

تطبيقات على المشتقات Application of the Derivatives

نقدم في هذا الفصل بعض التطبيقات الهامة على المشتقات والتي لها دور فاعل في إيجاد حلول لكثير من المسائل التطبيقية ومنها:

معادلة المماس والعمودي على المماس (الناظم) لمنحنى:

Equation of The Tangent and Normal Lines to a curve

نعلم أن معادلة الخط المستقيم ذي ميل m والمار بالنقطة (x_0, y_0) تعطى كما يلي:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

وبما أن ميل المستقيم عند النقطة (x_0, y_0) هو

$$m = f'(x_0)$$

فإن معادلة المستقيم تكون على الشكل:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

أو

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

وبما أن حاصل ضرب ميلي مستقيمين متعامدين يساوي (-1) (بشرط أن أيًا من المستقيمين لا يوازي المحور الرأسي) أي أن:

$$m_1 \times m_2 = -1$$

لذلك فإن:

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} \quad \text{أو} \quad m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

بشرط أن: $(m_2 \neq 0, m_1 \neq 0)$

وبما أن المعادلة العامة للخط المستقيم هي:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

فإن ميل العمودي على المماس يساوي مقلوب ميل المماس بإشارة مخالفة:

$$m \text{ عمودي} = -\frac{1}{f'(x_0)}, \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

بالتالي فإن معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \text{أو} \quad y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

مثال:

أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عند $x=2$ لمنحنى الدالة f حيث:
 $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

أولاً: يجب تعيين النقطة (x_0, y_0) ويتم ذلك بإيجاد y_0 :

$$y_0 = f(x_0) = 2x_0^3 - 5x_0 + 2$$

$$y_0 = 2(2)^3 - 5(2) + 2 = 8$$

$$\therefore (x_0, y_0) = (2, 8)$$

$$f'(x) = 6x^2 - 5$$

إذا:

$$m = 6(2)^2 - 5 = 19 \quad \text{ميل المماس عند } x=2 \text{ هو:}$$

بالتالي فإن معادلة المماس تكون على الصورة:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$19x - y - 30 = 0 \quad \text{أو} \quad y - 8 = 19(x - 2)$$

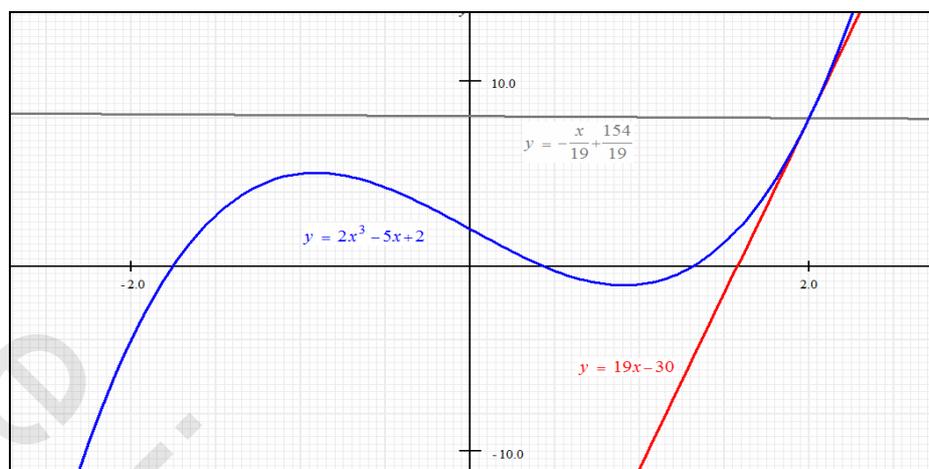
$$y = 19x - 30 \quad \text{ومنها}$$

$$\frac{-1}{19} = \text{ميل العمودي على المماس}$$

إذا معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - 8 = \frac{-1}{19}(x - 2) \quad \text{أو} \quad x + 19y - 154 = 0$$

$$y = \frac{-x}{19} + \frac{154}{19} \quad \text{منها نحصل على}$$



مثال:

اكتب معادلتى المماس والعمودي على المماس للمنحني $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة

(3,4).

الحل:

لإيجاد معادلة المماس نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x فيكون لدينا

$$2x + 2yy' = 0$$

$$\therefore 2yy' = -2x \rightarrow y' = \frac{-x}{y} \text{ ومنها } m = \frac{-3}{4}$$

∴ معادلة المماس هي: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\therefore y - 4 = \frac{-3}{4}(x - 3)$$

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{9}{4} + 4$$

$$\frac{3}{4}x + y - \frac{25}{4} = 0$$

$$3x + 4y - 25 = 0$$

∴ ميل (الناظم) العمودي على المماس:

$$m_1 = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

∴ معادلة العمودي على المماس هي: $y - y_0 = m_1(x - x_0)$

∴ معادلة العمودي هي:

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - 3) \rightarrow y = \frac{4}{3}x - 4 + 4$$

$$\frac{4}{3}x - y = 0 \rightarrow 4x - 3y = 0$$

مثال:

اكتب معادلة (الناظم) العمودي على المماس للمنحنى $y = 2 + x^2$ عند النقطة $(-1, 3)$ موضعاً الإجابة بالرسم.

الحل:

لتكن m ميل المماس و m_1 ميل العمودي عليه عندئذ نحسب m من المشتقة y' .

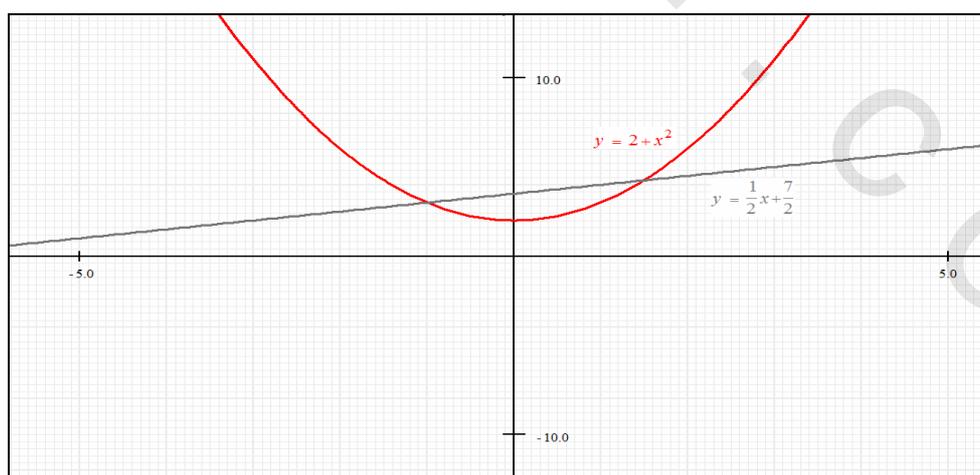
$$\text{بما أن: } y' = 2x \text{ منها } m = -2$$

$$\text{فإن ميل العمودي عليه: } m_1 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

∴ معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x + 1) \text{ ومنها } y - 3 = \frac{1}{2}[x - (-1)]$$

$$\text{ومنها } y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \text{ كما في الشكل التالي:}$$



مثال:

أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحني $y = \frac{x^3}{4-x}$ عند النقطة $(2,4)$.

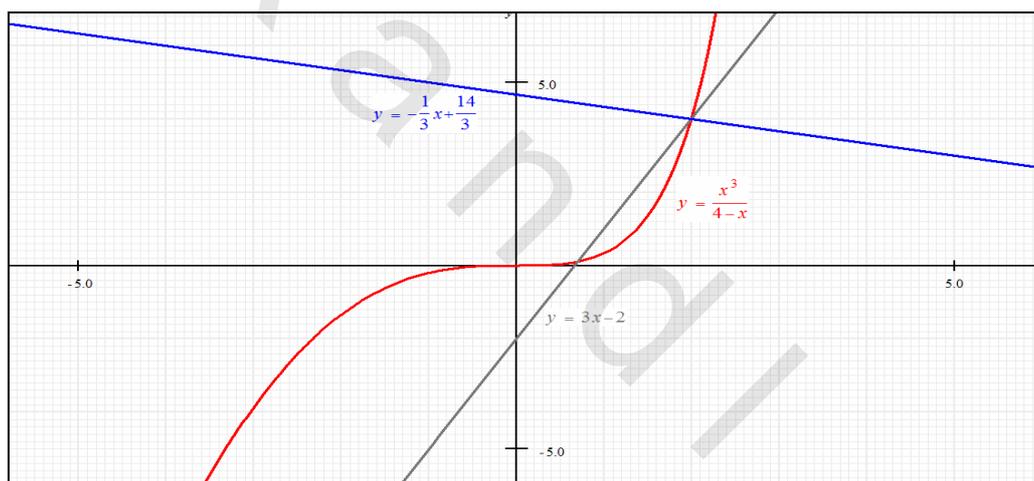
الحل:

نحسب المشتقة: $y' = \frac{3x^2(4-x) + x^3}{(4-x)^2}$ منها نوجد ميل المنحني:

$$m = \frac{12(4) - 2(8)}{2^3} = \frac{32}{8} = 3$$

$$y - 4 = 3(x - 2) \text{ ومنها } y = 3x - 2$$

ومعادلة العمودي هي $y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 2)$ ومنها: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{14}{3}$ كما في الشكل التالي:



نظرية رول Rolles Theorem .

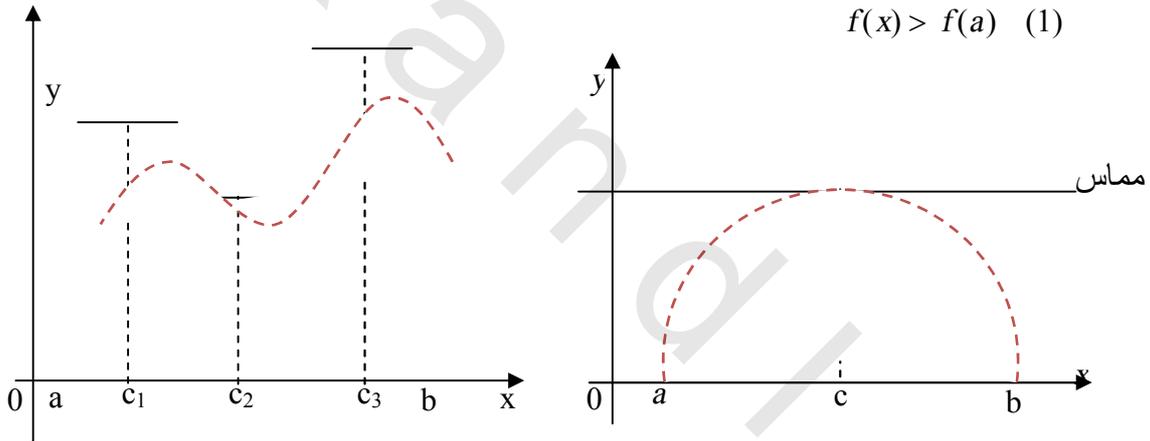
إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a, b) و مستمرة (متصلة) على $[a, b]$ وإذا كان $f(a) = f(b) = 0$ فإن هناك عنصر واحد على الأقل c في (a, b) حيث:

$$f'(c) = 0$$

البرهان:

أولاً: إذا كان $f(x) = f(a) = f(b)$ لكل $x \in (a, b)$ فإن الدالة f تكون دالة ثابتة وبالتالي فإن $f'(x) = 0$ لكل $x \in (a, b)$

ثانياً: إذا كان هناك $x \in (a, b)$ حيث أن $f(x) \neq f(a)$ فإن: $f(x) > f(a)$ أو $f(x) < f(a)$ ، لنأخذ الحالة:



هناك عدد c في (a, b) يحقق ما يلي $f(x) \leq f(c)$ لكل x في (a, b) لأن الدالة متصلة ولهذا تكون لها قيمة عظمى.

إذا $f(x) - f(c) \leq 0$ إذا كان c على يمين العدد x فإن $x - c < 0$ وبذلك فإن:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

ومن ذلك:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \dots\dots(1)$$

وإذا كان c على يسار العدد x فإن $x - c > 0$ وبذلك:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

ومن ذلك:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad \dots\dots(2)$$

من (1)، (2) نستنتج أن: $f'(c) = 0$.

من النظرية نجد أنه إذا كانت الدالة f مستمرة على فترة مغلقة وقابلة للاشتقاق على تلك الفترة المفتوحة وقيمة الدالة عند بداية الفترة تساوي قيمة الدالة عند نهاية الفترة وتساوي الصفر، فإنه يوجد على الأقل عنصر واحد c بين a, b ويكون المماس عند النقطة $(c, f(c))$ موازياً لمحور السينات وقد يكون هناك أكثر من c بين a, b تكون عنده المشتقة الأولى صفراً.

مثال:

أوجد العدد c في الفترة $(0,3)$ الذي يحقق نظرية رول للدالة $f(x) = 2x^2 - 6x$

الحل:

حيث أن $f(0) = f(3) = 0$ والدالة مستمرة على الفترة $[0,3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,3)$ فإنه:

$$f'(x) = 4x - 6$$

$$f'(c) = 4c - 6 = 0$$

$$\therefore 4c - 6 = 0$$

$$\therefore c = \frac{3}{2} \text{ يحقق نظرية رول لهذه الدالة.}$$

مثال:

أوجد العدد c في الفترة $(0,1)$ الذي يحقق نظرية رول للدالة $f(x) = \sqrt{x}(x^3 - 1)$

الحل:

بما أن $f(0) = f(1) = 0$ والدالة مستمرة على الفترة $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,1)$ فإنه:

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{x} + \frac{(x^3 - 1)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(c) = 3c^2\sqrt{c} + \frac{(c^3 - 1)}{2\sqrt{c}} = 0 \quad \text{نضع العدد } c \text{ نحصل على:}$$

$$3c^2\sqrt{c} + \frac{(c^3 - 1)}{2\sqrt{c}} = 0$$

$$6c^3 + c^3 - 1 = 0$$

$$c^3 = \frac{1}{7} \Rightarrow c = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

من الواضح أن: $c = \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ يحقق نظرية رول لهذه الدالة.

