الدوال الأصلية والتكامل Anti-Derivative and Integral

تابعنا في الفصول السابقة دراسة الدوال والعلاقات الهامة وكذلك حساب التفاضل وهو أحد الفرعين الأساسين التفاضل والتكامل وسنوجه اهتمامنا فيما يلي للفرع الأساسي الآخر للموضوع وهو حساب التكامل وتأخذ اليوم كلمة (تكامل) معنيين فيما يتعلق بحساب التكامل ويكاد المعنى الأكثر عمقاً يكون مماثلاً للتعريف غير الفني ((يبين الكل لـــ....، يعطي جمع أو مجموع...)) (Webster).

ويكون المعنى الرياضي لهذه الكلمة ظاهر الوضوح في إيجاد المساحات المحددة بمنحنيات وأحجام المجسمات المختلفة، وأطوال المنحنيات ومراكز الثقل وتطبيقات أخرى.

أما المعنى الرياضي الثاني لفعل (يكامل) فهو إيجاد دالة أعطيت مشتقتها.

الدوال الأصلية: Anti-Derivative functions

تعريف :

ليكن I فترة غير خالٍ من R. ولتكن $f: I \to R$ دالة مستمرة نقول أن الدالة $F: I \to R$ دالة أصلية للدالة f إذا وفقط إذا كانت F قابلة للاشتقاق على الفترة I وكان $F' = f$.

تعريف:

يقال إن $F(x)$ دالة أصلية (تكامل) لدالة $f(x)$ إذا تحققت العلاقة التالية:

$$d\,F(x) = f(x)dx$$

أي أن بمعنى أن تفاضل الدالة $F(x)$ هو $f(x)dx$ أو أن المشتقة $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

ومن التعريف نجد أن الدوال $F(x)+c$ حيث c عدد ثابت اختياري يمكن أن تكون كلها دوال أصلية (تكامل) للدالة $f(x)$ والسبب يرجع لكون مشتقة العدد الثابت تساوى صفر.

نستنتج انه إذا وجدت لدالة ما دالة أصيلة فإنه يوجد عدد غير منته من الدوال الأصلية لها تختلف عن بعضها بالعدد الثابت ويكون لدينا التعريف التالي :

تعريف:

تكامل دالة $f(x)$ هو دالة $F(x)+c$ حيث c عدد ثابت وبحيث يكون:

$$\frac{d\,F(x)}{d\,x} = f(x)$$

ويرمز لتكامل الدالة $f(x)$ بالرمز $\int f(x)\ d\,x = F(x)+c$

ويقرأ بالتكامل غير المحدود لدالة $f(x)$ ويسمى العدد الثابت c بثابت التكامل.

أمثلة:

حيث أن $d\,(x^5) = 5x^4\ d\,x$ فإن: $\int 5x^4\ d\,x = x^5 + c$

وبما أن $d\,(e^{3x}) = 3e^{3x}\ d\,x$ فإن: $\int 3\,e^{3x}\ d\,x = e^{3x} + c$

وبما أن $d\,(\cos x^2) = -2x\sin x^2\ d\,x$ فإن: $\int\left(2x\sin x^2\right)d\,x = \cos x^2 + c$

وهذا يعنى أن التكامل هو العملية العكسية (للاشتقاق) للتفاضل.

قوانين التكامل غير المحدود للدوال الجبرية(التكاملات الشائعة): Common Integrals

سنذكر العديد من القواعد الهامة لإيجاد تكامل الدوال الشائعة ((كثيرة الاستعمال)):

قاعدة 1: تكامل العدد الثابت

ليكن a عدد ثابت عندئذ :

$\int a\ d\,x = ax + c$ حيث c ثابت التكامل.

أمثلة:

1) $\int 5\ d\,x = 5x + c$

2) $\int -7\ d\,x = -7x + c$

3) $\int \frac{-5}{3}\ d\,x = \frac{-5}{3}x + c$

قاعدة 2 :

$\int x^n\ d\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ باستثناء $n=-1$ حيث c ثابت التكامل , $n \in R$.

أمثلة:

$$1)\ \int x^3\, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$2)\ \int \frac{1}{x^4}\, dx = \int x^{-4}\, dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$$3)\ \int x^{\frac{2}{5}}\, dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + c$$

قاعدة 3:

يمكن إخراج عامل ثابت من تحت إشارة التكامل أو إدخاله دون أن تتغير النتيجة

أي أن : $\int a\, f(x)\, dx = a\int f(x)\, dx$

أمثلة :

$$1)\ \int 7x^4\, dx = 7\int x^4 = 7\,\frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{7}{5}x^5 + c$$

$$2)\ \int \frac{-2}{x^3}\, dx = -2\int x^{-3}\, dx = -2\,\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -2\,\frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{x^2} + c$$

$$3)\ \int \sqrt{5}\, x^{-\frac{2}{3}}\, dx = \sqrt{5}\int x^{-\frac{2}{3}}\, dx = 3\sqrt{5}\, x^{\frac{1}{3}} + c$$

قاعدة 4:

تكامل المجموع الجبري لعدة دوال يساوي المجموع الجبري لتكاملات هذه الدوال أي أن:

إذا كانت $f(x), g(x)$ دوال قابلة للتكامل في x فإن:

$$\int [\, f(x) + g(x)\,]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

وبصفة عامة إذا كانت $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), ..., f_n(x)$ دوال قابلة للتكامل في x فإن :

$$\int [\, f_1(x) \pm f_2(x) \pm .... \pm f_n(x)]\, dx =$$

$$\int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx \pm .... \pm \int f_n(x)\, dx$$

أمثلة:

$$1)\ \int\left(x^2-2x+5\right)dx=\int x^2\,dx-2\int x\,dx+5\int dx=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+5x+c=\frac{x^3}{3}-x^2+5x+c$$

$$2)\ \int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^3}\right)dx=\int\sqrt{x}\,dx-2\int\frac{1}{x^3}\,dx=\int(x)^{\frac{1}{2}}\,dx-2\int x^{-3}dx$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}}-2\frac{x^{-3+1}}{-2}+c=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{-2}+c$$

$$3)\ \int\left(x^5-\sqrt{2}\,x-\frac{3}{x^2}\right)dx=\int x^5\,dx-\sqrt{2}\int x\,dx-3\int x^{-2}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}x^6-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+3x^{-1}+c$$

قاعدة 5:

لتكن u دالة في x و n عدد يخالف العدد(-1) عندئذ يكون:

$\int u^n\,u'\,dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$ باستثناء $n=-1$ حيث c ثابت التكامل.

أمثلة :

$$1)\ \int\left(2x^3-6\right)^4\left(6x^2\right)dx$$

$$u=2x^3-6\ \rightarrow\ u'=6x^2,\qquad n=4$$

$$\therefore\ \int\left(2x^3-6\right)^4\left(6x^2\right)dx=\int u^4\,u'\,dx=\frac{u^5}{5}+c=\frac{\left(2x^3-6\right)^5}{5}+c$$

$$2)\ \int\left(x^4-2\right)^5x^3\,dx$$

$$u=x^4-2\ \rightarrow\ u'=4x^3$$

$$\therefore\ \int\left(x^4-2\right)^5\left(x^3\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(x^4-2\right)^5\left(4x^3\right)dx=\frac{1}{4}.\frac{u^6}{6}+c=\frac{\left(x^4-2\right)^6}{24}+c$$

$$3)\ \int\sqrt{x^3+3x}\,\left(x^2+1\right)dx=\int\left(x^3+3x\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)dx$$

$$u=x^3+3x\ \rightarrow\ u'=3x^2+3=3\left(x^2+1\right)$$

$$\therefore\ \int\sqrt{x^3+3x}\,\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{3}\int 3\left(x^3+3x\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)dx$$

$$\therefore \int \sqrt{x^3+3x}\,(x^2+1)\,dx=\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,u'\,dx=\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{9}(x^3+3x)^{\frac{3}{2}}+c$$

4) $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^5}=\int 2x(1+x^2)^{-5}\,dx$

$$=\frac{(1+x^2)^{-5+1}}{-5+1}+c=\frac{-1}{4}\;\frac{1}{(1+x^2)^4}+c$$

5) $\displaystyle\int \cos^2 x\sin x\;dx=\int 2x(1+x^2)^{-5}\,dx$

$u=\cos x \;\rightarrow\; u'=-\sin x$

$$\int \cos^2 x\sin x\;dx=-\int u^2 u\,du=-\frac{u^3}{3}+c$$

$$=-\frac{\cos^3 x}{3}+c$$

6) $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x}$

$u=\ln x \rightarrow \quad u'=\dfrac{1}{x}$

$$\int \frac{\ln x\,dx}{x}=\int uu'\,du=\frac{u^2}{2}+c$$

$$=\frac{(\ln x)^2}{2}+c$$

أمثلة محلولة

احسب التكاملات التالية:

1) $\int \left(2\sqrt{x}-3x^4\right)d\,x$

الحل:

$$\int \left(2\sqrt{x}-3x^4\right)d\,x = 2\int x^{\frac{1}{2}}\,d\,x - 3\int x^4\,d\,x = 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3\frac{x^5}{5} + c = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{5}x^5 + c$$

2) $\int \left(\frac{3}{x^4} - 4x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)d\,x$

الحل:

$$\int \left(\frac{3}{x^4} - 4x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)d\,x = 3\int x^{-4}\,d\,x - 4\int x^2\,d\,x + 2\int x^{\frac{-1}{2}}\,d\,x$$

$$= 3\frac{x^{-3}}{-3} - 4\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -x^{-3} - \frac{4}{3}x^3 + 4x^{\frac{1}{2}} + c$$

3) $\int \sqrt{x}\,(x-3)^2\,d\,x$

الحل:

$$\int \sqrt{x}\,(x-3)^2\,d\,x = \int x^{\frac{1}{2}}\left(x^2-6x+9\right)d\,x$$

$$= \int \left(x^{\frac{5}{2}} - 6x^{\frac{3}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}\right)d\,x$$

$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5}x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{3}{2}} + c = \sqrt{x}\left(\frac{2}{7}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 6x\right) + c$$

4) $\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right) dx$

الحل:

$$\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right) dx = \int \left(x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}\right) dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{x^{-3}}{-3}+c = -\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+c$$

5) $\int 3\left(3x^2-1\right)^3 x\, dx$

الحل:

$$\int 3\left(3x^2-1\right)^3 x\, dx$$

$$u = 3x^2-1 \quad \rightarrow \quad u' = 6x$$

$$\frac{1}{2}\int \left(3x^2-1\right)^3 (6x)\, dx = \frac{1}{8}\left(3x^2-1\right)^4 + c$$

6) $\int \left(x^4+2x\right)^2\left(4x^3+2\right) dx$

الحل:

$$\int \left(x^4+2x\right)^2\left(4x^3+2\right) dx$$

$$u = x^4+2x \quad \rightarrow \quad u' = 4x^3+2$$

$$\int \left(x^4+2x\right)^2\left(4x^3+2\right) dx = \frac{1}{3}\left(x^4+2x\right)^3 + c$$

7) $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$

الحل:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\, dx = \int x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$u = x^2+1 \quad \rightarrow \quad u' = 2x$$

$$\frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

8) $\int 5\left(5x^7+2\right)^2 x^6\, dx$

الحل:

$$\int 5\left(5x^7+2\right)^2 x^6\, dx$$

$$u=5x^7+2 \quad \rightarrow \quad u'=35x^6$$

$$\frac{1}{7}\int \left(5x^7+2\right)^2\left(35x^6\right) dx=\frac{1}{21}\left(5x^7+2\right)^3+c$$

9) $\int \left(\sqrt{1-4x}\right) dx$

الحل:

$$\int \left(\sqrt{1-4x}\right) dx=\int (1-4x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$u=1-4x \quad \rightarrow \quad u'=-4$$

$$\int (1-4x)^{\frac{1}{2}}\, dx=-\frac{1}{4}\int (-4)(1-4x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)(1-4x)^{\frac{3}{2}}+c=-\frac{1}{6}(1-4x)^{\frac{3}{2}}+c$$

10) $\int \sqrt[3]{5+x^3}\left(x^2\right) dx$

الحل:

$$\int \sqrt[3]{5+x^3}\left(x^2\right) dx=\int \left(5+x^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^2\right) dx$$

$$u=5+x^3 \quad \rightarrow \quad u'=3x^2$$

$$\int \left(5+x^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^2\right) dx=\frac{1}{3}\int \left(5+x^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(3x^2\right) dx$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}\left(5+x^3\right)^{\frac{4}{3}}+c=\frac{1}{4}\left(5+x^3\right)^{\frac{4}{3}}+c$$

11) $\int \frac{(1+3x)}{\sqrt{2x+3x^2}}\ dx$

الحل:

$$\int \frac{(1+3x)}{\sqrt{2x+3x^2}}\ dx = \int (1+3x)\left(2x+3x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ dx$$

$$u = 2x+3x^2 \quad \rightarrow \quad u' = 2+6x = 2(1+3x)$$

$$\int (1+3x)\left(2x+3x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ dx = \frac{1}{2}\int 2(1+3x)\left(2x+3x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{2}{1}\left(2x+3x^2\right)^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{2x+3x^2}$$

12) $\int \left(3x-x^3\right)^5\left(1-x^2\right)\ dx$

الحل:

$$\int \left(3x-x^3\right)^5\left(1-x^2\right)\ dx$$

$$u = \left(3x-x^3\right) \quad \rightarrow \quad u' = 3-3x^2 = 3\left(1-x^2\right)$$

$$\int \left(3x-x^3\right)^5\left(1-x^2\right)\ dx = \frac{1}{3}\int \left(3x-x^3\right)^5(3)\left(1-x^2\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{6}\left(3x-x^3\right)^6 + c = \frac{1}{18}\left(3x-x^3\right)^6 + c$$

13) $\int 3x^2\left(3-x^3\right)^6\ dx$

الحل:

$$\int 3x^2\left(3-x^3\right)^6\ dx$$

$$u = \left(3-x^3\right) \quad \rightarrow \quad u' = 3x^2 dx$$

$$\int 3x^2\left(3-x^3\right)^6\ dx = -\int -3x^2\left(3-x^3\right)^6\ dx = \frac{1}{7}\left(3-x^3\right)^7 + c$$

تكامل الدوال المثلثية Trig functions Integrals

قواعد التكامل:

a. بتطبيق التعريف الأساسي لحساب التكامل المعرف في بداية الفصل و باعتبار الدالة المعاكسة للقوانين الأساسية للتفاضل يكون لدينا القوانين التالية :

تكامل دالة الجيب تكون بالشكل التالي:

$$1)\ \int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

أما إذا كانت الزاوية دالة في x فإن القانون السابق يكون كالتالي:

$$2)\ \int u' \sin u\, dx = -\cos u + c$$

تكامل دالة جيب التمام تكون بالشكل التالي:

$$3)\ \int \cos x\, dx = \sin x + c$$

أما إذا كانت الزاوية دالة في x فإن القانون السابق يكون كالتالي:

$$4)\ \int u' \cos u\, dx = \sin u + c$$

تكامل دالة الظل تكون بالشكل التالي:

$$\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + c$$

أما إذا كانت الزاوية دالة في x فإن القانون السابق يكون كالتالي:

$$\int u' \tan u\, dx = \ln|\sec u| + c$$

أمثلة :

احسب التكاملات التالية :

$$1)\ \int \sin 4x\, dx = \frac{1}{4}\int 4\sin 4x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 4x + c$$

$$2)\ \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$3)\ \int \left(\sin(3x+2) + \cos(2-3x)\right) dx = \int \sin(3x+2)\, dx + \int \cos(2-3x)\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int 3\sin(3x+2)\, dx - \frac{1}{3}\int -3\cos(2-3x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+2) - \frac{1}{3}\sin(2-3x) + c$$

$$4)\ \int \frac{3\sin\left(2-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,d\,x$$

$$u=2-\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad u'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{3\sin\left(2-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,d\,x=3(-2)\int\frac{-1}{2}.\frac{3\sin\left(2-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,d\,x$$

$$=-6\int u'\sin u\,d\,u$$

$$=6\cos u+c$$

$$=6\cos\left(2-\sqrt{x}\right)+c$$

b. بتطبيق القانون الأساسي لحساب التكامل بالاعتماد على القوانين الأساسية للتفاضل يكون لدينا القوانين التالية :

قاعدة 1 : تكامل الدالة $y=\sec^2 x$

$$\int \sec^2 x\,d\,x=\tan x+c$$

إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا القانون التالية:

$$\int u'\sec^2 u\,d\,x=\tan u+c$$

قاعدة 2 : تكامل الدالة $y=\csc^2 x$

$$\int \csc^2 x\,d\,x=-\cot x+c$$

إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا القانون التالية :

$$\int u'\csc^2 u\,d\,x=-\cot u+c$$

قاعدة 3 : تكامل الدالة $y=\sec x\,\tan x$

$$\int \sec x\,\tan x\,d\,x=\sec x+c$$

إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا القانون التالية :

$$\int u'\sec u\,\tan u\,d\,x=\sec u+c$$

قاعدة 4 : تكامل الدالة $y=\csc x\,\cot x$

$$\int \csc x\,\cot x\,d\,x=-\csc u+c$$

إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا القانون التالية :

$$\int u'\csc u\,\cot u\,d\,x=-\csc u+c$$

قاعدة 5 :تكامل الدالة $y=\cot x$

$$\int \cot x\, dx = -\ln|\csc x| + c$$

إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا :

$$\int u' \cot u\, dx = -\ln|\csc u| + c$$

قاعدة 6 :تكامل الدالة $y=\sec x$

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا :

$$\int u' \sec u\, dx = \ln|\sec u + \tan u| + c$$

قاعدة 7 :تكامل الدالة $y=\csc x$

$$\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

إذا كانت u دالة في x فيكون لدينا :

$$\int u' \csc u\, dx = \ln|\csc u - \cot u| + c$$

أمثلة :

احسب التكاملات التالية :

1) $\int x\tan(2x^2+1)\, dx = \frac{1}{4}\int 4x\tan(2x^2+1)\, dx = \frac{1}{4}\ln|\sec(2x^2+1)| + c$

2) $\int \sec^2(4x)\, dx = \frac{1}{4}\int 4\sec^2(4x)\, dx = \frac{1}{4}\tan(4x) + c$

3) $\int x^2\sec(5x^3+a)\, dx$ حيث a عدد ثابت

$$u = 5x^3 + a \quad \rightarrow \quad u' = 15x^2$$

$$\int x^2\sec(5x^3+a)\, dx = \frac{1}{15}\int 15x^2\sec(5x^3+a)\, dx$$

$$= \frac{1}{15}\ln|\sec(5x^3+a) + \tan(5x^3+a)| + c$$

4) $\int \frac{\csc(2+3\ln x)}{x}\, dx$

$$u = 2+3\ln x \quad \rightarrow \quad u' = \frac{3}{x}$$

$$\int \frac{\csc(2+3\ln x)}{x}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{x}\csc(2+3\ln x)\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\csc(2+3\ln x) - \cot(2+3\ln x)| + c$$

5) $\int 2x\csc(x^2+1)\cot(x^2+1)\,dx=$

$u=x^2+1\rightarrow u'=2x$

$\int 2x\csc(x^2+1)\cot(x^2+1)\,dx=$

$$=-\csc(x^2+1)+c$$

6) $\int (3x^2+2x+1)\sec(x^3+x^2+x)\tan(x^3+x^2+x)\,dx=$

$u=x^3+x^2+x\rightarrow u'=3x^2+2x+1$

$\int (3x^2+2x+1)\sec(x^3+x^2+x)\tan(x^3+x^2+x)\,dx=$

$$=\sec(x^3+x^2+x)+c$$

7) $\int (2x+7)\tan(x^2+7x)\,dx=$

$u=x^2+7x\rightarrow u'=2x+7$

$\int \tan u u'\,dx=$

$$=\sec^2(u)+c$$

$$=\sec^2(x^2+7x)+c$$

أمثلة محلولة

احسب التكاملات التالية:

1) $\int x^2 \csc^2\left(3-\dfrac{x^3}{3}\right) d\,x$.

الحل: $\int x^2 \csc^2\left(3-\dfrac{x^3}{3}\right) d\,x = -\int -x^2 \csc^2\left(3-\dfrac{x^3}{3}\right) d\,x = \cot\left(3-\dfrac{x^3}{3}\right)+c$

2) $\int x^2 \csc(2x^3)\cot(2x^3)\, d\,x$.

الحل:

$$\int x^2 \csc(2x^3)\cot(2x^3)\, d\,x = \frac{1}{6}\int 6x^2 \csc(2x^3)\cot(2x^3)\, d\,x$$
$$=\frac{1}{6}\left(-\csc 2x^3\right)+c = -\frac{1}{6}\csc 2x^3 + c$$

3) $\int 5-4x^{-\frac{1}{2}}\, d\,x$.

الحل : $\int 5-4x^{-\frac{1}{2}}\, d\,x = 5x-4\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)+c$

4) $\int \dfrac{\tan\left(5-\dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^3}}\, d\,x$.

الحل:

$$\int \frac{\tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^3}}\, d\,x = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{x^3}}\tan\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right) d\,x = \frac{1}{2}\int \tan u\, d\,u = \frac{1}{2}\ln\left|\sec u\right|+c$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\sec\left(5-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)\right|+c$$

5) $\int \cot\left(7-\frac{x}{2}\right)\, dx$.

الحل:

$$\int \cot\left(7-\frac{x}{2}\right) dx = -2\int \frac{-1}{2}\cot\left(7-\frac{x}{2}\right) dx = 2\ln\left|\csc\left(7-\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

6) $\int \frac{\cos(3+5\ln 9x)}{7x}\, dx$.

الحل:

$$\int \frac{\cos(3+5\ln 9x)}{7x}\, dx$$

$$u = 3+5\ln 9x \quad \rightarrow \quad u' = \frac{5}{x}$$

$$\int \frac{\cos(3+5\ln 9x)}{7x}\, dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}\int \frac{5}{x}\cos(3+5\ln 9x)\, dx$$

$$= \frac{1}{35}\int u'\cos u\, du = \frac{1}{35}\sin u + c = \frac{1}{35}\sin(3+5\ln 9x) + c$$

7) $\int \cos(9+4\sin 6x)\cos 6x\, dx$.

الحل:

$$\int \cos(9+4\sin 6x)\cos 6x\, dx$$

$$u = 9+4\sin 6x \quad \rightarrow \quad du = 24\cos 6x\, dx$$

$$\int \cos(9+4\sin 6x)\cos 6x\, dx = \frac{1}{24}\int 24\cos(9+4\sin 6x)\cos 6x\, dx$$

$$= \frac{1}{24}\sin(9+4\sin 6x) + c$$

8) $\int (\cos 3x - \sin 3x)^2 \; dx$.

الحل:

$$\int (\cos 3x - \sin 3x)^2 \; dx = \int \left(\cos^2 3x - 2\cos 3x \sin 3x + \sin^2 3x \right) dx$$

$$= \int \left(1 - 2\cos 3x \sin 3x \right) dx = \int dx - 2\int \cos 3x \sin 3x \; dx$$

$$\because \quad \int \cos 3x \sin 3x \; dx = \frac{1}{3}\int 3\cos 3x \sin 3x \; dx = \frac{1}{3}\sin^2 3x + c$$

$$\therefore \quad \int (\cos 3x - \sin 3x)^2 \; dx = x - \frac{1}{3}\sin^2 3x + c$$

9) $\int \cot x \, dx$.

الحل:

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = -\ln|\sin x| + c = -\ln|\sin^{-1} x| + c = -\ln|\csc x| + c$$

$$\therefore \quad \int \cot x \, dx = -\ln|\csc x| + c$$

تكامل الدوال المثلثية العكسية Trig function Integrals Inverse

سنورد في هذا البند بعض قواعد تكامل الدوال المثلثية العكسية التي سابق دراستها.

قاعدة 1:

لتكن u دالة في x عندئذ يكون:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c \quad \text{و} \quad \int \frac{-du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

حيث c ثابت التكامل.

أمثلة :

احسب التكاملات التالية :

$$1)\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c$$

$$2)\int \frac{2xdx}{\sqrt{16-(x+1)^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{4}\right)+c$$

$$3)\int \frac{-dx}{\sqrt{49+x^2}} = \frac{1}{7}\cos^{-1}\left(\frac{x}{7}\right)+c$$

قاعدة 2:

لتكن u دالة في x عندئذ يكون:

$$\int \frac{-du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\cot^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c \quad \text{و} \quad \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

حيث c ثابت التكامل.

