الفصل الأول

مقدمة

يحتوي هذا الفصل على:

1.1 ما هو التحليل العددي؟

للوهلة الأولى وعندما نسمع كلمة «التحليل العددي» ، نعتقد بأنه ذلك المجال الذي نلجأ إليه عندما نعجز عن حل المسألة الفيزيائية أو الهندسية، أو أي مسألة بمجال تطبيقي، حلا رياضياً أو تحليليا. ولكن الواقع أن مجال التحليل العددي هو أكبر وأوسع من كل ذلك فالتحليل العددي ((**يشمل تطوير وتقييم الطرق المستخدمة لحساب نتائج عددية ما من معلومات عددية معطاة**))، وهذا الجانب من العمليات هو ما يسمى بمعالجة المعلومات.

والتطوير يعني وجود طرق سابقة والمطلوب أن يتم تطويرها حسب ما يواجهنا من تقدم علمي وحسب ما يواجهنا من مشاكل في حياتنا العملية. والتقنية التي شهدها ومازال يشهدها مجال الحاسوب خير مثال نعطيه هنا. أما التقييم فنعني به مدى دقة الطريقة العددية المستعملة وكفاءتها من حيث سرعتها ومتطلباتها.

وتعريف التحليل العددي على النحو الذي سقناه يوضح بجلاء أن العلوم والتقنية التي نجني ثمارها اليوم ما هي إلاّ تراكمات عبر القرون والسنين لبني البشر في كل بقاع الكرة الأرضية.

ولتوضيح التعريف السابق ببعض الشيء نفترض أن أحدهم هو أستاذ بمدرسة ثانوية لفصل به ثلاثون تلميذاً، وأراد أن يحسب متوسط الفصل والدرجات القصوى (كبرى وصغرى) لتلاميذه ؛ عندئذ تكون المعلومات العددية المعطاة هي عدد الطلاب ودرجاتهم في الفترات المختلفة ودرجات الامتحانات القصيرة والواجبات البيتية المسندة لهم ودرجات الامتحان النهائي؛ والنتائج المراد الحصول عليها هي: متوسط

درجات التلاميذ في الفصل والدرجات القصوى وتحديد التراتيب الأولى بين التلاميذ. وفي ذلكم يقوم الأستاذ باستعمال طريقة معينة للحساب وربما لزم الأمر استعمال أكثر من طريقة ومن ثم اختيار الطريقة الأفضل والأدق من بين كل الطرق المتاحة.

هذا وتسمى المعلومات المعطاة بمعلومات الإدخال (عدد الطلاب والدرجات بالمثال السابق)، بينما تسمى النتائج المطلوبة بمعلومات الإخراج (المتوسط والتراتيب بالمثال السابق). أما الطريقة التي تتم بها الحسابات فتسمى بنظام الحساب (أو العد)؛ وباللغة الإنجليزية نظام الحساب هو (Algorithm) وهي كلمة مستخرجة من اسم العالم العربي الإسلامي "الخوارزمي". ولقد وردت هذه الكلمة في مخطوطات غربية قديمة مع أوائل عصر النهضة بأوروبا وفي مراسلات بين علماء تلك الحقبة.

وهكذا تمر العملية الحسابية أو العددية بثلاث مراحل نوضحها كما بالشكل (1.1).

الشكل (1.1) المراحل الثلاثة التي تشملها معالجة المعلومات

والمثال الموالي يوضح المراحل الثلاثة التي تمر بها معالجة المعلومات:

مثال (1.1)

لو أردنا إيجاد حاصل ضرب العددين 15 و 36 فإننا نقوم بما يلي:

$$\begin{array}{lcl} \text{معلومات الإدخال} \left\{ \begin{array}{r} 15 \\ \times 36 \end{array} \right. & & \\ \hline & \begin{array}{r} 90 \\ 45 \end{array} & \text{نظام الحساب} \\ \hline \text{معلومات الإخراج} \{ & 540 & \end{array}$$

معلومات الإدخال هنا هي العددان 15 و 36، ومعلومات الإخراج هي العدد 540؛ والعملية التي قمنا بها من ضرب هي نظام الحساب.

واختيار نظام الحساب مهم للغاية، وعلينا أن نقوم دائما باختيار الأحسن عند معالجة مسألة ما.

وبالأحسن نعني أن نختار الأسرع والأدق. والتركيز على الدقة بدوره ينبهنا إلى وجود الأخطاء.