مثال :

برهن على وجود قيمتان للعدد c في الفترة $(0,2)$ الذي يحقق نظرية رول للدالة $f(x) = x(x-2)(x+7)$ مع رسم الدالة ؟

الحل:

بما أن $f(0) = f(2) = 0$ والدالة كثيرة الحدود مستمرة على الفترة $[0,2]$ وقابلة للاشتقاق

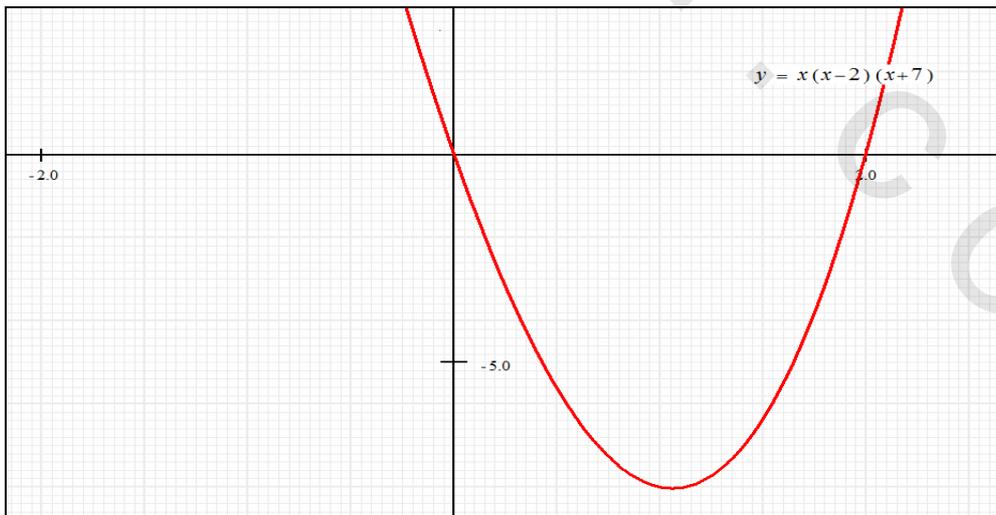
عليها فإن: $f'(x) = (x-2)(x+7) + x(x+7) + x(x-2)$ بوضع c بدلا من x

$$f'(c) = (c-2)(c+7) + c(c+7) + c(c-2) \quad \text{نحصل على:}$$

وبمساواتها بصفر نحصل على :

$$c^2 + 5c - 14 + c^2 + 7c + c^2 - 2c = 0 \quad \text{منها يكون لدينا } 3c^2 + 10c - 14 = 0 \quad \text{وبالتالي}$$

يكون هناك قيمتان للعدد c تحققان النظرية .



نظرية القيمة الوسطى Mean Value Theorem:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على (a, b) و مستمرة (متصلة) على $[a, b]$ فإن هناك عنصر واحد على الأقل c في (a, b) يحقق:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

البرهان:

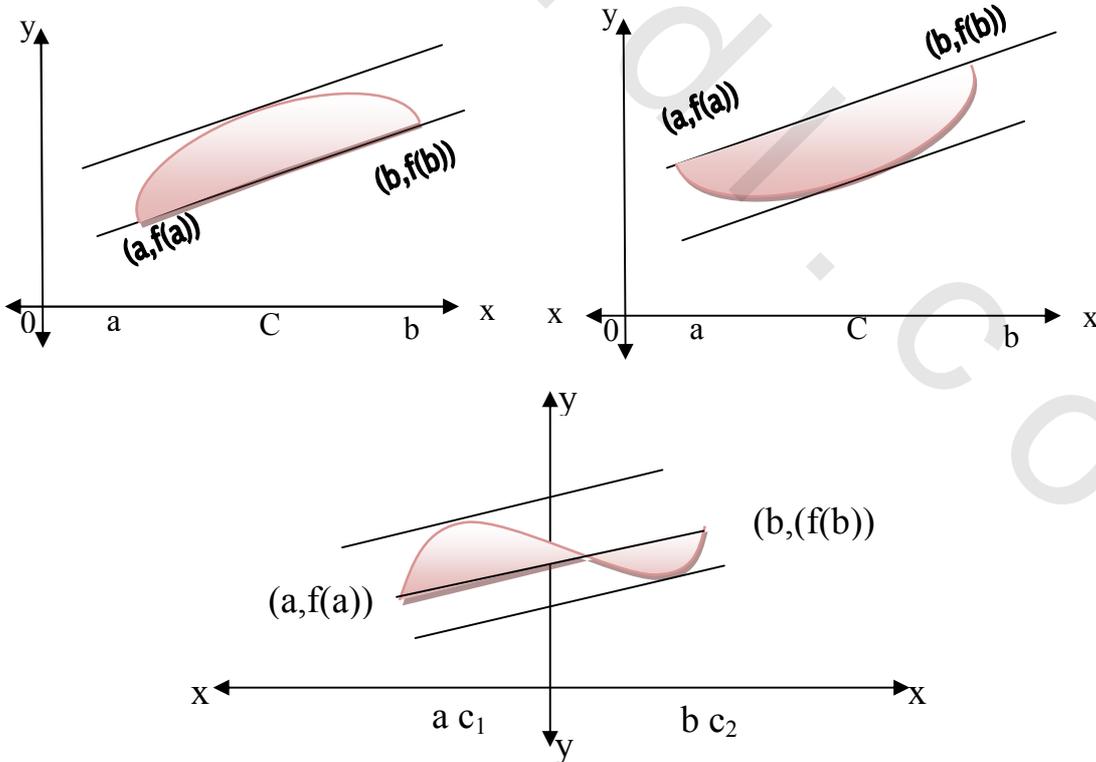
نعرف الدالة $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

نلاحظ أن g تحقق شروط نظرية رول كما أن: $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

إذا هناك $c \in (a, b)$ وحيث أن: $g'(x) = 0$ ومنها $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ومن ذلك نجد أن: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

توضح هذه النظرية بأنه ليس من الضروري أن يكون $f(a) = f(b)$ لوجود عدد c بين a, b يكون المماس عند النقطة $(c, f(c))$ موازياً للخط الواصل بين النقطتين $(a, f(a)), (b, f(b))$



مثال:

إذا كان $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 2x)$ فاوجد العدد c في الفترة $[0, 3]$ الذي يحقق نظرية القيمة

الوسطى.

الحل:

حيث أن الدالة $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 2x)$ متصلة (كثيرة الحدود) وقابلة للاشتقاق:

$$f'(x) = x^2 + \frac{2}{3}$$

$$f'(c) = \frac{f(11) - f(0)}{3 - 0} \quad \text{فإنه يوجد عدد } c \text{ بين } (0, 3) \text{ بحيث:}$$

$$c^2 + 2 = \frac{9 - 0}{3 - 0} = \frac{11}{3}$$

بذلك فإن $c = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$ ، $c^2 = \frac{5}{3}$ ، وحيث أن العدد $c = -\sqrt{\frac{5}{3}}$ يقع خارج الفترة $(0, 3)$

∴ فإن العدد c الذي يحقق نظرية القيمة الوسطى هو $c = \sqrt{\frac{5}{3}}$

مثال:

وضح لماذا لا يوجد عدد c في الفترة $(-1, 2)$ يحقق نظرية القيمة الوسطى للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.

الحل:

واضح أن الدالة غير مستمرة على الفترة $[-1, 2]$

لأن العدد 0 يقع داخل الفترة والدالة غير معرفة عندما $x = 0$.

مثال:

باستخدام نظرية القيمة الوسطى برهن صحة ما يلي:

$$\tan^{-1} b - \tan^{-1} a < b - a \quad , \quad \forall a < b$$

الحل:

فترض أن $f(x) = \tan^{-1} x$ والفترة (المجال) الاختياري $[a, b]$ عندئذ وبتطبيق نظرية

القيمة الوسطى على هذه الدالة المستمرة والقابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$ نجد:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\tan^{-1} b - \tan^{-1} a}{b - a}$$

منها $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ أي أن $f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$ منها نحصل على

$$\frac{1}{1+c^2} = \frac{\tan^{-1} b - \tan^{-1} a}{b - a}$$

ولكن $0 < \frac{1}{1+c^2} < 1$ لأن المقام أكبر من البسط وكلاهما موجبان

$$\frac{\tan^{-1} b - \tan^{-1} a}{b - a} < 1 \quad \text{إذاً}$$

منها نحصل على: $\tan^{-1} b - \tan^{-1} a < b - a$ وهو المطلوب.

التزايد والتناقص Increasing and decreasing:

تعريف:

لتكن f دالة معرفة على فترة ما ولتكن x_1, x_2 عددين اختياريين في تلك الفترة عندئذ:

a. تسمى f دالة متزايدة " increasing function " على الفترة إذا كان

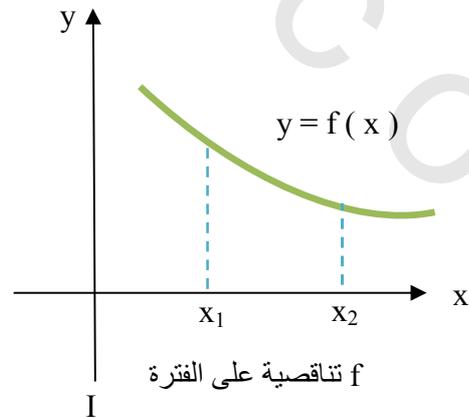
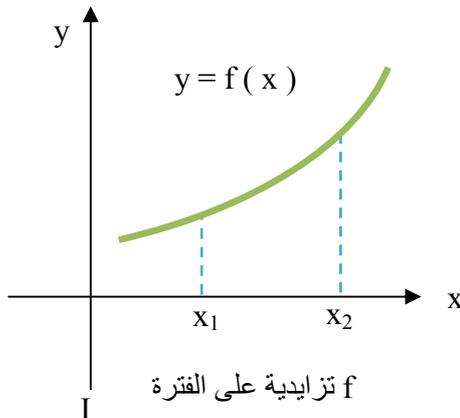
$$\forall x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

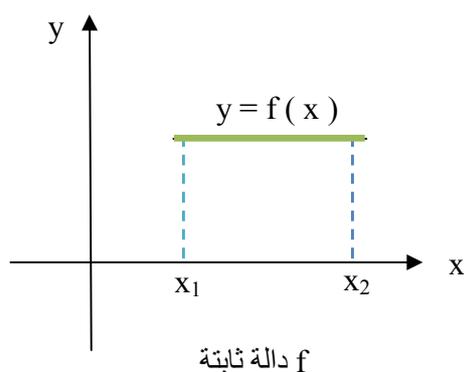
b. تسمى f دالة متناقصة " decreasing function " على الفترة إذا كان

$$\forall x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

c. تسمى f دالة ثابتة " constant function " على الفترة إذا كان

$$f(x_2) = f(x_1) \text{ لكل } x_2, x_1 \in I \text{ تنتمي إلى نفس الفترة.}$$





مثال:

ابحث تزايد الدالة $f(x) = x^4$ وتناقصها على الفترتين $L_1 = (-\infty, 0)$ $L_2 = (0, \infty)$.

الحل:

أولاً: إذا كانت $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ حيث:

$$x_1 < x_2$$

$$\therefore x_2 < 0, \quad x_1 < 0$$

وحيث أن: $x_1 < x_2$ وهذا يؤدي إلي $x_1^4 > x_2^4$ مثلا $-2 < -1$ هذا يؤدي إلي $16 > 1$.

\therefore الدالة $f(x)$ تكون تناقصية على الفترة $(-\infty, 0)$.

ثانياً: إذا كانت $x_1, x_2 \in (0, \infty)$

$$x_1 < x_2$$

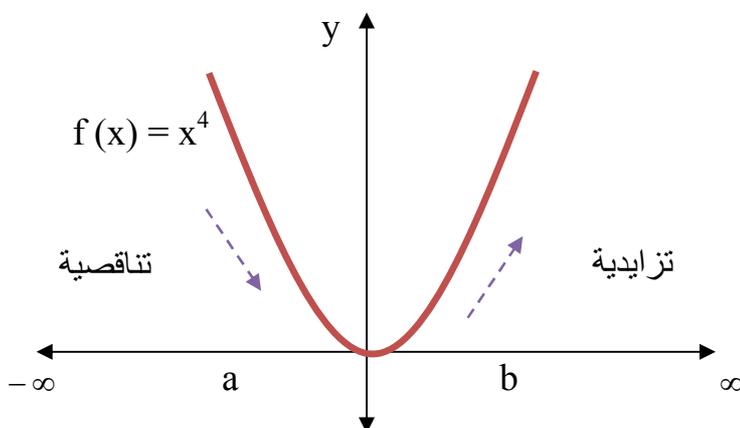
$$\therefore x_2 > 0, \quad x_1 > 0$$

حيث أن

$$x_1 < x_2$$

وحيث أن

$$x_1^4 < x_2^4$$



\therefore الدالة $f(x)$

تكون تزايدية على

الفترة $(0, +\infty)$

والشكل الآتي يبين

ذلك

بالتدقيق في الشكل السابق نلاحظ أن قيمة الدالة تتناقص على الفترة $(-\infty, 0)$ كلما ازدادت قيمة x في هذه الفترة وأن قيمة الدالة تترزايد على الفترة $(0, +\infty)$ كلما ازدادت قيمة x في هذه الفترة.

ملاحظة:

علمنا فيما سبق أن:

ميل المماس في نقطة = مشتقة الدالة في تلك النقطة = ظل الزاوية θ التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

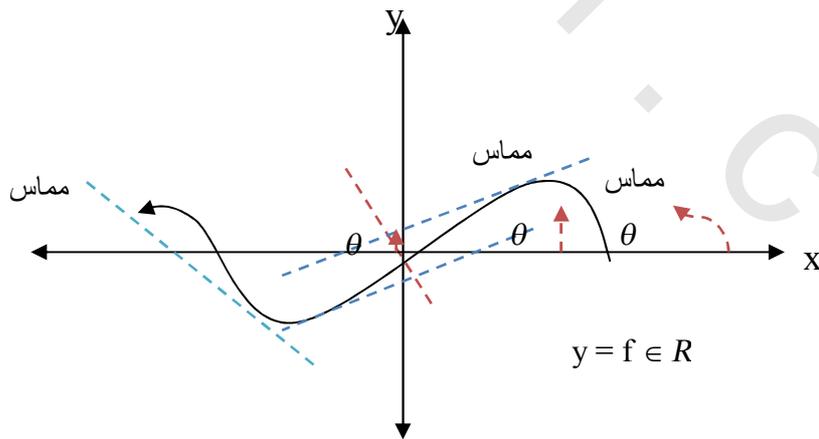
علماً بأن ميل المماس لا يساوي صفر إذا كانت: $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$

وأن ميل المماس $>$ صفر إذا كانت: $\pi > \theta > \frac{\pi}{2}$

ومن بيان الدالة الموضح بالشكل التالي نجد أن:

1- الدالة $f(x)$ تكون تزايدية على الفترات التي يكون فيها المماس يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

2- الدالة $f(x)$ تكون تناقصية على الفترات التي يكون فيها المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



مبرهنة Theorem :

لتكن الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة L وقابلة للتفاضل على الفترة: $(a, b) \subseteq L$

1- إذا كانت $f'(x) > 0$ لجميع قيم $x \in (a, b)$ تكون $f(x)$ متزايدة على الفترة (a, b) .

2- إذا كانت $f'(x) < 0$ لجميع قيم $x \in (a, b)$ تكون $f(x)$ متناقصة على الفترة (a, b) .

