)$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل: من خواص تفاضل كثيرات الحدود نحصل على:

$$\because \quad y=(4x^2-3)^2(x+5)$$

$$\frac{d\,y}{d\,x}=2(4x^2-3)(8x)(x+5)+(4x^2-3)^2$$

$$\therefore \frac{d\,y}{d\,x}=(16x)(4x^2-3)(x+5)+(4x^2-3)^2$$



3- إذا كانت $y=\frac{(2x^2-3)}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: من خواص تفاضل الدوال القياسية نحصل على:

$$\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}(4x)-(2x^2-3)\left(\frac{1}{3}(x^2+7)^{\frac{-2}{3}}\right)(2x)}{\left((x^2+7)^{\frac{1}{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{4x-\left(\frac{2}{3}x\right)(2x^2-3)(x^2+7)^{-1}}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$$

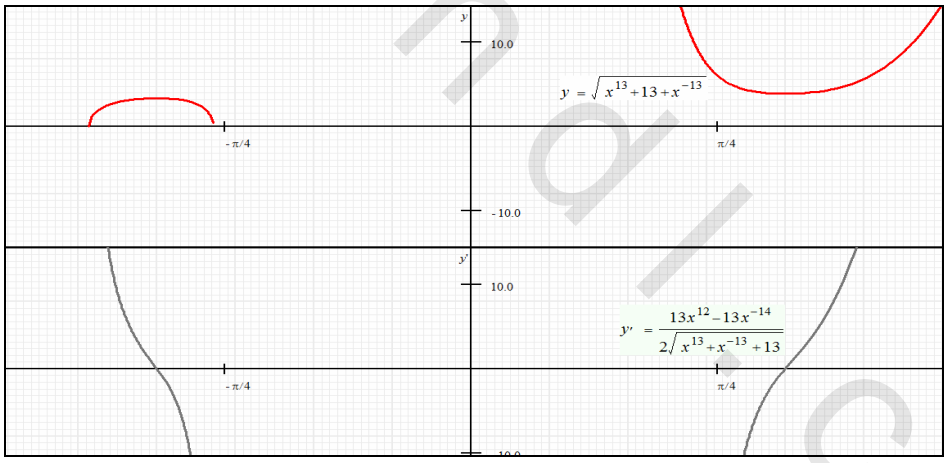
4- إذا كانت $y=\sqrt{x^{13}+13+x^{-13}}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل: من خواص تفاضل الدوال الجذرية نحصل على:

$$\because \quad y=\sqrt[2]{x^{13}+13+x^{-13}}$$

$$\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{(1)(y'(x))}{2\sqrt{y(x)}}=\frac{(1)(13\,x^{12}-13\,x^{-14})}{2\sqrt[2]{x^{13}+13+x^{-13}}}$$

$$\therefore \quad \frac{d\,y}{d\,x}=\frac{(13\,x^{12}-13\,x^{-14})}{2\sqrt[2]{x^{13}+13+x^{-13}}}$$



5- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y=x^3\sin^3 x^3$.

الحل: من خواص تفاضل الدوال الآسية و المثلثية نحصل على:

$$y'=x^3(3\sin^2 x^3.\cos x^3.3x^2)+\sin^3 x^3(3x^2)$$

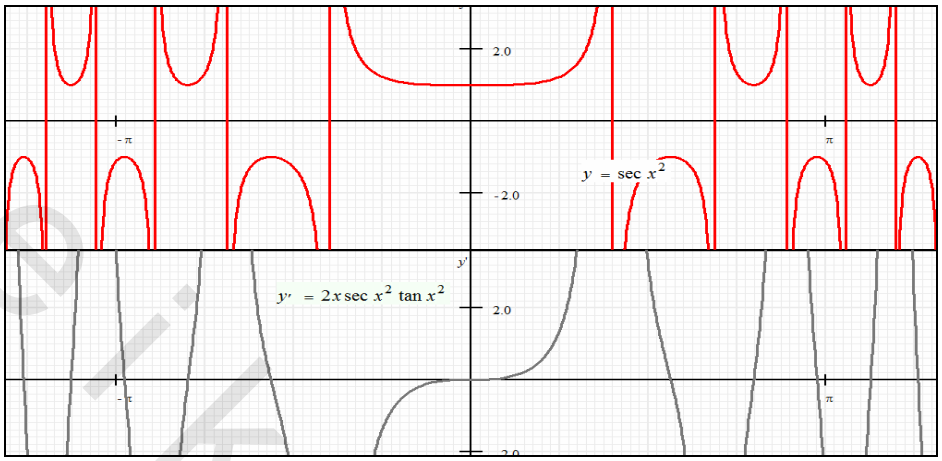
$$y'=9x^5\sin^2 x^3\cos x^3+3x^2\sin^3 x^3$$