ومصادر الأخطاء عديدة وتتلخص في الأخطاء الناتجة عن:

(أ) أخطاء الإدخال.

(ب) أخطاء نظام الحساب.

(ج) أخطاء الإخراج.

وأخطاء الإدخال يمكن أن تنتج عن عامل شخصي أو إنساني حيث يتم التعامل

مع البيانات بإهمال أو يحدث خطأ غير مقصود عند نقل البيانات أو تخزينها، وربما تنتج أيضا عن عامل أو سبب آلي كأن يكون جهاز القراءة غير دقيق كالأجهزة المستخدمة في مجالات العلوم التطبيقية، فهي مهما كانت دقيقة لن تكون ذات دقة كافية. فعندما يعطي الجهاز قراءة لكمية ما مثل الكثافة أو الكتلة أو التردد.... إلخ فلا بد وأن تكون هناك نسبة خطأ في تلك القراءة.

أمّا عن الأخطاء في نظام الحساب فإننا نعطي المثال التالي لنوضح أهمية اختيار نظام الحساب، وهو مثال على سبيل الذكر لا الحصر.

مثال (2.1):

المطلوب إيجاد أصغر جذري المعادلة $x^2 - 20\,x + 1 = 0$.

الحل:

حيث أن الجذرين هما $10 \pm \sqrt{99}$؛ وحيث نصل إلى ذلك بسهولة باستعمال القانون العام لإيجاد جذور المعادلة التربيعية في x .

الآن، لو استعملنا ثلاثة أرقام لكل عدد في حساباتنا فإن أصغر الجذرين هو:

$$10 - \sqrt{99} = 10.0 - 09.9 = 0.10$$

ولكن لو استعملنا طريقة أخرى، غير الطريقة المباشرة السابقة، أي أنه لو استخدمنا نظام حساب ثان وذلك بالضرب في المرافق فإن:

$$10-\sqrt{99}=\frac{\left(10+\sqrt{99}\right)\left(10-\sqrt{99}\right)}{\left(10+\sqrt{99}\right)}=\frac{1}{\left(10+\sqrt{99}\right)}=\frac{1}{19.9}\cong 0.05$$

ومن النتيجتين السابقتين نرى الفارق الكبير الذي أنتجه استعمال نظامين للحساب (الأول أعطى ضعف ما أعطاه الثاني). أي أن أنظمة مختلفة للحساب تعطي نتائج مختلفة.

من هذا المنطلق كان لزاما علينا أن نستخدم نظريات مدعمة لحساباتنا حتى تكون نتائجنا صحيحة.و هذا هو بالضبط ما يقوم به التحليل العددي.

وفي جميع الحالات يجب أن نتذكر ما يلي:

أولاً: لا يمكن بأي حال من الأحوال أن يمثل نموذج رياضي حالة طبيعية مركبة تماماً؛ أي أن النموذج الرياضي الذي يمثل الحالة الطبيعية – أو الفيزيائية- ما هو إلاّ تقريب لتلك الحالة.

ثانياً: لا توجد طريقة عددية تخلو تماماً من المشاكل في كل الحالات.

ثالثاً: لا توجد طريقة عددية تخلو تماماً من الأخطاء.

رابعاً: لا توجد طريقة عددية يكون فيها الخطأ أقل ما يمكن في كل الحالات.

ننوه هنا بأن الحسابات تتم باستعمال الحاسوب ولذلك تستخدم لغات مثل سي (C) وفورتران وباسكال وبيسك و ...... إلخ. وعند كتابة البرامج والحصول على نتائج يجب التحقق من صحتها.

2.1 الأخطاء ومسبباتها

في المعتاد تقع الأخطاء بالحواسيب؛ غير أن هذه تكون ناتجة في العادة عن المستعمل. ولكي يتم التحقق من صحة النتائج وعدم وجود أخطاء يفضل أن تجري عملية حسابية يدوية و لو لمرة واحدة. إضافة إلى ما تقدم، غالباً ما تتخلل الأخطاء الحسابات العددية. وحتى نتمكن من فهم الأخطاء ووقوعها، علينا أن نعلم مصدرها وانتشارها ومقدارها (أو قيمتها).