الإثبات:

1- لنكن x_1, x_2 أي عددين في الفترة (a, b) بحيث يكون $x_1 < x_2$ ولنكن الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة (x_1, x_2) وقابلة للاشتقاق على الفترة (x_1, x_2) فمن مبرهنة القيمة المتوسطة نجد أن:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

بما أن $x_1 < x_2$ ؛ كما أن: $f'(c) > 0$ (من الفرض)

إذا $f(x_2) - f(x_1) > 0$ وبالتالي فإن: $f(x_2) > f(x_1)$

وبذلك يتبين لنا أن: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

إذا من التعريف السابق لتزايد وتناقص الدالة ينتج أن $f(x)$ تكون متزايدة على الفترة (a, b) .

2- بطريقة مماثلة يمكن إثبات الجزء الثاني من المبرهنة.

مثال:

استخدم المبرهنة السابقة لاختبار الدالة $f(x) = -3x^2$ من حيث تزايدها وتناقصها على الفترتين المبيتين:

$$L_2 = (0, \infty) , L_1 = (-\infty, 0)$$

الحل:

$$f(x) = -3x^2$$

$$\therefore f'(x) = -6x$$

1 (إذا كانت x تنتمي للفترة $L_1 = (-\infty, 0)$ فإن $x < 0$ وبالتالي:

$$-6x > 0 \rightarrow f'(x) > 0$$

∴ الدالة تزايدية لجميع قيم $x \in L_1$.

2 (إذا كانت x تنتمي للفترة $L_2 = (0, \infty)$ فإن $x > 0$ وبالتالي:

$$-6x < 0 \rightarrow f'(x) < 0$$

∴ الدالة تناقصية لجميع قيم $x \in L_2$.

إذا كانت $f(x)$ دالة حقيقية معطاة فقد يكون هناك عدد معلوم من الفترات التي هي جزء من نطاق الدالة $f(x)$ وتكون عليها $f'(x) > 0$ كما قد يكون هناك عدد معلوم من الفترات التي هي جزء من نطاق الدالة $f(x)$ ويكون عليها $f'(x) < 0$ ولتحديد تلك الفترات نورد التعريف التالي:

1- القيم الحرجة Critical Point

تعرف القيم الحرجة للدالة $f(x)$ التي نطاقها الفترة L بأنها القيم:

$$x = c \in L = (a, b]$$

التي تحقق إحدى الشروط الآتية:

a. $f'(c) = 0$

b. $f'(c)$ غير موجودة (غير معرفة)

c. القيمة c هي القيمة النهائية للفترة المغلقة L أو نصف المغلقة.

ونبين هنا أنه لإيجاد القيمة الحرجة للدالة يتم إيجاد قيم x التي تكون عندها

$$f'(x) = 0$$

$$k_1 = \{ x : f'(x) = 0 \} \text{ أي}$$

كما يتم إيجاد x التي يكون عندها مشتقة الدالة غير موجودة أي:

$$k_2 = \{ x : f'(x) \text{ غير موجودة} \}$$

$$c_1, c_2, \dots, c_n \in k_1 \cup k_2 \cap L \text{ فإذا كانت}$$

فتكون الفترات التي يتم فيها اختبار الدالة من حيث أن:

$$f'(x) > 0 \text{ أو } f'(x) < 0 \text{ هي}$$

$$(c_n, b], \dots, (c_1, c_2), [a, c_1)$$

ونناقش ما إذا كانت $f'(x) > 0$ or $f'(x) < 0$ بمعنى نناقش التزايد أو التناقص للدالة عند كل فترة من هذه الفترات.

مثال:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2$$

أوجد النقاط الحرجة للدالة:

الحل:

نحسب المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x نضعها تساوي صفر ونحل المعادلة ذات المجهول x .

$$y' = f'(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$$

$$x = -1 \text{ أو } x = 2$$

نعوض في عبارة الدالة لكل قيمة لـ x .

$$\text{عند } x = 2 \rightarrow y = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 + 2 = \frac{-3}{4}$$

$$x = -1 \rightarrow y = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 + 2 = \frac{19}{6}$$

وبما أن $f'(x)$ كثيرة حدود معرفة في مجموعة الأعداد الحقيقية IR ، فإن النقاط الحرجة هي: $\left(2, \frac{-4}{3}\right), \left(-1, \frac{19}{6}\right)$

مثال:

$$f(x) = (x+5)^2 \sqrt[3]{x-4}$$

أوجد جميع القيم الحرجة للدالة:

الحل:

واضح أن الدالة تأخذ الشكل التالي $f(x) = (x+5)^2 (x-4)^{\frac{1}{3}}$ وتكون مشتقتها كالتالي:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+5)^2 (x-4)^{-\frac{2}{3}} + 2(x+5)(x-4)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{(x+5)^2}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}} + 2(x+5)(x-4)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{(x+5)^2 + 6(x+5)(x-4)}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x) = \frac{(x+5)[x+5+6x-24]}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}} \rightarrow f'(x) = \frac{(x+5)(7x-19)}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

النقاط الحرجة تحقق $f'(x) = 0$ أو $f'(x)$ غير موجودة
إذا كانت $f'(x) = 0$ فإن:

$$\frac{(x+5)(7x-19)}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}} = 0$$

إذا كان فقط $(x+5)(7x-19) = 0$

$$x = -5 \quad \text{or} \quad x = \frac{19}{7}$$

$f'(x)$ غير معرفة عندما المقام يساوي صفر

$$(x-4)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x-4)^2} = 0$$

أي عندما $x = 4$

∴ مجموعة القيم الحرجة في X هي: $\left\{-5, \frac{19}{7}, 4\right\}$

2- القيم العظمى والصغرى للدالة $f(x)$ Maximum and minimum values

تعريف:

لتكن $f(x)$ دالة معرفة على الفترة L وليكن c عدداً في هذه الفترة عندئذ:

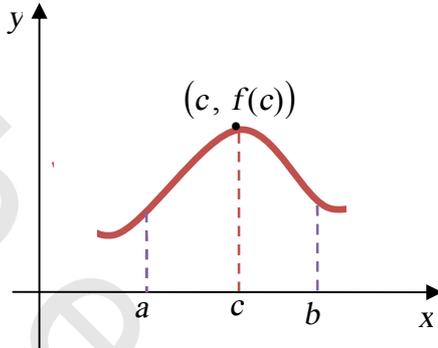
a. تسمى $f(c)$ قيمة عظمى للدالة $f(x)$ على الفترة L إذا كان:

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in L$$

b. تسمى $f(c)$ قيمة صغرى للدالة $f(x)$ على الفترة L إذا كان:

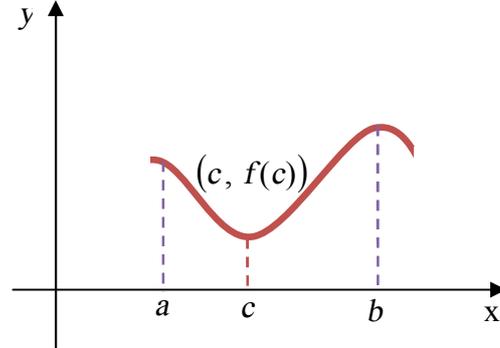
$$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in L$$

وإذا كانت $f(c)$ قيمة صغرى (عظمى) للدالة $f(x)$ على الفترة L فإننا نقول بأن f تأخذ قيمة صغرى (عظمى) عند العدد c .



$f(c)$ قيمة عظمى للدالة $f(x)$

على الفترة I



$f(c)$ قيمة صغرى للدالة $f(x)$

على الفترة I

وبذلك تكون النقطة $(c, f(c))$ هي أعلى نقطة (أخفض) على منحنى الدالة $f(x)$ على

الفترة $L = (a, b)$.

3- القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة $f(x)$

Maximum and Local minimum values Local

تعريف:

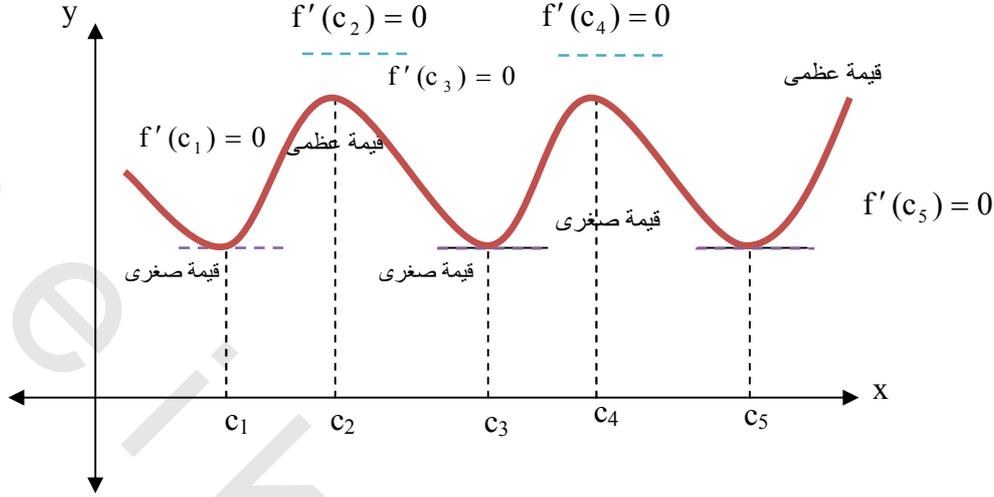
ليكن c عدداً في نطاق الدالة f عندئذ:

a- تسمى $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة $f(x)$ إذا وجدت فترة مفتوحة تحتوي

$$f(x) \leq f(c) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in (a, b)$$

b- تسمى $f(c)$ قيمة صغرى محلية للدالة $f(x)$ إذا وجدت فترة مفتوحة (a, b)

$$f(x) \geq f(c) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in (a, b)$$



القيم الحرجة Critical values

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) عندئذ ندعو $x = x_0$ نقطة حرجة إذا كان $f'(x_0) = 0$ أو $f'(x_0)$ غير موجودة.

يبين التعريف التالي طريقة إيجاد القيم القصوى المحلية باستخدام المشتقة الأولى للدالة:
لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال (a, b) ، وإذا كانت $x = x_0$ قيمة حرجة للدالة $f(x)$ عندئذ:

1- إذا كان $f'(x) > 0$ لجميع $x \in (a, x_0)$ و $f'(x) < 0$ لجميع $x \in (x_0, b)$ عندئذ يكون للدالة $f(x)$ قيمة قصوى محلية $f(x_0)$ عند النقطة $x = x_0$.

2- إذا كان $f'(x) < 0$ لجميع قيم $x \in (a, x_0)$ و $f'(x) > 0$ لجميع $x \in (x_0, b)$ عندئذ يكون للدالة $f(x)$ قيمة صغيرة محلية $f(x_0)$ عند النقطة $x = x_0$.

3- إذا كان $f'(x) > 0$ لجميع قيم $x \in (a, b)$ أو $f'(x) < 0$ لجميع $x \in (a, b)$ عندئذ لا تملك الدالة $f(x)$ أي قيمة قصوى محلية أو صغيرة محلية عند أي نقطة $x_0 \in (a, b)$.

القيم القصوى المطلقة: Absolute Min Max Values

إذا كانت الدالة f دالة مستمرة على نطاقها وكان نطاقها D_f مجالاً مغلقاً عندئذ يكون لهذه الدالة قيم قصوى مطلقة (شاملة).

خطوات إيجاد القيم القصوى للدالة f المتصلة على فترة مغلقة $[a, b]$:

1- أوجد جميع القيم الحرجة في الفترة $[a, b]$.

2- احسب $f(c)$ لكل قيمة حرجة c .

3- احسب قيمة $f(a)$, $f(b)$.

قارن القيم المحسوبة في (2)، (3) وبذلك تكون أكبر قيمة محسوبة هي القيمة العظمى

للدالة f على الفترة $[a, b]$ ، وأصغر قيمة محسوبة هي القيمة الصغرى للدالة f على الفترة $[a, b]$.

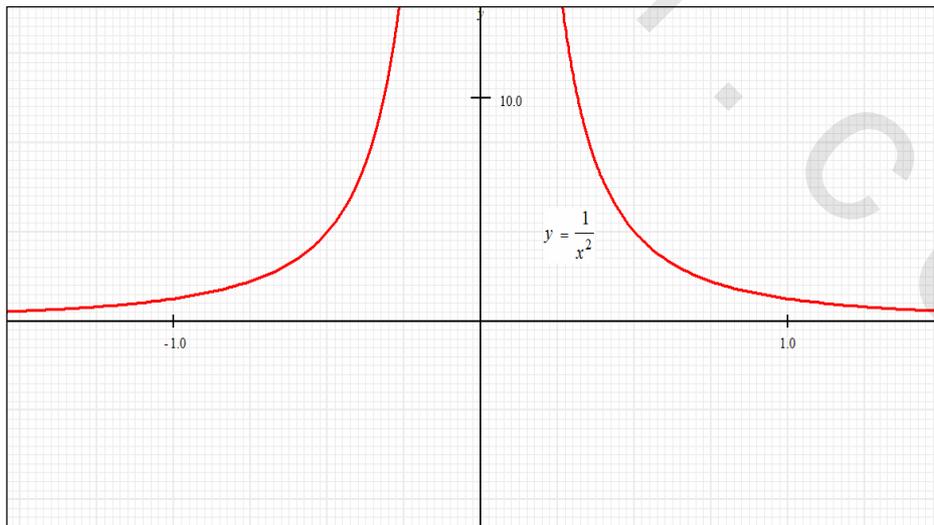
مثال:

لتكن $f(x) = \frac{1}{x^2}$ أرسم الدالة و حدد ما إذا كانت f متزايدة أو متناقصة على

الفترات المعطاة و اوجد القيم القصوى على كل فترة

$$[1, 2], (1, 2), (-2, -1], [-1, 2]$$

الحل:



تفاضل الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ هو $f'(x) = -\frac{1}{x}$ منها نحصل على:

$$f'(x) > 0 \iff x < 0$$

$$f'(x) < 0 \iff x > 0$$

القيم الصغرى	القيم العظمى	التناقص	التزايد	الفترات
$f(2) = \frac{1}{4}$	$f(1) = 1$	متناقصة		$[1, 2]$
$f(2) = \frac{1}{4}$	لا توجد	متناقصة		$(1, 2]$
لا توجد	لا توجد	متناقصة		$(1, 2)$
لا توجد	$f(1) = 1$	متزايدة	متزايدة	$(-2, -1]$
$f(2) = \frac{1}{4}$	لا توجد	ليست متناقصة	ليست متزايدة	$[-1, 2]$

مثال:

أوجد القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية ثم أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة:

$$f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3, \quad x \in [-3, 3]$$

الحل:

$$f'(x) = 4 - x^2 \rightarrow f'(x) = (2 - x)(2 + x)$$

∴ القيم الحرجة هي عندما $f'(x) = 0$

$$x = 2, \quad x = -2$$

∴ القيم الحرجة هي $\{-2, 2\}$

∴ الفترات هي $[-3, -2]$, $(-2, 2)$, $(2, 3]$

وعلى ذلك فإنه يلزم تعيين إشارة $f'(x)$ على هذه الفترات كما يلي:

$$(1) \text{ إذا كانت } x \in [-3, -2] \text{ فإن } f'(x) < 0$$

فالدالة $f(x)$ تناقصية على الفترة $(-3, 2)$.

$$(2) \text{ إذا كانت } x \in (-2, 2) \text{ فإن } f'(x) > 0$$

فالدالة $f(x)$ تزايدية على الفترة $(-2, 2)$.