6 - أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y=\sec x^2$ موضحاً الإجابة بالرسم.

obeikandi.com

الحل: من خواص تفاضل الدوال المثلثية نحصل على:

نعلم أن $(\sec\ u)' = \tan\ u \sec\ u u'$ وبالتالي: $y' = 2\ x(\tan\ x^2 \sec\ x^2)$



7- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

الحل: من خواص تفاضل الدوال المثلثية نحصل على:

$$y'(x) = \frac{(1+\cos\ x)(\cos\ x) - \sin\ x(-\sin\ x)}{(1+\cos\ x)^2} = \frac{\cos\ x + \cos^2\ x + \sin^2\ x}{(1+\cos\ x)^2}$$

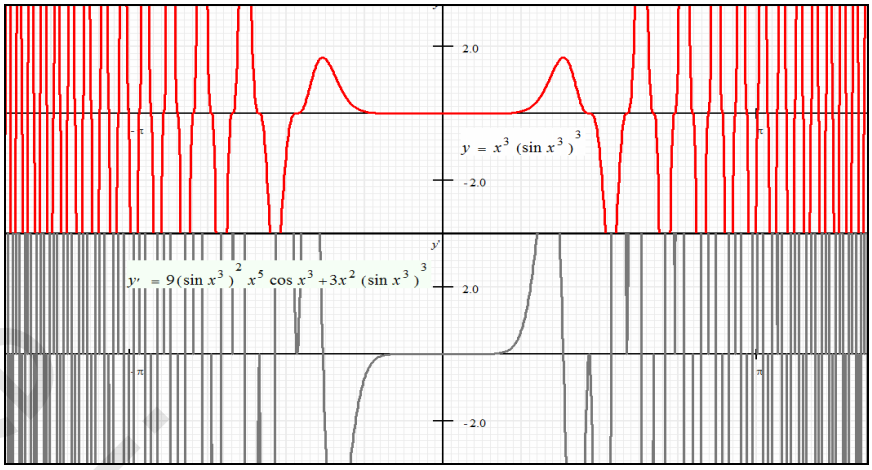
$$y'(x) = \frac{1+\cos\ x}{(1+\cos\ x)^2} = \frac{1}{1+\cos\ x}$$

8- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y = x^3(\sin x^3)^3$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل: من خواص تفاضل الدوال الآسية و المثلثية نحصل على:

$$y' = x^3 3(\sin x^3)^2 \cos x^3 3x^2 + 3x^2(\sin x^3)^3$$

$$y' = 9x^5(\sin\ x^3)^2 \cos x^3 + 3x^2(\sin x^3)^3$$



9- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y = \sqrt{\csc x^3}$.

الحل:

$$y = \sqrt{\csc x^3} \quad \rightarrow \quad y = (\csc x^3)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad y = \csc^{\frac{1}{2}} x^3$$

$$y' = \frac{1}{2}(\csc x^3)^{\frac{-1}{2}} (3x^2)(-\cot x^3 \csc x^3)$$

$$y' = \frac{-3}{2}\csc^{\frac{1}{2}} x^3 \cot x^3 \csc x^3$$

10- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y = x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

الحل: من خواص تفاضل الدوال المثلثية نحصل على:

$$y' = \tan\left(\frac{1}{x}\right) + \left(x.\frac{-1}{x^2}\sec^2\left[\frac{1}{x}\right]\right)$$

$$y' = \tan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\sec^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

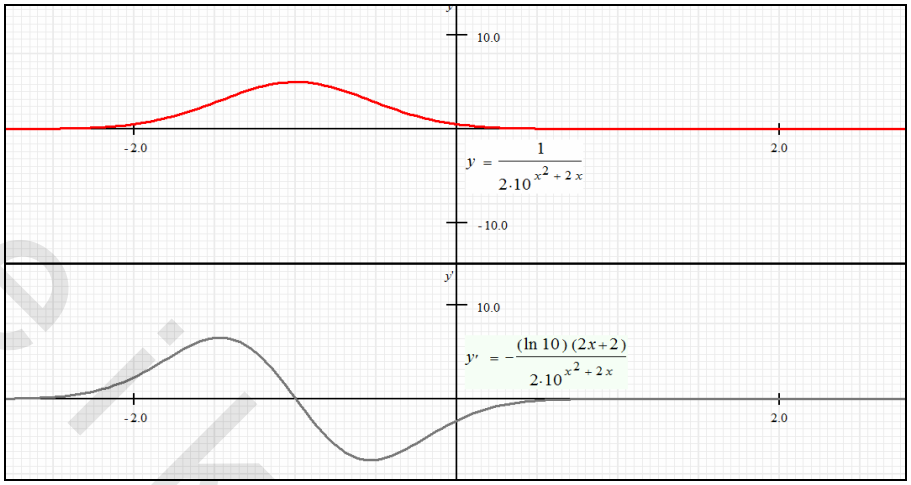
11- اوجد المشتقة الأولى إذا كانت $y = \frac{1}{2\times 10^{x^2+2x}}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$\because \quad y = \frac{1}{2\times 10^{x^2+2x}}$$