وقبل أن نخوض في ذلك دعنا نعطي بعض التعريفات البسيطة:

الخطأ المطلق

ويعرف على أنه:

الخطأ في متغير a= القيمة المحسوبة (A) – القيمة الحقيقية (a) = A−a

(ونقصد بذلك الفرق بين القيمة المحسوبة A والقيمة الفعلية(أو المتوقعة) للمتغير a).

الخطأ النسبي = الخطأ المطلق ÷ القيمة الحقيقية = $\frac{A-a}{a}$

الخطأ المئوي = الخطأ النسبي × 100 = $\left(\frac{A-a}{a}\right)\times 100$

مثال (3.1)

إذا كانت القيمة الحقيقية لمتغير a هي 5 وكانت القيمة المحسوبة هي 5.1 فأحسب الأخطاء المختلفة.

الحل:

لو رمزنا للخطأ المطلق في a بالرمز ε_a فإن :

$$\varepsilon_a = A - a = 5.1 - 5 = 0.1$$

ويكون الخطأ النسبي ε_{rel} هو:

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\varepsilon_a}{a} = \frac{0.1}{5} = 0.02$$

والخطأ المئوي ε_{per} هو :

$$\varepsilon_{per} = 0.02 \times 100 = 2$$

1.2.1 مسببات الأخطاء الخطيرة بالحاسوب

عند استخدام الدقة المفردة نعتقد دائماً أننا نحصل على دقة في عدد معين من أرقام العدد (سبعة أو ثمانية)؛ ولكن في الحقيقية لا تتجاوز الدقة أرقام بسيطة من العدد وخصوصاً عندما نتحدث عن النتيجة النهائية. مثلاً لو كانت الإجابة المرتقبة هي 1.0 فلربما حصلنا على النتيجة 0.9993526 ويكون الخطأ عندئذ هو 0.0006474 وبذلك فإن الثلاثة أرقام الأولى هي الدقيقة ونقول بأن لدينا من الدقة ثلاثة أرقام أو أن: **ثلاثة أرقام هي ذات معنى.**

والمصدر الحقيقي للخطأ هو التقريب. يبد أنه من الأخطاءْ الممكنة (وهي أخطاء جدية أو خطيرة) بالحواسيب ما يلي:

1. خطأ التقريب الناتج عن جمع أو طرح عدد كبير وعدد صغير.

2. خطأ التقريب الناتج عن طرح عدديين متقاربين.

3. فيضان الأعداد أو انسيابها السفلي، أي أن يكون العدد الناتج عن الحسابات أصغر من الحد المسموح به بالحاسوب المستخدم، هنا يتم تجاهل مثل هذه الأعداد في كثير من الحالات ومساواتها بالصفر. نفس الشيء يحصل للانسياب الفوقى أو للأعداد الكبيرة جداً، أي تلك التي تفوق المدى المسموح به بالحاسوب.

4. القسمة على عدد صغير جداً.

5. التقريب أثناء عمليتي الضرب والقسمة البسيطتين، فمثلاً لو استخدمنا حواسيب تعمل بأربعة أرقام فقط للحصول على ناتج العملية:

$$3062 \times 5591 = 17119642$$

فإن الناتج يكتب على الصورة 0.1711×10^8، مثل هذه الحواسيب تستخدم في المفاعلات النووية وتجارب الفضاء.

6. الخطأ الكمي وهذا له علاقة بالتعبير عن الأعداد بالصيغة الثنائية.

7. خطأ الإخراج، فمثلاً لو استعملنا الشفرة F8.3 لإخراج العدد 0.01563 يكون الناتج المطبوع هو 0.016 أو 0.015 . وهذا بالطبع يعتمد على برمجة الحاسوب وما إذا قد برمج بحيث يسمح بالتقريب الذي درسناه في المراحل الأولى من تعليمنا.

2.2.1 انتشار الخطأ

لتتبع الخطأ وإيجاد الخطأ الكلي في النتيجة النهائية (أو في الإجابة النهائية) نقوم بدراسة انتشار الخطأ.

بداية دعونا نتعرض للموضوع من خلال دراسة العمليات البسيطة المختلفة من جمع وطرح وضرب وقسمة ثم نتطرق للموضوع في أنحاء متفرقة من هذا الكتاب كلما تقدمنا نحو دراسة عمليات أخرى مركبة.