أمثلة :

احسب التكاملات التالية :

$$1)\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c$$

$$2)\int \frac{2xdx}{16+x^4} = \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{4}\right)+c$$

$$3)\int \frac{dx}{25+(x+1)^2} = \frac{1}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{5}\right)+c$$

تكامل الدوال الآسية اللوغارثمية: Exponential and Logarithm Integrals

قواعد التكامل:

القاعدة 1:

إذا كان a عددا موجبا يخالف 1, $(a \neq 1)$ فإنه يكون لدينا القاعدة التالي:

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

وبصورة عامة إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القاعدة التالي:

$$\int u' \, a^u \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

أمثلة :

احسب التكاملات التالية :

$$1) \int 3^x \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c$$

$$2) \int 5^{-3x} \, dx = \frac{-1}{3} \int (-3) \, 5^{-3x} \, dx = \frac{-1}{3} . \frac{5^{-3x}}{\ln 5} + c$$

$$3) \int x 6^{2x^2} \, dx = \frac{1}{4} \int 4x \, 6^{2x^2} \, dx = \frac{1}{4} . \frac{6^{2x^2}}{\ln 6} + c$$

القاعدة 2:

إذا كان $a = e$ فيكون لدينا ما يلي:

$\int e^x \, dx = \frac{e^x}{\ln e} + c$ لكن $\ln e = 1$ وبالتالي يكون لدينا القاعدة التالي:

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

وبصورة عامة إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القاعدة التالي:

$$\int u' e^u \, dx = e^u + c$$

مثال:

احسب التكامل التالي: $\int (x-1) \, e^{x^2-2x+1} \, dx$

الحل:

$$u = x^2 - 2x + 1 \;\to\; u' = 2x - 2 = 2(x-1)$$

$$\therefore \quad \int (x-1)\, e^{x^2-2x+1}\, dx = \frac{1}{2}\int 2(x-1)\, e^{x^2-2x+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int u' e^u\, dx = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2-2x+1} + c$$

مثال:

احسب التكامل التالي: $\int (\cos x - 1) e^{\sin x - x}\, dx$

الحل:

لدينا $u = \sin x - x \;\to\; u' = \cos x - 1$

وبالتالي فإن:

$$\int (\cos x - 1) e^{\sin x - x}\, dx = \int u' e^u\, dx = e^u + c = e^{\sin x - x} + c$$

القاعدة 3:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا القاعدة التالي :

$$\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + c$$

مثال: احسب التكامل التالي : $\int \frac{e^x}{e^x - 2}\, dx$.

الحل:

لدينا $u = e^x - 2 \;\to\; u' = e^x$

وبالتالي فإن : $\int \frac{e^x}{e^x - 2}\, dx = \int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + c = \ln|e^x - 2| + c$

مثال: احسب التكامل التالي : $\int \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x}\, dx$.

الحل:

لدينا $u = x^4 + 2x \;\to\; u' = 4x^3 + 2 = 2(2x^3 + 1)$

وبالتالي فإن :

$$\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3+1)}{x^4+2x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx=\frac{1}{2}\ln|\,u\,|+c=\frac{1}{2}\ln|\,x^4+2x\,|+c$$

مثال: احسب التكامل التالي: $\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx$.

الحل:

$$\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx$$
$$u=x^2+\sin 2x \quad\rightarrow\quad u'=2x+2\cos 2x=2(x+\cos 2x)$$
$$\int \frac{x+\cos 2x}{x^2+\sin 2x}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2(x+\cos 2x)}{x^2+\sin 2x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx=\frac{1}{2}\ln|\,u\,|+c=\ln|\,x^2+\sin 2x\,|+c$$

أمثلة محلولة

احسب التكاملات التالية:

1) $\int \left(e^{-x} + \cos 2x + 1\right) dx$.

الحل:

$$\int \left(e^{-x} + \cos 2x + 1\right) dx = -e^{-x} - \frac{1}{2}\sin 2x + x + c$$

2) $\int 2\, e^{2x+\cos x}\left(2 - \sin x\right) dx$.

الحل:

$$\int 2\, e^{2x+\cos x}\left(2 - \sin x\right) dx$$

$$u = 2x + \cos x \quad \to \quad du = (2 - \sin x)\, dx$$

$$\int 2\, e^{2x+\cos x}\left(2 - \sin x\right) dx = \int 2\, e^{u}\, du = 2\, e^{u} + c = 2\, e^{2x+\cos x} + c$$

3) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\, dx = \int e^x \left(e^x+1\right)^{\frac{-1}{2}} dx$.

الحل:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\, dx = \int e^x \left(e^x+1\right)^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$u = e^x + 1 \quad \to \quad du = e^x\, dx$$

$$\int e^x \left(e^x+1\right)^{\frac{-1}{2}} dx = \int u^{\frac{-1}{2}}\, du = 2\, u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2(e^x+1)^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{e^x+1} + c$$

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, d\,x = \int\ x^{-2}\, e^{x^{-1}}\ d\,x \quad (4$$

الحل:

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, d\,x = \int\ x^{-2}\, e^{x^{-1}}\ d\,x$$

$$u = x^{-1} \quad \rightarrow d\,u = -x^{-2}dx$$

$$\int\ x^{-2}\, e^{x^{-1}}\ d\,x = -\int -\,x^{-2}e^{x^{-1}}\,dx$$

$$= -\int\ e^{u}\ d\,u = -e^{u} + c = -\,e^{\frac{1}{x}} + c$$

$$\int 3^{2x}\ e^{5-3^{2x}}\ d\,x \quad (5$$

الحل:

$$\int 3^{2x}\ e^{5-3^{2x}}\ d\,x$$

$$u = 5 - 3^{2x} \quad \rightarrow \quad d\,u = -2\ 3^{2x}\ln 3\ d\,x \quad \rightarrow \quad 3^{2x}\ d\,x = -\frac{1}{2\ln 3}\,d\,u$$

$$\int 3^{2x}\ e^{5-3^{2x}}\ d\,x = -\frac{1}{2\ln 3}\int\ e^{u}\ d\,u = -\frac{1}{2\ln 3}e^{5-3^{2x}} + c$$

$$\int\ 2^{1+\cot 5t}\ \csc^2 5t\,d\,t \quad (6$$

الحل:

$$\int\ 2^{1+\cot 5t}\ \csc^2 5t\,d\,t$$

$$u = 1+\cot 5t \quad \rightarrow \quad d\,u = -5\csc^2 5t\ d\,t \quad \rightarrow \quad \csc^2 5t\ d\,t = -\frac{1}{5}\,d\,u$$

$$\int\ 2^{1+\cot 5t}\ \csc^2 5t\,d\,t = -\frac{1}{5}\int\ 2^{u}\ d\,u = -\frac{1}{5\ln 2}\,2^{u} + c = -\frac{1}{5\ln 2}\,2^{1+\cot 5t} + c$$

7) $\int \frac{e^{5-\frac{2}{x^2}}}{x^3}\, dx = \int x^{-3} e^{5-2x^{-2}}\, dx$.

الحل:

$$\int \frac{e^{5-\frac{2}{x^2}}}{x^3}\, dx = \int x^{-3} e^{5-2x^{-2}}\, dx$$

$$u = 5-2x^{-2} \quad \to \quad du = 4x^{-3}\, dx \quad \to \quad x^{-3}\, dx = \frac{1}{4}\, du$$

$$\int x^{-3} e^{5-2x^{-2}}\, dx = \frac{1}{4}\int e^{u} du = \frac{1}{4}e^{u} + c = \frac{1}{4}e^{5-2x^{-2}} + c$$

8) $\int \frac{e^{3+\ln 2x}}{x}\, dx$.

الحل:

$$\int \frac{e^{3+\ln 2x}}{x}\, dx = \int x^{-1} e^{3} e^{\ln 2x}\, dx$$

$$= \int x^{-1} e^{3}(2x)\, dx = 2e^{3}\int dx = 2xe^{3} + c$$

9) $\int xe^{x^2}\left(e^{x^2}+1\right)^7 dx$.

الحل:

$$\int xe^{x^2}\left(e^{x^2}+1\right)^7 dx$$

$$u = e^{x^2}+1 \quad \to \quad du = 2xe^{x^2}\, dx \quad \to xe^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, du$$

$$\int xe^{x^2}\left(e^{x^2}+1\right)^7 dx = \frac{1}{2}\int u^{7}\, du = \frac{1}{2}\frac{u^{8}}{8} + c = \frac{1}{16}\left(e^{x^2}+1\right)^8 + c$$

10) $\int e^{2x}\sec\left(e^{2x}-1\right)dx$.

الحل:

$$\int e^{2x}\sec\left(e^{2x}-1\right)dx$$

$$u=e^{2x}-1 \;\rightarrow\; du=2e^{2x}\,dx \;\rightarrow e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int e^{2x}\sec\left(e^{2x}-1\right)dx=\frac{1}{2}\int \sec u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\tan u+\sec u\right|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(e^{2x}-1\right)+\sec\left(e^{2x}-1\right)\right|+c$$

11) $\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx$.

الحل:

$$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx$$

$$u=e^{2x^2}+5 \;\rightarrow\; du=4xe^{2x^2}\,dx \;\rightarrow xe^{2x^2}\,dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{4}\ln|u|+c=\frac{1}{4}\ln\left|e^{2x^2}+5\right|+c$$

12) $\int \frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sin 2x+\cos 2x}dx$.

الحل:

$$\int \frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sin 2x+\cos 2x}dx$$

$$u=\sin 2x+\cos 2x \;\rightarrow\; u'=2\cos 2x-2\sin 2x=2(\cos 2x-\sin 2x)$$

$$\int \frac{\cos 2x-\sin 2x}{\sin 2x+\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2(\cos 2x-\sin 2x)}{\sin 2x+\cos 2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{u'}{u}du=\frac{1}{2}\ln|u|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\sin 2x+\cos 2x\right|+c$$

13) $\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}\, dx$.

الحل:

$$\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}\, dx$$

$$u = 5-\tan x \quad \to \quad u' = -\sec^2 x$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{5-\tan x}\, dx = -\int \frac{-\sec^2 x}{5-\tan x}\, dx = -\int \frac{u'}{u}\, dx = -\ln|u| + c = -\ln|5-\tan x| + c$$

التكامل بالتعويض: Substitution Integral

ليكن لدينا الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ عندئذ يمكن تركيب الدالة $f\circ g(x)=f(g(x))$ وبفرض أن $g(x)=u$ تصبح لدينا الدالة $f(u)$ فإذا كانت $f(u)$ قابلة للمكاملة يكون التركيب $f\circ g(x)=f(g(x))$ قابل للمكاملة، وسنميز حالتين :

الحالة الأولى:

التكامل بالتعويض وفق قاعدة السلسلة :

في هذه الحالة نحاول الوصول إلى الشكل $\int f(u)\ du$ من خلال إجراء تغير في المتحول سنشرحه بالأمثلة التالية:

1) $\int (x^2+5x+2)(2x+5)\ dx$

نفرض أن : $u=x^2+5x+2$ نفاضل الطرفين نحصل على $du=(2x+5)dx$ ثم نعوض عن u ومشتقاتها بذلك يصبح التكامل على الشكل التالي:

$$\int u\ \ du=\frac{u^2}{2}+C$$

نعوض عن u بما تساويه فنجد:

$$\int (x^2+5x+2)(2x+5)\ dx=\frac{(x^2+5x+2)^2}{2}+C$$

2) $\int 2x\ e^{x^2}\ dx$

نفرض أن : $u=x^2$ نفاضل الطرفين نحصل على $du=2xdx$ ثم نعوض عن u ومشتقاتها بذلك يصبح التكامل على الشكل التالي:

$$\int e^u\ \ du=e^u+C$$

نعوض عن u بما تساويه فنجد:

$$\int 2x\ e^{x^2}\ dx=e^{x^2}+C$$

الحالة الثانية:

طريقة التعويض في الدوال المثلثية:

إذا حوي التكامل أي من الجذور التالية نتبع طريقة التعويض الموضحة جانب كل جذر:

$$1-\quad \sqrt{a^2-b^2x^2} \quad \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{b}\sin\theta \\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta \end{cases}$$

$$2-\quad \sqrt{b^2x^2-a^2} \quad \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{b}\sec\theta \\ \tan^2\theta=\sec^2\theta-1 \end{cases}$$

$$3-\quad \sqrt{a^2+b^2x^2} \quad \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{b}\tan\theta \\ \sec^2\theta=1+\tan^2\theta \end{cases}$$

أمثلة:

أحسب التكاملات التالية:

$$1)\int \frac{16dx}{x^2\sqrt{4-9x^2}}$$

نفرض أن : $x=\frac{2}{3}\sin\theta$ بتفاضل الطرفين نحصل على $dx=\frac{2}{3}\cos\theta\ d\theta$ منها نعوض في الجذر نحصل على

$$\sqrt{4-9x^2}=\sqrt{4-\sin^2\theta}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2|\cos\theta|$$

ملاحظة:

إذا كان لدينا تكامل محدود يجب أن نضع إشارة القيمة المطلقة، ولكن هنا يمكن التغاضي عنها وسنضع $|\cos\theta|=\cos\theta$ فيكون لدينا:

$$\int \frac{16}{\frac{4}{9}\sin\theta^2(2\cos\theta)}\left(\frac{2}{3}\cos\theta\right)d\theta=$$

$$=\int\frac{12\ d\theta}{\sin^2\theta}=12\int\csc^2\theta\ \ d\theta=-12\cot\theta+C$$

$$2)\int \sqrt{9-4x^2}\ \ dx$$

نفرض أن : $x=\frac{3}{2}\sin\theta$ بتفاضل الطرفين نحصل على $dx=\frac{3}{2}\cos\theta\ \ d\theta$ منها نعوض في الجذر نحصل على:

$$\int \sqrt{9-4\left(\frac{3}{2}\sin\theta\right)^2}\;\frac{3}{2}\cos\theta\;d\theta=\int\sqrt{9-9\sin^2\theta}\;\frac{3}{2}\cos\theta\;d\theta$$
$$=\int 3\cos\theta\;\frac{3}{2}\cos\theta\;d\theta$$
$$=\frac{9}{2}\int\cos^2\theta\;d\theta$$
$$=\frac{9}{2}\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\;d\theta$$
$$=\frac{9}{2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)+C$$

لكن $\theta=\frac{3}{2}\sin^{-1}x$ و $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ منها

$$\sin 2\theta=2\left(\frac{2}{3}x\right)\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\int\sqrt{9-4x^2}\;dx=\frac{2}{3}\sin^{-1}x+\frac{4}{9}x\sqrt{9-4x^2}+C$$

تكامل بعض الصيغ المثلثية : Products of Trig functions

يكون التكامل في هذه الحالة على حسب درجة الدوال المثلثية :

أولاً: لحساب التكامل $\int \sin^n x\cos^m x\;dx$ **نميز بين الحالات التالية:**

1- إذا كان n فردياً: نترك واحد من sin ونحول الباقي إلى cos من خلال العلاقة $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ ثم نجري التكامل بالتعويض بفرض أن $u=\cos x$.

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int\sin^3 x\cos^4 x\;dx$.

الحل:

باستخدام القاعدة السابقة نحصل على:

$$\int\sin^3 x\cos^4 x\;dx=\int\sin x\sin^2 x\cos^4 x\;dx$$
$$=\int\sin x(1-\cos^2 x)\cos^4 x\;dx$$

نفرض أن $u=\cos x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du=-\sin x\;dx$

بالتعويض نحصل على:

$$\int \sin^3 x\cos^4 x \; dx = -\int \left(1-u^2\right)u^4 \; du = -\int \left(u^4-u^6\right) \; du$$
$$= \frac{-u^5}{5}+\frac{u^7}{7}+C$$
$$= \frac{-\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+C$$

2- إذا كان m فردياً: نترك واحد من cos ونحول الباقي إلى sin من خلال العلاقة $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ وبعدها نجري التكامل بالتعويض مفترضين أن $\sin x=u$.

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \cos^3 x\sin^2 x \; dx$.

الحل:

باستخدام القاعدة السابقة نحصل على:

$$\int \cos^3 x\sin^2 x \; dx = \int \cos x\cos^2 x\sin^2 x \; dx$$
$$= \int \cos x\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x \; dx$$

نفرض أن $u=\sin x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du=\cos x \; dx$

بالتعويض نحصل على:

$$\int \left(1-u^2\right)u^2 \; du = -\int \left(u^2-u^4\right)du = \frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+C = \frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$$

3- إذا كان n و m فرديان : في هذه الحالة يمكن استخدام البند 1 أو 2 لإجراء الحساب.

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \cos^5 x\sin^3 x \; dx$.

الحل:

باستخدام القاعدة السابقة نحصل على:

$$\int \cos^5 x\sin^3 x \; dx = \int \cos x\cos^4 x\sin^3 x \; dx$$
$$= \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \sin^3 x\cos x\, dx$$

نفرض أن $u=\sin x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du=\cos x \; dx$

بالتعويض نحصل على:

$$\int (1-u^2)^2 u^3 \, du = \int (1-2u^2+u^4) u^3 \, du = \int (u^3 - 2u^5 + u^7) \, du$$

$$= \frac{u^4}{4} - 2u^5 + u^7 + C$$

$$= \frac{\sin^4 x}{4} + \frac{1}{3}\sin^6 x + \frac{\sin^8 x}{8} + C$$

4- إذا كان n و m زوجيان عندها نستخدم قوانين ضعف الزاوية لإعادة التكامل إلى شكل يمكن فيه إجراء المكاملة وصيغ ضعف الزاوية هي :

1) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ و 2) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ و 3) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$.

الحل:

باستخدام القاعدة السابقة نحصل على:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \times \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4} + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

ثانياً: إذا كان لدينا التكامل: $\int \tan^n x \sec^m x \, dx$ نميز الحالات التالية:

1- إذا كان n فردياً: نترك واحد من tan و واحده من sec ونحول الباقي إلى sec باستخدام العلاقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ وبعدها نفرض $u = \sec x$.

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \tan^3 x\sec^5 x \ d x$.

الحل:

باستخدام القاعدة السابقة نحصل على:

$$\int \tan^3 x\sec^5 x \ d x=\int \tan^2 x\sec^4 x\tan x\sec x \ d x$$
$$=\int \left(\sec^2 x-1\right)\sec^4 x\tan x\sec x \ d x$$

نفرض أن $u=\sec x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du=\tan x\sec x \ dx$

بالتعويض نحصل على:

$$\int \left(u^2-1\right)u^4 \ d u=\frac{u^7}{7}-\frac{u^5}{5}+C$$
$$=\frac{\sec^7 x}{7}-\frac{\sec^5 x}{5}+C$$

2- إذا كان m زوجي: نترك اثنان من $\sec^2 x\sec x$ ونحول الباقي إلى $\tan$ من خلال العلاقة $\sec^2 x=1+\tan^2 x$ ونستخدم التحويل $u=\tan x$.

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \tan^2 x\sec^4 x \ d x$.

الحل:

باستخدام القاعدة السابقة نحصل على:

$$\int \tan^2 x\sec^2 x\sec^2 x \ d x=\int \cos x\cos^2 x\sin^2 x \ d x$$

نفرض أن $u=\tan x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du=\sec^2 x \ dx$

عندها يصبح التكامل على الشكل التالي:

$$\int u^2\left(1+u^2\right) \ d u=\int \left(u^2+u^4\right) \ du$$
$$=\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+C$$
$$=\frac{\tan^3 x}{3}+\frac{\tan^5 x}{5}+C$$

3- إذا كان n فردياً و m زوجياً عندها يمكن استخدام أي من البندين 1 أو 2 لإيجاد التكامل.

4- إذا كان n زوجياً و m فردياً عندها كل تكامل سوف يحل بطريقة مختلفة ولا توجد قاعدة عامة.

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}\,dx$.

الحل:

باستخدام القواعد السابقة نحصل على:

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\sin^4 x \sin x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x}{\cos^3 x}\,dx$$

نفرض أن $u=\cos x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du=-\sin x\,dx$

عندها يصبح التكامل على الشكل التالي:

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}\,dx = -\int \frac{\left(1-u^2\right)^2}{u^3}\,du = -\int \frac{\left(1-2u^2+u^4\right)}{u^3}\,du$$

$$= -\int \frac{du}{u^3} + 2\int \frac{du}{u} - \int u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\sec^2 x + 2\,Ln\left|\cos x\right| - \frac{1}{2}\cos^2 x + C$$

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \tan^5 x \sec^4 x\,dx$.

الحل:

باستخدام القواعد السابقة نحصل على:

$$\int \tan^5 x \sec^4 x\,dx = \int \tan^4 x \sec^3 x \tan x \sec x\,dx$$

$$= \int \left(\sec^2 x - 1\right)^2 x \sec^3 x \tan x \sec x\,dx$$

نفرض أن $u=\sec x$ وبتفاضل الطرفين نحصل على: $du=\sec x \tan x\,dx$

عندها يصبح التكامل على الشكل التالي:

$$\int \left(u^2-1\right)^2 u^3 \quad d\,u = \int \left(u^4-2u^2+1\right) u^3 \quad du$$
$$= \int \left(u^7-2u^5+u^3\right) \ du$$
$$= \frac{u^8}{8} - \frac{2u^6}{6} + \frac{u^4}{4} + C$$
$$= \frac{\sec^8 x}{8} - \frac{2\sec^6 x}{6} + \frac{\sec^4 x}{4} + C$$

مثال:

احسب التكامل التالي : $\int \sin^5 x \cos^2 x \ d\,x$ ؟

الحل:

باستخدام القواعد السابقة نحصل على:

$$\sin^5 x = \sin x \sin^4 x = \sin x(\sin^2 x)^2$$
$$= \sin x(1-\cos^2 x)^2$$

نفرض $u = \cos x$ بتعويض في التكامل نحصل على :

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \ d\,x = \int (1-u^2)^2 \quad u^2 \quad du$$
$$= \quad \int (1-2u^2+u^4)u^2 \quad du$$
$$= \int (u^2-2u^4-u^6) \ du = \frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c$$
$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

التكامل بالتجزيء Integration by parts

من قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين نجد: $d(uv) = v\,du + u\,dv$

بتكامل الطرفين نحصل على العلاقة : $uv = \int v\,du + \int u\,dv$

ومنها نحصل على قانون التكامل بالتجزيء:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

وبهذه الطريقة نكون قد انتقلنا من حساب التكامل $\int u\,dv$ إلى حساب التكامل $\int v\,du$ الذي يكون عادة اقل صعوبة من الأول إذا أحسنا اختيار u و dv .

وطريقة استخدام هذه القاعدة موضحة في الأمثلة الآتية:

مثال:

نفرض أننا نريد حساب $\int x\sin x\,dx$ لكن لا يمكن حسابه مباشرة لأنه لا ينطبق عليه أي من قوانين التكامل المباشرة ولذلك سنحسب هذا التكامل بطريقة التكامل بالتجزيء.

ولنفرض $u = x \;\;\rightarrow\;\; du = dx$

$$dv = \sin x\,dx \;\;\rightarrow\;\; v = -\cos x$$
$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + c$$

مثال:

احسب ما يلي : $\int x e^x\,dx$.

الحل:

نلاحظ:أننا لا نستطيع إيجاد تكامل هذه الدالة مباشرة فنحاول حسابه باستعمال التكامل بالتجزيء.

لنفرض أن $u = x \;\;\rightarrow\;\; du = dx$

$$dv = x\,dx \;\;\rightarrow\;\; v = \frac{x^2}{2}$$

ومنه فإن $\int x e^{x}\, d x=\frac{x^{2}}{2} e^{x}-\int \frac{x^{2}}{2} e^{x}\, d x$

ولكن التكامل $\int \frac{x^{2}}{2} e^{x}\, d x$ ليس من التكاملات التي يمكن أن نستخدم فيها احد قوانين التكامل المباشر وذلك بسبب اختيار $u , d v$ اختيار خاطئا أو غير موفق، إذا نحاول إيجاد اختيار أخر نفرضه لــ $u , d v$

ولنأخذ $u=x \rightarrow d u=d x$ و $d v=e^{x}\, d x \rightarrow v=e^{x}$

نطبق القانون : $\int u\, d v=u v-\int v\, d u$

ومنه $\int x e^{x}\, d x=x e^{x}-\int e^{x}\, d x=x e^{x}-e^{x}+c=e^{x}(x-1)+c$

إذا الاختيار الذي تم في المثال صحيح.

مثال:

اوجد تكامل $\int \ln x\, d x$.