(3) إذا كانت $x \in (2, 3]$ فإن $f'(x) < 0$

فالدالة $f(x)$ تناقصية على الفترة $(2, 3]$.

نستنتج من (1)، (3) أن للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = -2$

$$f(-2) = \frac{-16}{3} \text{ وهي}$$

ومن (2)، (3) نرى أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = 2$

$$f(2) = \frac{16}{3} \text{ وهي}$$

بقي اختبار الدالة عند $x = -3$ ، $x = 3$

وحيث أن قيمة الدالة تتناقص على الفترة $(-3, -2)$

لجميع قيم $x \in [-3, -2)$ ، $f(-3) > f(x)$

وبذلك تكون $f(-3) = -3$ قيمة عظمى محلية على الفترة $(-3, -2)$

كما يتضح أن قيمة الدالة تتناقص على الفترة $(2, 3]$

$\therefore f(3) < f(x)$

لجميع قيم $x \in (2, 3]$

وبذلك تكون $f(3) = 3$ قيمة صغرى محلية على الفترة $(2, 3]$.

مما سبق نرى أن القيم العظمى المحلية للدالة هي:

$$f(2) = \frac{16}{3} \quad , \quad f(-3) = -3$$

\therefore القيمة العظمى المطلقة هي:

$$f(2) = \frac{16}{3}$$

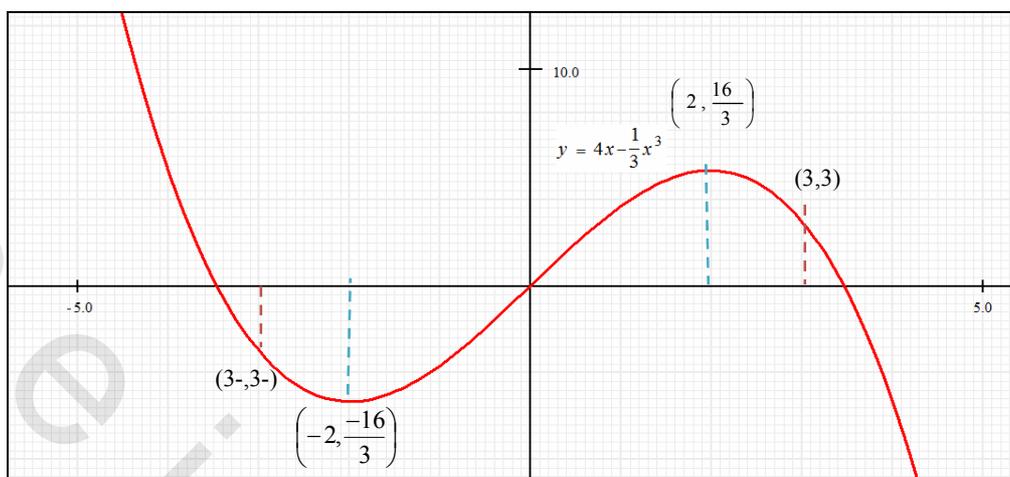
أما القيم الصغرى المحلية هي:

$$f(-2) = \frac{-16}{3} \quad , \quad f(3) = 3$$

\therefore القيمة الصغرى المطلقة هي:

$$f(-2) = \frac{-16}{3}$$

وبيان الدالة هو:



مثال:

بفرض أن $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ أوجد فترات تزايد وتناقص الدالة واحسب القيم الصغرى والعظمى وارسم الدالة.

الحل:

لبيان فترات تزايد وتناقص الدالة نوجد مشتقتها:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \text{ ومنها } f'(x) = 3x(x-2)$$

وبالتالي: $f'(x) > 0$ ومنها $3x(x-2) > 0$ هذا يؤدي إلى $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ والدالة متزايدة في المجال $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ وكذلك $f'(x) < 0$ هذا يؤدي إلى $x \in (0, 2) \Leftrightarrow 3x(x-2) < 0$ والدالة متناقصة في المجال $(0, 2)$ نحصل على القيم الصغرى والعظمى المحلية من خلال انعدام المشتقة $x=2$ أو $x=0 \Rightarrow y'=0$ وبالتالي النقطة $(0, 2)$ هما نقطتين جديتين كما في

الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	2	$-\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
	الدالة تزايدية		الدالة تناقصية		الدالة تزايدية
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	
		max	min		

4. اختبار المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى

Test first derivative for maximum and minimum values

لنكن f دالة متصلة عند العدد الحرج c وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة I التي تحتوي على العدد الحرج c ، فيما عدا عند العدد c نفسه عندئذ:

- a. إذا تغيرت إشارة $f'(x)$ من سالب إلى موجب (تغيرت $f(x)$ من تناقص إلى تزايد) عند العدد c فإن $f(c)$ تكون قيمة صغرى محلية للدالة $f(x)$.
- b. إذا تغيرت إشارة $f'(x)$ من موجب إلى سالب (تغيرت $f(x)$ من تزايد إلى تناقص) عند العدد c فإن $f(c)$ تكون قيمة عظمى محلية للدالة $f(x)$.
- c. إذا كانت $f'(x) > 0$ أو $f'(x) < 0$ لكل $x \in I$ [فيما عدا عند العدد c] فإن $f(c)$ لا تعتبر قيمة قصوى محلية للدالة $f(x)$.

مثال:

أوجد القيمة العظمى المحلية أو الصغرى المحلية للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x}(8-x)$.

الحل:

إذا $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(8-x)$ بذلك نطاق الدالة هو $(-\infty, \infty)$

تحديد القيمة الحرجة $\therefore f'(x) = x^{\frac{1}{3}}(-1) + (8-x)\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)$

$$= -x^{\frac{1}{3}} + \frac{(8-x)}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{-3x + 8 - x}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\text{إذا} \rightarrow \frac{8-4x}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{4(2-x)}{x^{\frac{2}{3}}} = 0 \rightarrow x = 2, \quad x \neq 0$$

$x = 0$ قيمة حرجة لأن $f'(x)$ غير معرفة

كذلك $x = 2$ قيمة حرجة لأن $f'(x) = 0$

وبذلك يكون تقسيم فترات الاختبار كالتالي:

$$(-\infty, 0), (0, 2), (2, \infty)$$

الفترة	نقطة الاختبار	$f'(x)$	الدالة	القيم القصوى المحلية
$(-\infty, 0)$	-1	+	تزايدية	لا توجد قيم صغرى ولا عظمى
$(0, 2)$	1	+	تزايدية	لا توجد قيم صغرى ولا عظمى
$(2, \infty)$	3	—	تناقصية	توجد قيم عظمى محلية

إذا القيمة العظمى المحلية هي $f(2)$ وتساوي $6\sqrt[3]{2}$

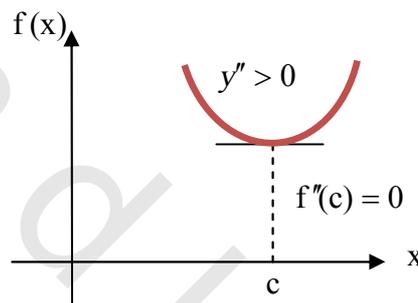
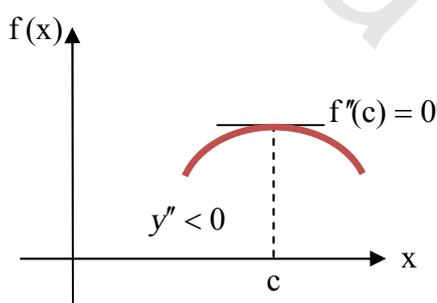
5- الاختبار التفاضلي الثاني لتحديد القيم الصغرى والكبرى:

Test second derivative for determine maximum and minimum values \square

باعتبار أن f دالة قابلة للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوي عدداً c وكان $f'(x) = 0$ فإنه:

(1) إذا كان $f''(c) < 0$ فإن $f(c)$ قيمة كبرى نسبية.

(2) إذا كان $f''(c) > 0$ فإن $f(c)$ قيمة صغرى نسبية.



ملاحظة:

- إذا كان $f'(c)$ كمية غير معرفة يستخدم الاختبار الأول.

- إذا كان $f'(c) = 0$ يستخدم الاختبار الثاني.

مثال:

أوجد القيم الكبرى والصغرى المحلية للدالة $f(x)$ حيث $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 8)$.

الحل:

$$f'(x) = x^{\frac{2}{3}}(2x) + (x^2 - 8) \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = 2x^{\frac{5}{3}} + \frac{2(x^2 - 8)}{3x^{\frac{1}{3}}} \rightarrow \frac{6x^2 + 2x^2 - 16}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\rightarrow \frac{8x^2 - 16}{3x^{\frac{1}{3}}} \rightarrow \frac{8(x^2 - 2)}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

∴ القيم الحرجة هي:

$$f'(x) = 0 \text{ عندها } x = \pm\sqrt{2}$$

$x = 0$ عندها $f'(x)$ غير معرفة

∴ الفترات هي: $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$

نكون الجدول التالي:

الفترة	نقطة الاختبار	$f'(x)$	الدالة $f(x)$	القيم القصوى المحلية
$(-\infty, -\sqrt{2})$	-2	-	تناقصية	
$(-\sqrt{2}, 0)$	-1	+	تزايدية	$f(-\sqrt{2})$ توجد قيم صغرى محلية
$(0, \sqrt{2})$	1	-	تناقصية	$f(0)$ توجد قيم عظمى محلية
$(\sqrt{2}, \infty)$	3	+	تزايدية	$f(\sqrt{2})$ توجد قيم صغرى محلية

مثال:

أرسم الدالة $f(x) = x^3 - 27x$ أوجد القيم الكبرى والصغرى باستخدام الاختبار

التفاضلي الثاني.

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 27 \rightarrow 3(x^2 - 9) = 0$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$f''(x) = 6x$$

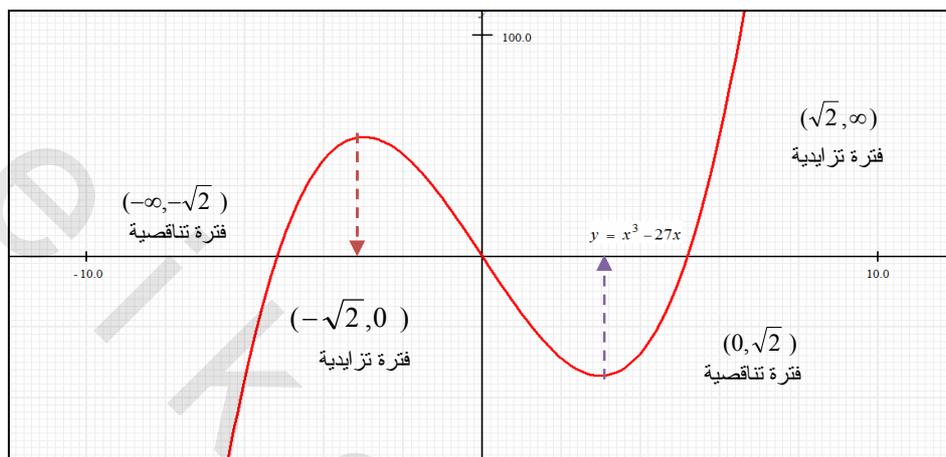
∴ باستخدام اختبار الأعداد الحرجة بالتفاضل الثاني

$$f''(3) = 18 > 0$$

∴ عند $x = 3$ قيمة صغرى والنقطة هي $(3, f(3)) \leftarrow (3, -54)$

$$f''(-3) = -18 < 0$$

∴ قيمة كبرى عند $x = -3$ والنقطة هي $(-3, f(-3)) \leftarrow (-3, 54)$



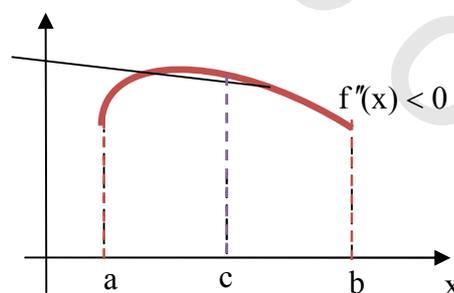
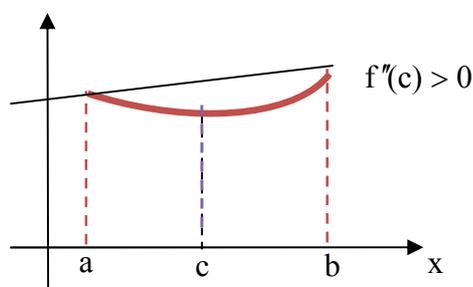
6- تقعر المنحنيات ونقاط الانقلاب (الانعطاف)

Concaveity of a curve and inflections points

تعريف:

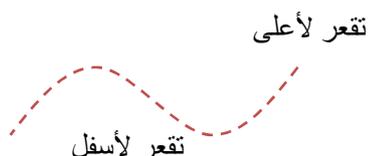
يقال لمنحنى الدالة f القابلة للاشتقاق في فترة I إنه مقعر للأعلى إذا كانت $f(x) > 0$ في الفترة I ويقال أنه مقعر للأسفل إذا كانت $f(x) < 0$ في تلك الفترة. ولذلك يمكن أن نختبر تقعر المنحنى لأي دالة كالاتي:

- منحنى الدالة f يكون مقعراً للأعلى إذا كانت $f''(x) > 0$ في الفترة I .
- منحنى الدالة f يكون مقعراً للأسفل إذا كانت $f''(x) < 0$ في الفترة I .



نقطة الانقلاب (الانعطاف) Inflection point:

هي النقطة التي يتغير عندها تقعر المنحنى من أعلى إلى أسفل أو العكس ويكون عندها $f''(c) = 0$ ويقال للنقطة أنها نقطة انقلاب إذا وجدت فترة مفتوحة (a, b) تحوي عدداً c بحيث:



1. $f''(x) > 0$ عندما $a < x < c$ و $f''(x) < 0$ عندما $c < x < b$
2. $f''(x) < 0$ عندما $a < x < c$ و $f''(x) > 0$ عندما $c < x < b$

مثال:

أوجد نقطة الانقلاب للمنحنى $y = x^3$.