$$y' = \frac{-1\times(2.10^{x^2+2x}.\ln 10)(2x+2)}{(2\times 10^{x^2+2x})^2}$$

منها نحصل على: $\therefore \quad y' = \frac{-4\times(10^{x^2+2x}.\ln 10)(x+1)}{(2\times 10^{x^2+2x})^2} = \frac{-\ln 10\,(x+1)}{10^{x^2+2x}}$



12- أوجد المشتقة الأولى ، إذا كانت $y = x^2\,3^x$.

الحل:

$$y' = x^2.\frac{d}{dx}(3^x) + 3^x\frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= x^2\,3^x\ln 3 + 3^x(2x)$$
$$\therefore\ y' = x3^x\left[x\ln 3 + 2\right]$$

13- أوجد المشتقة الأولى ، إذا كانت $y = e^{-2x}\sin 3x$.

الحل:

$\because \quad y = e^{-2x}\sin 3x$

$$y' = e^{-2x}\left(\frac{d}{dx}(\sin 3x)\right) + \sin 3x\left(\frac{d}{dx}(e^{-2x})\right)$$
$$= e^{-2x}(3\cos 3x) + \sin 3x\left(e^{-2x}(-2)\right)$$
$$= 3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x$$
$$\therefore = e^{-2x}(3\cos 3x - 2\sin 3x)$$

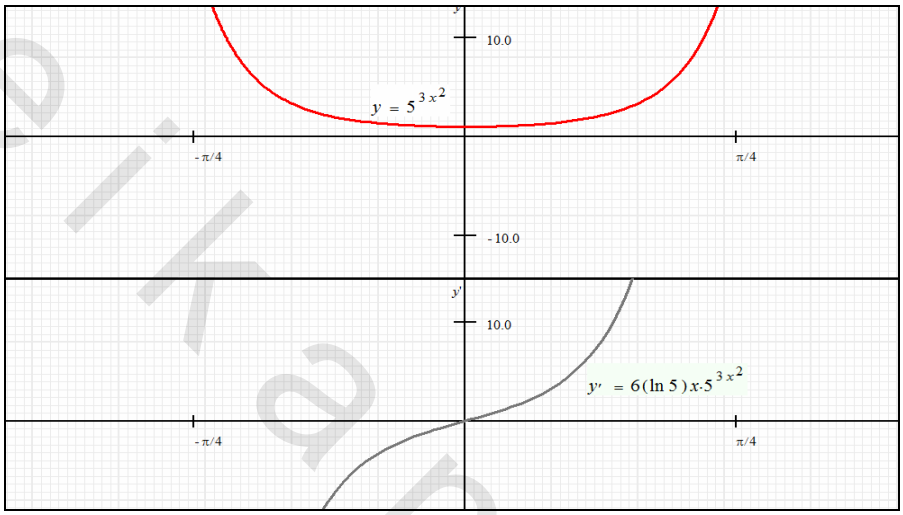
openkanal.com

14- أوجد المشتقة الأولى، إذا كانت $y=5^{3x^2}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y'=5^{3x^2}(\ln 5).\frac{d}{dx}(3x^2)$$

منها نحصل على: $y'=5^{3x^2}(\ln 5)(6x)$



15- أوجد المشتقة الأولى y' ، إذا كان $y=\ln(x+3)^2$.

الحل:

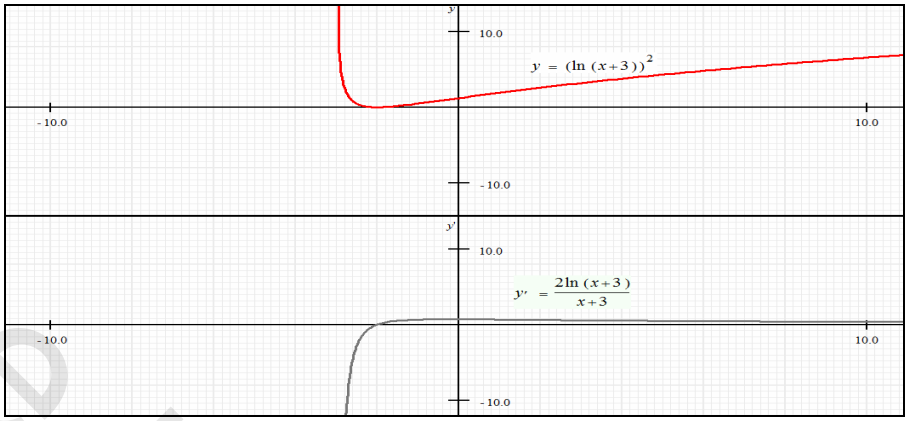
$$\because\ y=\ln(x+3)^2$$
$$y=2\ln(x+3)$$
$$\therefore y'=2\left(\frac{1}{x+3}\right).\frac{d}{dx}(x+3)=\frac{2}{x+3}$$