الحل:

نلاحظ أننا لم نأخذ أي قاعدة تكامل تحسب $\int \ln x\, d x$

ففي هذا المثال يمكن حساب التكامل باستعمال طريقة التعويض المذكورة سابقاً وبأخذ

$z=\ln x$

وبالتالي $z=\ln x \rightarrow e^{z}=x \rightarrow d e^{z}=d x$

لدينا $\frac{d e^{z}}{d z}=e^{z} \rightarrow d e^{z}=e^{z}\, d z$

ومنه $d x=e^{z}\, d z$

إذا التكامل السابق يصبح $\int \ln x\, d x=\int z\, d e^{z}=\int z e^{z}\, d z$

وحسب المثال السابق :

$\int z e^{z}\, d z==e^{z}(z-1)+c$

وبالتالي فإن $\int \ln x\, d x=e^{\ln x}(\ln x-1)+c=x(\ln x-1)+c$

ويمكن حسابه مباشرة باستعمال التكامل بالتجزيء

ولنأخذ $u=\ln x \quad \rightarrow \quad du=\frac{1}{x}dx$

$dv=dx \quad \rightarrow \quad v=x$

ولنطبق قانون التكامل بالتجزيء: $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

فيكون لدينا:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x-\int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x-\int dx$$
$$= x\ln x - x + c = x(\ln x-1)+c$$

مثال:

اوجد تكامل $\int \sin^2 x\,dx$.

الحل:

لنفرض ما يلي :

$$u=\sin x \quad \rightarrow \quad du=\cos x\,dx$$
$$dv=\sin x\,dx \quad \rightarrow \quad v=-\cos x$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ يكون لدينا :

$$\int \sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+\int \cos^2 x\,dx$$
$$\because \quad \sin^2 x+\cos^2 x=1 \quad \rightarrow \quad \cos^2 x=1-\sin^2 x$$
$$\therefore \quad \int \sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+\int \left(1-\sin^2 x\right)dx=-\sin x\cos x+\int dx-\int \sin^2 x\,dx$$
$$\rightarrow \quad \int \sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+x-\int \sin^2 x\,dx$$
$$\rightarrow \quad \int \sin^2 x\,dx+\int \sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+x+c$$
$$\rightarrow \quad 2\int \sin^2 x\,dx=-\sin x\cos x+x+c$$
$$\therefore \quad \int \sin^2 x\,dx=-\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}x+c=-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+c$$

– هناك طريقة ثانية لحل هذا المثال من خلال استخدام صيغة ضعف الزاوية: $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ وبالتالي يكون لدينا:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \int \frac{dx}{2} - \int \frac{\cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} + C$$

وهي النتيجة ذاتها التي حصلنا عليها بطريقة التكامل بالتجزيء.

ملاحظة:

كما هو واضح أن طريقة التكامل بالتجزئة تنقلنا من حساب تكامل صعب إلى تكامل ابسط لكن هذا يتوقف بصورة أدق عن اختيار u, dv لذلك سنقدم بعض حالات الاختيار المناسب، حالات اختيار u, v.

الحالة الأولى:

إذا كان التكامل من الشكل $\int x^n e^{ax}\, dx$

نفرض $u = x^n \quad \rightarrow \quad du = nx^{n-1}\, dx$

ونفرض $dv = e^{ax}\, dx \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{a} e^{ax}$

مثال:

احسب ما يلي : $\int x^2 e^x\, dx$.

الحل:

لنفرض ما يلي :

$$u = x^2 \quad \rightarrow \quad du = 2x\, dx$$
$$dv = e^x\, dx \quad \rightarrow \quad v = e^x$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء $\int u\, dv = uv - \int v\, du$ يكون لدينا :

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\, dx$$

ولكن وجدنا في المثال السابق أن $\int x e^x\, dx = e^x(x-1) + c$ وبالتالي يكون لدينا:

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\left[e^x(x-1)\right] + C$$

الحالة الثانية:

إذا كان التكامل من الشكل $\int x^n \cos\omega x\,d x$ أو من الشكل $\int x^n \sin\omega x\,d x$

نفرض $u = x^n \quad \to \quad d u = n x^{n-1}\,d x$

ونفرض للشكل الأول $d v = \cos\omega x\,d x \quad \to \quad v = \frac{1}{\omega}\sin\omega x$

ونفرض للشكل الثاني $d v = \sin\omega x\,d x \quad \to \quad v = -\frac{1}{\omega}\cos\omega x$

مثال:

احسب التكامل $\int x\cos x\,d x$.

الحل:

نفرض أن :

$$u = x \quad \to \quad d u = d x$$
$$d v = \cos x\,d x \quad \to \quad v = \sin x$$

وحسب قانون التكامل بالتجزيء فإن :

$$\int x\cos x\,d x = x\sin x - \int \sin x\,d x$$
$$= x\sin x + \cos x + c$$

الحالة الثالثة:

إذا كان التكامل من الشكل $\int x^n \ln x\,d x$

في هذه الحالة نفرض $u = \ln x \quad \to \quad d u = \frac{d x}{x}$ ونفرض $d v = x^n\,d x \quad \to \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

مثال:

احسب التكامل : $\int x^2 \ln x\,d x$.

الحل:

نفرض $u = \ln x \quad \to \quad d u = \frac{1}{x}\,d x$ ولنفرض $d v = x^2\,d x \quad \to \quad v = \frac{x^3}{3}$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء فإن :

$$\int x^2 \ln x\,d x = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,d x$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}.\frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$$

الحالة الرابعة:

إذا كان لدينا التكامل من الشكل $\int e^{ax}\sin\omega x\,dx$ أو من الشكل $\int e^{ax}\cos\omega x\,dx$

نفرض $u=e^{ax} \rightarrow du=ae^{ax}\,dx$

ونفرض للشكل الأول $dv=\sin\omega x dx \rightarrow v=-\frac{1}{\omega}\cos\omega x$

ونفرض للشكل الثاني $dv=\cos\omega x\,dx \rightarrow v=\frac{1}{\omega}\sin\omega x$

مثال:

احسب التكامل $\int e^{3x}\sin 2x\,dx$.

الحل:

نفرض أن:

$$u=e^{3x} \rightarrow du=3e^{3x}dx$$

$$dv=\sin 2x\;dx \rightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

وبالتالي فإن :

$$I=\int e^{3x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x\,e^{3x}+\frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$$

نضع $I=-\frac{e^{3x}}{2}\cos x\,e^{3x}+\frac{3}{2}I_1$

نحسب الآن $I_1=\int\cos x\,e^{3x}\;dx$ ونحسب مرة أخرى التكامل بالتجزيء

نفرض أن

$$u=e^{3x} \rightarrow du=3e^{3x}dx$$

$$dv=\cos 2x\;dx \rightarrow v=\frac{1}{2}\sin 2x$$

ومنه فإن : $I_1=\int\cos x\,e^{3x}\;dx=\frac{1}{2}\sin 2x\,e^{3x}-\frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x\,dx$

نرجع ونعوض في التكامل الأصلي I

$$I=\int e^{3x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x\,e^{3x}+\frac{3}{4}\sin 2x\,e^{3x}-\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx$$

$$\rightarrow \int e^{3x}\sin 2x\,dx+\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx=e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{13}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx = e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)$$

$$\rightarrow \quad \int e^{3x}\sin 2x\,dx = \frac{4}{13}e^{3x}\left(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)$$

إذا التكامل المطلوب حسابه يعطى بما يلي:

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = \frac{e^{3x}}{13}(-2\cos x+3\sin 2x)$$

مثال:

احسب التكامل $\int x^3\sin(2x^2)\,dx$.

الحل:

نفرض أن $u=x^2 \quad \rightarrow \quad du=2x\,dx$

ونفرض أن $dv=x\sin(2x^2)\,dx \quad \rightarrow \quad v=-\frac{1}{4}\cos(2x^2)$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x^3\sin(2x^2)\,dx = -\frac{1}{4}x^2\cos(2x^2)+\frac{1}{2}\int x\cos(2x^2)\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}x^2\cos(2x^2)+\frac{1}{8}\sin(2x^2)+c$$

مثال:

احسب التكامل: $\int x\sec x\tan x\,dx$.

الحل:

نفرض أن $u=x \quad \rightarrow \quad du=dx$

ونفرض أن $dv=\sec x\tan x\,dx \quad \rightarrow \quad v=\sec x$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x\sec x\tan x\,dx = x\sec x-\int \sec x\,dx$$

$$= x\sec x-\ln|\sec x+\tan x|+c$$

أمثلة محلولة

احسب التكاملات التالية:

1) $\int \cos x^2 \, d\,x$.

الحل:

لدينا $\int \cos x^2 \, d\,x = \int \cos x \cos x \, d\,x$

نفرض أن $u = \cos x \quad \to \quad d\,u = -\sin x \, d\,x$

نفرض أن $d\,v = \cos x \, d\,x \quad \to \quad v = \sin x$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على:

$$\int \cos x^2 \, d\,x = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, d\,x$$
$$= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, d\,x$$

ومنه فإن $\int \cos x^2 \, d\,x = \sin x \cos x + \int d\,x - \int \cos^2 x \, d\,x$

$$\to \quad 2\int \cos^2 x \, d\,x = \sin x \cos x + x + c$$

$$\to \quad \int \cos^2 x \, d\,u = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + c = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c$$

يمكن حل هذا المثال بطريقة ثانية من خلال صيغة ضعف الزاوية

أي $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

ونحصل على النتيجة ذاتها.

---

2) $\int \ln(5x+3) \, d\,x$.

الحل:

نفرض أن $u = \ln(5x+3) \quad \to \quad d\,u = \dfrac{5}{5x+3} \, d\,x$

ونفرض أن $d\,v = d\,x \quad \to \quad v = x$

حسب قانون التكامل بالتجزيء يكون لدينا

$$\int \ln(5x+3)\,dx = x\ln(5x+3) - \int \frac{5x}{5x+3}\,dx = x\ln(5x+3) - \int \frac{5x+3-3}{5x+3}\,dx$$

$$= x\ln(5x+3) - \int dx + \int \frac{3}{5x+3}\,dx = x\ln(5x+3) - x + \frac{3}{5}\ln(5x+3) + c$$

$$= \left(x+\frac{3}{5}\right)\ln(5x+3) - x + c$$

---

3) $\int x\,e^{-3x}\,dx$.

الحل:

نفرض أن $u = x \;\rightarrow\; du = dx$

ونفرض أن $dv = e^{-3x}\,dx \;\rightarrow\; v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x\,e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{2}x\,e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + c = -\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x+\frac{1}{3}\right) + c$$

---

4) $\int x\sqrt{x+4}\,dx$.

الحل:

نفرض أن $u = x \;\rightarrow\; du = dx$

ونفرض أن $dv = (x+4)^{\frac{1}{2}}\,dx \;\rightarrow\; v = \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x\sqrt{x+4}\,dx = \frac{2}{3}x(x+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (x+4)^{\frac{3}{2}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}(x+4)^{\frac{5}{2}} + c$$

---

5) $\int x\,e^{1-3x}\,dx$.

الحل:

نفرض أن $u = x \;\rightarrow\; du = dx$

ونفرض أن $dv = e^{1-3x}\,dx \;\rightarrow\; v = -\frac{1}{3}e^{1-3x}$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على:

$$\int x\,e^{1-3x}\,dx = -\frac{1}{3}x\,e^{1-3x} + \frac{1}{3}\int e^{1-3x}\,dx$$
$$= -\frac{1}{3}x\,e^{1-3x} - \frac{1}{9}e^{1-3x}$$
$$= -\frac{1}{3}e^{1-3x}\left(x+\frac{1}{3}\right)+c$$

---

6) $\int x^5\, e^{x^3}\,dx$.

الحل:

بفرض أن $dv = x^2 e^{x^3}\,dx$, $u = x^3$ منها يكون لدينا

$$du = 3x^2\,dx \quad , \quad v = \frac{1}{3}e^{x^3}$$

$$\therefore \quad \int x^5\, e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}x^3\,e^{x^3} - \int x^2 e^{x^3}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3}e^{x^3} + c = \frac{1}{3}(x^3-1)\,e^{x^3}$$

---

7) $\int x^2\, e^x\,dx$.

الحل:

نفرض أن $du = 2x\,dx \quad \rightarrow \quad u = x^2$

ونفرض أن $v = e^x \quad \rightarrow \quad dv = e^x\,dx$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x^2\, e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx$$

لنحسب الآن $\int x\,e^x\,dx$ ونستعمل مرة أخرى التكامل بالتجزئة

ولنأخذ $du = dx \quad \rightarrow \quad u = x$ و $v = e^x \quad \rightarrow \quad dv = e^x\,dx$

نطبق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x\,e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c = (x-1)\,e^x + c$$

نعوض في حساب التكامل المطلوب فنحصل على الناتج

$$\int x^2\ e^x\, d\,x = x^2 e^x - 2(x-1)\,e^x + c$$
$$= (x^2 - 2x + 2)\ e^x + c$$

8) $\int \dfrac{d\,x}{4+9x^2}$.

الحل:

نفرض أن : $x = \frac{2}{3}\tan\theta$ نفاضل الطرفين و نحصل على $dx = \frac{2}{3}\sec^2\theta\ \ d\theta$

منها نعوض في التكامل لنحصل على:

$$\int \frac{\frac{2}{3}\sec^2\theta\ \ d\theta}{4+9\left(\frac{2}{3}\tan\theta\right)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{\sec^2\theta\ \ d\theta}{4\ =\ 4\tan^2\theta}$$
$$= \frac{2}{12}\int \frac{\sec^2\theta\ \ d\theta}{4+4\tan^2\theta}$$
$$= \frac{1}{6}\int\ d\theta = \frac{1}{6}\theta + C$$
$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}x\right) + C$$

9) $\int\ \sin^5 x\ \ dx$.

الحل:

باستخدام خواص ضعف الزاوية نجد أن :

$$\int\ \sin^5 x\ \ dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x\ \ dx$$
$$= \int \left(1-\cos^2\right)^2 \sin x\ \ dx$$
$$= \int \left(1-2\cos^2 x + \cos^4 x\right)\sin xdx$$

نفرض $u = \cos x$ فيكون $du = -\sin x\ \ dx$ وبالتعويض نجد :

$$\int\ \sin^5 x\ \ dx = -\int \left(1-2u^2+u^4\right)\ du$$
$$= -u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$
$$= -\cos x + \frac{2}{3}\left(\cos^3 x\right) + \frac{1}{5}\left(\cos^5 x\right) + c$$

10) $\int \tan^2 x\sec^4 x \, dx$.

الحل:

$$\int \tan^2 x\sec^4 x \, dx = \int \tan^2 x\sec^2 x\sec^2 x \, dx$$
$$= \int \tan^2 x(\tan^2 x+1)\sec^2 x \, dx$$

نفرض $u=\tan x$ فيكون $du=\sec^2 x \, dx$ وبالتعويض نجد :

$$\int \tan^2 x\sec^4 x \, dx = \int u^2(u^2+1)\, du$$
$$= \int (u^4+u^2)\, du$$
$$= \frac{1}{5}u^5+\frac{1}{3}u^3+c$$
$$= \frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{3}\tan^3 x+c$$

---

11) $\int \cos^3 x\sin 5x \, dx$.

الحل:

نفرض $u=\sin 5x$ فيكون $du=-5\sin 5x \, dx$ وبالتعويض نجد :

$$\int \cos^3 x\sin 5x \, dx = -\frac{1}{5}\int \cos^3 x(-5\sin 5x)\, dx$$
$$= -\frac{1}{5}\int u^3 \, du$$
$$= -\frac{1}{5}\frac{u^4}{4}+c$$
$$= -\frac{1}{5}\frac{\cos^4 5x}{4}+c$$
$$= -\frac{1}{20}\cos 5x+c$$

---

12) $\int (3x+1)^4 dx$.

الحل:

نفرض $u=3x+1$ فيكون $du=3 \, dx$ وبالتعويض نجد :

$$\int (3x+1)^4 dx = \frac{1}{3}\int u^4 \, du = \frac{1}{15}u^5+c$$
$$= \frac{1}{15}(3x+1)^5+c$$

---

13) $\int x^2 \ e^x \ d\,x$.

الحل:

نكامل بالتجزيء فارضين أن:

نفرض أن $u = x \ \rightarrow \ du = d\,x$ ونفرض أن $d\,v = \sec^2 x \, d\,x \ \rightarrow \ v = \tan x$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x^2 \ e^x \ d\,x = x\tan x - \int \tan x \ dx$$
$$= x\tan x + \ln|\cos x| + c$$

---

14) $\int x\sec x \tan x \, d\,x$.

الحل:

نكامل بالتجزيء فارضين أن:

نفرض أن $u = x \ \rightarrow \ d\,u = d\,x$

ونفرض أن $d\,v = \sec x \tan x \, d\,x \ \rightarrow \ v = \sec x$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x\sec x \tan x \, d\,x = x\sec x - \int \sec x \ dx$$
$$= x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + c$$

---

15) $\int x^3 \sin x \, d\,x$.

الحل:

نكامل بالتجزيء فارضين أن:

نفرض أن $u = x^3 \ \rightarrow \ d\,u = 3x^2 \ d\,x$

ونفرض أن $d\,v = \sin x \, d\,x \ \rightarrow \ v = -\cos x$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\int x^3 \sin x \, d\,x = -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cos x \ dx$$

نتابع حساب التكامل الحاصل بالتجزيء التكامل $\int x^2 \cos x \ dx$ فنحصل على ناتج التكامل.

التكامل باستخدام الكسور الجزئية Partial Fractions Integration by

تمهيد:

تسمى الدالة $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ بدالة كسرية إذا كانت $f(x)\ ,\ g(x)$ كثيرتي حدود في x .

مثال:

الدوال التالية: $\dfrac{1}{x(x^2+1)}\ ,\ \dfrac{x(x+1)}{x^3+1}\ ,\ \dfrac{-2x+1}{x^2+1}\ ,\ \dfrac{x-1}{x^2+1}$ دوال كسرية.

بينما الدوال التالية: $\dfrac{|x-2|}{x^3}\ ,\ \dfrac{\sin x+e^x}{x^2}\ ,\ \dfrac{\ln x}{x}$ ليست بدوال كسرية.

إذا كانت درجة $f(x)$ اقل من درجة $g(x)$ فإن $F(x)$ تسمى كسرا حقيقيا.

يمكن التعبير عن كسر غير حقيقي بمجموع كثيرة حدود وكسر حقيقي مثل:

$$\frac{x^3-1}{x^2+1}=x-\frac{x+1}{x^2+1}$$

ويمكن التعبير عن كل كسر حقيقي بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية) من الشكل: $\dfrac{A}{(x-r)^k}$ أو $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ حيث أن $(ax^2+bx+c)^k$ غير قابل للاختزال ليس له جذورا حقيقية.

وسنقتصر دراستنا على الكسور التي يمكن كتابتها بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية) وسنتطرق إلى الحالات التالية:

الحالة الأولى:

إذا كانت $f(x)\ ,\ g(x)$ كثيرات حدود في x ويمكن كتابة $g(x)$ في الصورة

$$g(x)=(x+r_1)(x+r_2)(x+r_3)................(x+r_n)$$

حيث أن:

$$r_1\neq r_2\neq r_3\neq ....\neq r_n$$

وذا كانت $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ كسرا حقيقيا فإنه يمكن وضعه في الصورة :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x+r_1}+\frac{A_2}{x+r_2}+\frac{A_3}{x+r_3}+..................+\frac{A_n}{x+r_n}$$

حيث أن: $A_1\ ,\ A_2\ ,\ A_3\ ,\ ....,\ A_n$ ثوابت يجب تعيينها.

مثال:

فرق الكسر التالي $\frac{2x+1}{x^2-4}$ إلى مجموع كسوره جزئية.

الحل:

نفرض أن الثابتين A_1 , A_2 يحققان ما يلي :

$(1) \rightarrow \quad \frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+2}$ حيث A_1 , A_2 ثوابت يجب تعيينها

نوحد المقامات فيصبح لدينا:

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{A_1(x+2)+A_2(x-2)}{x^2-4}$$

نضرب طرفي المعادلة في x^2-4 فنحصل على:

$$2x+1=A_1(x+2)+A_2(x-2)$$

هذه المعادلة صحيحة من اجل كل عدد x :

نأخذ $x=-2$ فنحصل على $2(-2)+1=A_1(-2+2)+A_2(-2-2)$

ومنه $-3=-4A_2 \rightarrow A_2=\frac{3}{4}$

نأخذ $x=2$ فنحصل على $2(2)+1=A_1(2+2)+A_2(2-2)$

ومنه $5=4A_1 \rightarrow A_1=\frac{5}{4}$

نعوض A_1 , A_2 في المعادلة (1) فيصبح لدينا:

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{5}{4}\frac{1}{x-2}+\frac{3}{4}\frac{1}{x+2}$$

مثال:

اوجد التكامل $\int \frac{2x+1}{x^2-4}\,dx$.

الحل:

نلاحظ : انه لا يمكننا استخدام احد قوانين التكامل مباشرة ولكن من المثال السابق لدينا :

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{5}{4}\frac{1}{x-2}+\frac{3}{4}\frac{1}{x+2}$$

إذا

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$
$$= \frac{5}{4}\ln|x-2| + \frac{3}{4}\ln|x+2| + c$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left[|(x-2)^5||(x+2)^3|\right] + c$$
$$= Ln\sqrt[4]{|(x-2)^5||(x+2)^3|} + C$$

الحالة الأولى:

إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ كثيرات حدود في x ويمكن كتابة $g(x)$ في الصورة:

$g(x) = (x+r)^n$ حيث أن $n \in N$

و كانت $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ كسرا حقيقيا فإنه يمكن وضعه في الصورة :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x+r)} + \frac{A_2}{(x+r)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{(x+r)^{n-1}} + \frac{A_n}{(x+r)^n}$$

حيث $A_1 , A_2 , A_3 , \ldots\ldots, A_n$ ثوابت يجب تعيينها

مثال:

فرق الكسر $\dfrac{x-2}{(x+1)^3}$ إلى كسوره الجزئية.

الحل:

نفرض أن الثوابت A_1 , A_2 , A_3 تحقق ما يلي :

$$\frac{x-2}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} \quad \rightarrow \quad (2)$$

حيث A_1 , A_2 , A_3 ثوابت يجب تعيينها

نوحد المقامات فيصبح لدينا.

$$\frac{x-2}{(x+1)^3} = \frac{A_1(x+1)^2 + A_2(x+1) + A_3}{(x+1)^3}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x+1)^3$ فنحصل على:

$$x-2 = A_1(x+1)^2 + A_2(x+1) + A_3$$

هذه المعادلة صحيحة من اجل كل عدد x

نأخذ $x=-1$ فنحصل على $-1-2 = 0+0+A_3$ ومنه $A_3 = -3$

نأخذ $x=0$ فنحصل على : $-2=A_1+A_2+A_3$

ومنه $-2=A_1+A_2-3 \;\rightarrow\; A_2=1-A_1$

نأخذ $x=1$ فنحصل على: $1-2=A_1(2)^2+A_2(2)^2+A_3$

ومنه فإن $-1=4A_1+4A_2-3 \;\rightarrow\; -1=4A_1+2(1-A_1)-3$

$$\rightarrow\; -1=4A_1+2-2A_1-3 \;\rightarrow\; 2A_1=-1+1=0 \;\rightarrow\; A_1=0$$

وبالتالي فإن: $0=1-A_2 \;\rightarrow\; A_2=1$

نعوض A_1, A_2, A_3 في المعادلة (2) فيصبح لدينا:

$$f(x)=\frac{x-2}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^3}$$

مثال:

اوجد التكامل $\int \frac{x-2}{(x+1)^3}\,dx$.

الحل:

نلاحظ أنه لا يمكننا استخدام احد قوانين التكامل مباشرة ولكن من المثال السابق لدينا:

$$\frac{x-2}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^3}$$

إذا

$$\int \frac{x-2}{(x+1^)3}\,dx=\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx-3\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$$

$$=-(x+1)^{-1}+\frac{3}{2}(x+1)^{-2}+$$

ملاحظة:

يمكن استعمال الحالتين في آن واحد كما هو موضح في المثال التالي:

مثال:

فرق الكسر $\frac{3x-1}{(x-1)^2(x-1)}$ إلى كسوره الجزئية.

الحل:

لدينا $\frac{3x-1}{(x-1)^2(x-1)}=\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)(x-1)}=\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}$

نفرض أن A_1, A_2, A_3 تحقق ما يلي:

$(3) \quad \rightarrow \quad \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x-1)}+\frac{A_3}{(x-1)^2}$ حيث A_1 , A_2 , A_3 ثوابت يجب تعيينها

نلاحظ : أننا استعملنا الحالتين الأولى والثانية معا

نوحد المقامات فيصبح لدينا :

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}=\frac{A_1(x-1)^2+A_2(x+1)(x-1)+A_3(x+1)}{(x^2-1)(x-1)}$$

نضرب طرفي المعادلة في $(x^2-1)(x-1)$ فيكون لدينا:

$$3x-1=A_1(x-1)^2+A_2(x+1)(x-1)+A_3(x+1)$$

هذه المعادلة صحيحة من أجل كل عدد x :

نأخذ $x=1$ فنحصل على $3(1)-1=A_1(1-1)^2+A_2(1+1)(1-1)+A_3(1+1)$

ومنه $A_3=1 \quad \rightarrow \quad 2=2A_3$

نأخذ $x=-1$ فنحصل على

$$3(-1)-1=A_1(-1-1)^2+A_2(-1+1)(-1-1)+A_3(-1+1)$$

ومنه $A_1=-1 \quad \rightarrow \quad -4=4A_1$

نأخذ $x=0$ فنحصل على $3(0)-1=A_1(0-1)^2+A_2(0+1)(0-1)+A_3(0+1)$

ومنه فإن $A_2=A_1+A_3+1=1 \quad \rightarrow \quad -1=A_1-A_2+A_3$

نعوض A_1 , A_2 , A_3 في المعادلة (3) فيصبح لدينا :

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

مثال:

اوجد التكامل $\int \frac{3x-1}{(x-1)^2(x-1)}\, dx$.