الحل:

نوجد المشتقة الأولى ثم الثانية:

$$\therefore y' = 3x^2 \Rightarrow y'' = 6x$$

$$y'' = 0 \rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\therefore y'' > 0 \rightarrow 6x > 0 \rightarrow x > 0$$

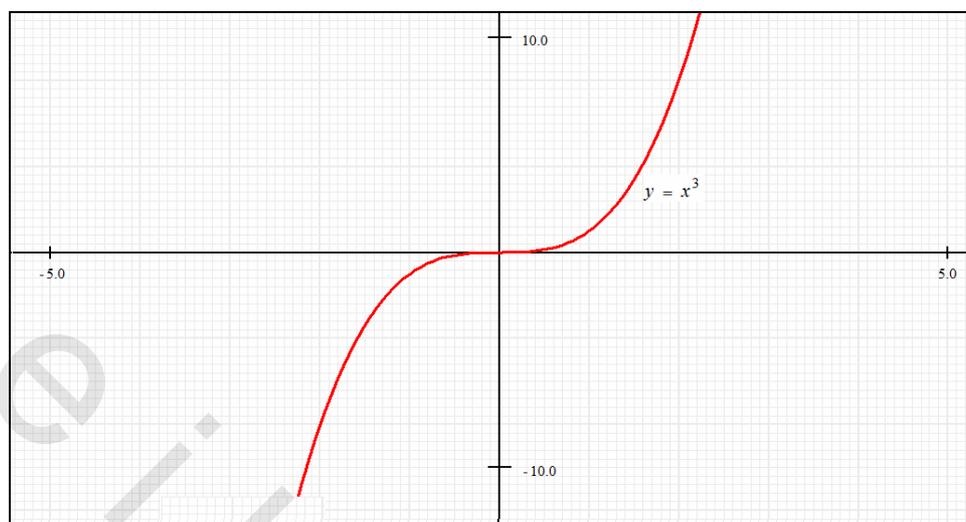
$$\therefore y'' < 0 \rightarrow 6x < 0 \rightarrow x < 0$$

$$\therefore y'' < 0 \rightarrow x \in (-\infty, 0)$$

$$y'' > 0 \rightarrow x \in (0, \infty)$$

\therefore عند $x = 0$ يوجد نقطة انقلاب وهي النقطة $(0, 0)$

نقطة الانقلاب	تقعر المنحنى	$f'(x)$	نقطة الاختبار	الفترة
$(0, f(0))$	مقعر إلى أسفل	-	-1	$(-\infty, 0)$
$(0, 0)$	مقعر إلى أعلى	+	1	$(0, \infty)$



مثال:

أوجد نقطة الانقلاب للمنحنى $y = x^{\frac{1}{3}}$.

الحل:

$$y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$y'' = \frac{-2}{3} \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{5}{3}} \right) = \frac{-2}{9} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$$

هذا يؤدي إلى

$$\therefore y'' > 0 \rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{x^5}} < 0 \rightarrow x < 0$$

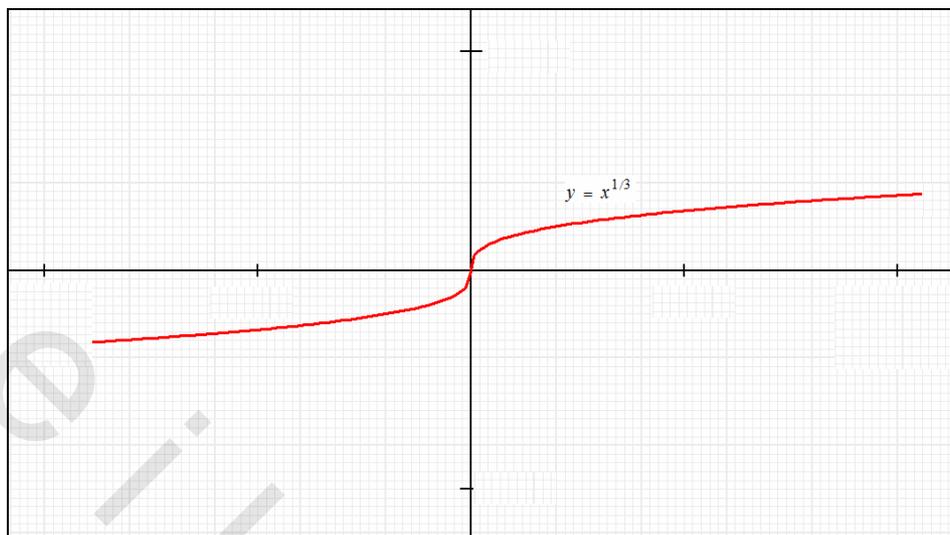
$$y'' < 0 \rightarrow \frac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}} > 0 \rightarrow \sqrt[3]{x^5} > 0 \rightarrow x > 0$$

∴ الفترة $(-\infty, 0)$ تكون $y'' > 0$ (تقعر إلى الأعلى)

وفي الفترة $(0, +\infty)$ تكون $y'' < 0$ (تقعر إلى الأسفل)

∴ عند $x = 0$ توجد نقطة انقلاب هي $(0, f(0))$ وهي $(0, 0)$.

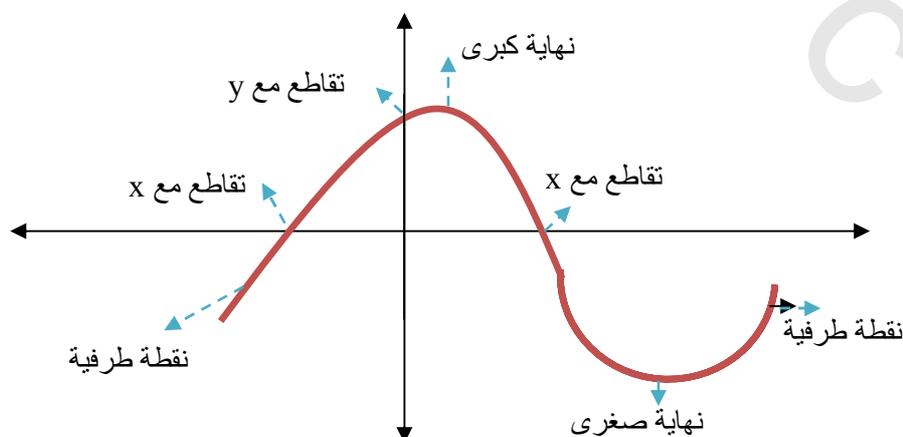
الفترة	نقطة الاختبار	$f''(x)$	تقر المنحنى	نقطة الانقلاب
$(-\infty, 0)$	-1	+	مقعر أعلى	$(0, 0)$
$(0, \infty)$	1	-	مقعر أسفل	$(0, 0)$



7- رسم المنحنيات Graph curves

لكي نقوم برسم منحنى ما نبتع الخطوات الآتية:

- (1) نوجد $f'(x)$, $f''(x)$ للدالة $f(x)$.
- (2) نحدد الفترات التي تتزايد فيها الدالة، والفترات التي تتناقص فيها الدالة.
- (3) نحدد أنواع التقعر للمنحنى خلال الفترات المختلفة.
- (4) نبيّن النقاط المهمة على الرسم مثل:
 - النقاط الحرجة، نطاق الانقلاب، نقاط القيمة الطرفية و نقاط تقاطع المنحنى مع محور x ومحور y .



1

مثال:

ارسم المنحنى للدالة $y = f(x)$ حيث $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ في الفترة $(-10, 10)$.

الحل:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$\therefore 4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 12) = 0$$

$$\therefore x = 0, x = 3$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$

- نوجد القيم الكبرى والصغرى بالتفاضل الثاني

$$f''(3) = 12(9) - 24(3)$$

$$= 108 - 72 > 0$$

∴ توجد قيمة صغرى عند النقطة $(3, f(3)) \leftarrow (3, -17)$

التقعر والانقلاب:

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 24x = 0$$

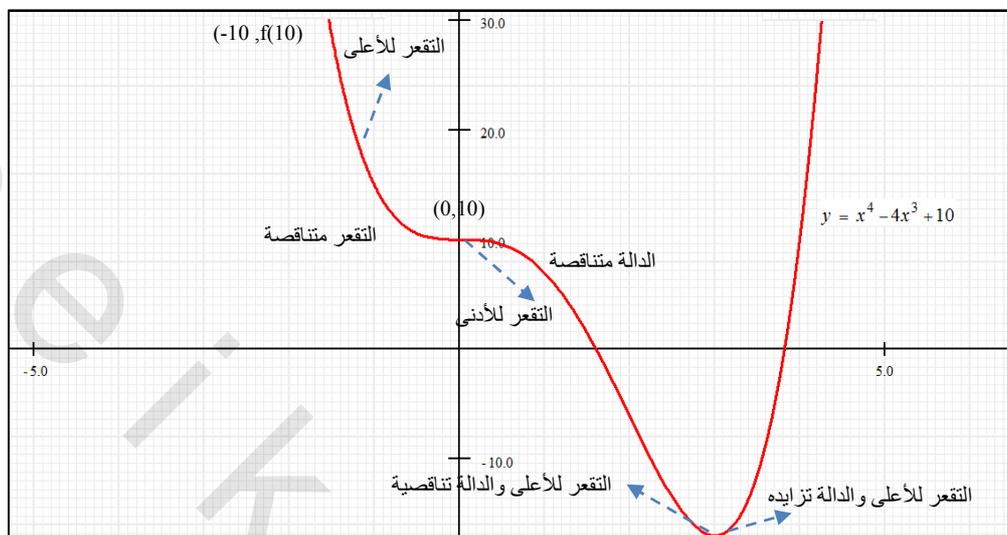
$$12x(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 0, x = 2$$

نقطة الانقلاب الأولى هي: $(2, -6) \rightarrow (2, f(2)) \rightarrow x = 2$

نقطة الانقلاب الثانية هي: $(0, 10) \rightarrow (0, f(0)) \rightarrow x = 0$

x	-10	بينهما	0	بينهما	2	بينهما	3	بينهما	10
f'	الدالة متناقصة	-	0	-	الدالة متناقصة	-	-1	+	الدالة متزايدة
f''	التقعر للأعلى	+	0	-	التقعر للأدنى	+	1	+	التقعر للأعلى
f	14010	+	10	-	6-	-	3	-17	
	لا توجد نهاية		لا توجد نهاية		لا توجد نهاية		نهاية صغرى		لا توجد نهاية



مثال:

ارسم منحنى الدالة $f(x) = \sin x$ على المجال $[-2\pi, 2\pi]$.

الحل:

بما أن $x \in [-2\pi, 2\pi]$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0$$

$$\therefore x = \frac{n\pi}{2}, \quad n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots$$

والقيم الواقعة ضمن الفترة $[-2\pi, 2\pi]$ هي: $n = \pm 1, \pm 3, \dots$

$$f''(x) = -\sin x \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow \sin x = 0$$

$$\therefore x = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

والقيم الواقعة ضمن الفترة $[-2\pi, 2\pi]$ هي: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

الفترة	نقطة الاختبار	$f'(x)$	الدالة
$\left(-2\pi, -3\frac{\pi}{2}\right)$	$-5\frac{\pi}{3}$	+	تزايدية
$\left(-3\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$	$-5\frac{\pi}{4}$	-	تناقصية
$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	+	تزايدية
$\left(\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right)$	$5\frac{\pi}{4}$	-	تناقصية
$\left(3\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$	$5\frac{\pi}{3}$	+	تزايدية

عند $x = -3\frac{\pi}{2}$ توجد نهاية عظمى $\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right) = \left(-\frac{3\pi}{2}, f\left(-3\frac{\pi}{2}\right)\right)$

عند $x = -\frac{\pi}{2}$ توجد نهاية صغرى $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

عند $x = \frac{\pi}{2}$ توجد نهاية صغرى $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

عند $x = 3\frac{\pi}{2}$ توجد نهاية صغرى $\left(3\frac{\pi}{2}, 1\right) = \left(3\frac{\pi}{2}, f\left(3\frac{\pi}{2}\right)\right)$

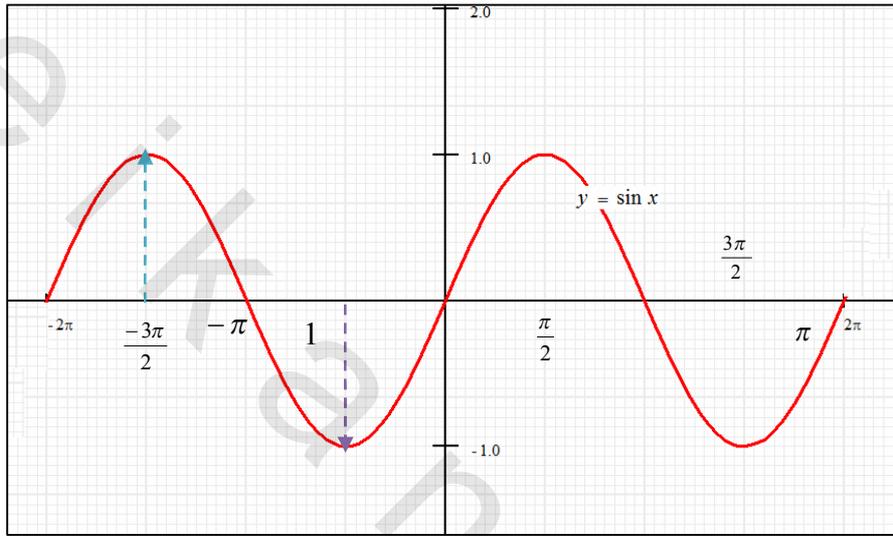
التقعر ونقاط الانقلاب:

الانقلاب	التقعر	$f''(x)$	نقطة الاختبار	الفترة
$(-\pi, 0) \leftarrow x = -\pi$	لأسفل	-	$-3\frac{\pi}{2}$	$(-2\pi, -\pi)$
	لأعلى	+	$-\frac{\pi}{2}$	$(-\pi, 0)$
$(0, 0) \leftarrow x = 0$	لأسفل	-	$\frac{\pi}{2}$	$(0, \pi)$
$(\pi, 0) \leftarrow x = \pi$	لأعلى	+	$3\frac{\pi}{2}$	$(\pi, 2\pi)$

∴ الدالة $f(x) = \sin x$

تزايدية عند: $\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

تناقصية عند: $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$



8- تطبيقات على القيم الصغرى والكبرى

Applications of Maximum and Minimum values

لحل المسائل التطبيقية التي تعتمد على القيم العظمى، توجد عدة خطوات يجب اتباعها لحل مثل هذه المسائل.

1. اقرأ المسألة عدة مرات وتعرف على المعطيات والمطلوب.
2. ارسم شكلاً بيانياً للمسألة إن طلب ذلك.
3. اكتب المعطيات على صورة معادلات.
4. تعرف على المتغير الذي يجب حسابه على شكل قيم عظمى أو صغرى.
5. أوجد تفاضل هذا المتغير بالنسبة للمتغير الآخر ثم ساوي هذا التفاضل بالصفر واوجد جذور هذه المعادلة.