ليكن لدينا العددان a و b وهما يمثلان القيمتين الصحيحتين (أو الفعليتين) لمتغيرين a و b في برنامجنا الحسابي، ولو افترضنا أن الخطأ المطلق فيهما هو ε_a و ε_b على التوالي فإن الخطأ ينتشر خلال العمليات الأربع كما يلي:

- الجمع: يكون الخطأ ε_{a+b} هو

$$\varepsilon_{a+b} = \varepsilon_a + \varepsilon_b \qquad \text{...... (1.1)}$$

- الطرح: يكون الخطأ ε_{a-b} هو

$$\varepsilon_{a-b} = \varepsilon_a - \varepsilon_b \qquad \text{...... (1.2)}$$

- الضرب: يكون الخطأ ε_{ab} هو

$$\varepsilon_{ab} = a\varepsilon_b + b\varepsilon_a \qquad \text{...... (1.3)}$$

- القسمة: يكون الخطأ $\varepsilon_{a/b}$ هو

$$\varepsilon_{a/b} = \frac{\varepsilon_a}{b} - a\frac{\varepsilon_b}{b^2} \qquad \ldots\ldots (1.4)$$

والصيغ المعطاة أعلاه نوضحها كما يلي:

حيث أن : $\varepsilon_a = A - a$ و $\varepsilon_b = B - b$

فإنه في حالة الجمع والطرح نرى أن :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{a\pm b} &= (A \pm B) - (a \pm b)\\ &= (A - a) \pm (B - b)\\ &= \varepsilon_a \pm \varepsilon_b\end{aligned}$$

أما في حالة الضرب فإن :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ab} &= AB - ab\\ &= (a + \varepsilon_a)(b + \varepsilon_b) - ab\\ &= ab + (a\varepsilon_b + b\varepsilon_a) + \varepsilon_a\varepsilon_b - ab\\ &= a\varepsilon_b + b\varepsilon_a\end{aligned}$$

وحيث أهملنا الحد $\varepsilon_a\varepsilon_b$ لكونه حداً من الرتبة الثانية وهو صغير.

بالنسبة لعملية القسمة نرى أن :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{a/b} &= \frac{A}{B} - \frac{a}{b} = \frac{Ab - aB}{b(B)}\\ &= \frac{(a + \varepsilon_a)b - a(b + \varepsilon_b)}{b(b + \varepsilon_b)}\\ &= \frac{ab + b\varepsilon_a + -ab + a\varepsilon_b}{b^2}\end{aligned}$$

وحيث أهملنا ε_b في المقام لصغره مقارنة بـ b عليه فإن :

$$\varepsilon_{a/b} = \frac{b\varepsilon_a - a\varepsilon_b}{b^2} = \frac{\varepsilon_a}{b} - \frac{a\varepsilon_b}{b^2}$$

3.1 متسلسلة تايلور

تمثل متسلسلة تايلور حجر الأساس(أو حجر الزاوية) للطرق العددية، فهي التي توجد الأساليب العددية وتكونها كما تقوم بتقدير الخطأ.

لو سلطنا اهتمامنا على نقطة x قرب a فإنه من المعلوم بأن متسلسلة تايلور للدالة f عند x هي :

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\,f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a) + \dots \qquad \dots\dots (1.5)$$

وبحيث تكون الدالة f مستمرة وقابلة للتفاضل على فترة ما تحوى النقطة a. ولو كان بالإمكان الحصول على المفكوك (1.5) المذكور أعلاه فإنه يقال بأن f تحليلية بالمنطقة قرب $x = a$. وإذا حدث وأن كانت العلاقة (1.5) محققة لكل x بحيث $|x-a| = R$ فإن R تدعى بنصف قطر التقارب.

وتجدر الإشارة هنا إلى أنه لو كانت $a = 0$ فإن المفكوك الناتج عندئذ يسمى بمفكوك، أو متسلسلة ماكلورين أي أن متسلسلة ماكلورين للدالة f هي:

$$f(x) = f(0) + \frac{xf'(0)}{1!} + \frac{x^2\,f''(0)}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\,f^{(n)}(a) + \dots \qquad \dots\dots (1.6)$$

الآن لو أخذنا عددا كافياً من الحدود من (1.5) أو (1.6) [حسب الحالة

المدروسة] فإنه يمكن أن نجد قيمة تقريبية $f(b)$ للدالة f عند النقطة b؛ وحيث b هي نقطة داخل دائرة التقارب.