الحل:

نلاحظ : أننا نحتاج إلى تفريق الكسر $\frac{3x-1}{(x-1)^2(x-1)}$ ومن المثال السابق لدينا

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

إذا:

$$\int \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}\, dx=\int \frac{1}{x+1}\, dx+\int \frac{1}{(x-1)}\, dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

$$\int \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)^2}\,dx = -\ln|x+1| + \ln|x-1| - (x-1)^{-1} + c$$
$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{x-1} + c$$

مثال:

اوجد التكامل التالي: $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx$.

الحل:

واضح إن الدالة مستمرة على الفترة $R-\{0,-2,2\}$ باستخدام الطرق السابقة تكون لدينا صيغة التفريق التالية: $\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} = 5+\frac{2}{x}+\frac{4}{x+2}+\frac{3}{x-2}$

وبذلك يكون التكامل على الشكل التالي:

$$\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx = \int\left(5+\frac{2}{x}+\frac{4}{x+2}+\frac{3}{x-2}\right)dx$$
$$= 5x + 2Ln|x| + 4Ln|x+2| + 3Ln|x-2| + C$$
$$= 5x + Ln\left(x^2(x+2)^4(x-2)^3\right) + C$$

مثال:

اوجد التكامل التالي: $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$.

الحل:

واضح إن الدالة مستمرة على الفترة $R-\{-2,-1\}$ باستخدام الطرق السابقة تكون لدينا صيغة التفريق التالية:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$$

وبذلك يكون التكامل على الشكل التالي:

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}\right)dx$$
$$= Ln|x+1| - Ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + C$$
$$= \frac{1}{x+2} + Ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

النظرية الأساسية لحساب التكامل المحدود : Fundamental Theorem

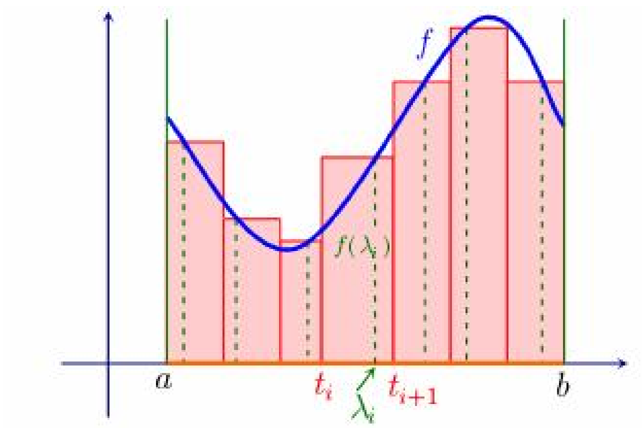
تعريف:

ليكن I مجالاً غير خالٍ من R. ولكن $f: I \to R$ دالة مستمرة على I حيث $I=[a,b]$ عندئذ نسمى العدد $F(b)-F(a)$ التكامل المحدود من a و b للدالة f ، ونرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)\, dx$ أو $\int_a^b f(t)\, dt$ أي أن: $\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f .

تعريف :

ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً غير خالٍ من R. وليكن f دالة مستمرة من $f([a,b],R)$ ، ولتكن $\delta = (t_0, t_1, t_2, ...t_m, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_{m-1})\in R^{m+1}\times R^m$ تقسيم للمجال $[a,b]$ عندئذ نرمز بالرمز $S(f,\sigma)$ إلي المقدار $S(f,\sigma)=\sum_{k=0}^{m-1}(t_{k+1}-t_k)f(\lambda_k)$ ونسمى $S(f,\sigma)$ مجموع ريمان Riemann للدالة f وفقاً للتقسيم الموضح في δ فالمجموع $S(f,\sigma)$ يمثل المجموع الجبري لمساحات المستطيلات التي أبعادها $f(\lambda_k)\times(t_{k+1}-t_k)$.

ولما كان واضحاً أن مجموع ريمان $S(f,\sigma)$ يقترب في حالة كون الدالة f مستمرة، من المساحة الجبرية للسطح المحصور بين منحني الدالة f والمحور x والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ عندما تصغر المساحة في الفترات $[t_i, t_{i+1}]$ صغراً متناهياً أي يقترب إلي الصفر منها نستنتج أن التكامل $\int_a^b f(x)\, dx$ يعبر عن المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f والمحور x والمستقيمين $x=a$ و $x=b$. كما موضح في الشكل التالي:



تعريف:

لتكن الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ ولتكن $F(x)$ تكاملا غير محدود للدالة $f(x)$ فإن التكامل المحدود يعطى بما يلي:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

مثال:

احسب التكامل التالي $\int_1^2 x\,dx$.

الحل:

$$\int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

مثال:

احسب التكامل التالي $\int_0^3 (x^3-4x+1)\ dx$.

الحل:

$$\int_0^3 (x^3-4x+1)\ dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}+x\right]_0^3$$

$$=\left[\frac{3^4}{4}-\frac{4\times 3^2}{2}+3\right]-0=\frac{81}{4}-18+3=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$$

مثال:

أوجد ناتج التكامل التالي: $\int_{--2}^{2} \left(x^4+x^3+5x+10\right)\ dx$

الحل:

واضح أن الدالة كثيرة حدود فإن تكاملها يكون على النحو التالي:

$$\int_{--2}^{2} \left(x^4+x^3+5x+10\right)\ dx = \left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{5x^2}{2}+10x\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$=\left(\frac{64}{5}+\frac{32}{4}+\frac{02}{2}+20\right)-\left(\frac{64}{5}+\frac{32}{4}+\frac{02}{2}+20\right)$$

$$=0$$

مثال:

احسب التكامل التالي: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \; d\theta$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \; d\theta = \sin\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

خواص التكامل المحدود : Properties of Definite Integral

1. $\int_a^b c\, dx = c(b-a)$ حيث a, b, c ثوابت.
2. $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
3. إذا كانت $f(x)$ قابلة للتكامل في الفترة $[a,b]$ من a إلى b وكان c ثابتاً حقيقياً فإن $c\,f(x)$ قابلة للتكامل في هذه الفترة كذلك و التكامل هو :

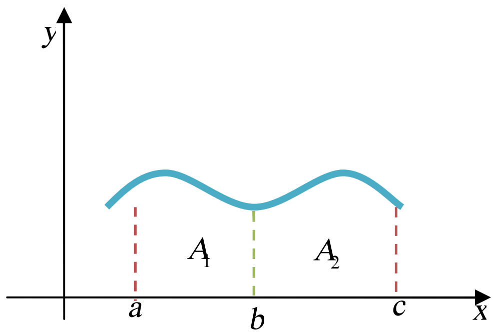
$$\int_a^b c\, f(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$$

4. إذا كان $f(x), g(x)$ دالتين قابلتين للتكامل في الفترة من a إلى b فإن : $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ دوال قابلة للتكامل في نفس الفترة إذا :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

5. إذا كان $a<c<b$ وكانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل في الفترة $[a,b]$ فإن :

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = A_1 + A_2$$



6. إذا كان $f(x) \ge g(x)$ لجميع قيم x في النطاق $[a,b]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

مثال:

احسب التكامل التالي $\int_{-2}^{6} 5\,dx$.

الحل:

$$\int_{-2}^{6} 5\,dx = 5(6-2) = 40$$

مثال:

أوجد التكامل الآتي $\int_{-2}^{3} (6x^2-5)\,dx$.

الحل:

$$\int_{-2}^{3} (6x^2-5)\,dx = 2x^3 - 5x\Big|_{-2}^{3} = (54-15)-(-16+10) = 45$$

مثال:

أوجد التكامل التالي: $\int_{-1}^{2} (x^3-1)^2\,dx$

الحل:

$$\int_{-1}^{2} (x^3+1)^2\,dx = \int_{-1}^{2} (x^6+2x^3+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^4 + x\Big|_{-1}^{2} = \left(\frac{128}{7}+8+2\right) - \left(\frac{-1}{7}+\frac{1}{2}-1\right) = \frac{405}{14}$$

مثال:

احسب التكامل التالي $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$.

الحل:

$$\because \quad |x| = \begin{cases} x \;, & if \quad x \ge 0 \\ -x \;, & if \quad x < 0 \end{cases}$$

ومنه فإن :

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx$$

$$= \frac{-x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - 0 = \frac{5}{2}$$

مثال:

أوجد ناتج التكامل التالي: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x\,dx$.

الحل:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan^2 0\right] = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

مثال:

أوجد ناتج التكامل التالي: $\int_{-1}^{1} \sqrt{3x^2-2x+3}\;(3x-1)\,dx$.

الحل:

لإيجاد $\int_{-1}^{1} \sqrt{3x^2-2x+3}\;(3x-1)\,dx$ نستخدم التعويض $u = 3x^2-2x+3$

فنحصل على $du = (6x-2)\,dx$ ومنه يكون لدينا:

$$\int \sqrt{3x^2-2x+3}\;(3x-1)\,dx = \frac{1}{3}(3x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} \sqrt{3x^2-2x+3}\;(3x-1)\,dx = \frac{1}{3}(3x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{3}\left[(3-2+3)^{\frac{3}{2}} - (3+2+3)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[(8-16\sqrt{2}) = \frac{8}{3}(1-2\sqrt{2})\right]$$

مثال:

أوجد ناتج التكامل التالي:: $\int_{-1}^{1}\left(2x^3+4x-12\right)\,dx$.

الحل:

$$\int_{-1}^{1}\left(2x^{3}+4x-12\right)\ dx=\left(\frac{2}{4}x^{4}+\frac{4}{2}x^{2}-12x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\left(\frac{2}{4}+\frac{4}{2}-12\right)-\left(\frac{2}{4}+\frac{4}{2}+12\right)=0$$

مثال:

أوجد الخطأ فيما يلي : $\int_{-1}^{3}\frac{1}{x^{2}}\ dx$.

الحل:

$$\int_{-1}^{3}\frac{1}{x^{2}}\ dx=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{3}=-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}$$

هذا الحساب يجب أن يكون خاطئاً لان الجواب سالب، ولكن الدالة المكاملة $f(x)=\frac{1}{x^{2}}$ موجبة دوماً وهذا يناقض الخاصة القائلة أن تكامل الدالة الموجبة في أي مجال يعطي قيمة موجبة فما الخطأ.

إن الخطأ يكمن في إننا لا يمكن أن نطبق النظرية الأساسية للتكامل المحدود في المجال لا تكون $f(x)$ مستمرة فيه وإذا لاحظنا أن $0\in[-1,3]$ وأن $f(x)$ غير مستمرة عند $x=0$ نعرف الخطأ المرتكب.

في نهاية هذه الفقرة نورد:

أهم الخصائص الأساسية للتكامل المحدود:

1. إذا كان $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ وكانت $a<x<b$ فإن $g(x)=\int_{a}^{x}f(t)\ dt$ دالة مستمرة أيضا.
2. إذا كان $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ فإن $\int_{a}^{a}f(x)\ dx=0$
3. إذا كانت $f(x)\geq g(x)$ في الفترة $[a,b]$ فإن $\int_{a}^{b}f(x)\ dx\geq\int_{a}^{b}g(x)\ dx$
4. إذا كان $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ فإن $\int_{a}^{b}f(x)\ dx=-\int_{b}^{a}f(x)\ dx$
5. إذا كان $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ وكانت $a<c<b$ فإن $\int_{a}^{a}f(x)\ dx=\int_{a}^{c}f(x)\ dx+\int_{c}^{b}f(x)\ dx$

6. إذا كان $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ فإن $\left|\int_a^a f(x)\ dx\right| \le \int_a^a |f(x)|\ dx$

7. إذا كان $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ فإن:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \begin{cases} 0 & \text{دالة فردية } f \\ 2\int_0^a f(x)\ dx & \text{دالة زوجية } f \end{cases}$$

8. إذا كان $f(x) \ge 0$ في الفترة $a \le x \le b$ عندها يكون $\int_a^b f(x)\ dx \ge 0$

9. إذا كان $f(x) \ge g(x)$ في الفترة $a \le x \le b$ عندها يكون $\int_a^b f(x)\ dx \ge \int_a^b g(x)\ dx$

مثال:

أوجد ناتج التكامل التالي: $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 3)\ dx$

الحل:

نلاحظ: أن الدالة : $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ دالة زوجية لأن:

$$f(-x) = (-x^4) - 2(-x^2) + 3 = f(x)$$

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 3)\ dx = 2\int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 3)\ dx$$

$$= 2\left(\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + 3x\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 3\right)$$

$$= 2\left(\frac{3 - 10 + 45}{15}\right) = 2\left(\frac{38}{15}\right) = \frac{76}{15}$$

مثال:

أوجد ناتج التكامل التالي: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \tan^6 x\ dx$.

الحل:

نلاحظ أن الدالة: $f(x) = \sin^3 x \tan^6 x$ فردية لأن:

$$f(-x) = \sin^3(-x)\tan^6(-x) = -\sin^3 x \tan^6 x = -f(x)$$

يكون الناتج مساوياً للصفر حسب قواعد الأساسية للتكامل المحدود.

أمثلة محلولة

1- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$.

الحل:

نفرض أن : $u = \tan x$ منها نحصل على:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan^2 x\cos^4 x}$$

ولكن $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ وكذلك $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ومنها نحصل على:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{u^2}\left(1+u^2\right)^2 \; du$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \left(\frac{1}{u^2}+2+u^2\right) du$$

$$= -\frac{1}{u}+2u+\frac{u^3}{3}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}$$

$$= \frac{4}{3}+\frac{8\sqrt{3}}{27}$$

2- أحسب قيمة التكامل التالي: $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$.

الحل:

نجري التحويل التالي: $x = 2\tan^{-1} t$ أي أن $t = 2\tan\frac{x}{2}$ نعوض في التكامل ملاحظين

$\sin x = 2\tan\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$ بالتعويض في التكامل نحصل على:

$$I=\int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\times\frac{2}{1+t^2}\quad dt$$
$$=\int_0^1 \frac{4t}{(1+t)^2\left(1+t^2\right)}dt$$

واضح إن التكامل أصبح كسراً لذلك نفرق الكسر:

$$\frac{4t}{(1+t)^2\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{(1+t)}+\frac{B}{(1+t)^2}+\frac{C}{1+t^2}$$

بعد إجراء الحسابات نحصل على قيم للثوابت على النحو التالي:

$A=0 \quad , \quad B=-2 \quad , \quad D=2 \quad , \quad C=0$ ؛

كما أن:

$$I=\int_0^1\left(\frac{2}{1+t^2}-\frac{2}{(1+t)^2}\right)dt$$
$$=2\tan^{-1}t+\frac{2}{1+t}\Big|_0^1$$
$$=\frac{\pi}{2}-1$$

3- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

الحل:

نحول التكامل إلي الشكل التالي:

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}=\int_0^1 \frac{\left(e^x\right)'}{1+\left(e^x\right)^2}\quad dx$$

نفرض أن : $u=e^x$ نفاضل الطرفين نحصل على $du=e^x \quad dx$

منها بالتعويض في التكامل:

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}=\int_1^e \frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1}u\Big|_1^e$$
$$=\tan^{-1}e-\frac{\pi}{4}$$

4- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos x + \sin x} dx$.

الحل:

سنرمز لدالة ما تحت التكامل بـــ $f(x)$ وبأخذ العلاقة

$2\sin x\cos x = (\cos x + \sin x)^2 - 1$ بعين الاعتبار نجد أن :

$$f(x) = \frac{\left[(\cos x + \sin x)^2 - 1\right]\sin x}{2(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin x \cos x + \sin^2 x\right) - \frac{\sin x}{2(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sin}{2(\cos x + \sin x)}$$

و بالتعويض في التكامل نحصل على:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sin}{2(\cos x + \sin x)}\right) dx$$

$$= \frac{-\cos 2x}{8} - \frac{\sin 2x}{8} + \frac{1}{4}\ln(\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

5- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_3^4 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx$.

الحل:

بقسمة البسط على المقام يكون لدينا التكامل التالي:

$$\int_3^4 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx = \int_3^4 x + 1 + \frac{1}{(x-1)(x-2)} \; dx$$

$$= \int_3^4 x + 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \; dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x\Big|_3^4 + Ln\frac{x-2}{x-1}\Big|_3^4 = \frac{9}{2} + Ln\frac{4}{3}$$

6- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}dx$.

الحل:

باستخدام تفريق الكسور نوجد $\frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}$ نوجد قيمة الثوابت

$$A=-1 \quad , \quad B=1 \quad , \quad D=0 \quad , \quad C=1$$

$$\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}dx=\int_0^1 \frac{-x+1}{x^2+2}\,dx+\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx=I_1+I_2$$

نوجد قيمة I_1 كالتالي:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \frac{-x}{x^2+2}\,dx+\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}Ln(x^2+2)\Big|_0^1+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{2}Ln(3)+\frac{1}{2}Ln2+\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}0 \\
&= \frac{1}{2}Ln\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) \\
&= \frac{1}{2}Ln\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

ثم نوجد قيمة I_2 كالتالي:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+2)^2}\,dx$$

نستخدم طريقة التعويض كالتالي:

نفرض أن : $u=x^2+2$ بتفاضل الطرفين نحصل على $du=2x\ \ dx$:

عندما: $x=0 \quad , \quad u=2$

$x=1 \quad , \quad u=3$

بالتعويض في التكامل I_2 نحصل على :

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+2)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{du}{u^2}=\frac{1}{2u}\Big|_2^3=-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

بذلك تكون قيمة التكامل على الشكل التالي:

$$\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}dx=\frac{1}{2}Ln\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{12}$$

7- أحسب قيمة التكامل التالي: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 3\cos x + \sin x}$.

الحل:

نجري التكامل بالتعويض مفترضين: $u = \tan^{-1} t$ أي أن $t = \tan \frac{x}{2}$ فنجد أن:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \ , \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ , \ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

بالتعويض نجد :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 3\cos x + \sin x} = \int_0^1 \frac{1}{5 + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} \ dt$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{4 + t + t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\frac{15}{4} + \left(t + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}} \tan^{-1} \frac{2t+1}{\sqrt{15}}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}}\left(\tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{15}} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$$

8- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^3+1} dx$.

الحل:

باستخدام القسمة المطولة نجد أن $\frac{x^4+1}{x^3+1}$ تساوي $\frac{x^4+1}{x^3+1} = x + \frac{1-x}{x^3+1}$: بذلك يكون التكامل على الشكل التالي:

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^3+1} dx = \int_0^1 x \ dx + \int_0^1 \frac{(1-x)}{x^3+1} \ dx = I_1 + I_2$$

نوجد I_1 :

$$\int_0^1 x \ dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

ثم نوجد I_2 باستخدام تفريق الكسر:

$$\frac{1-x}{x^3+1} = \frac{1-x}{(x+x)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

بعد إجراء الحسابات نحصل على قيم للثوابت على النحو التالي:

$$A=\frac{2}{3} \quad , \quad B=-\frac{2}{3} \quad , \quad C=\frac{1}{3}$$

$$I_2=\int_0^1 \frac{(1-x)}{x^3+1}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}Ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}Ln\left(x^2-x+1\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}Ln(2)$$

بذلك تكون قيمة التكامل هي: $I=I_1+I_2=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}Ln(2)$

9- أحسب قيمة التكامل التالي: $\int_4^6 \frac{2x+5}{x^2-7x+10}\,dx$ ؟

الحل:

نعلم بان $x^2-7x+10$ بذلك نحصل على : $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$

بذلك يصبح الكسر على الشكل التالي:

$$\frac{2x+5}{(x-2)(x-5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}$$

منها يكون لدينا:

$$2x+3=A(x-5)+B(x-2)$$

نوجد قيمة كلا من A و B

من المعادلة السابقة تكون قيمة $A=-1$ و $B=1$ منها يكون التكامل على النحو التالي:

$$\int_4^6 \frac{2x+5}{x^2-7x+10}\,dx=-\int_4^6\frac{dx}{x-2}+\int_4^6\frac{dx}{x-5}=\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|_4^6=\ln\left|\frac{1}{2}\right|$$

تطبيقات على التكامل المحدود : Applications of Integrals

التكامل المحدود يعتبر أداة فعالة في حل بعض المسائل الفيزيائية والهندسية وإيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيات هي إحدى تلك المسائل.

1. المساحة بين منحنيِن: Area Between Curves

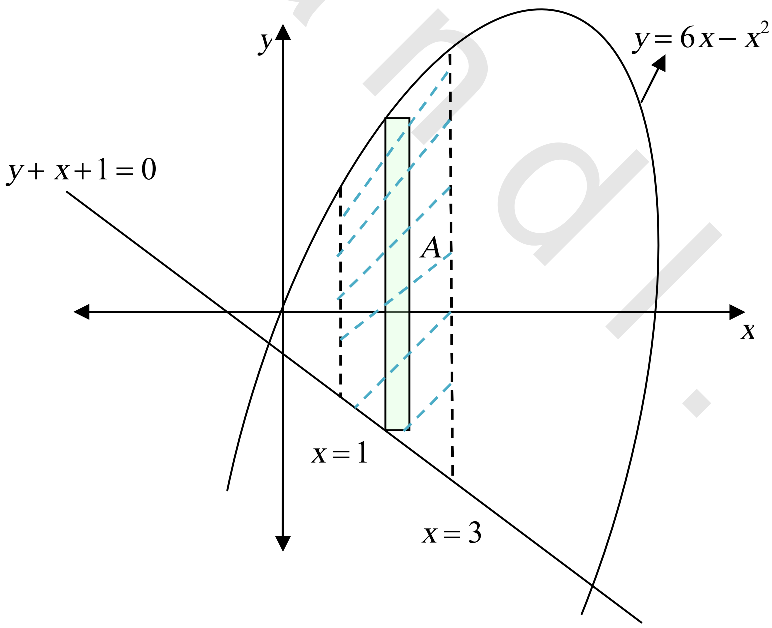
إذا كان لدينا منطقة محصورة بين منحنين فإننا نحدد المنطقة المغلقة لهذين المنحنين ثم نوجد نقاط التقاطع بالنسبة للمنحنين كما موضح في الأمثلة التالية:

مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنين التاليين :

$y = 6x - x^2$, $y + x + 1 = 0$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 3$.

الحل:



من رسم المنحنين ونقاط تقاطعهما يكون لدينا:

$$\because \quad y+x+1=0 \quad , \quad y=6x-x^2$$
$$\therefore \quad dA=\left((6x-x^2)-(-(x+1))\right)dx$$
$$\therefore \quad dA=(7x+1-x^2)\,dx$$
$$\therefore \quad A=\int_1^3 dA=\int_1^3 (7x+1-x^2)\,dx \quad =\frac{7}{2}x^2+x-\frac{1}{3}x^3\Big|_1^3$$
$$=\left(\frac{63}{2}+3-9\right)-\left(\frac{7}{2}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{64}{3} \quad square \quad unit$$

مثال:

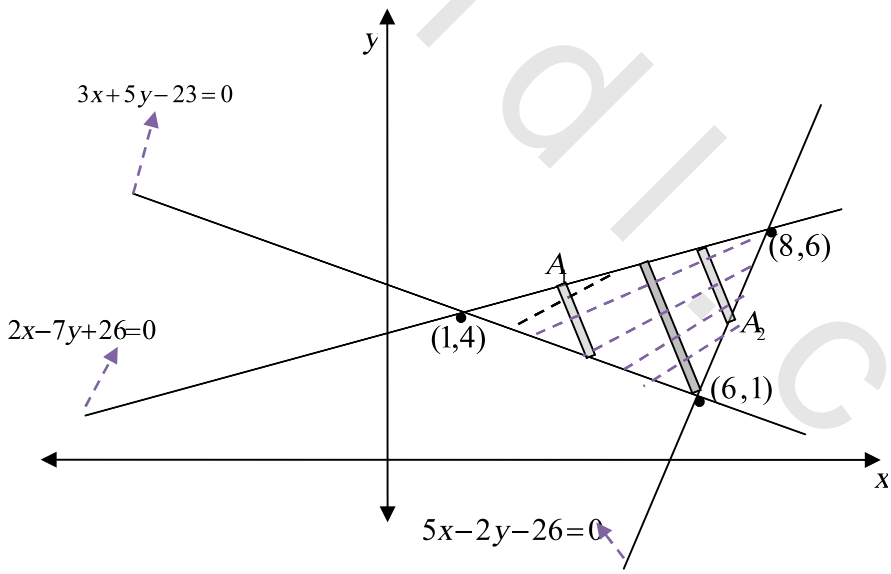
أوجد المساحة المحددة بالمعادلات الثلاث الآتية :

$$3x+5y-23=0 \quad , \quad 5x-2y-26=0 \quad , \quad 2x-7y+26=0$$

الحل:

جميع هذه المعادلات تمثل معادلات خط مستقيم نوجد نقاط تقاطع هذه المستقيمات الثلاثة.