مثال:

أوجد عددين موجبين حاصل جمعهما 24، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل:

نفرض أن العددين هما x, y و حاصل ضربهما z .

$$\therefore x + y = 24 \rightarrow y = 24 - x$$

$$z = x \times y \rightarrow z = x(24 - x) = 24x - x^2$$

$$\therefore z_{\max} \text{ أكبر ما يمكن} \rightarrow \therefore \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = 24 - 2x \rightarrow 24 - 2x = 0$$

$$\therefore z = (12)(12) = 144, y = 24 - 12 = 12, x = 12$$

إذا العددين هما $x = 12$ و $y = 12$ كما أن $z = 144$

مثال:

أوجد حجم اسطوانة دائرية قائمة رسمت داخل مخروط ارتفاعه 12 سم ونصف قطر قاعدته 4 سم، إذا كان محور الاسطوانة والمخروط متطابقين بحيث يكون حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن.

الحل:

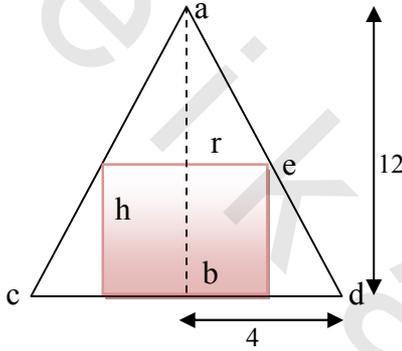
نفرض أن حجم الاسطوانة V

$$\therefore V = \pi r^2 h$$

حيث: h ارتفاع الاسطوانة و r نصف قطر الاسطوانة

ارتفاع المثلث أي مثلث (cde) = ارتفاع الاسطوانة (ce)

$$\text{حيث أن } \frac{ab}{bd} = \frac{ec}{cd}$$



$$\frac{12}{4} = \frac{h}{4-r} \rightarrow h = 3(4-r)$$

$$\therefore v = 3\pi r^2(4-r) = 3\pi(4r^2 - r^3)$$

$$\frac{dv}{dr} = 3\pi(8r - 3r^2)$$

$$\frac{dv}{dr} = 0 \rightarrow 3\pi(8r - 3r^2) = 0$$

$$r(8 - 3r) = 0 \rightarrow \therefore r = \frac{8}{3}, r = 0$$

لا يمكن أن يكون $r = 0$ إذا هذا الحل مرفوض (لا معنى له).

إذا الحل هو $r = \frac{8}{3}$ وبما أن حجم الاسطوانة هو: $V = \pi r^2 h$ منها يكون لدينا:

$$\begin{aligned} V &= 3\pi \left(\frac{8}{3}\right)^2 \times (4-r) \\ &= 3\pi \left(\frac{8}{3}\right) \times \left(4 - \frac{8}{3}\right) \\ &= 256 \frac{\pi}{9} \end{aligned}$$

مثال:

اسطوانة دائرية قائمة يتزايد طولها بمعدل (2 m/sec) ويتناقص نصف قطرها بمعدل

(1 m/sec) فإذا كان طولها 20 متر، اوجد معدل تغير حجمها عند هذه اللحظة.

الحل:

نفرض أن طول الاسطوانة l ونصف قطرها r وحجمها V إذا:

$$\frac{dr}{dt} = -1 \text{ m/sec} , \quad \frac{dl}{dt} = 2 \text{ m/sec} , \quad l = 20 \text{ m}$$

$$\therefore V = \pi r^2 l$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} l + \pi r^2 \frac{dl}{dt}$$

بالتعويض بالقيم المعطاة يكون:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2 \times \pi \times 5 \times (-1) \times 20 + \pi (5)^2 \times 2 \\ &= 40\pi \text{ m}^3 / \text{sec} \end{aligned}$$

مثال:

نقطة تتحرك حول الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 16$ وعندما يكون إحداثي النقطة $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$ يزداد الإحداثي السيني بمعدل قدره 20 m/sec فكم يكون معدل تغيير الإحداثي الصادي في تلك اللحظة.

الحل:

بما أن معادلة الدائرة هي: $x^2 + y^2 = 16$ نقوم بالتفاضل بالنسبة للزمن.

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow (1)$$

بالتعويض بـ $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$ في المعادلة (1)

$$2(-\sqrt{2}) \frac{dx}{dt} + 2(\sqrt{6}) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$2(\sqrt{2}) \frac{dx}{dt} = 2(\sqrt{6}) \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 20 \rightarrow 2(\sqrt{2})(20) = 2(\sqrt{6}) \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2(\sqrt{2})(20)}{2(\sqrt{6})} \rightarrow \frac{dy}{dt} = 11.547 \text{ m/sec}$$

مثال:

بلون على شكل كرة مليء بالغاز انكمش بفعل الغاز بحيث احتفظ بشكله الكروي، اوجد طول نصف قطره عندما يكون نسبة معدل نقص حجمه إلى معدل نقص قطره تساوى 1000π .

الحل:

$$\frac{dV}{dt} : \frac{dr}{dt} = 1000\pi$$

بما أن حجم الكرة يساوى $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ فإن:

$$\frac{dv}{dt} = 3 \frac{4}{3}\pi r^2 \frac{dr}{dt} \text{ بالتالي يكون لدينا:}$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} : \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2$$

$$4\pi r^2 = 1000\pi \rightarrow 4r^2 = 1000$$

$$r^2 = 250 \Rightarrow r = \sqrt{250}$$

9- قاعدة لوبيتال L'H0pital rule

1- مبرهنة (قاعدة أوبتال صيغة $\frac{0}{0}$):

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين فيهما: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

وفيما عدا ذلك فإن $f(x)$ و $g(x)$ دالتان قابلتان للتفاضل على الفترة المفتوح I الذي يحوي النقطة $x = a$ وكذلك فإن $g'(x) \neq 0$ ما عدا $x = a$ عندئذ:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g'(x)}$$

إذا كانت النهاية اليمنى موجودة.

مثال:

أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$ عندما $x \rightarrow 0$ موضحاً بيان الدالة.

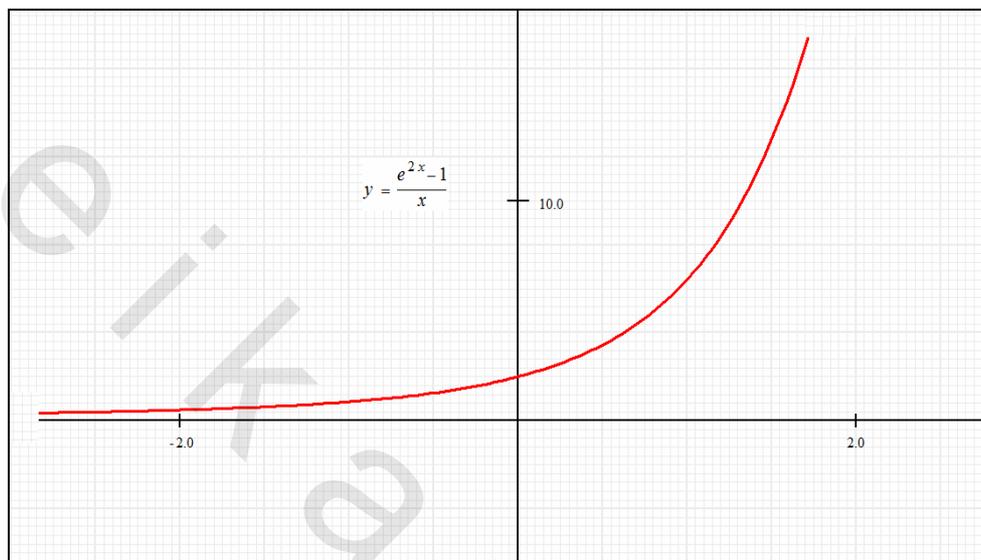
الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة أوبتيال نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2e^0 = 2$$



مثال:

أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$ عندما $x \leftarrow 1$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة أوبتيال نحصل على:

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin \pi x}{2x - 2} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة أوبتيال مرة أخرى نحصل على:

$$\therefore = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin \pi x}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{2} = \frac{-\pi^2(-1)}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

2- مبرهنة (قاعدة لوبيتال صيغة $\frac{\infty}{\infty}$ عندما $x \leftarrow 0$):

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين فيهما:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

وفيما عدا ذلك فإن $f(x)$ و $g(x)$ دالتان قابلتان للتفاضل على المجال المفتوح I الذي يحوي النقطة $x = a$ وكذلك فإن $g'(x) \neq 0$ ما عدا $x = a$ عندئذ:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

في حال وجود الطرف الأيمن موجوداً.

3- مبرهنة (قاعدة لوبيتال صيغة $\frac{\infty}{\infty}$ عندما $x \leftarrow \infty$):

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين فيهما:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

وفيما عدا ذلك فإن $f(x)$ و $g(x)$ دالتان قابلتان للتفاضل على الفترة المفتوح I الذي يحوي النقطة $x = a$ وكذلك فإن $g'(x) \neq 0$ ما عدا $x = a$ عندئذ:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty - \infty$$

إذا كان الطرف الأيمن موجوداً.

مثال:

$$\text{أوجد قيمة نهاية الدالة: } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \text{ عندما } x \rightarrow \infty .$$

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى نحصل على:

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

مثال:

أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = (\sec x - \tan x)$ عندما $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \infty - \infty$$

نحاول إصلاح هذه النهاية لتصبح من شكل $\frac{0}{0}$ ونطبق عليها قاعدة لوبيتال.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) \\ &= \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

مثال:

أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \left(\frac{1}{x} - c \sec x \right)$ عندما $x \rightarrow 0$.

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - c \sec x \right) = \infty - \infty$$

بالتعويض المباشر نحصل على: $\infty - \infty$. نحاول إصلاح هذه النهاية لتصبح من شكل $\frac{0}{0}$ ونطبق عليها قاعدة لوبيتال.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \csc x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى نحصل على:

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \frac{-\sin x}{-x \sin x + 2 \cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

مثال:

أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ عندما $x \rightarrow 0$.

الحل:

نفرض $y = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ ونأخذ \ln الطرفين نحصل على:

$$\ln y = \frac{1}{x^2} \ln(\cos x) = \frac{\ln \cos x}{x^2}$$

نأخذ نهاية الطرفين نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{-2x \sin x + 2 \cos x} = \frac{-1}{2}$$

$$\ln(\lim_{x \rightarrow 0} y) = \frac{-1}{2} = \ln e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

أمثلة محلولة

1- حدد المجالات التي تكون فيها الدالة التالية متزايدة أو متناقصة وأوجد جميع النقاط

الحدية وارسم هذه الدالة: $y = 6x^5 - 3x^4 + 30x^3 + 100$.

الحل:

مشتقة الدالة هي: $y' = 30x^4 - 120x^3 + 90x^2$ التي تكون على الشكل التالي:

$$y' = 3x^2(10x^2 - 40x + 30) = 30x^2(x^2 - 4x + 3)$$

في حالة:

$$y' > 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4x + 3) > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) > 0$$

إذا فترات التزايد $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

$$y' < 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4x + 3) < 0$$

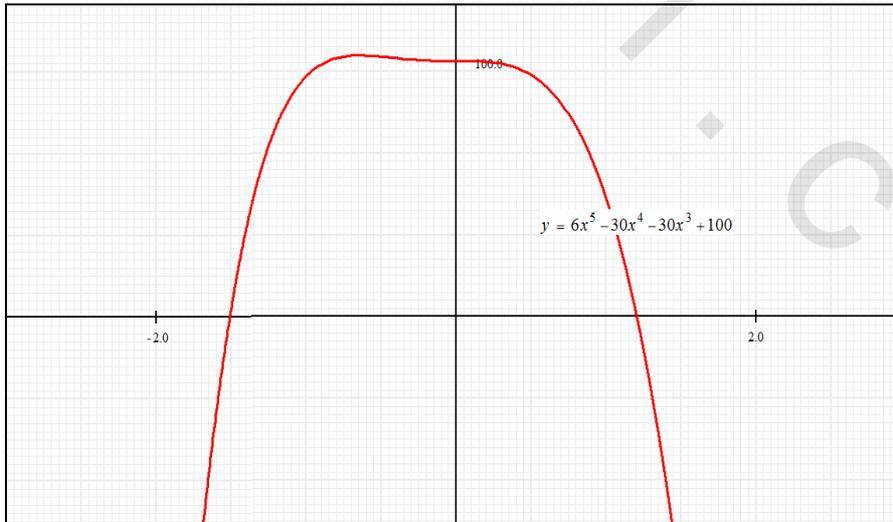
أما في حالة:

وفي هذه الحالة فترة التناقص هو: $x \in (1, 3)$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ أو } x = 3$$

في حالة:

والنقاط الحدية هي: $(1, 0)$ و $(3, 0)$ وبيان الدالة هو:



2- إذا كان $f(x) = x^2 - 8x$ فأثبت أن f تحقق نظرية القيمة الوسطى على الفترة $[1, 8]$ ،
 ووجد العدد C في تلك الفترة يحقق المبرهنة.

الحل:

$$\text{نوجد كلا من: } f(1) = 1^2 - 8(1) = -7$$

$$f(8) = 8^2 - 8(8) = 0$$

نوجد المشتقة: $f'(x) = 2x - 8$ نضع $x = C$ فنحصل على $f'(C) = 2C - 8$ وبتعويض
 في القانون نحصل على:

$$f'(C) = \frac{f(8) - f(1)}{8 - 1}$$

$$2C - 8 = \frac{0 + 7}{7} = 1$$

منها قيمة $C = 4.5$ وهي تقع في الفترة $[1, 8]$.

3- إذا كانت $f(x) = 4x^2 - 20x + 30$ اثبت أن f تحقق نظرية رول على الفترة $[1, 4]$
 ووجد قيم C التي تحقق $f'(C) = 0$.