والسؤال الذي يطرح نفسه هنا هو :

كيف يتم بتر (أو قطع) متسلسلة تايلور؟

للإجابة! نرى أنه إذا أهملنا حدوداً من الرتبة $(x-a)^n$ وأعلى رتبة فإن الخطأ يكون من الرتبة $(x-a)^n$ ونكتبه: من الرتبة $0(x-a)^n$. وانطلاقا مما تقدم نستطيع كتابة $f(x)$ على الصورة :

$$f(x)= f(a)+(x-a)\,f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}\,f''(a)+.... + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n)}(a)+0\left(x-a\right)^n \qquad ......(1.7)$$

ونلاحظ من (1.7) أن: $0\left(x-a\right)^{n+1} < 0\left(x-a\right)^n$

مثال (4.1)

لو أن $f(x)=\sin x$ وأخذنا في الاعتبار متسلسلة ماكلورين فإن $f'(x)=\cos x$ و $f''(x) = \sin x$ و $f'''(x)=-\cos x$ و .....إلخ

كما أن :

$$\sin x=\sin(0)+x\cos(0)+\frac{x^2}{2!}\sin(0)-\frac{x^3}{3!}\cos(0)+....$$
$$= x-\frac{x^3}{3!}+.....= x-\frac{x^3}{3!}+0\left(x^4\right)= x-\frac{x^3}{3!}+0\left(x^5\right)$$

(وذلك لأن الحد المحتوى على x^4 يساوي الصفر)

مثال (5.1)

احسب $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ حتى $0\left(\frac{\pi}{6}\right)^5$

الحل:

من المثال السابق نرى أن :

$$\sin(0.1) = \left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\left(\pi/6\right)^3}{3!} + 0\left(\pi/6\right)^5$$
$$= 0.4996752 + 0\left(\pi/6\right)^5 = 0.4996752$$

(قارن بالقيمة الفعلية لـ $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$)

نلاحظ أنه عند حساب المتسلسلات للدوال المثلثية يتم التعويض عن x بالزوايا (النقية (rad)؛ لذلك كل ما يتعلق بها من حسابات ببقية مواضيع التحليل العددي يجب الاعتداد بقيم الزوايا محسوبة بالنقية (rad) أي بالزوايا نصف قطرية؛ فعلى سبيل المثال الزاوية هنا هي $0.5236 = \left(\frac{\pi}{6}\right)$ وليست 30^o .

مثال (6.1)

احسب $e^{0.5}$ إلى $0\left(0.5\right)^3$

الحل:

حيث أن $f(x) = e^x$ وأن $f^{(n)}(x) = e^x$ لكل $n = 1,2,......$ وباستخدام متسلسلة تايلور حول $a = 0$ نرى أن:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+0(x)^{3}$$

وبذلك فإن :

$$e^{0.5}=1+0.5+\frac{(0.5)^{2}}{2!}+0(0.5)^{3}$$

(قارن بقيمة $e^{0.5}$ الفعلية)

مثال (7.1)

احسب قيمة $\frac{1}{1-x}$ حتى $0(x^{4})$ وذلك عندما $x=0.2$.

الحل:

$f(x)=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$ بذلك فإن $f'(x)=+(1-x)^{-2}$ و $f''(x)=2(1-x)^{-3}$ و $f'''(x)=+6(1-x)^{-4}$ وبوضع $x=0$ نجد أن:

$f(0)=1$ و $f'(0)=+1$ و $f''(0)=2$ و $f'''(0)=+6$ وبالتالي فإن:

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=f(0)+xf'(0)+\frac{x^{2}}{2!}f''(0)+\frac{x^{3}}{3!}f'''(0)+0(x^{4})$$

$$=1+x+\frac{x^{2}}{2}\cdot 2+\frac{x^{3}}{6}\cdot 6+0x^{4}=1+x+x^{2}+x^{3}+0x^{4}$$

ومنها نرى أن:

$$f(0.2)=1+(0.2)+(0.2)^{2}+(0.3)^{3}=1.248$$

(قارن هذه النتيجة بالعدد $\frac{1}{1-0.2}=1.25$)

الآن لكي نلم بالأخطاء التي ترد عند القيام بأي حسابات وكذلك كي نلم بعمق بتقدير هذه الأخطاء لابد لنا من أن نلقي نظرة ولو سريعة على مبرهنة تايلور.