16- أوجد المشتقة الأولى y' إذا كان $y=\ln^2(x+3)$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y'=2\ln(x+3).\frac{d}{dx}\ln(x+3)$$
$$=2\ln(x+3).\left(\frac{1}{x+3}\right).\frac{d}{dx}(x+3)$$
$$=\frac{2\ln(x+3)}{x+3}$$

obeikandl.com



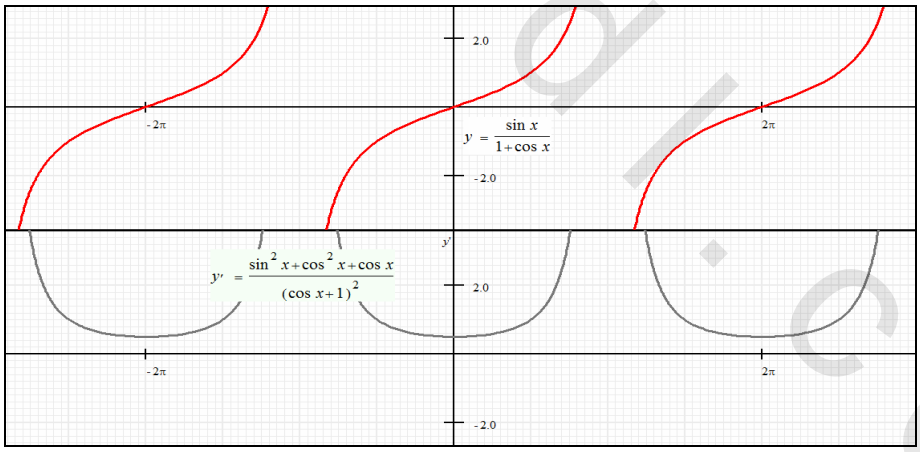
17- أوجد y' إذا كانت $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y' = \frac{(1+\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$



18- اوجد y' إذا كانت $y = (3x+1)^6\sqrt{2x-5}$.

الحل:

$$y = (3x+1)^6 (2x-5)^{1/2}$$

$$y' = (3+1)^6 . (\frac{1}{2})(2x-5)^{-1/2} .(2) + (2x-5)^{1/2} . (6)(3x+1)^5$$

$$= \frac{(3x+1)^6}{\sqrt{2x-5}} + 18 \times 3x+1) \sqrt[5]{2x-5}$$

$$= \frac{(3x+1)^6 + 18(3+1)^5(2x-5)}{\sqrt{2x-5}}$$

$$= \frac{(3x+1)^5(39x-89)}{\sqrt{2x-5}}$$

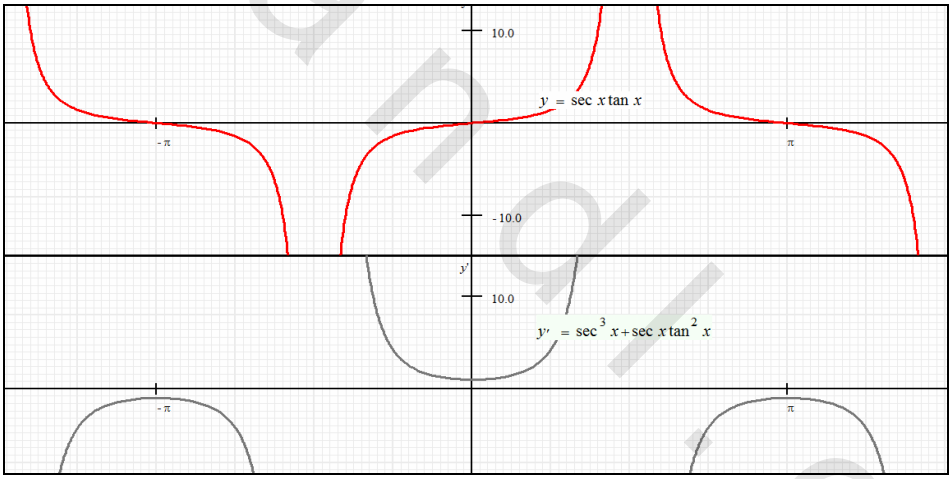
19- أوجد y' إذا كانت $y = \sec x \tan x$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y' = \sec x \sec^2 x + \tan x \sec x \tan x$$

$$= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x$$

$$= Secx (\sec^2 x + \tan^2 x)$$



20- أوجد المشتقة الأولى y' إذا كان $y = \log_3(3x^2 - 5)$:

الحل:

$$\because \ y = \log_3(3x^2 - 5)$$

$$\therefore y' = \frac{1}{3x^2 - 5} \log_3 e . \frac{d}{dx}(3x^2 - 5) = \frac{6x}{3x^2 - 5} \log_3 e$$

21- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\frac{1}{(4x^2+6x-7)^3}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

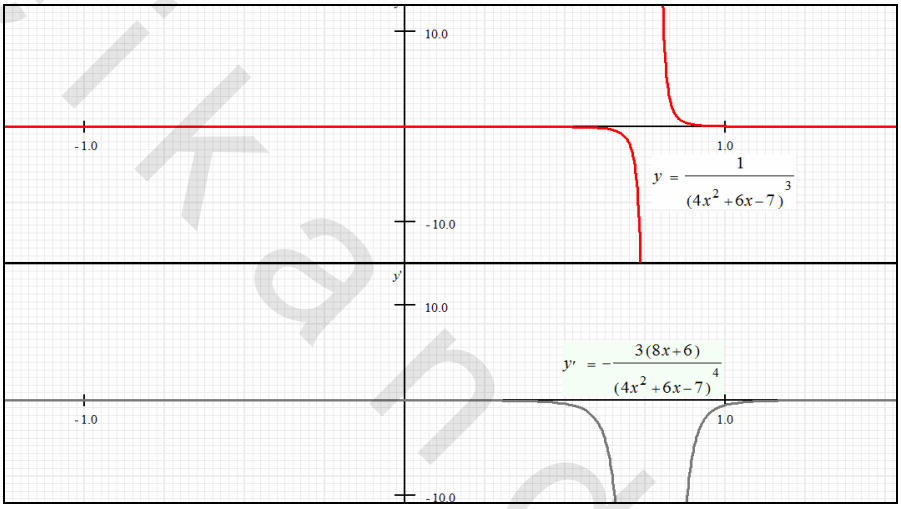
الحل:

$$y=(4x^2+6x-7)^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx}= y'= -3(4x^2+6x-7)^{-4}.(8x+6) = \frac{-6(4x+3)}{(4x^2+6x-7)^4}$$

منها

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6(4x+3)}{(4x^2+6x-7)^4}$$



22- أوجد المشتقة الأولى y' إذا كان $y=\log_3(\tan e^{x^2})$.

الحل:

$\because\ y=\ln_3(\tan e^{x^2})$

$$\therefore\ y'=\frac{1}{\tan e^{x^2}}.\frac{d}{dx}(\tan e^{x^2})=\frac{1}{\tan e^{x^2}}.\sec e^{x^2}\ \frac{d}{dx}\ e^{x^2}=\frac{2xe^{x^2}\sec e^{x^2}}{\tan e^{x^2}}$$

23- أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x)=(2x+5)^3\ .\ (3x-1)^4$.

الحل:

$$f'(x) = (2x+5)^3.4(3x-1)^3.(3)+(3x-1)^4.3(2x+5)^2(2)$$
$$= 6(2x+5)^2(3x-1)^3[2(2x+5)+(3x-1)]$$
$$= 6(2x+5)^2(3x-1)^3(7x+9)$$

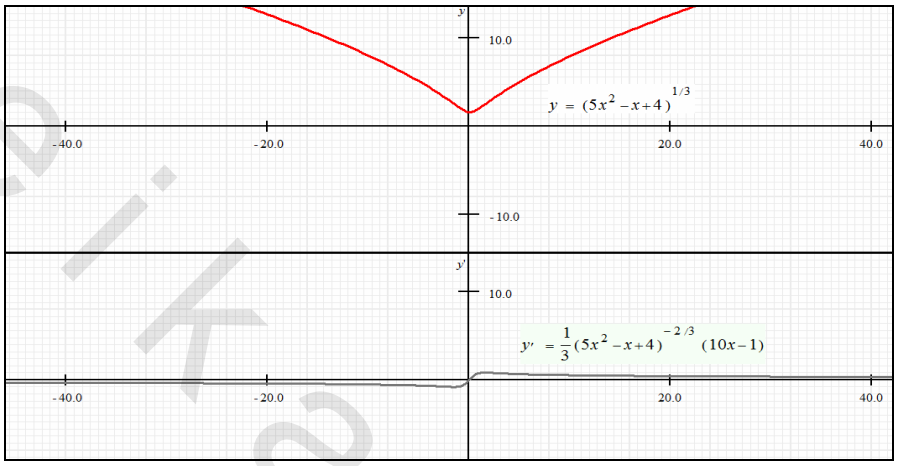
obeikandi.com

24- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $f(x) = y = \sqrt[3]{5x^2 - x + 4}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y = (5x^2 - x + 4)^{1/3}$$