الحل:

$$\text{نوجد كلا من: } f(1) = 4 - 20 + 30 = 14$$

$$f(4) = 4(4)^2 - 20(4) + 30 = 14$$

$$\text{منها نجد أن: } f(1) = f(4) = 14$$

نوجد مشتقة الدالة: $f'(x) = 8x - 20$ نعوض عن $x = C$ ونساويها بصفر

$$f'(C) = 8C - 20$$

$$8C - 20 = 0 \text{ منها } C = \frac{5}{2} \text{ وضح أن: } 0 < \frac{5}{2} < 4 \text{ فهي تحقق مبرهنة رول.}$$

4- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x - \sin x}$ عندما $x \rightarrow 0$ موضحاً بيان الدالة.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x - \sin x} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1 - \cos x} = \frac{2}{0} = \infty$$

5- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{\sin x - x}{x^3}$ عندما $x \rightarrow 0$ موضحاً بيان الدالة.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

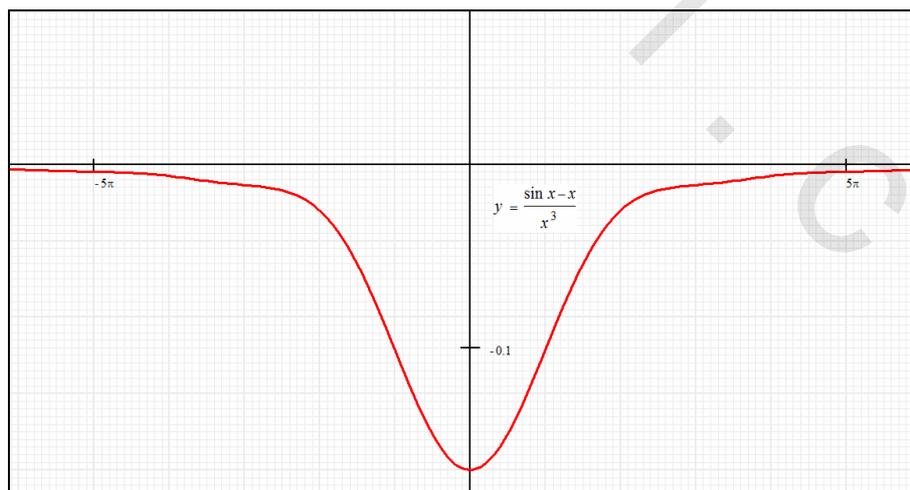
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$



6- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{\sin^{-1} x}{x}$ عندما $x \leftarrow 0$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = \frac{0}{0}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

7- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ عندما $x \leftarrow \infty$.

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x \times \frac{1}{x}}{1} = \frac{\infty}{\infty}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \times \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -2x = -\infty$$

8- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{x}{\ln(1+2e^x)}$ عندما $x \leftarrow \infty$ موضحاً بيان الدالة.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على:

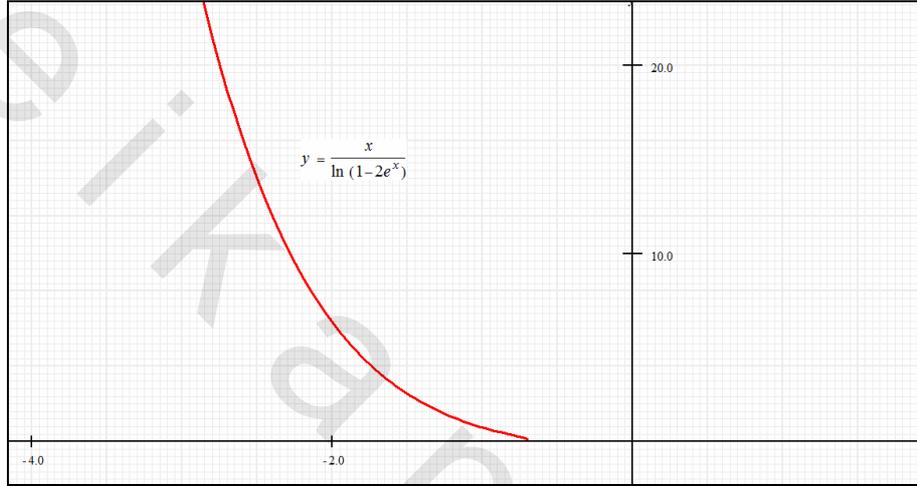
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(1+2e^x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2e^x}{1+2e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2e^x}{2e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{2e^x} = 1$$



9- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{x}$ عندما $x \leftarrow \infty$.

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

بالتعويض المباشر نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \times \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln x} = 0$$

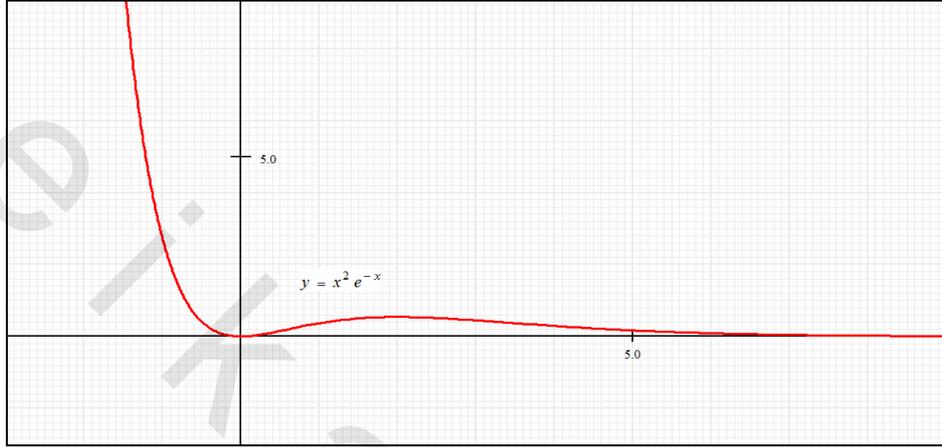
10- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = x^2 e^{-x}$ عندما $x \leftarrow \infty$ موضحاً بيان الدالة.

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى نحصل على: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$



11- أوجد قيمة نهاية الدالة: $f(x) = x^2 \ln x$ عندما $x \rightarrow 0^+$.

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \times \infty$

باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{-\infty}{\infty}$

باستخدام قاعدة لوبيتال مرة أخرى نحصل على:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} / -2 \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} x^2 = 0$$

12- استخدم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم الكبرى والصغرى للدالة:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

الحل:

نوجد مشتقة الدالة على الشكل التالي:

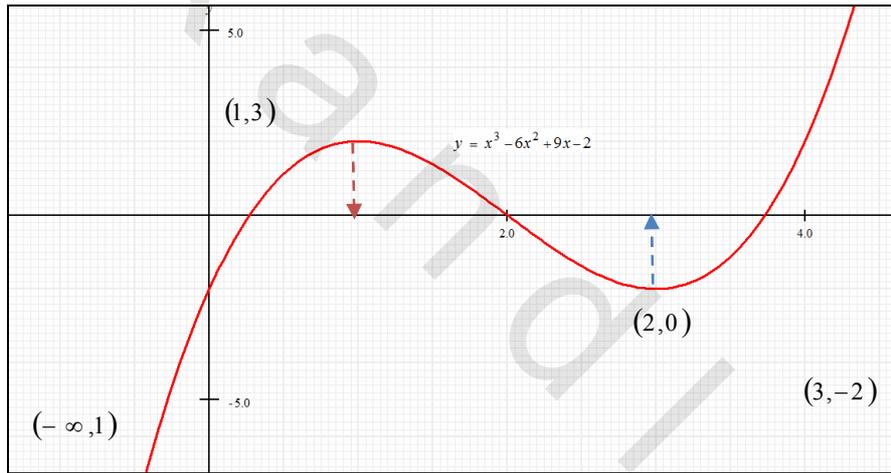
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

حلول المعادلة $f'(x) = 0$ هي: $x = 1$ و $x = 3$ وبالتالي يكون لدينا:

x	$-\infty$	بينهما	1	بينهما	3	بينهما	∞
f'		+	0	-	0	+	

وبالتالي الدالة متزايدة في الفترتين: $(-\infty, 1)$ و $(3, \infty)$ و متناقصة في الفترة $(1, 3)$ وبالتالي الدالة تملك نهاية كبرى محلية عند النقطة $(1, 2)$ ونهاية صغرى محلية عند النقطة $(3, -2)$ كما موضح في الجدول التالي:

x	$-\infty$	1	3	∞
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$
		max	min	



13- استخدم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم الكبرى والصغرى للدالة: $f(x) = x^3 - 12x^2$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 24x = 3x(x - 8) \quad \text{نوجد المشتقة للدالة:}$$

بوضع $f'(x) = 0$ نحصل على:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ أو } x = 8$$

$$f''(x) = 6x - 24 = 6(x - 4) \quad \text{نوجد المشتقة الثانية للدالة:}$$

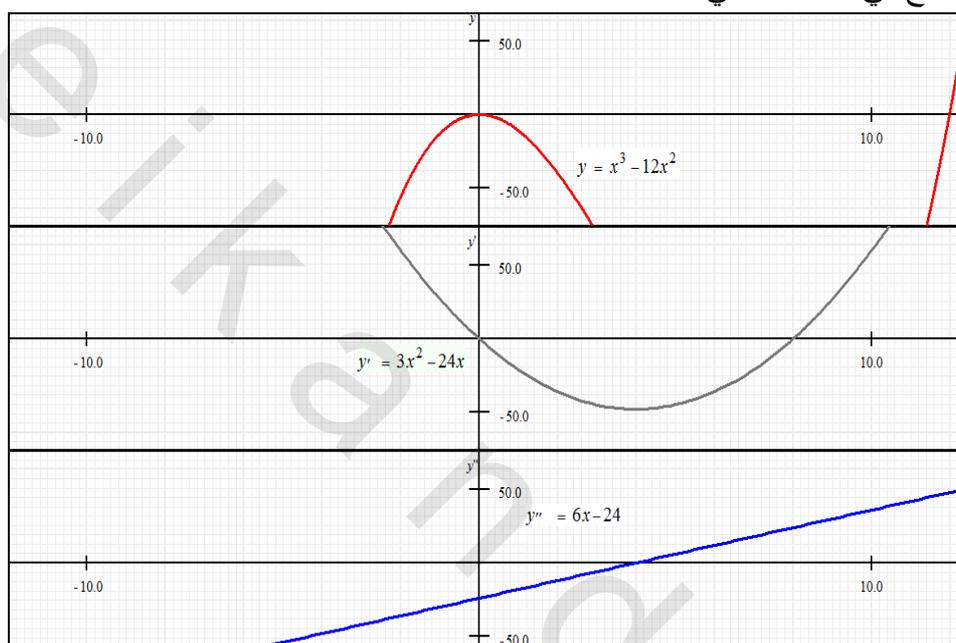
عند $x=0$ نجد أن:

وبالتالي فإن النقطة $(0,0)$ هي نهاية كبرى محلية

وعند $x=8$ فإن:

وبالتالي فإن النقطة $(8,-256)$ هي نهاية صغرى محلية.

كما موضح في الشكل التالي:



14- أرسم الدالة: $f(x) = x^3 - 12x^2$ باستخدام اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم الكبرى والصغرى.

الحل:

1- نلاحظ أن نطاق الدالة هو R .

2- عندما $x=0$ فإن $y=0$

عندما $y=0$ فإن $x(x^2 - 12) = 0$ وبالتالي فإن: $x=2\sqrt{3}$ أو $x=-2\sqrt{3}$ أو $x=0$

نقاط التقاطع مع المحورين هي: $(2\sqrt{3},0)$ و $(-2\sqrt{3},0)$ و $(0,0)$

3- لنحدد الآن فترات التزايد والتناقص:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ أو } x = -2$$

كما في الجدول التالي:

x	$-\infty$	بينهما	-2	بينهما	2	بينهما	∞
f'		+	0	-	0	+	

فترات التزايد هي: $(-\infty, -2)$ و $(2, \infty)$

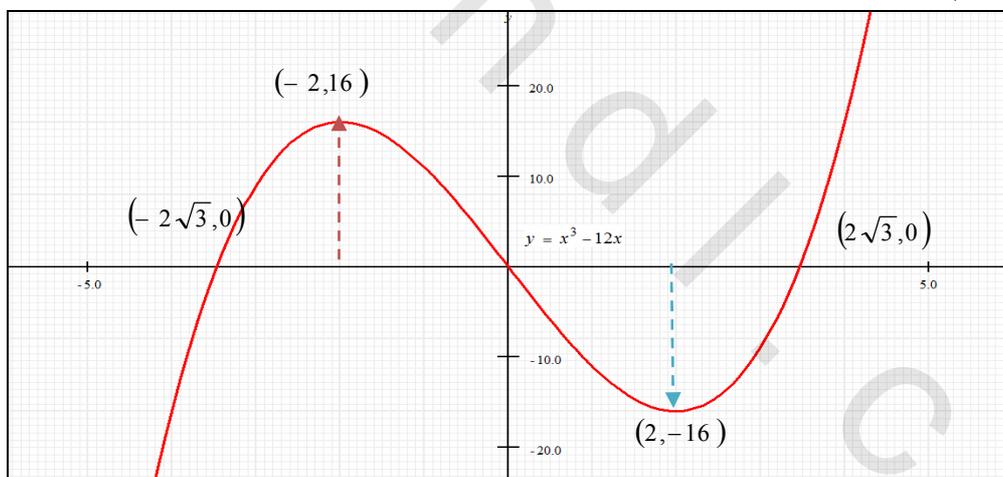
فترات التناقص هي: $(-2, 2)$

4- نوجد النهايات الحدية

x	$-\infty$	-2	2	∞
y	$-\infty$	16	-16	$+\infty$

\swarrow max \searrow min \swarrow

إذا هناك نهاية كبرى محلية عند النقطة $(-2, 16)$ ونهاية صغرى محلية عند النقطة $(2, -16)$.



15- أوجد نقاط الانقلاب للدالة: $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

يجب أن نحسب y' .

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x} \quad \text{بما أن:}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2} \quad \text{فإن:}$$

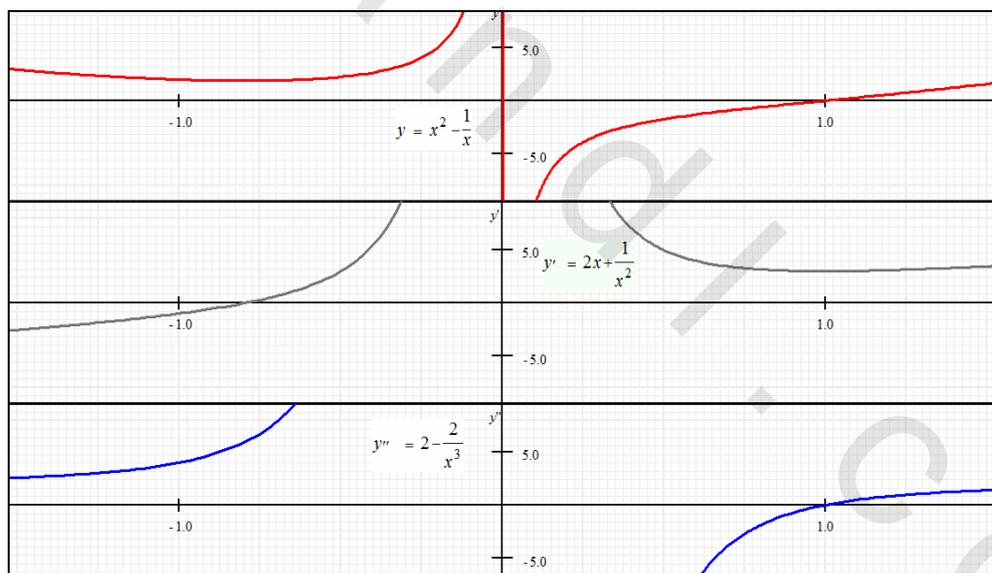
$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3}$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^3} \quad \text{منها نجد أن:}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{بوضع } y' = 0 \text{ نحصل على:}$$

X	$-\infty$	بينهما	0	بينهما	1	بينهما	∞
f''		+	II	-	0	+	

المنحني مقعر إلى أعلى في الفترة $(-\infty, 0)$ وفي الفترة $(1, \infty)$ ومقعر إلى أسفل في المجال $(0, 1)$ ونقطة الانقلاب عند $(1, 0)$ كما موضح في الشكل التالي:



16- يراد صنع علب للمشروب بحجم 100cm^2 على شكل اسطوانة دائرية قائمة بغطاء، علماً بأن للغطاء حافة تساوي $\frac{1}{10}$ من ارتفاع الاسطوانة، أوجد أبعاد هذه العلب بحيث تكون بأقل التكاليف.