ونقاط التقاطع هي $(6,1)$, $(8,6)$, $(1,4)$



نقسم الفترة $[1,8]$ إلى فترتين $[1,6]$ و $[6,8]$ وفي كل فترة لدينا سطح محصور بين منحنين:

$$\therefore \quad dA=dA_1+dA_2$$
$$A=\int dA_1+\int dA_2$$

$$d\,A = d\,A_1 + d\,A_2 = [y_2 - y_1]\,d\,x + [y_2 - y_3]\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{7}(2x+26) - \frac{1}{5}(-3x+23)\right] d\,x + \left[\frac{1}{7}(2x+26) - \frac{1}{2}(5x-26)\right] d\,x$$

$$\therefore\ A = \int_1^6 \left[\frac{31x}{35} - \frac{31}{35}\right] dx + \int_6^8 \left[\frac{-31x}{14} - \frac{234}{14}\right] dx$$

$$\therefore\quad A = \frac{31}{35}\int_1^6 (x-1)\,d\,x + \frac{1}{14}\int_6^8 (-31x - 234)\,d\,x$$

$$= \frac{31}{35}\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_1^6 + \frac{1}{14}\left[-31\left(\frac{x^2}{2}\right) + 234\,(x)\right]_6^8$$

$$= \frac{31}{35}\left(\left[\frac{36}{2} - 6\right] - \left[\frac{1}{2} - 1\right]\right) + 14\left[-31\left(\frac{8^3}{2} + 234\,(8)\right) - 31\left(\frac{6^2}{2} + 234(6)\right)\right]$$

$$= \frac{31}{35}\left(\frac{25}{2}\right) + \frac{1}{14}(880 - 846) = \frac{155}{14} + \frac{34}{14} = \frac{189}{14} = 13.5 \quad \textit{square unit}$$

مثال:

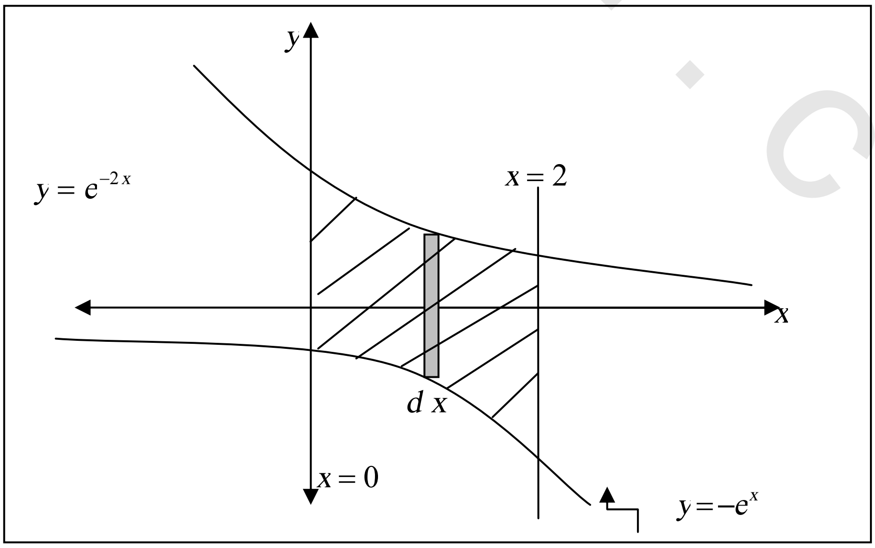
أوجد المساحة المحصورة بالمنحنيات $x=0$, $x=2$, $y=e^{-2x}$, $y=-e^x$.

الحل:

نرسم أولاً ثم نحدد حدود التكامل: $\therefore\quad d\,A = (e^{-2x} + e^x)\,d\,x$

$$A = \int_0^2 (e^{-2x} + e^x)\,d\,x = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + e^x\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{-1}{2}e^{-4} + e^2\right] - \left[\frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{2}(e^{-4} + 1) + e^2 \quad \textit{square uni}$$

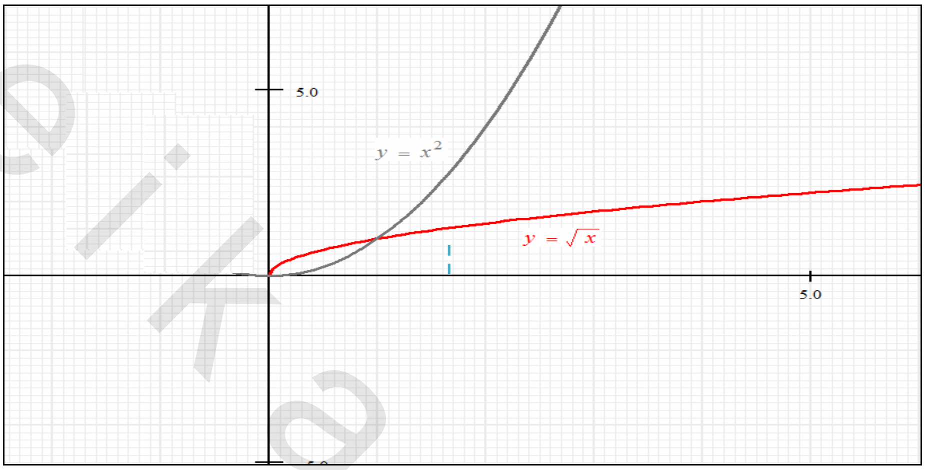


مثال:

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنين $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$.

الحل:

نوجد تقاطع المنحنين: $\sqrt{x}=x^2 \Leftarrow x=0 \quad , \quad x=1$



$$\int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^2\right)dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

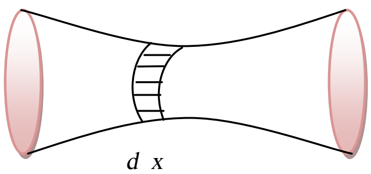
2. حجوم المجسمات الدورانية: Volumes of Revolution

إذا تم دوران منحنى مستوي حول المحور x من مستوي xy نحصل على سطح دوراني. وبمعنى أخر نحصل على المجسم الناتج من دوران مساحة مستوية حول محور معين، ولإيجاد حجم مجسم من هذه المجسمات بفرض أن محور الدوران $0x$ بين النقطتين $x=a$ و $x=b$ نلاحظ أنه عبارة عن تجمع مجموع أقراص اسطوانية قطرها y وطولها dx .

$$A=\pi y^2 \quad \rightarrow \quad dv = A\,dx = \pi y^2\,dx$$

ومنها نحصل على $\therefore \quad V=\int_a^b \pi y^2\,dx$

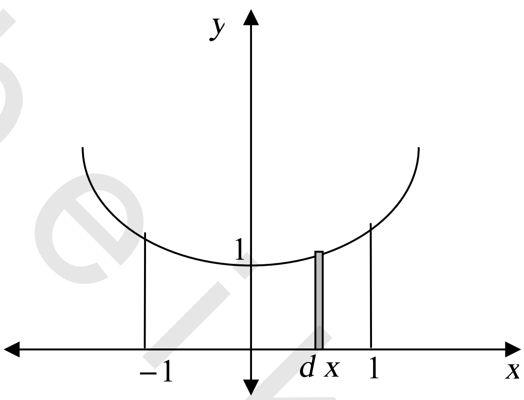
$$\therefore \quad V=\int_a^b \pi y^2\,dx=\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx=\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

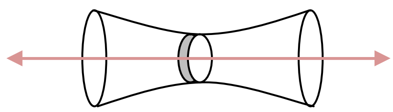


مثال:

أوجد الحجم الناتج من دوران الدالة $f(x)=x^2+1$ حول المحور x من $x=-1$ إلى $x=1$.

الحل:





$$\therefore \quad V=\pi\int_{-1}^{1}\left(f(x)\right)^2\,dx=\pi\int_{-1}^{1}(x^2+1)^2\,dx$$

$$V=\pi\int_{-1}^{1}(x^4+2x^2+1)^2\,dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\pi\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)-\left(-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1\right)\right]$$

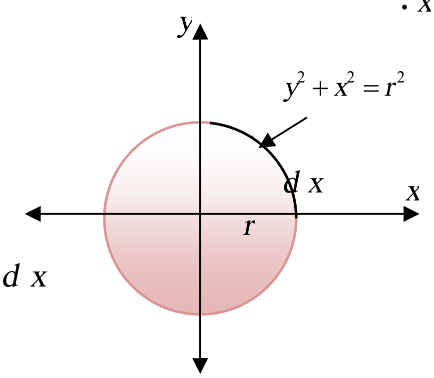
$$=\pi\left[\frac{2}{5}+\frac{4}{3}+2\right]=\pi\left[\frac{6+20+30}{15}\right]$$

$$=\frac{56}{15}\pi \quad cubic \;\; unit$$

مثال:

أوجد حجم نصف كرة باستخدام طريقة المجسمات الدورانية والناتج من دوران ربع دائرة حول محور x .

الحل:



$$\because \quad y^2=r^2-x^2$$

$$y\;dv=\pi\,y^2\,dx$$

$$\therefore \quad V=\pi\int_{0}^{r}y^2\,dx=\pi\int_{0}^{r}(r^2-x^2)\,dx$$

$$V = \pi\left[r^3.x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r$$

$$= \pi\left[(r^3 - \frac{1}{3}r^3) - (0)\right] = \frac{2\pi}{3}r^3 \quad cubic \quad unit$$

مثال:

احسب حجم المجسم ألدوراني المتولد من دوران القطع الناقص حول $0x$ معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

الحل:

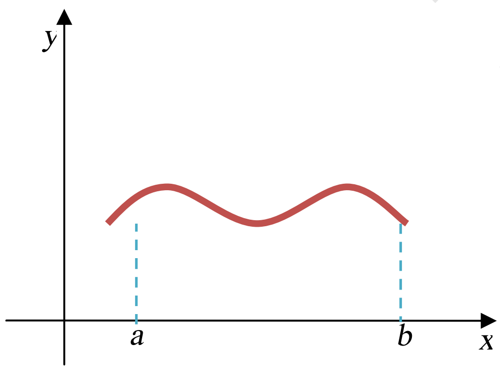
نعوض في المعادلة $V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\, dx$ عن قيمة y فنحصل على:

$$V = \pi\int_{-a}^{a} y^2 \; dx = 2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)dx$$

$$= \frac{4\pi ab^2}{3} \qquad cubic \quad unit$$

3. حساب طول قوس من منحنى: Arc Length Surface Area

طول القوس من أي منحنى هو نهاية طول مضلع مرسوم داخل هذا القوس عندما يؤول عدد أضلاعه إلى اللانهاية.



$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

وفي حال أعطي المنحني بمعادلات وسيطية يصبح الطول على النحو التالي:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

مثال:

احسب طول المنحنى $x = a(t - \sin t)$ و $x = a(t - \cos t)$ في المجال $[0,2\pi]$.

الحل:

بتفاضل المنحني نحصل على: $x' = a(1 - \cos t)$ و $y' = a \sin t$

وبالتعويض في قانون المسافة بين نقطتين نحصل على:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} = 2a\sin(\frac{1}{2})$$

بذلك يكون لدينا:

$$S=\int_0^{2\pi} 2a\sin(\frac{1}{2})t \;\; dt$$

$$=2a\left(-2\cos(\frac{1}{2})t\right]_0^{2\pi}=8a \qquad \textit{cubic unit}$$

4. نظرية القيمة الوسطى في التكامل المحدود: Main Theorem in Integral

لتكن الدالة $f(x)$ المستمرة في الفترة $[a,b]$ عندئذ نجد إن هناك قيمة $C\in[a,b]$ بحيث يكون:

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\,f(C)$$

نسمي القيمة $f(C)$ بالقيمة الوسطى للدالة $f(x)$ في المجال $[a,b]$.

مثال:

حقق نظرية القيمة الوسطى للتكامل التالي: $\int_{-1}^{1} x^2 \;\; dx$.

الحل:

حسب النظرية السابقة يكون لدينا :

$$\int_{-1}^{1} x^2 \;\; dx = 2\,f(C)=2C^2$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 \quad dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

إذا : $c^2 = \frac{1}{3}$ $\frac{2}{3} = 2c^2 \Rightarrow$ منها يكون لدينا :

$c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ القيمتان مقبولتان لأنهما داخل الفترة.

مثال:

حقق نظرية القيمة الوسطى للتكامل التالي:

$$\int_{-1}^{1} x^3 \quad dx$$.

الحل:

حسب نظرية القيمة الوسطى يكون :

$$\int_{-1}^{1} x^3 \quad dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0 = 2\, f(C)$$

واضح أن :

$$0 = 2\, f(C) = 2C^3$$

وهذا يؤدى إلى :

$$C = 0 \in [-1,1]$$

التكاملات المعتلة : Improper Integrals

سبق وعرفنا في فقرة سابقة التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\ dx$ حيث f دالة معرفة ومستمرة على الفترة المغلق $[a\,,b]$ وبينا أنه إذا وجد هذا التكامل فإن الدالة f ستكون محدودة على هذا المجال.

سنقوم الآن بتعميم مفهوم التكامل المحدود إلى الحالة التي تكون فيها الدالة f معرفة على احد المجالات التالية: $[a\,,\infty)$ أو $(-\infty,b]$ أو $(-\infty,\infty)$ وسنسمى التكامل في هذه الحالة تكاملا معتلا أو معمم من النوع الأول وتكون على الشكل التالي:

أما التكاملات المعتلة من النوع الثاني فهي تكاملات على فترات محدودة ولكن الدالة f تعاني من نقطة واحدة على الأقل داخل الفترة المكاملة $[a\,,b]$.

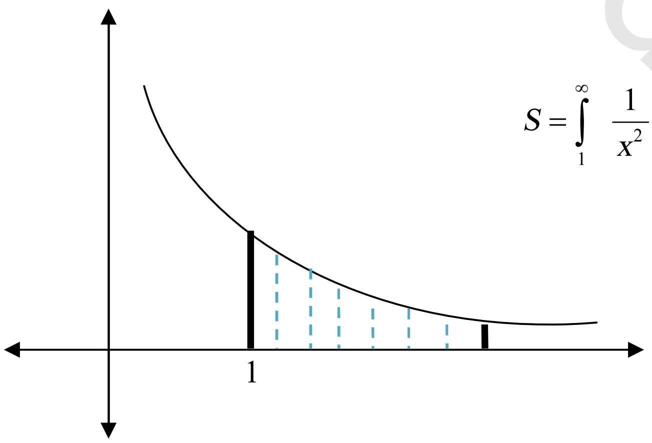
وفي هذا المقرر سنقصر دراستنا على النوع الأول لأهميته الكبيرة أثناء دراسة تحويلات لا بلاس وتحويلات فوريه.

مثال:

لنفرض إننا نهتم بحساب مساحة المنطقة المحصورة بمنحني الدالة $y=\frac{1}{x^2}$ ومحور السينات الواقعة على يمين المستقيم $x=1$

الحل:

إن هذه المساحة تعطى بالتكامل $S=\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\ dx$



في الواقع يمكن حساب هذه المساحة على الشكل التالي:

$$S=\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\ dx \quad =\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_1^t=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{t}+1\right) \quad =\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{t}+1\right)=1$$

تعريف التكامل المعتل : Improper Integral

بفرض أن الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على المجال $[a,\infty)$ عندها نقول أن التكامل $\int_a^\infty f(x)\ dx$ معتلا ويكون متقاربا إذا وجد التكامل $\int_a^t f(x)\ dx$ لكل $t\in[a,\infty)$ وعندها نكتب : $\int_a^\infty f(x)\ dx = \underset{t\to\infty}{Limt}\int_a^t f(x)\ dx$ وبشكل مشابه نعرف التكامل المعتل $\int_{-\infty}^b f(x)\ dx$ ونقول أنه متقارب إذا وجدت النهاية $\int_\infty^b f(x)\ dx = \underset{t\to-\infty}{Limt}\int_t^b f(x)\ dx$ لكل $t\in(-\infty,b]$.

وأخيرا نعرف التكامل المعتل $\int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx$ ونقول أنه متقارب إذا كان التكامليين المعتلين التالين متقاربين $\int_a^\infty f(x)\ dx$ و $\int_{-\infty}^a f(x)\ dx$ ونكتب ذلك في هذه الحالة على الشكل التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \underset{t\to-\infty}{Limt}\int_t^a f(x)\ dx + \underset{t\to\infty}{Limt}\int_a^t f(x)\ dx$$

حيث a أي نقطة من R.

مثال:

حدد إذا ما كان التكامل المعتل $S=\int_1^\infty \frac{1}{x}\ dx$ متقارباً أم لا.

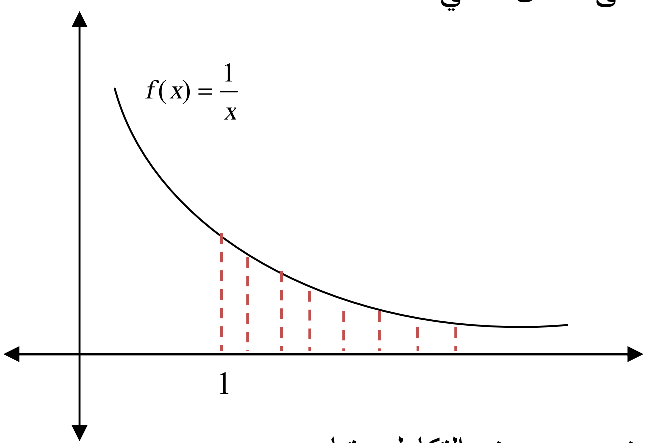
الحل:

إن هذا التكامل المعتل من النوع الأول حيث $a=1$ وبالتالي يكون لدينا:

في الواقع يمكن حساب هذه المساحة على الشكل التالي:

$$S=\underset{t\to\infty}{Limt}\int_1^t \frac{1}{x}\ dx$$

$$=\underset{t\to\infty}{Limt}\left(Ln(t)-1\right)\Big|_1^t=\infty-1$$



إذا النهاية غير موجودة والتكامل متباعد

مثال:

أوجد قيمة P التي تجعل التكامل المعتل $S=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^P}\ dx$ متقارباً.

الحل:

لاحظ في المثالين السابقين أن $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\ dx$ متباعد وأن $S=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\ dx$ متقارب.
لذلك سنفرض الآن أن : $P\neq 1$ منجد حسب التعريف :

$$S=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^P}\ dx\,\underset{t\to\infty}{Limt}\int_1^{t}\frac{dx}{x}=\underset{t\to\infty}{Limt}\left.\frac{x^{-p+1}}{-P+1}\right|_1^t$$

$$=\frac{1}{1-P}\underset{t\to\infty}{Limt}\left(\frac{1}{t^{p-1}}-1\right)$$

نميز الحالتين :

1) عندما $P>1$ فإن $P-1>0$ وبالتالي: $\underset{t\to\infty}{Limt}\frac{1}{t^{p-1}}=0$ بذلك يكون لدينا :

في الواقع يمكن حساب هذه المساحة على الشكل التالي:

$$\underset{t\to\infty}{Limt}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\ dx=\frac{1}{p-1} \quad \text{عندما } P>1$$

والتكامل متقارب في هذه الحالة.

2) عندما $P<1$ فإن $P-1<0$ وبالتالي: $\underset{t\to\infty}{Limt}\frac{1}{t^{p-1}}=\infty$ والتكامل المعتل متباعد في هذه الحالة.

نتيجة:

التكامل المعتل $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\ dx$ متقارب عندما $P>1$ ومتباعد عندما $P\leq 1$.

مبرهنة Theorem:

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a\,,\infty)$ وتأخذ في IR الموجبة عندئذ التكامل المعتل $\int_a^{\infty}f(x)\ dx$ يتقارب إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث يكون:

$$\int_a^{t}f(x)\ dx\leq M \quad \text{وذلك مهما تكن } t\in[a\,,\infty)$$

اختبار المقارنة : A comparison test

بفرض أن الدالتين f و g معرفتان ومستمرتان على المجال $[a,\infty)$ ولنفرض أن $g(x)\le f(x)$ ، $\forall\ x\in[a,\infty)$ عندئذ :

1- إذا كان التكامل $\int_a^{\infty} f(x)\ dx$ متقارباً فإن التكامل $\int_a^{\infty} g(x)\ dx$ متقارب.

2- إذا كان التكامل $\int_a^{\infty} g(x)\ dx$ متباعداً فإن التكامل $\int_a^{\infty} g(x)\ dx$ متباعد.

مثال:

بين أن التكامل المعتل $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\ dx$ متقارب.

الحل:

حسب خواص التكامل نستطيع أن نكتب:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\ dx=\int_0^{1} e^{-x^2}\ dx+\int_1^{\infty} e^{-x^2}\ dx$$

إن التكامل الأول هو تكامل محدود قيمته منتهية، أما بالنسبة للتكامل الثاني $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\ dx$

فإنه $x\in[1,\infty)$ فإن $x<x^2$ وبالتالي: $e^{-x^2}<e^{-x}$ ولدينا:

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2}\ dx=\underset{x\to\infty}{Limt}\int_1^{x} e^{-x}\ dx$$

$$=\underset{x\to\infty}{Limt}\left(-e^{-x}\right)\Big|_1^{x}=\underset{x\to\infty}{Limt}\left(e^{-1}-e^{-x}\right)=e^{-1}$$

حسب نظرية المقاربة.

مبرهنة Theorem:

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a,\infty)$ وتأخذ في IR الموجبة عندئذ التكامل المعتل $\int_a^{\infty} f(x)\ dx$ يتقارب إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\quad \varepsilon>0\quad:\quad \exists\in[a,\infty),\ c\le u<v<\infty \Rightarrow \left|\int_u^{v} f(x)\ \ dx\right|<\varepsilon$$

أمثلة محلولة

1- باستخدام اختبار المقارنة بين أي من التكاملات المعتلة التالية متقاربة:

$$1.\ \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \qquad 2.\ \int_1^\infty \frac{1}{x+e^{2x}}\,dx \qquad 3.\ \int_1^\infty \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}\,dx$$

الحل:

1. نعلم أن $\sin x \le 1$ وبالتالي يكون $\sin^2 x \le 1$ ومنها $\frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ وقد وجدنا أن التكامل المعتل $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ متقارب وبالتالي فإن التكامل المعتل $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ متقارب حسب اختبار المقارنة.
2. نعلم أن $x \le e^x$ لكل $x \in [1,\infty)$ وبالتالي يكون : $x^2 < (e^x)^2 = e^{2x}$ وبما أن $x \ge 1$ فإن $x^2 < e^{x^2} + x$ وبالتالي يكون $\frac{1}{x+e^{2x}} < \frac{1}{x^2}$ حيث $x \ge 1$ وبما أن التكامل المعتل $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ متقارب وبالتالي فإن التكامل المعتل وبالتالي فإن التكامل المعتل $\int_1^\infty \frac{1}{x+e^{2x}}\,dx$ متقارب حسب اختبار المقارنة.
3. يمكن بسهولة إثبات أن $\frac{1+\sqrt{x}}{x} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ عندما $x \in [1,\infty)$ ونعلم من مثال سابق أن التكامل عندما $x \in [1,\infty)$ ونعلم من مثال سابق أن التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{x^P}\,dx$ متباعد من أجل $P \le 1$ وبتطبيق اختبار المقارنة نجد أن $\int_1^\infty \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}\,dx$ متباعد.

2- أوجد قيم P التي تجعل التكامل المعتل التالي متقارباً: $\int_1^\infty \frac{1}{x(Lnx)^p}\,dx$.