1.3.1 مبرهنة تايلور وتقدير الخطأ

لتكن الدالة $f(x)$ ومشتقاتها الأولى مستمرة في الفترة بين a و x، عندئذ تعطي $f(x)$ بالعلاقة:

$$f(x)= f(a)+ f'(a)(x-a)+\ldots\ldots+ f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+R_{n+1} \qquad \ldots\ldots (1.8)$$

وحيث يعطى R_{n+1} بالعلاقة :

$$R_{n+1} = f^{(n+1)}(\zeta)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \ldots\ldots (1.9)$$

و ζ هو عدد يقع ما بين a و x .

البرهان:

من النظرية الأساسية للتكامل؛نحن نعلم بأن:

$$\int_a^x f'(t) \quad dt = f(x)- f(a) \qquad \ldots\ldots (1.10)$$

بالتكامل بالتجزيء نحصل على :

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(t)\, dt &= xf'(x)-af'(a)-\int_a^x f''(t)\, dt \\ &= x[f'(x)- f'(a)]+(x-a)\, f'(a)-\int_a^x t\ \ f''(t)\, dt \qquad \ldots\ldots (1.11)\\ &= (x-x_o)\, f'(a)+\int_a^x (x-t)\ \ f''(t)\, dt\end{aligned}$$

وبتكرار عملية التكامل بالتجزيء n من المرات نصل إلى النتيجة:

$$f(x)= f(a)+(x-a)\,f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}\,f''(a)+.... + \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a)+\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad ......(1.12)$$

نضع:

$$R_{n+1}=\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad ......(1.13)$$

وهي الصيغة التكاملية للمتبقي والذي يمثل الخطأ في بتر المتسلسلة.

الآن من مبرهنة القيمة المتوسطة نرى أن :

$$\int_a^x F(t)g(t)\,dt = F(\zeta)\int_a^x g(t)\,dt \qquad ......(1.14)$$

وحيث $g(t)\geq 0$ و $\zeta\in[a,x]$. نضع $F(t)= f^{(n+1)}(t)$ و $g(t)=\frac{(x-t)^n}{n!}$ في R_{n+1} لنحصل من المبرهنة السابقة على :

$$R_{n+1}=\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(\zeta)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = f^{(n+1)}(\zeta)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad ......(1.15)$$

وبذلك نكون قد وصلنا إلى ما تطلبته المبرهنة من نتائج.

وتسمى مبرهنة تايلور أيضا بمبرهنة المتبقي؛ والمتبقي هو الحد R_{n+1}. من المبرهنة السابقة. نلاحظ أن الخطأ عند بتر المتسلسلة عند n من الحدود هو $|R_{n+1}|$. وهذا يمكن

تقديره كما يلي:

$$|R_{n+1}| \le \left|\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}\right|_{\max} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \ldots\ldots (1.16)$$

ويمثل الحد $\left|\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}\right|_{\max}$ أكبر قيمة للمشتقة $(n+1)$ للدالة في الفترة من a إلى x .

ولتوضيح الخدمة التي تقدمها مبرهنة تايلور لتقدير الخطأ نعود فنتناول الأمثلة الثلاثة السابقة وندرسها في هذا السياق.

مثال (8.1)

قم بتقدير الخطأ f لكل من :

(أ) $\sin x$ محسوبة حتى $0(x)^4$ عند $x = 0.1$.

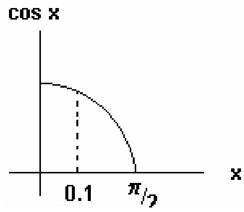
(ب) e^x محسوبة حتى $0(x)^3$ عند $x = 0.5$.

(ج) $\frac{1}{1-x}$ محسوبة حتى $0(x)^4$ عند $x = 0.2$.

الحل:

(أ) هنا $n+1=5$ و $f(x)=\sin x$ كما أن $f^{(5)}(x)=\cos x$ وأكبر قيمة للمشتقة في الفترة $\left[0, \pi/6\right]$ كما هو واضح من الشكل (2.1) هي $\cos 0 = 1$ بذلك فإن:

$$|R_5| \le \frac{\left(\pi/6\right)^5}{5!} = 0.000328$$



الشكل (2.1) المثال (8.1) أ

ولو حسبنا الخطأ الحقيقي أو الفعلي والذي يساوي

$$\varepsilon = \sin\left(\pi/6\right) - 0.4996752 = 0.000325$$

وهو خطأ مازال في حدود $|R_5|$ كما أن حساب $\sin x$ حتى $0(x)^5$ أعطى نتيجة جيدة مقارنة بما حصلنا عليه من تقدير للخطأ..نلاحظ هنا أننا حسبنا الخطأ من الرتبة الخامسة رغم أن المطلوب كان هو الخطأ من الرتبة الرابعة و السبب في ذلك أن المشتقة الرابعة عند 0 تساوي الصفر.