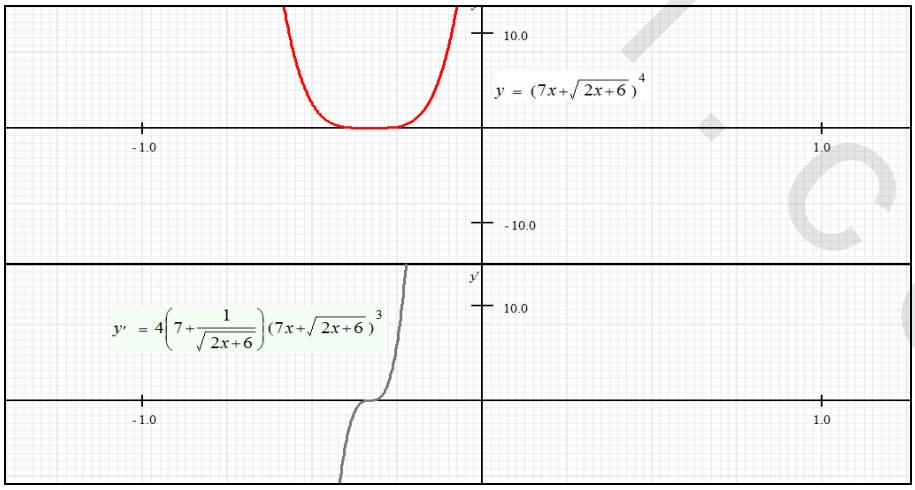
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(5x^2 - x + 4)^{-2/3}.(10x - 1) \quad \text{منها} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{10x - 1}{3\sqrt[3]{(5x2 - x + 4)^2}}$$



25-أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = (7x + \sqrt{2x + 6})^4$.

الحل:

$$f'(x) = 4(7x + \sqrt{x^2 + 6})^3 \cdot \left(7 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 6}}\right)$$



26- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \tan^3 4x$.

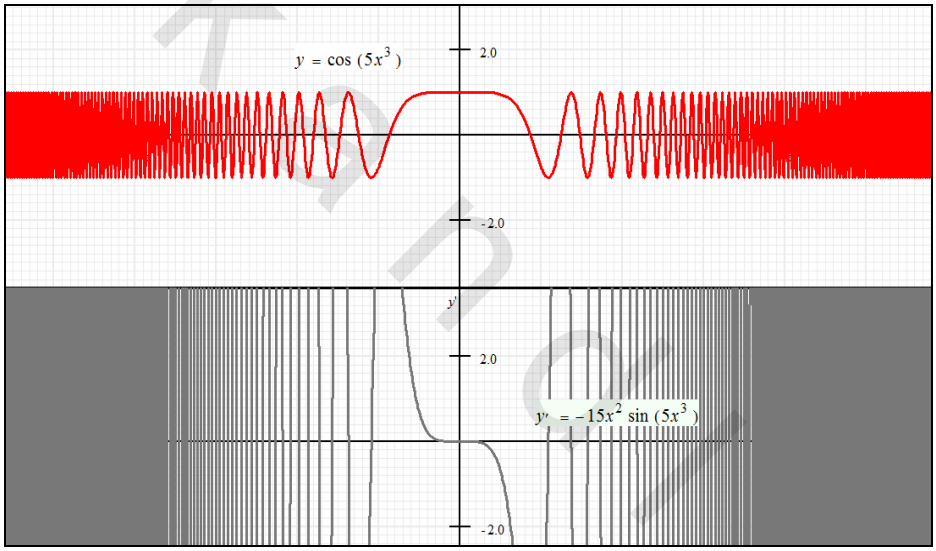
الحل:

$$y' = 3(\tan 4x)^2 . \sec^2 4x . (4)$$
$$= 3(\tan^2 4x)(4\sec^2 4x)$$
$$= 12 \tan^2 4x \sec^2 4x$$

27- أوجد y' إذا كانت $y = cox(5x^3)$.

الحل:

$$y' = [-\sin(5x^3)] . 15x^2 \quad = -15x^2 \sin(5x^3)$$



28- أوجد y' إذا كانت $y = \sqrt{\sin 6x}$.

الحل:

$$y = (\sin 6x)^{1/2}$$
$$y' = \frac{1}{2}(\sin 6x)^{-1/2} . \cos 6x . (6)$$
$$= \frac{3\cos 6x}{\sqrt{\sin 6x}}$$

29- أوجد y' إذا كانت $y=x^2\sin y$.