الحل:

نميز حالتين :

1. عندما $P = 1$ وبالتالي يكون :

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(Lnx)}\, dx = \underset{t\to\infty}{Limt} \int_e^\infty \frac{1}{x(Lnx)}\, dx$$

نفرض أن $Ln(x)=u$ فيكون : $\frac{dx}{x}=du$:

عندما $x=e$ فإن $u=1$ و عندما $x=t$ فإن $u=Lnt$ إذا :

$$\underset{t\to\infty}{Limt} \int_e^t \frac{du}{u} = \underset{t\to\infty}{Limt}\ Lnu \Big|_1^{Ln(t)} = \underset{t\to\infty}{Limt}\ Ln(Lnt) - 0 = \infty$$

2. عندما $P \neq 1$ وبالتالي يكون :

$$\int_e^t \frac{1}{x(Ln(x))^p}\, dx = \underset{t\to\infty}{Limt} \int_1^{Ln(t)} \frac{du}{u^p} = \frac{1}{-p+1} u^{-p+1}\Big|_1^{Ln(t)}$$

$$= \frac{1}{-p+1}\left[\left(Ln(t)^{-p+1} - 1\right)\right]$$

ولنحسب هذه النهاية عندما $t \to \infty$:

أ- عندما $P>1$ يكون : $\underset{t\to\infty}{Limt}\int_e^t \frac{1}{x(Ln(x))^p}\, dx = \frac{1}{p-1}$ والتكامل متقارب.

ب- عندما $P<1$ يكون : $\underset{t\to\infty}{Limt}\int_e^t \frac{1}{x(Ln(x))^p}\, dx = \infty$ والتكامل متباعد.

ملاحظة:

يمكن استخدام معيار المقارنة لحل هذا المثال.

3- احسب قيمة التكامل المعتل $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$ لكل $n = 0,1,2,3$.

الحل:

عندما $n=0$ فإن: $\int_0^\infty e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 = 0\times 1 = 0!$

عندما $n=1$ فإن: $\int_0^\infty xe^{-x}\, dx = -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1 = 0\times 1 = 1!$

عندما $n=2$ فإن :

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-x}\, dx = 0+2 = 2!$$

عندما $n = 3$ فإن:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x} \quad dx = -x^3 e^{-x}\Big|_0^\infty + 3\int_0^\infty xe^{-x} \quad dx = 0 + 3\times 2 = 3!$$

نتيجة : $\int_0^\infty x^n e^{-x} \quad dx = n!$

4- بين أن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} x \quad dx$ متباعد وأن $\underset{t\to\infty}{Limt}\int_{-t}^{t} x \quad dx = 0$ ماذا تستنتج؟

الحل:

واضح أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \quad dx = \int_{-\infty}^{0} x \quad dx + \int_{-\infty}^{0} x \quad dx$$

$$= \underset{t\to -\infty}{Limt} \int_t^0 x \quad dx + \underset{t\to \infty}{Limt} \int_0^t x \quad dx$$

$$= = \underset{t\to -\infty}{Limt} \left(\frac{-t^2}{2}\right) + = \underset{t\to \infty}{Limt} \left(\frac{t^2}{2}\right) = -\infty + \infty$$

والنهاية عدم تعين أي غير موجودة.

لاحظ أن:

x دالة فردية وبالتالي $\int_{-a}^{a} x \quad dx = 0$ مما سبق نجد أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \quad dx = \underset{t\to\infty}{Limt}\int_{-t}^{t} x \quad dx = 0$$

أي أن العلاقة ليس متفقة دائماً.

Summary

Integrals Definitions:

Definite Integral : Suppose $f(x)$ is continuous on $[a,b]$.

Divide $[a,b]$ into n subintervals of width Δx and choose x_i from each interval.Then:

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Limt} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \quad \Delta x$$

Anti –Derivative function: An anti –derivative of $f(x)$ is a function $F(x)$, such that $F'(x) = f(x)$.

Indefinite Integral : $\int f(x)dx = F(x) + C$, where $F(x)$ is an anti – derivative of $f(x)$.

Fundamental Theorem of Calculus:

Part I: If $f(x)$ is continuous on $[a,b]$ and

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) .$$

Part II: If $f(x)$ is continuous on $[a,b]$, $F(x)$ is an anti – derivative of $f(x)$ Then :

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Variants of part I:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)dt = u'(x)\ f[u(x)]$$

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{b} f(t)dt = v'(x)\ f[v(x)]$$

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = u'(x)\ f[u(x)]v'(x)\ f[v(x)]$$

Properties:

1 –	$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)\ dx$ C is constant
2 –	$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a)$
3 –	$\int_a^a f(x)\ dx = 0$

4 –	$\int_a^a [f(x) \pm g(x)] \; dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
5 –	$\int_a^b f(x) \; dx = -\int_b^a f(x) \; dx$
(7 –	$\int_a^a f(x) \; dx = \int_a^c f(x) \; dx + \int_c^b f(x) \; dx \;) \; a \le c \le b$
8 –	$\left| \int_a^a f(x) \; dx \right| \le \int_a^a \lvert f(x) \rvert \; dx$
9 –	$f(x) \ge g(x) \Rightarrow \quad , \quad x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^a f(x) \; dx \ge \int_a^a g(x) \; dx$
	If $f(x) \ge 0$ on $a \le x \le b$ Then $\int_a^a f(x) \; dx \ge 0$ If $m \le f(x) \ge M$ on $a \le x \le b$ Then $m(b-a) \le \int_a^a f(x) \; dx \le M(b-a)$ If $f(x) \ge g(x)$ on $a \le x \le b$ Then $\int_a^a f(x) \; dx \ge \int_a^b g(x) \; dx$

Common Integrals:

1 –	$\int K dx = Kx + C$ K, C are constants
2 –	$\int x^n \; dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad , \quad n \ne -1$
3 –	$\int x^{-n} \; dx = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + C \quad , \quad n \ne 1$
4 –	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} Ln \lvert ax + b \rvert + C$
5 –	$\int x^{\frac{p}{q}} \; dx = \frac{1}{\frac{p}{q}+1} x^{\frac{p}{q}+1} + C = \frac{q}{p+q} x^{\frac{q}{p+q}} + C$

Trigonometric Functions:

1 –	$\int \sin u \; du = -\cos u + C$ u x is functions on
2 –	$\int \cos u \; du = \sin u + C$
3 –	$\int \tan u \; du = Ln \lvert \sec u \rvert + C$
4 –	$\int \cot u \; du = Ln \lvert \sin u \rvert + C$
5 –	$\int \sec u \; du = Ln \lvert \sec u + \tan u \rvert + C$

6 –	$\int \csc u \, du = Ln \left\| \csc u - \cot u \right\| + C$
7 –	$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$
8 –	$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$
9 –	$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$
10 –	$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$
11 –	$\int \sec^3 u \, du = \frac{1}{2}\left(\sec u \tan u + Ln \left\| \sec u + \tan u \right\|\right) + C$
12 –	$\int \csc^3 u \, du = \frac{1}{2}\left(-\csc u + Ln \left\| \csc u - \cot u \right\|\right) + C$

Inverse Functions:

Is function on x u	
1 –	$\int \sin^{-1} u \, du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
2 –	$\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
3 –	$\int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} Ln\left(1+u^2\right) + C$
4 –	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
5 –	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
6 –	$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
7 –	$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} Ln \left\| \frac{u+a}{u-a} \right\| + C$
8 –	$\int \sqrt{a^2-u^2} \, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} Ln \left\| u+\sqrt{a^2-u^2} \right\| + C$
9 –	$\int \sqrt{u^2-a^2} \, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2} Ln \left\| u+\sqrt{u^2-a^2} \right\| + C$
10 –	$\int \sqrt{a^2-u^2} \, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
11 –	$\int \sqrt{2au-u^2} \, du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

Hyperbolic functions:

1 –	$\int \sinh u \; du = \cosh u + C$ حيث u دالة في x
2 –	$\int \cosh u \; du = \sinh u + C$
3 –	$\int \tanh u \; du = Ln(\coth u) + C$
4 –	$\int \sec hu = \tan^{-1}\lvert\sinh u\rvert + C$
5 –	$\int \csc hu = \qquad + C$
6 –	$\int \sec hu \tanh u = -\sec hu + C$
7 –	$\int \csc hu \coth u = -\csc hu + C$
8 –	$\int \sec h^2 u \; du = \tan u + C$
9 –	$\int \csc h^2 u \; du = -\coth u + C$

Standard Integration Techniques:

U- Substitution The substitution $u = g(x)$ will convert

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

Using $du = g'(x)\; dx$.

Integration by parts : $\int u dv = uv - \int v \; du$ and

$$\int_a^b u \; dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \; du .$$

Choose u and dv from integral and compute du by differentiating u and compute v using $\int dv = v$.

Products and (some) Quotients of Trig Functions For $\int \sin^n x \cos^m x \; dx$ we have the following:

1. n odd : Strip 1 sine out and convert rest to cosines using $\sin^2 = 1 - \cos^2 x$, Then use the substitution $\cos x = u$.
2. m odd : strip 2 cosine out and convert rest to sines using $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, the use the substitution $\sin x = u$.
3. n and m both odd : use either 1 or 2.
4. n and m both even :use double angle or half angle formulas to reduce the integral into a form that can be integrated.

Formulas:

1 − $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2 − $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$

3 − $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

4 − $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

For $\int \tan^n x \sec^m x \, dx$ we have the following :

1. n odd : Strip 1 tangent and 1 secant out and convert the rest to secants using $\tan^2 = \sec^2 x - 1$, Then use the substitution $u = \sec x$.
2. m even : strip 2 secants out and convert rest to tangents using $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$, then use the substitution $u = \tan x$.
3. n and m both even: use either 1 or 2.
4. n even and m odd :Each integral will be dealt with differently.

Trig Substitutions:

If the integral contains the following root use the given substitution and formula to convert into an integral functions.

1 −	$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$	$\Rightarrow x = \frac{a}{b}\sin\theta$	*and*	$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
2 −	$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$	$\Rightarrow x = \frac{a}{b}\sec\theta$	*and*	$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
3 −	$\sqrt{a^2 + b^2x^2}$	$\Rightarrow x = \frac{a}{b}\tan\theta$	*and*	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

Partial Fractions:

To integrate $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ where the degree of $p(x)$ is smaller than the degree of $q(x)$.

Factor denominator as completely as possible and find the partial fraction decomposition of the rational expression.

Integrate the partial fraction decomposition (P.F.D) for each factor in the denominator.

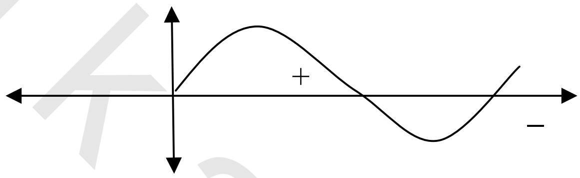
we get term(s) in the decomposition according to the following table:

Term in (P.F.D)	Factor $q(x)$
$\frac{A}{ax+b}$	$ax+b$
$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$	ax^2+bx+c

$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\dots\dots\dots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$	$(ax+b)^k$
$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\dots\dots\dots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$	$(ax^2+bx+c)^k$

Net Area:

$\int_a^b f(x)\ dx$ represents the net area between $f(x)$ and the x-axis with area above x-axis is positive and area below x-axis is negative.

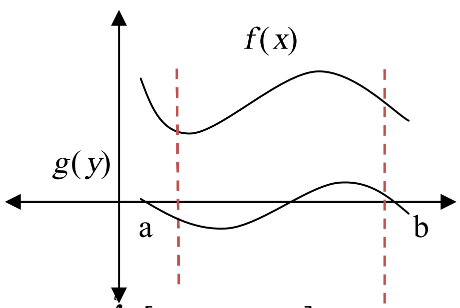


Area Between curves:

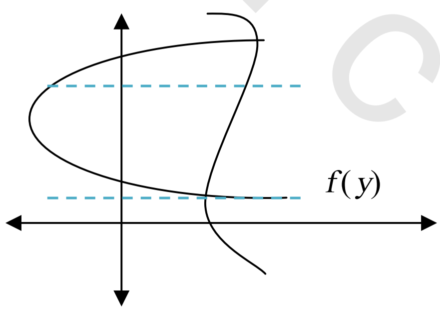
The general formulas for the two main cases for each are , $y=f(x)\Rightarrow A=\int_a^b [upperfunction]-[lowerfunction]\ dx$ & $x=f(y)\Rightarrow$ $A=\int_c^d [rightfunct\ \ ion]-[leftfuncti\ \ on]\ dy$

If the curves intersect then the era of each portion must be found individually. Here are

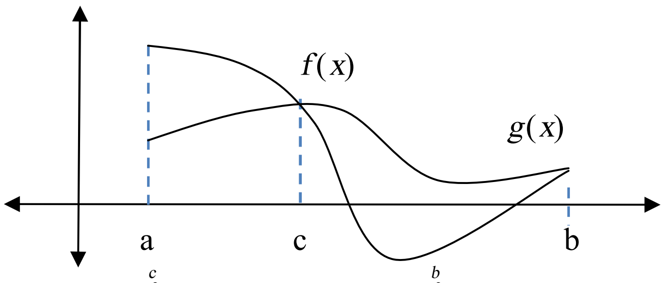
Some sketches of a couple possible situations and formulas for couple of possible cases:



$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\ dx$



$A=\int_c^d [f(y)-g(y)]\ dy$



$$A=\int_a^c [f(x)-g(x)]\ dx+\int_c^b [g(x)-f(x)]\ dx$$

Volumes of Revolution:
The two main formulas are:

$$V=\int A(x)\ dx \quad and \qquad V=\int A(y)\ dy$$

Arc length surface Area:
The three basic formulas are:

$$L=\int_a^b ds \ , \quad SA=\int_c^b 2\pi y\ ds \qquad (rotate about\ ox)$$

$$SA=\int_c^b 2\pi x\ ds \qquad (rotate about\ oy)$$

Where ds is dependent upon the form of the function being worked with as follows:

$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad if \quad y=f(x) \quad a\le x\le b$
$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \quad if \quad x=f(y) \quad a\le y\le b$
$ds=\sqrt{y'^2_t+x'^2_t}\,dx \quad if \quad x=f(t) \quad y=g(t) \quad a\le t\le b$
$ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \quad if \quad r=f(\theta) \quad a\le\theta\le b$

Improper Integral :
An integral is an integral with one or two infinite limits.
Infinite Limit :

1. $\int_a^\infty f(x)\ dx=\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\ dx$

2. $\int_{\infty}^{b} f(x)\ dx = \underset{t\to-\infty}{Limt}\int_{t}^{b} f(x)\ dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \underset{t\to-\infty}{Limt}\int_{t}^{a} f(x)\ dx + \underset{t\to\infty}{Limt}\int_{a}^{t} f(x)\ dx$ Provided both integrals are convergen

Comparison Test for Improper Integrals :

Then , On $[a , \infty)$ If $g(x) \le f(x)$

Con v. 1. If $\int_{a}^{\infty} f(x)\ dx$ con v , Then $\int_{a}^{\infty} g(x)\ dx$

Divg. 2. If $\int_{a}^{\infty} g(x)\ dx$ divg, Then $\int_{a}^{\infty} f(x)\ dx$

$a > 0$ Then : Useful fact :If

And diverges for $p \le 1$ $p > 0$ Converges if $\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^{P}}\ dx$

****

تمارين على الفصل الأول

1- أوجد التكاملات التالية باستخدام التعريف و خصائص التكامل غير المحدود للدوال التالية:☜

$1-\int \frac{\sin^3 x+1}{\sin^2 x}dx$ $\quad$ $2-\int (2\sin x-3\cos x)dx$

$4-\int \frac{dx}{1+4x^2}$ $\quad$ $5-\int \frac{\ln(x)}{x}dx$ $\quad$ $6-\int x\sqrt{1+x^2}dx$

$7-\int \sqrt{1-2x}dx$ $\quad$ $8-\int x\sqrt{1+x^2}dx$ $\quad$ $9-\int \frac{dx}{4-5x^2}$

$10-\int \frac{e^x dx}{1+e^x}$ $\quad$ $11-\int \frac{xdx}{1+x^4}$ $\quad$ $12-\int x^5 \ln xdx$

$13-\int x^3 e^x dx$ $\quad$ $14-\int x^2 \sin xdx$ $\quad$ $15-\int x\sin x\cos xdx$

$16-\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$ $\quad$ $17-\int e^{ax}\cos xdx$ $\quad$ $18-\int x^2 e^x dx$

2- أحسب التكاملات التالية باستخدام طريقة التعويض للدوال التالية:☜

$1-\int \sqrt{1+x^2}\,x^5 \quad dx \quad (u=1+x^2)$ $\quad$ $2-\int \sqrt{2x+1} \quad dx \quad (u=1+x^2)$

$3-\int x^3\cos(x^4+2) \quad dx \quad (u=x^4+2)$ $\quad$ $4-\int \cos 5x\sin 5x \quad dx \,(u=\cos 5x)$

$5-\int x(4+x^2)^{10} \quad dx \quad (u=4+x^2)$ $\quad$ $6-\int x^2\sqrt{x^3+1} \quad dx \quad (u=x^3+1)$

$7-\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad dx \quad (u=\sqrt{x})$ $\quad$ $8-\int \frac{4}{(1+2x)^3} \quad dx \quad (u=1+2x)$

3- أحسب التكاملات التالية بطريقة التجزيء للدوال التالية:☜

$1-\int xLnx \quad dx$ $\quad$ $2-\int x^3e^x \quad dx$ $\quad$ $3-\int x^2 Lnx \quad dx$

$4-\int x\sin x \quad dx$ $\quad$ $5-\int x\cos 2x \quad dx$ $\quad$ $6-\int xLn^2 x \quad dx$

4- أحسب التكاملات التالية بطريقة التجزيء للدوال التالية:☜

$1-\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} \quad dx$ $\quad$ $2-\int \frac{x-1}{(x+1)(x-3)^2} \quad dx$

$3-\int \frac{x^2-x+1}{(x-5)(x-3)(x+1)} \quad dx$ $\quad$ $4-\int \frac{x-2}{(x-1)(x^2-5x+4)} \quad dx$

5- أوجد قيمة التكاملات التالية بطريقة التجزيء للدوال التالية:☜

$1-\int \frac{dx}{x^2(1-x)} \quad -1<x<1$

$2-\int \frac{x^5 \quad dx}{x^4-5x^2+4} \quad 1<x<5$

$3-\int \frac{2x-1}{x^2+2x+3} \quad -2<x<3$

$4-\int \frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \quad -1<x<1$

$5-\int \frac{x^4+x+1}{x(x-1)(x-2)}\,dx \quad 0<x<1$

$6-\int \frac{x^4+1}{(x^2-1)^3}\,dx \quad -3<x<6$

6-أوجد قيمة التكاملات التالية للدوال التالية:☜

$1-\int_0^1 e^x \cos x \quad dx$

$2-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \quad dx$

$3-\int_1^3 \sqrt{x^2+2x-3} \quad dx$

$4-\int_0^1 xe^x \quad dx$

$5-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \quad dx$

$6-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x \sin^5 \quad dx$

$7-\int_{-1}^3 x^5 \quad dx$

$8-\int_2^8 (4x+3) \quad dx$

$9-\int_{-1}^3 6 \quad dx$

$10-\int_0^4 \left(1+3x-x^2\right) \quad dx$

$11-\int_{-1}^3 x^{\frac{4}{5}} \quad dx$

$12-\int_1^2 \frac{3}{x^4} \quad dx$

$13-\int_{-2}^2 \frac{1}{x^5} \quad dx$

$14-\int_{-5}^5 \frac{3}{x^3} \quad dx$

$15-\int_{\pi}^{2\pi} \cos x \quad dx$

$16-\int_0^2 x\left(2+x^5\right) \quad dx$

$17-\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \quad dx$

$18-\int_0^2 \frac{3}{x^4} \quad dx$

$19-\int_1^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 t \quad dt$

$20-\int_0^1 \left(3+x\sqrt{x}\right) \quad dx$

$21-\int_0^{2\pi} \csc\theta \quad d\theta$

$22-\int_0^{\frac{\pi}{6}} \csc\theta \cot\theta \quad d\theta$

$23-\int_{-2}^2 \left(x^6+1\right) \quad dx$

$24-\int_{-1}^1 \frac{\tan x}{1+x^2} \quad dx$

7-أوجد قيمة التكاملات التالية للدوال التالية:☜

$$1- \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \quad dx: \quad \begin{cases} x \quad , & -\pi \le x \le 0 \\ \sin x, & 0 < x \le 2\pi \end{cases}$$

$$2-\quad \int_0^2 f(x)\ dx:\quad \begin{cases} x^4 & , \quad a \le x \le 1 \\ x^5 & , \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

8- أوجد المساحة المحصورة فوق المنحني $y=x^2+1$ وتحت المنحنى $y=x$ والمستقيمان $x=0$ و $x=1$ موضحاً الإجابة بالرسم.

9- أوجد المساحة المغلقة المحصورة بين المنحنين $y=x^2$ و $y=2x-x^2$ موضحاً الإجابة بالرسم.

10- أوجد المساحة التقريبية للقطاع المحصور بين المنحيين $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $y=x^4-x$ موضحاً الإجابة بالرسم.

11- أوجد المساحة المحصور بين المنحيين $y=\sin x$ و $y=\cos x$ في المجال $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ موضحاً الإجابة بالرسم.

12- أحسب الحجم الناتج من دوران القطع المكافئ $y=2x^2-x^3$ في المجال $[0,2]$ حول المحور oy.

13- أحسب الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحنين $y=x$ و $y=x^2$ حول المحور oy.

14- تحقق من نظرية القيمة الوسطى للدالة $f(x)=1+x^2$ في المجال $[-1,2]$.