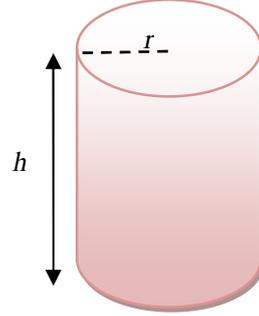
الحل:

بفرض r هو نصف القطر و h هو الارتفاع عندها بحجم العبة $V = \pi r^2 h$

$$h = \frac{100}{\pi r^2} \quad \text{منها } 100 = \pi r^2 h \quad \therefore \text{بذلك نجد أن:}$$

مساحة الشريحة = مساحة الحافة + مساحة القاعدتين + المساحة الجانبية

$$\begin{aligned} A &= 2\pi rh + 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{h}{10} \\ &= 2\pi r \left(h + r + \frac{h}{10} \right) \\ &= 2\pi r \left(r + \frac{11h}{10} \right) \end{aligned}$$



ولتقليل التكاليف يجب جعل هذه المساحة أصغر ما يمكن.

$$A = 2\pi r \left(h + r + \frac{h}{10} \right)$$

ولدينا $h = \frac{100}{\pi r^2}$ وبالتالي يكون:

$$A = 2\pi r^2 + \frac{220}{r}$$

وبتفاضل A بالنسبة لـ r نحصل على:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{220}{r^2}$$

ونحصل على القيمة القصوى عندما $\frac{dA}{dr} = 0$ أي أن:

$$4\pi r - \frac{220}{r^2} = 0 \rightarrow 4\pi r^3 - 220 = 0$$

$$r = \left(\frac{110}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 3.25 \text{ cm}$$

ومنها نحصل على:

$$h = \frac{100}{\pi (3.25)^2}$$

ولمعرفة هل هذه القيم تمثل نهاية صغرى أم عظمى نحسب $\frac{d^2 A}{dr^2}$

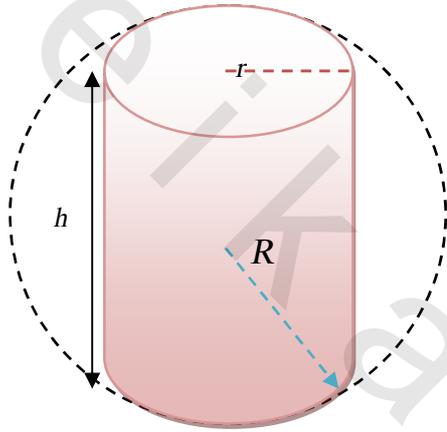
$$\text{ف نجد: } \frac{d^2 A}{dr^2} = 2\pi + \frac{440}{r^3} > 0$$

إذا فعلاً القيم المحسوبة تمثل نهاية صغرى للمساحة.

17- أوجد أكبر حجم اسطوانة دائرية قائمة من الممكن أن تمل حافتي قاعدتها السطح الداخلي لقشرة كروية نصف قطرها R .

الحل:

لكي نعبر عن حجم الاسطوانة V بدلالة متغير واحد نوجد علاقة بين نصف قطر الاسطوانة r وارتفاعها h ، حسب نظرية فيثاغورث لدينا:



$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2$$

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{4}h^2$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$= \pi h \left(R^2 - \frac{1}{4}h^2 \right)$$

$$= \pi \left(hR^2 - \frac{1}{4}h^3 \right)$$

ولحساب القيمة العظمى للحجم v نحسب $\frac{dv}{dh}$ على النحو التالي:

$$\frac{dV}{dh} = \pi \left(R^2 - \frac{3}{4}h^2 \right) = 0$$

$$h^2 = \frac{3}{4}R^2 \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{3}}R \quad (1) \quad \text{منها نحصل على:}$$

$$r^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}}R \quad (2) \quad \text{عندئذ:}$$

وبحساب المشتقة الثانية: $\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3}{2}\pi h < 0$ تكون النهاية عظمى.

كما أن:

$$V_{\max} = \pi \left(R^2 \left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}R \right) - \frac{2\sqrt{3}}{9}R^3 \right) = \frac{4\pi\sqrt{3}R^2}{9}$$

18- أبحرت سفينة A في الساعة العاشرة صباحاً من نقطة إحداثياتها (40,10) متجهة نحو الشمال (المحدد y) بسرعة 50 كيلومتر/ ساعة وفي نفس الوقت أبحرت سفينة B من النقطة (80,40) بسرعة 60 كيلومتر/ ساعة غرباً متى تصبح السفينتان اقرب ما يمكن من بعضهما وكم المسافة بينهما عندئذ.

الحل:

بعد زمن قدره t تكون A قد قطعت مسافة = السرعة \times الزمن = $50t$ وتكون إحداثياتها $A(40,10 + 50t)$ وفي نفس الوقت تكون B قد قطعت مسافة $60t$ غرباً وأصبحت إحداثياتها $B(80 - 60t, 40)$ ويكون البعد بينهما:

$$D = \sqrt{(40 - 60t)^2 + (30 - 50t)^2}$$

$$D^2 = (40 - 60t)^2 + (30 - 50t)^2 \quad \text{أي أن:}$$

وبتفاضل D^2 بالنسبة لـ t ووضعها مساوية للصفر نحصل على:

$$\frac{dD^2}{dt} = 2(40 - 60t)(-60) + 2(30 - 50t)(-50) = 0$$

$$-6(4 - 6t) - 5(4 - 5t) = 0$$

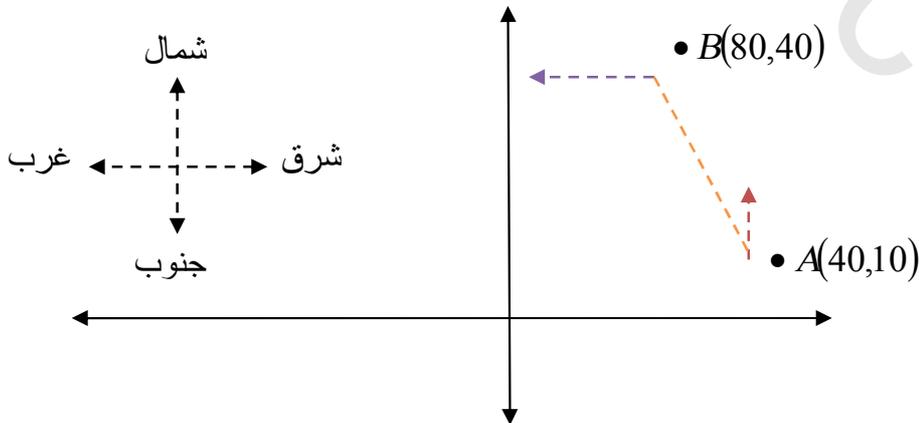
$$61t = 44$$

ومنها نحصل على:

$$\text{بذلك فإن الزمن } t = \frac{44}{61} \text{ ساعة}$$

$$\text{وبما أن } \frac{d^2D}{dt^2} = 12200 > 0$$

إذا النهاية صغرى ويكون $D^2 = 26.23$ أي أن $D \cong 5.13 \text{ km}$.



Summary

- The equation of the tangent line to the curve $y = f(x)$ at the point $p(x_1, y_1)$ is given by:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Where m is a slope of the tangent line at the point $p(x_1, y_1)$, that is $m = \frac{dy}{dx}$.

- The normal to the tangent line has the equation:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{1}{m}$$

- Rolle's Theorem:

Let $f(x)$ be continuous function on $[a, b]$, and differentiable on (a, b) .

If $f(a) = f(b) = 0$, then there exists at least one number $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = 0$.

- The mean value Theorem:

If $f(x)$ is continuous function on $[a, b]$, and differentiable on (a, b) , then there exists at least one number $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

- Theorem1:(L'Hopital rule $\frac{0}{0}$ form)

Let $f(x)$ and $g(x)$ functions such that $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ and suppose that $f(x)$ and $g(x)$ are differentiable on an open interval I containing a , and that $g'(x) \neq 0$, except possibly at a itself. Then:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Provided the second limit exists:

- Theorem2:(L'Hopital rule $\frac{\infty}{\infty}$ form)

Let $f(x)$ and $g(x)$ functions such that $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ and suppose that $f(x)$ and $g(x)$ are differentiable on an open interval I containing a , and that $g'(x) \neq 0$, except possibly at a itself. Then:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Provided the second limit exists:

Theorem3:(L'Hopital infinite limit)

Let $f(x)$ and $g(x)$ function such that $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ and suppose that

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exists Then;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Provided the second limit exist:

Test for an Increasing or Decreasing function:

A differentiable function $f(x)$ is:

- increasing on the interval (a, b) if $f'(x) > 0$ for all $x \in (a, b)$.
- decreasing on the interval (a, b) if $f'(x) < 0$ for all $x \in (a, b)$.

Steps for finding where $f(x)$ is increasing and where decreasing:

Step₁: Find the derivative $f'(x)$

Step₂: Set up a table that solves the two inequalities:

$$f'(x) > 0 \text{ and } f'(x) < 0$$

Like that:

x	x	medal	x_0	medal	x_1	medal	b
f'		+	0	-	0	+	

First Derivative test:

Let $f(x)$ denote a differentiable function. Find $f'(x)$ and set up table to determine where $f(x)$ is increasing and where it is decreasing.

- If $f(x)$ is increasing to the left of a point A on the graph of $f(x)$ and is decreasing to the right of A , then at the point A there is a local maximum.
- If $f(x)$ is decreasing to the left of a point A on the graph of $f(x)$ and is increasing to the right of A , then at the point A there is a local minimum.

Steps for graphing function:

- Find the domain of $f(x)$.
- Locate the intercepts of $f(x)$.

- 3- Determine where $f(x)$ is increasing and where it is decreasing.
- 4- Find any local maxima or local minima.
- 5- Locate all points on the graph of $f(x)$ at which the tangent line is either horizontal or vertical.
- 6- Determine the end behavior and locate any a symptotes.

Concaring up ; concave Down:

Let $f(x)$ derote a function that is differentiable on the interval (a, b)

- 1- The graph of $f(x)$ is concring up words on (a, b) , if throughout (a, b) , the tangent lines to the graph of $f(x)$ lie bellow the graph.
- 2- The graph of $f(x)$ is concaring downwards on (a, b) , if throughout (a, b) , the tangent lines to the graph of $f(x)$ lie above the graph.

Test for concavity:

Lat $y = f(x)$ be a function and let $f''(x)$ be its second derivative.

Inflection point:

An inflection point of a function $f(x)$ is a point on the graph of $f(x)$ at which the concavity of $f(x)$ changes.

Second Derivative Test:

Let $y = f(x)$ be a function that is differentiable on an open interval I and suppose that the second derivative $f''(x)$ exists on I. Also suppose C is a number in I for which $f'(c) = 0$.

- 1- If $f''(x) < 0$, then at the point $(c, (f(c)))$ there is a local maximum.
- 2- If $f''(x) > 0$, then at the point $(c, (f(c)))$ there is a local minimum.
- 3- If $f''(x) = 0$, the test is inconclusive and the First Derivative Test must be used.

تمارين على الفصل الخامس

1- حدد الفترات على كل من الدوال التالية التي تكون فيها الدوال متزايدة أو متناقصة:

$$f(x) = 2x^3 - 24x + 5 : 2 \quad f(x) = x^2 - 8x : 1$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5 : 4 \quad f(x) = x^3 + 3x : 3$$

$$f(x) = (x-1)^3(x-2) : 6 \quad f(x) = (x-1)^3(x-2) : 5$$

2- أوجد القيم العظمى والصغرى للدوال في التمرين (1).

3- أوجد نقاط الانقلاب و ارسم الدوال التالية:

$$f(x) = 2x^6 - 6x^4 : 2 \quad f(x) = x^3 + 10x^2 + 25x + 1 : 1$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^2 : 4 \quad f(x) = \sqrt[3]{x} - 1 : 3$$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2 : 6 \quad f(x) = 8x^2 - 2x^4 : 5$$

$$f(x) = 2 - x^{\frac{2}{3}} : 8 \quad f(x) = 15x^5 - 25x^3 : 7$$

4- أوجد عددين صحيحين مجموعهما 12 وحاصل ضربهما قيمة عظمى.

5- حاوية اسطوانية ذات قاعدة دائرية تتسع لـ 64 متر مكعب أوجد أبعادها لكي يكون لها سطح اصغر ما يمكن.

6- مخروط دائري قائم ارتفاعه 8 قدم ونصف قطر قاعدته r يتزايد، أوجد معدل تغير مساحة سطحه S بالنسبة لـ r عندما $r = 6$.

7- حوض مائي طوله 10 متر ومقطعة عبارة عن شبة منحرف متساوي الساقين قاعدته السفلى 3 متر والعليا 5 متر وارتفاعه 2 متر فإذا كان الماء يرتفع بمعدل $\frac{1}{48}$ متر دقيقة عندما كان عمق الماء مترا واحدا أوجد معدل دخول الماء إلى الحوض.

8- أحسب قيم النهايات التالية:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x - \sin x} : 1 \quad \text{عندما } x \leftarrow 0$$

$$0 \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = \frac{\sin x - x}{x^2} : 2$$

$$0 \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = \frac{\sin^{-1} x}{x} : 3$$

$$\infty \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} : 4$$

$$\infty \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = \frac{x}{\ln(1+2e^x)} : 5$$

$$0^+ \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = x^2 \ln x : 6$$

$$\infty \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{lx} : 7$$

$$\infty \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = x^2 e^x : 8$$

$$0 \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = (1-2x)^{\frac{1}{x}} : 9$$

$$0^+ \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = (\cos 3x)^{\frac{5}{x}} : 10$$

$$0^+ \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} : 11$$

$$1 \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) : 12$$

$$\infty \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = x \tan\left(\frac{1}{x}\right) : 13$$

$$0 \leftarrow x \text{ عندما } f(x) = (\csc x - \cot x) : 14$$