الحل: من خواص التفاضل الضمني نحصل على:

$$y' = (x^2)(\cos\ y.y') + (\sin\ y).(2x)$$
$$y' = (x^2\cos\ y)y' + 2x\sin\ y$$
$$y' - (x^2\cos\ y)y' = 2x\sin\ y$$
$$y'(1 - x^2\cos\ y) = 2x\sin\ y$$
$$y' = \frac{2x\sin\ y}{(1 - x^2\cos\ y)}$$

30- أوجد y' إذا كانت $4xy^3 - x^3y + x^3 - 5x + 6 = 0$.

الحل: من خواص التفاضل الضمني نحصل على:

$$4x(3y^2y') + 4y^3 - (x^3y' + 3x^2y) + 3x^2 - 5 = 0$$
$$7xy^2y' + 4y^3 - x^3y' - 3x^2y + 3x^2 - 5 = 0$$
$$y'(7xy^2 - x^3) + 4y^3 - 3x^2y + 3x^2 - 5 = 0$$
$$y' = \frac{-4y^3 + 3x^2y - 3x^2 + 5}{7xy^2 - x^3}$$

31- أوجد y' إذا كانت $\sin(\cos(xy) + x^3y = 0$.

الحل:

$$\cos(\cos(\ xy)(-\sin(\ xy)(\ xy' + y) + x^3\ y' + y3x^2 = 0$$
$$-\cos(\cos(\ xy)\sin(\ xy)(\ xy') + x^3\ y'$$

32- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $e^{x\ y} = x$

الحل:

$$\because\quad e^{x\ y} = x$$
$$(\ y + x\ y')\ e^{x\ y} = 1$$
$$y\ e^{x\ y} + x\ y'\ e^{x\ y} = 1$$
$$x\ y'\ e^{x\ y} = 1 - y\ e^{x\ y}$$
$$\therefore\quad y' = \frac{1 - y\ e^{x\ y}}{x\ e^{x\ y}}$$

obeikandi.com

33- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y^3 e^{xy} = \tan x$.

الحل:

$$\because\ y^3 e^{xy} = \tan x$$

$$3y^2 y' e^{xy} + (y + x y')\, e^{xy} y^3 = \sec^2 x$$

$$3y^2 y e^{xy}' + y^4 e^{xy} + x y' y^3 e^{xy} = \sec^2 x$$

$$y'(3y^2 e^{xy} + x y^3 e^{xy}) = \sec^2 x - y^4 e^{xy}$$

$$\therefore\ y' = \frac{\sec^2 x - y^4 e^{xy}}{3y^2 e^{xy} + x y^3 e^{xy}}$$

34- إذا كانت $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ فاثبت أن $y' = 1$.

الحل:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 2xy + y^2) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2x - 2y - 2x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y - 2x) = 2y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x}{2y - 2x} = 1$$

35- أوجد y' إذا كانت $x^2 + y^2 = 1$.

الحل: من خواص التفاضل الضمني نحصل على:

$$2x + 2yy' = 0$$

$$yy' = -x$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

****

obeikandl.com

Summary

- Let $y = f(x)$ be defined on an open interval (a,b):
  Then the derivative of $f(x)$ at $x \in (a,b)$,denoted by $f'(x)$, is defined by:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Whenever the limit exists.

- The function $y = f(x)$ is differentiable at the point $x = x_0$ if the derivative of $f(x)$ exists at this point. That is , if

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ exists.

- **Theorem:**
  If the function $y = f(x)$ is differentiable at the point $x = x_0$, Then this function is continuous at this point.
- **Some lows of differentiations:**
  Let C be a constant and $f(x)$ and $g(x)$ be two differentiable at the point x, then:

$$1: \frac{d}{dx} C = 0$$

$$2: \frac{d}{dx}(Cf(x)) = Cf'(x)$$

$$3: \frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$4: \frac{d}{dx}(f(x) \times g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$5: \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\,f'(x) - g'(x)\,f(x)}{(g(x))^2} \quad , \quad g(x) \neq 0$$

- The first derivative of the composite function (Chain rule)
  Let $f(x)$ and $g(x)$ be two differentiable functions at x, If $y = f(u)$ and $u = g(x)$, then **composite function:**

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$$

Is differentiable at x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- From Chain rule , we deduce the following laws:

$$1: \frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

obeikandl.com

$$2:\frac{d}{dx}a^{f(x)}=a^{f(x)}.\ln a.f'(x) \quad , \quad a>0$$

$$3:\frac{d}{dx}e^{f(x)}=e^{f(x)}.f'(x)$$

$$4:\frac{d}{dx}Log_a\ f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}Log_a e$$

$$5:\frac{d}{dx}\ln\ f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$6:\frac{d}{dx}\sin[f(x)]=\cos[f(x)]f'(x)$$