15- أعد التمرين السابق على الدوال التالية والمجالات المعطاة:

1) $f(x)=x^2\ ,\ [-1,1]$

2) $f(x)=t\sqrt{1+t^2}\ ,\ [0,5]$

3) $f(x)=\cos x\ ,\ \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

4) $f(x)=\sec\theta\tan\theta\ ,\ \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

5) $f(x)=x-x^2\ ,\ [0,2]$

6) $f(x)=x^2\sqrt{1+x^2}\ ,\ [0,2]$

7) $f(x)=\cos^4 x\sin^3 x\ ,\ [0,\pi]$

8) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\ ,\ [1,6]$

9) $f(x)=x\sqrt{1+x}\ ,\ [0,1]$

16- أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيات في كل من الحالات التالية:

1- $y=x^2-x-6\ ,\ y=0$

2- $y=20-x^2\ ,\ y=x^2-12$

3- $y=1-x^2\ ,\ y=1-\sqrt{x}$

4- $x+y=0\ ,\ x=y^2+3y$

5- $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}\ ,\ y=x^2-2x$

6- $y\sqrt{x},\quad y=x^2,\quad x=2$

17- أحسب الحجم الناتج من دوران السطح المحصورة بين المنحنيات المعطاة:

1- $y=2\ ,\ y=x^2$ حول المحور ox

2- $x=1+y^2\ ,\ y=x-3$ حول المحور oy

3- $x=0\ ,\ x=9-y^2$ حول المحور $x=-1$

4- $y=x^2+1\ ,\ y=9-x^2$ حول المحور $y=-1$

****

ملخصات عامة على جميع العمليات الرياضية

ملخص العمليات الجبرية Algebra Cheat Sheet

العمليات الحسابية Arithmetic Operations:

1 – $ab + ac = a(b + c)$	2 – $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c} = \dfrac{a}{bc}$
3 – $a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \dfrac{ab}{c}$	4 – $\dfrac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)} = \dfrac{ac}{b}$
5 – $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$	6 – $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$
7 – $\dfrac{a - b}{c - d} = \dfrac{b - a}{d - c}$	8 – $\dfrac{a + b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$
9 – $\dfrac{ab + ac}{a} = b + c \quad , \quad a \neq 0$	10 – $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{c}{d}\right)} = \dfrac{ad}{bc}$

خصائص الأسس Exponent Properties:

1 – $a^n a^m = a^{n+m}$	2 – $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \dfrac{1}{a^{m-n}}$
3 – $(a^n)^m = a^{nm}$	4 – $a^0 = 1 \quad , \quad a \neq 0$
5 – $(ab)^n = a^n b^n$	6 – $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
7 – $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n} = \dfrac{b^{-n}}{a^{-n}}$	8 – $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
9 – $a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$	

خصائص الجذور Properties Of Radicals :

$1 - \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$2 - \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
$3 - \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$4 - \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad , \quad b \neq 0$
$5 - \quad \sqrt[n]{a^n} = a$ إذا كان n عدد فردي	$6 - \quad \sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ إذا كان n عدد زوجي

خصائص المتباينات :Properties Of Inequalities

$1 - \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c$	$2 - \quad a < b \Rightarrow a - c < b - c$
$3 - \quad a < b \text{ and } c > 0 \Rightarrow ac < bc$	$4 - \quad a < b \text{ and } c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
$5 - \quad a < b \text{ and } c < 0 \Rightarrow ac > bc$	$6 - \quad a < b \text{ and } c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

خصائص القيمة المطلقة :Properties of Absolute value

$1 - \quad \lvert a \rvert = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$	$2 - \quad \lvert a \rvert \geq 0$
$3 - \quad \lvert -a \rvert = \lvert a \rvert$	$4 - \quad \lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$
$5 - \quad \left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert} \quad , \quad \lvert b \rvert \neq 0$	$6 - \quad \lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$
$7 - \quad \lvert a \rvert = b \Rightarrow \quad a = b \text{ or } \quad a = -b$	$6 - \quad \begin{array}{l} \lvert a \rvert < b \Rightarrow \quad -b < a < b \\ \lvert a \rvert > b \Rightarrow \quad a < -b \text{ or } a > b \end{array}$

صيغة المسافة بين نقطتين: Distance Formula

$1 - \quad d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

صيغة منتصف قطعة مستقيمة: Middle of Line Piece

$1 - \quad m\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$

Factoring Formulas : تحليل الصيغ

1 –	$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$
2 –	$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
3 –	$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
4 –	$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
5 –	$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
6 –	$(x-a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$
7 –	$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$
8 –	$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$
9 –	$x^{2n} - a^{2n} = (x^n - a^n)(x^n + a^n)$
10 –	إذا كان n فردي فإن: $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1})$ $x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + \ldots - a^{n-1})$ إشارة كثيرة الحدود متناوبة

:Logarithms Properties خصائص اللوغاريثمات

1 –	$y = \log_a x \Rightarrow x = b^y$	2 –	$\ln x = \log_e x$
3 –	$\log x = \log_{10} x$	4 –	$e = 2.718281828$
5 –	$\log_b b = 1$	6 –	$\log_b 1 = 0$
7 –	$\log_b b^x = x$	8 –	$b^{\log_b x} = x$
9 –	$\log_b x^r = r \log_b x$	10 –	$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$
11 –	$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$	12 –	$Dom(\log_b x) = \{x > 0\} = \overset{+}{R}$

الأخطاء الشائعة في العمليات الجبرية:Common Algebraic Errors

سنذكر بعض الأخطاء التي يقع فيها الطلاب وذلك لعدم معرفتهم بها والتي تتلخص في الجدول التالي:

1 −	$\frac{2}{0} \neq 0 \quad , \quad \left(\frac{2}{0} = \infty\right)$
2 −	$\frac{0}{2} \neq 2 \quad , \quad \left(\frac{0}{2} = 0\right)$
3 −	$-3^2 \neq 9$
4 −	$\left(x^2\right)^3 \neq x^5$
5 −	$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$
6 −	$\frac{1}{x^2 + x^3} \neq x^{-2} + x^{-3}$
7 −	$\frac{a + bx}{a} \neq 1 + bx$
8−	$-a(x-1) \neq -ax - a, \quad [-a(x-1) = -ax + a]$
9 −	$(x+a)^2 \neq x^2 + a^2$
10 −	$\sqrt{x^2 + a^2} \neq x + a$
11 −	$\sqrt{x+a} \neq \sqrt{a} + \sqrt{x}$
12 −	$(x+a)^n \neq x^n + a^n$
13 −	$\sqrt[n]{x+a} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a}$
14 −	$a(x+b)^2 \neq (ax+ab)^2$
15 −	$\sqrt{a^2 - x^2} \neq -\sqrt{x^2 - a^2}$
16 −	$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} \neq \frac{ab}{c} \quad , \quad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} \neq \frac{ac}{b}$

التحليل وحل المعادلات: Factoring and Solving

– طريقة المميز والقانون: Quadratic Formula

نعلم بأن معادلة الدرجة الثانية تكون على النحو التالي : $ax^2 + bx + c = 0$

نكون المميز على الشكل التالي : $\Delta = b^2 - 4ac$

ومنها يكون : $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

إذا كان $\Delta > 0$ يوجد جدران حقيقيان مختلفان

إذا كان $\Delta = 0$ يوجد جدر حقيقي مكرر واحد.

إذا كان $\Delta < 0$ لا توجد جذور حقيقية .

حالة خاصة في حالة $x^2 = p$ عندئذ $x = \pm\sqrt{p}$ بحيث $p \neq 0$

– طريقة إكمال المربع كامل Completing The square:

لحل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ نتبع الخطوات التالية:

1- نقسم المعادلة على a .
2- ننقل الثابت إلى الطرف الثاني.
3- نأخذ نصف أمثال x ونربعها ونضيفها ونطرحها من المعادلة السابقة.
4- العناصر الثلاثة الأولى متطابقة.
5- ننقل العدد إلى الطرف الثاني.
6- إذا كان الطرف الثاني موجب يوجد جذران وإذا كان الطرف الثاني صفر يوجد جذر واحد وإذا كان الطرف الثاني سالب لا توجد جذور.

فمثلاً: إذا كان لدينا معادلة على النحو التالي: $x^2 - 3x - 5 = 0$

الحل:

$x^2 - 3x = 5$ منها وباستخدام الخطوات السابقة يكون لدينا :

$$x^2 - 3x + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = 5 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

الدوال ومنحنياتها :Functions and graphs

- **الدالة الثابتة :Constant Function**

تسمى الدالة التي تأخذ الشكل التالي: $f(x)=a$ أو $y=a$ دالة ثابتة وبيان هذه الدالة هو مستقيم أفقي يمر بالنقطة $(0,a)$.

- **الدالة الخطية (الخط المستقيم) :Linear Function**

تسمى الدالة التي تأخذ الشكل التالي: $y=mx+b$ دالة خطية يسمى m ميل الخط المستقيم وبيان الدالة خط مستقيم يمر بالنقطة $(0,b)$ وله الميل m.

- **الميل : Slope**

يحسب بالشكل التالي: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ومعادلة مستقيم يمر بنقطة (x_1,y_1) وميله m هي $y=y_1+m(x-x_1)$.

- **دالة القطع المكافئ :Parabola Function**

1- التي تأخذ الشكل التالي: $y=a(x-h)^2+k$ وهو بيان مفتوح للأعلى إذا كان $a>0$ ومفتوح للأسفل إذا كان $a<0$ وذروته النقطة (h,k).

2- التي تأخذ الشكل التالي: $y=ax^2+bx+c$ وهو بيان مفتوح للأعلى إذا كان $a>0$ ومفتوح للأسفل إذا كان $a<0$ وذروته النقطة $\left(\frac{-b}{2a},\ f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

3- التي تأخذ الشكل التالي: $x=ay^2+by+c$ وهو بيان مفتوح لليمين إذا كان $a>0$ ومفتوح لليسار إذا كان $a<0$ وذروته النقطة $\left(f\left(\frac{-b}{2a}\right),\frac{-b}{2a}\right)$

الدائرة :Circle

تأخذ الشكل العام التالي: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ بيانها دائرة نصف قطرها r ومركزها النقطة (h,k).

- **حالة خاصة عندما** $h=k=0$ تأخذ الشكل العام التالي: $x^2+y^2=r^2$ (مركزها نقطة الأصل)

القطع الناقص :Ellipse

يأخذ الشكل العام التالي: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ بيانه شكل بيضوي له المركز (h,k) وله نصفي قطرين أفقي a وراسي b.

– **حالة خاصة عندما** $h=k=0$ تأخذ الشكل العام التالي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

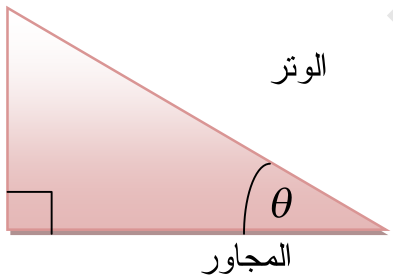
القطع الزائد :Hyperbola

يأخذ الشكل العام التالي: $\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-k)^2}{b^2}=1$ بيانه قطع زائدي له فرعان أحدهما مفتوح للأعلى والثاني مفتوح للأسفل وخطين مقاربين ميلاهما $\pm\frac{b}{a}$ ومركزه في نقطة تقاطع المقاربين.

– **حالة خاصة عندما** $h=k=0$ تأخذ المعادلة الشكل العام التالي: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

الدوال المثلثية :Trig Functions

يمكن توضيح العلاقات المثلثية من الشكل التالي:

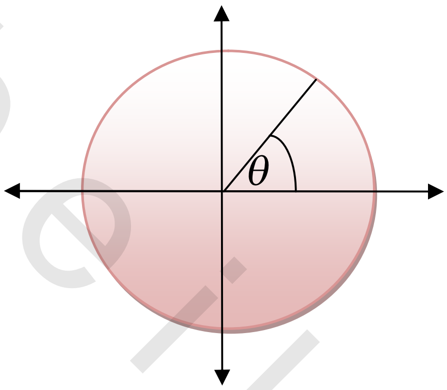


واضح أن الزاوية θ تقع بين $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ومنه نكون الجدول التالي للنسب المثلثية:

1– $\sin\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	2– $\cos\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
3– $\tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	4– $\csc\theta=\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$
5– $\sec\theta=\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$	6– $\cot\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

- العلاقات المثلثية في دائرة الوحدة Unit Circle Trig:

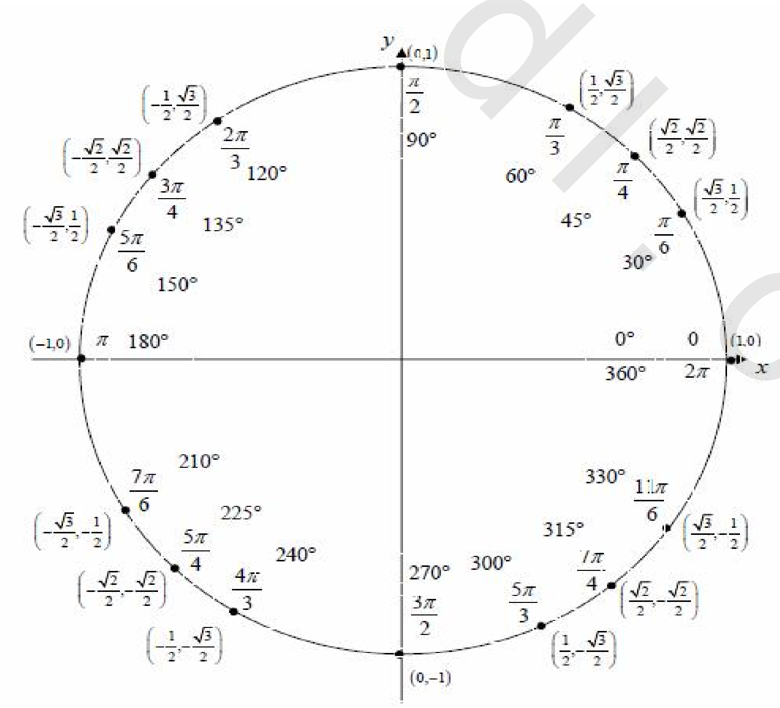
في هذه الحالة سندرس علاقات الدائرة على دائرة الوحدة أي دائرة نصف قطرها واحد ومركزها نقطة الأصل والتي تأخذ الشكل التالي:



الجدول التالي يبين العلاقات الهامة لهذه الدائرة:

1 − $\tan\ \theta = \frac{y}{x}$	2 − $\csc\ \theta = \frac{1}{y}$
3 − $\sec\ \theta = \frac{1}{x}$	4 − $\cot\ \theta = \frac{x}{y}$

دائرة الوحدة Unit Circle



من أجل أي زوج مرتب على دائرة الوحدة (x, y) يكون $y = \sin\theta$ ، $x = \cos\theta$

فمثلاً : $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

– حقائق وخصائص مثلثية: Facts and Properties

الجدول التالي يبين نطاق ومدى كل الدوال المثلثية :

2 – $\cos\theta$ نطاقها: R ومدها: $-1 \le \cos\theta \le 1$	1 – $\sin\theta$ نطاقها : R ومدها: $-1 \le \sin\theta \le 1$
4 – $\csc\theta$ نطاقها: $\theta \neq (n)\pi \quad , n \in Z$ ومدها : $\csc\theta \le -1 \quad or \quad \csc\theta \ge 1$	3 – $\tan\theta$ نطاقها: $\theta \neq \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad , n \in Z$ ومدها : $-\infty \le \tan\theta \le \infty$
6 – $\cot\theta$ نطاقها : $\theta \neq (n)\pi$ ومدها : $-\infty \le \cot\theta \le \infty$	5 – $\sec\theta$ نطاقها: $\theta \neq \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad , n \in Z$ ومدها: $\sec\theta \le -1 \quad or \quad \sec\theta \ge 1$

– حالة خاصة (أدوار الدوال المثلثية) Period Trig functions

نحدد في الجدول دور كل دالة مثلثية:

2– $\cos\omega\theta$ لها دورة $T = \frac{2\pi}{\omega}$	1 – $\sin\omega\theta$ لها دورة $T = \frac{2\pi}{\omega}$
4– $\csc\omega\theta$ لها دورة $T = \frac{2\pi}{\omega}$	3 – $\tan\omega\theta$ لها دورة $T = \frac{\pi}{\omega}$
6 – $\cot\omega\theta$ لها دورة $T = \frac{\pi}{\omega}$	5 – $\sec\omega\theta$ لها دورة $T = \frac{2\pi}{\omega}$

– العلاقات بين الدوال المثلثية : Formulas and Identities

3 – $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	2 – $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	1– $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

– صيغ ضعف الزاوية:Double Angle Formulas

2 – $\cos 2\theta = 2\csc^2\theta - 1$	1 – $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
4 – $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$	3 – $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

– صيغ الفردية والزوجية :Even / odd Formulas

$1-\quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$ فردية	$2-\quad \cos(-\theta)=\cos\theta$ زوجية
$3-\quad \tan(-\theta)=-\tan\theta$ فردية	$4-\quad \csc(-\theta)=-\csc\theta$ فردي
$5-\quad \sec(-\theta)=\sec\theta$ زوجية	$6-\quad \cot(-\theta)=-\cot\theta$ فردية

– صيغ الدور:Periodic Formulas

$1-\quad \sin(\theta+2\pi n)=\sin\theta$	$2-\quad \cos(\theta+2\pi n)=\cos\theta$
$3-\quad \tan(\theta+\pi n)=\tan\theta$	$4-\quad \csc(\theta+2\pi n)=\csc\theta$
$5-\quad \sec(\theta+2\pi n)=\sec\theta$	$6-\quad \cot(\theta+\pi n)=\cot\theta$

– صيغ بين نصف قطرية (الراديان) والدرجات:

Digress to Radians Formulas

$$\frac{\pi}{180}=\frac{t}{x}\Rightarrow t=\frac{\pi x}{180}$$

$$x=\frac{180\ t}{\pi}$$

– علاقات نصف (قطرية) الزاوية والمجموع والفرق: Half Angle Formulas

$1-\quad \sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$
$2-\quad \cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$
$3-\quad \tan^2(\theta)=\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$
$4-\quad \sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$
$5-\quad \cos(a\pm b)=\cos a\cos b\pm\sin a\sin b$
$6-\quad \tan(a\pm b)=\frac{\tan a\pm\tan b}{1\pm\tan a\tan b}$

– صيغ تحويل الضرب (الجداء) إلى مجموع: Product to sum formulas

$1-\quad \sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$

2−	$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$
3−	$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$
4−	$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$

– صيغ تحويل المجموع إلى الضرب: Sum to Product Formulas

1−	$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
2−	$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$
3−	$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
4−	$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

– صيغ الإرجاع إلى الربع الأول: Cofunction Formulas

1− $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$	2− $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$
3− $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$	4− $\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$
5− $\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$	6− $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$

الدوال المثلثية العكسية:Inverse Trig functions

سنذكر أهم العلاقات والقوانين للدوال المثلثية العكسية في الجدول التالي:

1 –	$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y$
2 –	$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$
3 –	$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$

– نطاق ومدى الدوال المثلثية العكسية: Domain and Range

1 –	$y = \sin^{-1} x$ نطاقها : $-1 \le x \le 1$ ومدها: $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
2 –	$y = \cos^{-1} x$ نطاقها: $-1 \le x \le 1$ ومدها: $0 \le y \le \pi$
3 –	$y = \tan^{-1} x$ نطاقها : $-\infty \le x \le \infty$ ومدها: $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

خصائص الدوال العكسية: Inverse Properties

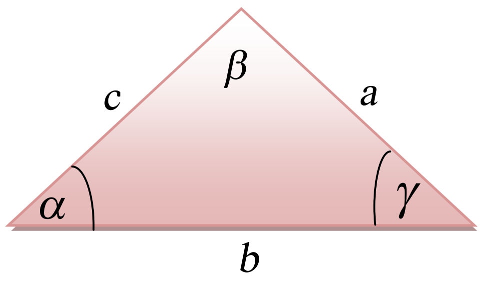
1 –	$\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$	2 –	$\sin^{-1}\left(\sin \theta\right) = \theta$
3 –	$\cos\left(\cos^{-1} x\right) = x$	4 –	$\cos^{-1}\left(\cos \theta\right) = \theta$
5 –	$\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x$	6 –	$\tan^{-1}\left(\tan \theta\right) = \theta$

المصطلحات المرادفة:Alternate notation

1 –	$\sin^{-1} x = \arcsin x$
2 –	$\cos^{-1} x = \arccos x$
3 –	$\tan^{-1} x = \arctan x$

العلاقات في المثلث:Low in Trig

يمكن توضيح العلاقات المثلثية من الشكل التالي:



1 – $\dfrac{\sin\alpha}{a}=\dfrac{\sin\beta}{b}=\dfrac{\sin\gamma}{c}$	2 – $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$
3 – $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$	4 – $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$
5 – $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$	6 – $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$
7 – $\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\tan\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}$	8 – $\dfrac{a-c}{a+c}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}$

النهايات Limits

التعريف الدقيق : Precise Definition

نقول أن $\lim_{x\to a} f(x) = L$ **إذا وجدنا لكل** $\varepsilon > 0$ **عدد** $\delta > 0$ **وكان:**

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftarrow |x - a| < \delta$$

التعريف العملي :Working Definition

نقول أن $\lim_{x\to a} f(x) = L$ إذا استطعنا أن نجعل $f(x)$ تقترب من L عندما نجعل x تقترب من a ودون أن نجعل $x = a$.

النهاية من اليمين : Right hand limit

نقول أن $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ إذا استطعنا أن نجعل $f(x)$ تقترب من L عندما نجعل x تقترب من a بقيم أكبر منها فقط $(x > a)$.

النهاية من اليسار : Left hand limit

نقول أن $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ إذا استطعنا أن نجعل $f(x)$ تقترب من L عندما نجعل x تقترب من a بقيم أصغر منها فقط $(x < a)$.

النهاية عند اللانهاية : Limit at Infinity

نقول أن $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$ إذا استطعنا أن نجعل $f(x)$ تقترب من L عندما تأخذ X قيم كبيرة لدرجة كافية.

وبشكل مشابه عندما $x \to -\infty$ وعندها يجب أن تأخذ X قيم سالبة كبيرة.

النهاية عند اللانهاية : Limit at Infinity

نقول أن $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ إذا أخذت $f(x)$ قيم موجبة كبيرة لدرجة كافية عندما تقترب X من a .

وبشكل مشابه عندما $\underset{x\to a}{Limt}\ f(x) = -\infty$ تكون L قيم سالبة كبيرة لدرجة كافية عندما تقترب x من a .

العلاقة بين النهاية والنهايات من الطرفين

Relationship between the limit and one – sided limit:

نوضح العلاقة بين نهاية الدالة بشكل عام والنهاية من اليسار واليمين:

$$\underset{x\to a}{Lim}\ f(x) = L \Leftrightarrow \underset{x\to a^+}{Lim}\ f(x) = \underset{x\to a^-}{Lim}\ f(x) = L$$

وكذلك:

$$\underset{x\to a}{Lim}\ f(x) \neq \underset{x\to a^+}{Lim}\ f(x) \Rightarrow \underset{x\to a}{Lim}\ f(x)$$ غير موجودة

خصائص وقواعد إيجاد النهايات Properties and Rules

إذا كانت كلا النهايتين $\underset{x\to a}{Lim}\, f(x)$ و $\underset{x\to a}{Lim}\, g(x)$ موجودتان وكان C ثابت اختياري فإن:

1. $\underset{x\to a}{Lim}\left[Cf(x)\right] = C\ \underset{x\to a}{Lim}\ f(x)$

2. $\underset{x\to a}{Lim}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \underset{x\to a}{Lim}\ f(x) \pm \underset{x\to a}{Lim}\ g(x)$

3. $\underset{x\to a}{Lim}\left[f(x) \times g(x)\right] = \underset{x\to a}{Lim}\ f(x) \times \underset{x\to a}{Lim}\ g(x)$

4. $\underset{x\to a}{Lim}\ \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)}{\underset{x\to a}{Lim}\ g(x)} \quad , \quad \underset{x\to a}{Lim}\ g(x) \neq 0$

5. $\underset{x\to a}{Lim}\left[f(x)\right]^n = \left[\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)\right]^n$

6. $\underset{x\to a}{Lim}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \sqrt[n]{\underset{x\to a}{Lim}\ f(x)}$

حساب نهايات أساسية عند $\pm\infty$: Basic Limit Evaluations at $\pm\infty$

بعض القوانين العامة لإيجاد نهاية الدالة عندما $\pm\infty$:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ and $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} Ln(x) = \infty$ and $\lim\limits_{x\to 0^+} Ln(x) = -\infty$

3. $r > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b}{x^r} = 0$

4. $r > 0$ and $x^r \in R, \forall x \in R \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{b}{x^r} = 0$

5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n = \infty$ حيث n زوجي

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = \infty$ and $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ حيث n فردي

7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n + \dots\dots + a_1 x + a_0 = \operatorname{sgn}(a)\infty$ حيث n زوجي

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n + \dots\dots + a_1 x + a_0 = \operatorname{sgn}(a)\infty$ حيث n فردي

9. $\lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n + \dots\dots + a_1 x + a_0 = -\operatorname{sgn}(a)\infty$ حيث n فردي

ملاحظة : تعني العبارة $\operatorname{sgn}(a)$ إشارة العدد x.

تقنيات حسابية : Evaluation Techniques

- **الدوال المستمرة :Continuous functions**

إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة $x=a$ عندها $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

- **الدوال المستمرة والتركيب : Continuous functions and Composition**

إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة b وكانت $\lim_{x\to a} f(x) = b$ عندئذ يكون:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b)$$

- **حلل واختصر : Factor and Cancel**

نقدم مثال توضيحي على ذلك:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+6)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+6}{2} = 4$$

- **الضرب بالمرافق : Rationalize Numerator / Enumerator**

نقدم مثال توضيحي على ذلك:

$$\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81} = \lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81} \times \frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{9-x}{(x^2-81)(3+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 9} \frac{-1}{(x+9)(3+\sqrt{x})} = \frac{-1}{108}$$

- **توحيد المقامات :combine Rational Expressions**

نقدم مثال توضيحي على ذلك:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{-h}{x(x+h)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$

- قاعدة لوبيتال : L'Hopital Rule

إذا كانت : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ or $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

عندئذ يكون: $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ويمكن لـــ a أن يكون $+\infty$ أو $-\infty$

- كثيرة الحدود عند اللانهاية: Polynomials at infinity

إذا كانت $p(x)$ و $g(x)$ كثيرتي حدود وأردنا حساب النهاية $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ عندها نخرج أكبر أس لـــ X في البسط والمقام ونحسب النهاية.

نقدم مثال توضيحي على ذلك:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-4}{5x-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{5}{x}-2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{4}{x^2}}{\frac{5}{x}-2}=\frac{-3}{2}$$

- نهايات الدوال المعرفة مقطعياً : Limit Piecewise functions

إذا أردنا حساب النهاية $\lim_{x\to-2}g(x)$ حيث $g(x)=\begin{cases}x^2+5 & if \quad x<-2\\ 1-3x & if \quad x\geq-2\end{cases}$ نحسب النهاية من الطرفين:

$$\lim_{x\to-2^-}g(x)=\lim_{x\to-2^-}\left(x^2+5\right)=9$$
$$\lim_{x\to-2^+}g(x)=\lim_{x\to-2^+}\left(1-3x\right)=7$$

وبما أن القيمتين مختلفتان فإن $\lim_{x\to-2}g(x)$ غير موجودة. أما لو كان الطرفان متساوين فإن للنهاية القيمة ذاتها.

- بعض الدوال المستمرة : Some Continuous functions

سنورد فيما يلي قائمة ببعض الدوال المستمرة وقيم لـــ X التي تكون مستمرة عندها:

1- كثيرات الحدود مستمرة على R.

2- الدوال الكسرية مستمرة على R ماعدا القيم التي تعدم المقام.

3- $\sqrt[n]{x}$ (n فردي) مستمرة على R .

4- $\sqrt[n]{x}$ (n زوجي) مستمرة على $\overset{+}{R}$ $(x \geq 0)$.