$$7:\frac{d}{dx}\cos[f(x)]=-\sin[f(x)]f'(x)$$

$$8:\frac{d}{dx}\tan[f(x)]=\sec^2[f(x)]f'(x)$$

$$9:\frac{d}{dx}\cot[f(x)]=-c\sec^2[f(x)]f'(x)$$

$$10:\frac{d}{dx}\sec[f(x)]=\sec\ [f(x)]\tan[f(x)]f'(x)$$

$$11:\frac{d}{dx}c\sec[f(x)]=-c\sec\ [f(x)]\cot[f(x)]f'(x)$$

The derivative of the inverse Trig functions:

$$1:\frac{d}{dx}\sin^{-1}[f(x)]=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$2:\frac{d}{dx}\cos^{-1}[f(x)]=\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$3:\frac{d}{dx}\tan^{-1}[f(x)]=\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$4:\frac{d}{dx}\cot^{-1}[f(x)]=\frac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$5:\frac{d}{dx}\sec^{-1}[f(x)]=\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}}$$

$$6:\frac{d}{dx}c\sec^{-1}[f(x)]=\frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}}$$

- If the variables x and y were given implicitly as in the equation $f(x,y)=0$ then to find y' of the implicit function we follow these steps:

1. We differentiate both sides with respect to x.

obeikandl.com

2. We solve the resulting equation in y' and find y' as a function of x, y.

- Let $f(x)$ and $g(x)$ be two differentiable functions to find first derivative of $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$ we follow the next steps:

1. Lake logarithm both sides then:

$$\ln y=\ln\left[f(x)\right]^{g(x)}=g(x).\ln f(x)$$

2. differentiale both sides:

$$\frac{y'}{y}=g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)\ln f(x)$$

3. Multiplying by y:

$$y'=y\left[g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)\ln f(x)\right]$$

4. Substituting by the value of y:

$$y'=\left[f(x)\right]^{g(x)}\left[g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}+g'(x)\ln f(x)\right]$$

****

obeikandl.com

تمارين على الفصل الرابع

1- أوجد المشتقة الأولى $f'(x)$ باستخدام التعريف للدوال التالية:

1: $f(x) = 4x^6$

2: $f(x) = (x^2 + 3)(x - 6)$

3: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3$

4: $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 5)$

5: $f(x) = (x^3 + x^2)(x - 1)$

6: $f(x) = \tan x^4 + \cos(\sin x^2) - \sec(\sqrt{x^3})$

7: $f(x) = (x^2 + 12)(\sqrt{x} - 1)$

8: $f(x) = x^{\frac{4}{7}} + 13x^{\frac{2}{3}} - 10\sin x$

9: $f(x) = e^{x^3} + \ln x^2 + \cos x - \tan(\sqrt{x})$

10: $f(x) = \sec x^4 + \cot 3x^2 - 15x$

2- أوجد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية موضحاً الإجابة بالرسم:

1: $y = x^2 \cos \sqrt{x}$

2: $y = \frac{x}{(x2 - 1)4}$

3: $y = \frac{x}{(x2 - 1)4}$

4: $y = \frac{x}{(x2 - 1)4}$

5: $y = (6x - 7)^3 \cdot (8x^3 + 9)^2$

6: $y = x^3 \sin x$

7: $y = 2x\cot x + x^2 \tan x$

8: $y = \sqrt[3]{8x^3 + 27}$

9: $y = 10\sqrt{x^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

10: $y = \frac{4}{(9x^2 + 16)^{2/3}}$

3- أوجد المشتقة الأولى y' إذا كانت:

1: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 100$

2: $8x^2 + y^2 = 10$

obeikandi.com

3: $y^2 = x\cos y$

4 : $2x^2 + \sin(xy) - \tan\sqrt{x} = xy$

5: $\cos y\sqrt{x} + \cot x^2\sqrt{y} = \sec(x^2 y)$

6 : $\cot(yx^2) + \dfrac{y^2}{\sin(xy)} = cse(x)$

7 : $e^{\sin(x)} + \ln(xy) = \sqrt{(xy)}$

8 : $\cot(\dfrac{x\sqrt{y}}{y}) + e^{x^4} = \ln(\sin(xy))$

9 : $18x^2 y + y^2 e^{xy} = \cos(\dfrac{1}{\sqrt{xy}})$

10 : $(x^3 - y\sqrt{x})(\sqrt{yx} - cse(x)) = \cot(x)$

4- إذا كانت $y = e^x \sin x$ برهن أن:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

5- أوجد المشتقة الرابعة لكل من الدوال التالية:

1: $y = x^5 - 3x^3 + 5x^2 + 1$

2: $y = e^{x^2+1}$

3: $y = \sin 3x$

6- أوجد مشقة الدوال التالية إلي الدرجة n ثم حدد درجة كل مشتقة فيها:

1: $y = 5x^3 - 2x^2 + 5x + 1$

2: $y = x^3 e^{x^2+1}$

3: $y = x^2 - 5x + 9$

****

obeikandl.com