5- e^x مستمرة على R .

6- $Ln(x)$ مستمرة من أجل$(x > 0)$.

7- $\cos x$ و $\sin x$ مستمرة على R .

8- $\tan x$ و $\sec x$ مستمرة على Rما عدا القيم

$$\left\{ ......, \ -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ... \right\}.$$

9- $\cot x$ و $\csc x$ مستمرة على Rما عدا القيم

$$\{......, \ -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ... \}.$$

- **نظرية القيمة الوسطية: Intermediate Value Theorem**

بفرض $f(x)$ دالة مستمرة على المجال$[a,b]$ و M عدد اختياري يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ عندئذ يوجد عدد C بحيث يكون$0 < C < b$ ويكون $f(C) = M$.

المشتقات Derivatives

المشتقات تعاريف وملاحظات:Derivatives Definition and notation

- إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة عندها تعرف المشتقة بالعلاقة :

$$f'(x) = \lim_{h \to a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- إذا كانت $y = f(x)$ فإن جميع المصطلحات التالية تعبر عن المشتقة:

$$f'(x) = y' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = Df(x)$$

- إذا كانت $y = f(x)$ فإن جميع المصطلحات التالية تعبر عن قيمة المشتقة عند $x = a$:

$$f'(a) = y'\Big|_a = \frac{df}{dx}\Big|_a = \frac{dy}{dx}\Big|_a = \frac{d}{dx}\big(f(x)\big)\Big|_a = Df(a)$$

تفسير المشتقة: Interpretation of Derivative

– إذا كانت $y=f(x)$ عندئذ:

1. $m=f'(a)$ هي ميل خط المماس للمنحني $y=f(x)$ عند $x=a$ ومعادلة خط المماس عند النقطة $x=a$ يعطى بالمعادلة : $y=f(a)+f'(a)(x-a)$.
2. $f'(a)$ هي المعدل اللحظي (الآني) لتغير $f(x)$ عند $x=a$.
3. إذا كان $f(x)$ هو موقع هدف في اللحظة x عندها $f'(x)$ هي سرعة الهدف عند النقطة $x=a$.

خصائص أساسية /صيغ/قوانين: Basic properties / Formulas / Rules

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتان قابلتان للاشتقاق وكان C و n عددان حقيقيان اختياريان عندها يكون:

أهم الخصائص العامة:

$1-$	$\frac{d}{dx}\left(C\,f(x)\right)=C\ f'(x)$	حيث C ثابت
$2-$	$\frac{d}{dx}\left(x^{n}\right)=nx^{n-1}$	حيث n أي عدد
$3-$	$\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f(x)'\pm g(x)'$	
$4-$	$\frac{d}{dx}(C)=0$	حيث C ثابت
$5-$	$\left(f(x)\times g(x)\right)'=f(x)'g(x)+f(x)g(x)'$	قاعدة الضرب(الجداء)
$6-$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f(x)'g(x)-f(x)g(x)'}{g(x)^{2}}$	(قاعدة الكسر)
$7-$	$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right)=f'(g(x))g'(x)$	(قاعدة السلسلة)
$8-$	$\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right)=g'(x)e^{g(x)}$	
$9-$	$\frac{d}{dx}\left(Ln\quad g(x)\right)=\frac{g'(x)}{g(x)}$	حيث $g(x)\neq 0$

المشتقات الشائعة : Common Derivatives

1–كثيرات الحدود :Polynomials

$1-$	$\frac{d}{dx}(C)=0$	حيث C ثابت
$2-$	$\frac{d}{dx}(x)=1$	
$3-$	$\frac{d}{dx}(Cx)=C$	
$4-$	$\frac{d}{dx}\left(Cx^{n}\right)=nCx^{n-1}$	

2-الدوال المثلثية :Trig Function

1 –	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
2 –	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
3 –	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
4 –	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
5 –	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
6 –	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

3-الدوال المثلثية العكسية :Inverse Trig Functions

1 –	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2 –	$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
3 –	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
4 –	$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
5 –	$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = \frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
6 –	$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$

4-الدوال الآسية و اللوغارثمية :Exponential / Logarithm Functions

1 –	$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$
2 –	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
3 –	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad , \quad x > 0 \qquad , \frac{d}{dx}(\ln \lvert x\rvert) = \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$
4 –	$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \quad , \quad x > 0$

5-الدوال القطعية الزائدية :Hyperbolic Trig functions

1 –	$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
2 –	$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$
3 –	$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \sec h^2 x$
4 –	$\frac{d}{dx}(\sec hx) = -\sec hx \tanh x$
5 –	$\frac{d}{dx}(\csc hx) = -\csc hx \coth x$
6 –	$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\csc h^2 x$

6-حالات من قاعدة السلسلة:Chain Rule Variants

نطبق قاعدة السلسلة على بعض الدوال:

1 –	$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$
2 –	$\frac{d}{dx}[e^{f(x)}] = f'(x)e^{f(x)}$
3 –	$\frac{d}{dx}[Ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$
4 –	$\frac{d}{dx}[\sin f(x)] = f'(x)\cos f(x)$
5 –	$\frac{d}{dx}[\cos f(x)] = -f'(x)\sin f(x)$
6 –	$\frac{d}{dx}[\tan f(x)] = f'(x)\sec^2 f(x)$
7 –	$\frac{d}{dx}[\sec f(x)] = f'(x)\sec f(x)\tan f(x)$
8 –	$\frac{d}{dx}[\sin^{-1} f(x)] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$

9 –	$\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1} f(x)\right]=\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
10 –	$\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1} f(x)\right]=\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

7– المشتقات من مراتب عليا : Higher Order Derivative

يرمز للمشتقة الثانية بالشكل التالي:

$$f''(x)=y''=\frac{d^2 f}{d^2 x}=\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}(f(x))=D^2 f(x)$$

وتعرف على الشكل التالي:

$$f''(x)=(f'(x))'$$

أي أنها مشتقة المشتقة الأولى .

– يرمز للمشتقة النونية (من المرتبة n) بالشكل التالي: $f^n(x)=\frac{d^n f}{d^n x}$

وتعرف على الشكل التالي: $f^n(x)=\left(f^{n-1}(x)\right)'$

أي أنها مشتقة المشتقة من المرتبة $(n-1)$.

8– التفاضل الضمني : Implicit differentiation

نصادف دوال يمتزج فيها المتغير x والدالة $y=f(x)$ معاً في صيغة ضمنية غير سهلة العزل أحداهما عن الآخر وعندها لحساب المشتقة y' نفاضل الدالة الضمنية ونعزل الحدود التي تحوي y' ثم نكتب صيغة y' بدلالة كل من x و y ولتوضيح هذه الفكرة نورد المثال التالي: أوجد y' للدالة الضمنية $e^{2x-9y}+x^3y^2=\sin y+11x$

نشتق الطرفين فنجد: $e^{2x-9y}2x-9y'+3x^2y^2+2x^3yy'=\cos yy'+11$ منها نحصل على:

$$y'=\frac{11-2e^{2x-9y}-3x^2y^2}{2x^3y-9e^{2x-9y}-\cos y}$$

9ـ التزايد والتناقص والتقعر نحو الأعلى والأدنى :

Increasing / Decreasing- Concave Up /Down

– النقاط الحرجة : Critical points

نقول عن النقطة $x=c$ أنها نقطة حرجة للدالة $f(x)$ إذا تحقق أحد الشرطين:

1. $f'(c)=0$
2. $f'(c)$ غير موجودة.

– التزايد والتناقص Increasing / Decreasing

1. إذا كان $f'(x)>0$ لجميع قيم x في مجال I عندئذ نقول أن $f(x)$ دالة تزايده في المجال I .
2. إذا كان $f'(x)<0$ لجميع قيم x في مجال I عندئذ نقول أن $f(x)$ دالة متناقصة في المجال I .
3. إذا كان $f'(x)=0$ لجميع قيم x في مجال I عندئذ نقول أن $f(x)$ دالة ثابتة في المجال I .

– التقعر للأعلى والتقعر للأدنى Concave Up / Concave Down

1. إذا كان $f''(x)>0$ لجميع قيم x في مجال I عندئذ نقول أن $f(x)$ دالة تتقعر نحو الأعلى في المجال I .
2. إذا كان $f''(x)<0$ لجميع قيم x في مجال I عندئذ نقول أن $f(x)$ دالة تتقعر نحو الأدنى في المجال I .

– نقاط الانقلاب (الانعطاف) Increasing points

نقول عن النقطة $x=c$ أنها نقطة انعطاف للدالة $f(x)$ إذا تغير التقعر عند النقطة $x=c$ و $f''(x)=0$.

10ـ **النهايات الحدية** : Extreme

– **النهاية المطلقة:Absolute Extreme**

1. نقول عن $x=c$ أنها نقطة نهاية كبرى مطلقة للدالة $f(x)$ إذا كان $f(c) \geq f(x)$ لجميع قيم x في نطاق الدالة.
2. نقول عن $x=c$ أنها نقطة نهاية صغرى مطلقة للدالة $f(x)$ إذا كان $f(c) \leq f(x)$ لجميع قيم x في نطاق الدالة.

– **نظرية فيرمات :Fermat's Theorem**

إذا كان للدالة $f(x)$ نهاية حدية عند $x=c$ عندئذ تكون النقطة $x=c$ نقطة حرجة للدالة $f(x)$.

– **نظرية القيمة الحدية :Extreme Theorem**

إذا كان للدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[a,b]$ عندئذ يوجد عددان c و d بحيث يكون:

1. $a \leq c \leq b$ و $a \leq d \leq b$.
2. $f(c)$ هي نهاية كبرى مطلقة قي المجال المغلق $[a,b]$.
3. $f(d)$ هي نهاية صغرى مطلقة قي المجال المغلق $[a,b]$.

11ـ **إيجاد النهاية المطلقة**: Finding Absolute Extreme

لإيجاد النهاية المطلقة لدالة مستمرة $f(x)$ على الفترة المغلق $[a,b]$ نستخدم الخطوات التالية:

1. نجد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x)$ في المجال $[a,b]$.
2. نحسب قيم $f(x)$ عند كل منها.
3. نحسب كلاً من $f(a)$ و $f(b)$.
4. لتحديد القيمة المطلقة العظمى نأخذ أكبر قيمة من القيم السابقة ولتحديد القيم المطلقة الصغرى نأخذ أصغر قيمة بين القيم السابقة.

12ـ النهايات الحدية المكانية (النسبية): Relative (local) Extreme

1. نقول عن $x=c$ أنها قيمة عظمى مكانية للدالة $f(x)$ إذا كان $f(c)\geq f(x)$ لجميع قيم x قرب c.
2. نقول عن $x=c$ أنها قيمة صغرى مكانية للدالة $f(x)$ إذا كان $f(c)\leq f(x)$ لجميع قيم x قرب c.

13ـ اختبار المشتقة الأولى : First Derivative

إذا كانت $x=c$ نقطة حرجة للدالة $f(x)$ عندئذ $x=c$ ستكون:

1. نهاية عظمى مكانية للدالة $f(x)$ إذا كان $f'(x)>0$ على يسار النقطة $x=c$ و $f'(x)<0$ على يمين النقطة $x=c$.
2. نهاية صغرى مكانية للدالة $f(x)$ إذا كان $f'(x)<0$ على يسار النقطة $x=c$ و $f'(x)>0$ على يمين النقطة $x=c$.
3. لن تكون نهاية حدية نسبية للدالة $f(x)$ إذا كان $f'(x)$ له الإشارة ذاتها على طرفي النقطة $x=c$.

14ـ اختبار المشتقة الثانية : Second Derivative Test

إذا كانت $x=c$ نقطة حرجة للدالة $f(x)$ وكان $f'(c)=0$ عندئذ $x=c$ ستكون:

1. نهاية عظمى مكانية للدالة $f(x)$ إذا كان $f''(x)<0$.
2. نهاية صغرى مكانية للدالة $f(x)$ إذا كان $f''(x)>0$.
3. ربما تكون نهاية عظمى مكانية أو نهاية صغرى مكانية أولا تكون إذا كان $f''(x)=0$.

15ـ إيجاد النهايات المكانية و تصنيف النقاط الحرجة :

Finding Relative Extreme and classify critical points

1. نوجد جميع النقاط الحرجة للدالة $f(x)$.
2. نستخدم اختبار المشتقة الأولى أو اختبار المشتقة الثانية لكل نقطة حرجة .

– نظرية القيمة الوسطى :Mean Value Theorem

إذا كان للدالة $f(x)$ دالة مستمرة على مجال مغلق $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال المفتوح (a,b) عندئذ يوجد عدد $a < c < b$ بحيث يكون:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

التكاملات Integrals

التكامل المحدود :Definite Integral

لنفرض أن $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ ولنقسم المجال $[a,b]$ إلى n مجالاً جزئياً بعرض Δx ولنخذ x_i^* من كل مجال منها عندئذ:

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{n\to\infty}{Limt} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

الدالة الأصلية:Anti- Derivative

الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ هي دالة $F(x)$ بحيث $F'(x) = f(x)$.

التكامل اللامحدود : Indefinite Integral

ويكون على الشكل التالي:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

حيث $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ و C ثابت .

النظريات الأساسية لحساب التكامل :

Fundamental Theorems for calculate Integrals

1. إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ عندها تكون الدالة $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ هي أيضاً مستمرة على الفترة $[a,b]$ ويكون:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) .$$

2. إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ وكانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ عندئذ :

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

خواص أساسية /صيغ/قوانين: Basic properties / Formulas / Rules

أهم الخصائص العامة:

1 – $\int Cf(x)dx = C\int f(x)\ dx$ حيث C ثابت
2 – $\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(b) - F(a)$ حيث F دالة أصلية
3 – $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)\ dx$
4 – $\int_a^b f(x)\ dx = 0$
5 – $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
6 – $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$
7 – $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \quad (a \le c \le b)$
8 – $\left\vert \int_a^b f(x)\ dx \right\vert \le \int_a^b \vert f(x) \vert\ dx$
9 – $f(x) \ge g(x) \Rightarrow \quad , \quad x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \ge \int_a^b g(x)\ dx$
10 – $\int_a^b Cf(x)\ dx = C(b-a)$ – إذا كان $f(x) \ge 0$ في المجال $a \le x \le b$ عندها يكون $\int_a^b f(x)\ dx \ge 0$ – إذا كان $f(x) \ge g(x)$ في المجال $a \le x \le b$ عندها يكون $\int_a^b f(x)\ dx \ge \int_a^b g(x)\ dx$

Common Integrals : التكاملات الشائعة

1-كثيرات الحدود :Polynomials

1 −	$\int dx = x + C$ ثابت C حيث
2 −	$\int Kdx = Kx + C$ ثوابت K, C حيث
3 −	$\int x^{n} \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$
4 −	$\int x^{-n} \, dx = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + C \quad , \quad n \neq 1$
5 −	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} Ln \lvert ax+b \rvert + C$
6 −	$\int x^{\frac{p}{q}} \, dx = \frac{1}{\frac{p}{q}+1} x^{\frac{p}{q}+1} + C = \frac{q}{p+q} x^{\frac{q}{p+q}} + C$

2-الدوال المثلثية :Trig Functions

1 −	$\int \sin u \, du = -\cos u + C$ حيث u دالة في x
2 −	$\int \cos u \, du = \sin u + C$ ثوابت K, C حيث
3 −	$\int \tan u \, du = Ln \lvert \sec u \rvert + C$
4 −	$\int \cot u \, du = Ln \lvert \sin u \rvert + C$
5 −	$\int \sec u \, du = Ln \lvert \sec u + \tan u \rvert + C$
6 −	$\int \csc u \, du = Ln \lvert \csc u - \cot u \rvert + C$
7 −	$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$
8 −	$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$
9 −	$\int \sec^{2} u \, du = \tan u + C$
10 −	$\int \csc^{2} u \, du = -\cot u + C$

11 –	$\int \sec^3 u \; du = \frac{1}{2}\left(\sec u \tan u + Ln\left\|\sec u + \tan u\right\|\right) + C$
12 –	$\int \csc^3 u \; du = \frac{1}{2}\left(-\csc u + Ln\left\|\csc u - \cot u\right\|\right) + C$

Exponential / Logarithm Functions: 3–الدوال الآسية و اللوغارثمية

1 –	$\int e^u \; du = e^u + C$ حيث u دالة في x
2 –	$\int a^u \; du = \frac{a^u}{Lna} + C$
3 –	$\int Lnu \; du = u\left\|Lnu - u\right\| + C$
4 –	$\int ue^u \; du = (u-1)\; e^u + C$
5 –	$\int \frac{du}{u \ln(u)} = Ln\left\|Ln(u)\right\| + C$
6 –	$\int e^{au} \sin(bu) \; du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}\left(a \sin bu - b \cos bu\right) + C$
7 –	$\int e^{au} \cos(bu) \; du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}\left(a \cos bu + b \sin bu\right) + C$

Inverse Trig Functions: 4–الدوال المثلثية العكسية

1 –	$\int \sin^{-1} u \; du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$ حيث u دالة في x
2 –	$\int \cos^{-1} u \; du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
3 –	$\int \tan^{-1} u \; du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} Ln\left(1+u^2\right) + C$
4 –	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
5 –	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
6 –	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
7 –	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} Ln\left\|\frac{u+a}{u-a}\right\| + C$
8 –	$\int \sqrt{a^2 - u^2} \; du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} Ln\left\|u + \sqrt{a^2 - u^2}\right\| + C$

9 –	$\int \sqrt{u^2 - a^2}\ du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} Ln\left\|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right\| + C$
10 –	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\ du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
11 –	$\int \sqrt{2au - u^2}\ du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

5–الدوال المثلثية الزائدية: Hyperbolic Trig functions

1 –	$\int \sinh u\ du = \cosh u + C$ حيث u دالة في x
2 –	$\int \cosh u\ du = \sinh u + C$
3 –	$\int \tanh u\ du = Ln(\coth u) + C$
4 –	$\int \sec hu = \tan^{-1}\|\sinh u\| + C$
5 –	$\int \csc hu = \qquad + C$
6 –	$\int \sec hu \tanh u = -\sec hu + C$
7 –	$\int \csc hu \coth u = -\csc hu + C$
8 –	$\int \sec h^2 u\ du = \tan u + C$
9 –	$\int \csc h^2 u\ du = -\coth u + C$

تقنيات تكاملية قياسية (الكسرية): Standard Integration Techniques

1- التكامل بالتعويض (تغير المتحول) : Substitution

إذا أعطينا التكامل $\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx$ عندها نجزئ تغير متحول $u=g(x)$

وسوف نحصل على التكامل: $\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$

2- التكامل بالتجزيء: Integration by parts

إذا أعطينا التكامل

$$\int udv = uv - \int v\ du$$

عندها نكون التكامل التالي:

$$\int_a^b u\ dv = uv\ \Big|_a^b - \int_a^b v\ du$$

حيث نختار u و dv ثم نكامل du و نفاضل v.

3-التكامل بالتعويض في الدوال المثلثية:

Substitution integration by Trig function

إذا كان التكامل يحوي جذور مثلثية استخدم التكامل بالتعويض وفق الصيغ التالية:

$1- \quad \sqrt{a^2-b^2x^2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{a}{b}\sin\theta \quad and \quad \cos^2\theta=1-\sin^2\theta$
$2- \quad \sqrt{b^2x^2-a^2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{a}{b}\sec\theta \quad and \quad \tan^2\theta=\sec^2\theta-1$
$3- \quad \sqrt{a^2+b^2x^2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{a}{b}\tan\theta \quad and \quad \sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

4- تكامل الدوال الكسرية: Partial functions

إذا كان لدينا التكامل $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ وكانت درجة كثيرة الحدود $p(x)$ أقل من درجة كثيرة الحدود $q(x)$ عندها نلجأ إلى طريقة تفريق الكسور وفق الجدول التالي:

صيغة الكسر بالتفريق	عامل في $q(x)$
$\frac{A}{ax+b}$	$ax+b$
$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$	ax^2+bx+c
$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+.........+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$	$(ax+b)^k$
$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+.......+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$	$(ax^2+bx+c)^k$

تكامل جداء بعض الدوال المثلثية : Products of Trig Functions

أولاً: إذا كان لدينا التكامل: $\int \sin^n x \cos^m x \ dx$

نميز الحالات التالية:

1- إذا كان n فردياً: نترك واحد من sin ونحول الباقي إلى cos من خلال العلاقة $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ وبعدها نفرض $\cos x = u$.

2- إذا كان m فردياً: نترك واحد من cos ونحول الباقي إلى sin من خلال العلاقة $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ وبعدها نفرض $\sin x = u$.

3- إذا كان n و m فردياً بأن واحد نتبع البند 1 أو 2 .

4- إذا كان n و m زوجياً بأن واحد نستخدم صيغة ضعف الزاوية لتحويل التكامل لشكل يمكن مكاملته .

ثانياً: إذا كان لدينا التكامل: $\int \tan^n x \sec^m x \ dx$

نميز الحالات التالية:

1- إذا كان n فردياً: نترك واحد من tan و واحد من sec ونحول الباقي إلى sec من باستخدام العلاقة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ وبعدها نفرض $u = \sec x$.

2- إذا كان m زوجياً: نترك اثنان من $\sec^2 x$ ونحول الباقي إلى $\tan x$ من خلال العلاقة $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ونستخدم التحويل $u = \tan x$.

3- إذا كان n فردياً و m زوجيًا نتبع البند 1 أو 2 .

4- إذا كان n زوجياً و m فردياً لا توجد قاعدة وكل تكامل يكامل بأسلوب مختلف .

****

المراجـع

1. التفاضل والتكامل "الجزء الأول الطبعة الثالثة"، د. رمضان محمد جهيمة، د.أحمد عبد العالي هب الريح، دار الكتاب الجديدة المتحدة .
2. أسس علم الرياضيات التفاضل والتكامل، د. عبد الشافي عبادة، د. حسن مصطفى العويض، د. طلعت عبد الناصر، كلية العلوم (جامعة الملك عبد العزيز – جدة الطبعة الأولى (1421 هـ – 2001م) دار الفكر العربي .
3. 3000 مسألة محلولة في حساب التفاضل والتكامل، سلسلة شوم، ترجمة فايز فوق العادة.
4. إلكترونيات وكهرباء، رياضيات تخصصية 2، المملكة العربية السعودية، المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني، الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج.
5. الحسبان ومبادئ التفاضل، د.احمد محمد عبد المتعال منشورات جامعة السابع من أكتوبر بمصراتة.
6. الرياضيات (1)، د. عمران قوبا، الجامعة الافتراضية السورية.
7. الرياضيات (2)، أ.موفق ألحمصي وآخرون، جامعة دمشق.
8. حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية (الجزء الأول) توماس منشورات جامعة الفاتح.
9. حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية تأليف وليم. هـ. دورفي، كلية مونت هوليوك ترجمة د. محمد علي محمد السمري – دار كاكجروهيل للنشر – جمهورية مصر – القاهرة.
10. Brief Calculus , Michael Sullivan , Chicago State university.
11. Calculus I ,Paul Dawkins , USA , Lamar university.
12. Calculus , Gilbert strange ,Massachusetts Institute of Technology.

توضع هذه الصفحة في خلفية الكتاب

نقدم في هذا الكتاب دراسة مفصلة لعدة مواضيع تهم طالب المعاهد العليا والدراسات الجامعية في أساسيات التفاضل والتكامل وتطبيقاتهما وتشمل تعريف المجموعات وخط الأعداد والمتباينات بجميع حالاتها موضحا على خط الأعداد والعلاقات والدوال بشكل تفصيلي موضحا أغلب أشكال هذه الدوال ودراسة نهاية واتصال الدالة في متغير واحد وكذلك توضيح كيفية معرفة استمرارها كما أوردنا اشتقاق الدوال بجميع صيغها مستخدمين جميع القوانين للاشتقاق ثم وضحنا كيفية الاستفادة من المشتقة على شكل تطبيقات عليها وكذلك قدمنا دراسة شاملة لتكامل جميع أنواع الدوال وتطبيقات التكامل عليها وأخيرا أضفنا ملخص عام على جميع العمليات الرياضية.

تجد في هذا الكتاب:

- مئات الأمثلة المحلولة التي تساعد الطالب في فهم جميع المواضيع سابقة الذكر.
- أسلوب متدرج ينمي قدرة الطالب ويبني ثقته بنفسه ويوضح كيفية التعامل مع المسائل الرياضية وإيجاد الحلول لها.
- يشمل الكتاب العديد من الأشكال وبيانات الدوال التي لا يستطيع الطالب تصور أشكالها.

وفي نهاية كل فصل أوردنا (عددا كبيرا من الأمثلة المحلولة) وكذلك ملخص باللغة الإنجليزية.