(ب) هنا $n+1=3$ ولكن $\frac{d^3 e^x}{dx^3} = e^x$ وحيث أن الدالة e^x دالة تزايدية فإن $\left|\frac{d^3 e^x}{dx^3}\right|_{\max} = e^{0.5}$ وبذلك فإن:

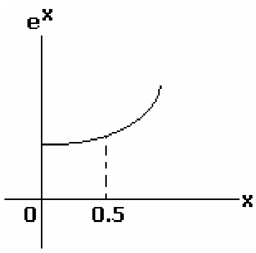
$$|R_3| = \frac{(0.5)^3}{3!} e^{0.5} = 0.03435$$

أي أن الخطأ في $e^{0.5}$ حتى $0(0.5)^3$ لا يتجاوز 0.03435

الآن لو حسبنا الخطأ الفعلي لو جدنا أن :

$$\varepsilon = e^{0.5} - 1.625 = 0.02372$$

ومقارنة بتقدير الخطأ الناتج نرى أن ε لم يتجاوز $|R_3|$ كما أن ثلاثة حدود من e^x أنتجت قيمة جيدة إلى حد ما. أنظر الشكل (3.1)



الشكل (3.1) المثال (8.1) ب

(ج) هنا $n+1=4$ كما نرى أن $f^{(4)}(x)=24(1-x)^{-5}$ ؛ كما أنه من الواضح أن $f^{(4)}(x)\big|_{\max}=24(1-0.2)^{-5}=\dfrac{24}{(0.8)^5}=73.24$ في الفترة $[0,0.2]$ وبذلك فإن:

$$|R_4|\le\frac{(0.2)^4}{4!}(73.24)=0.004883$$

ولكن الخطأ الحقيقي هنا هو:

$$\varepsilon=\frac{1}{1-0.2}-1.248=0.002$$

ونرى انطباق نفس الملاحظات السابقة على هذا المثال وهو أن $\varepsilon<0.00488$ كما أن أخذ أربعة حدود من المتسلسلة قاد إلى نتيجة جيدة.

وهكذا نرى مما تقدم أنه لعدة حالات عالجناها وجدنا أن تقدير الخطأ باستخدام

رتب دينا أعطى قيم ليست ببعيدة من قيمة الخطأ الحقيقي؛ ولكي نحصل على تقدير أفضل للخطأ علينا أن نرقى لرتب أعلى في الخطأ، أي أن نقوم ببتر المتسلسلة بعد العديد من الحدود.

4.1 برامج وبرمجيات

إن الحسابات العددية كما لاحظنا من بعض الأمثلة البسيطة تحتاج إلى جهد كبير وللوصول إلى الدقة المطلوبة لن تكون الحسابات اليدوية كافية، عليه نلجأ إلى القيام بهذه الحسابات الكثيرة والمركبة ورسم المنحنيات والأشكال ذات العلاقة باستعمال الحواسيب وهنا إما:

1. أن نلجأ إلى برمجيات جاهزة مثل EXCELL و MATLAB أو MATCAD حيث نزود البرنامج المعد سلفاً ببعض الأعداد لنحصل على ما نريد،ولكن هذا لا يكون مفيداً دائماً حيث تتطلب المسألة أكثر مما يقدمه البرنامج أو البرمجية.
2. أن نستخدم ما هو موجود من برامج مع استخدام مهارتنا الشخصية في كتابة البرمجيات والبرامج غير المتوفرة باستعمال لغات متقدمة مثل فورتران 90 ولغة السي بجميع أشكالها.

في هذا الكتاب سوف نعتمد معظم ما هو موجود من برمجيات وسوف نسوق البرامج بمختلف أجزاء الكتاب بعدة لغات حاسوبية من لغة فورتران 90 التي تعمل تحت ويندوز 95 و 98 ولغة السي ولغة الباسكال ولغة السي المرئية و ...إلخ. ونود

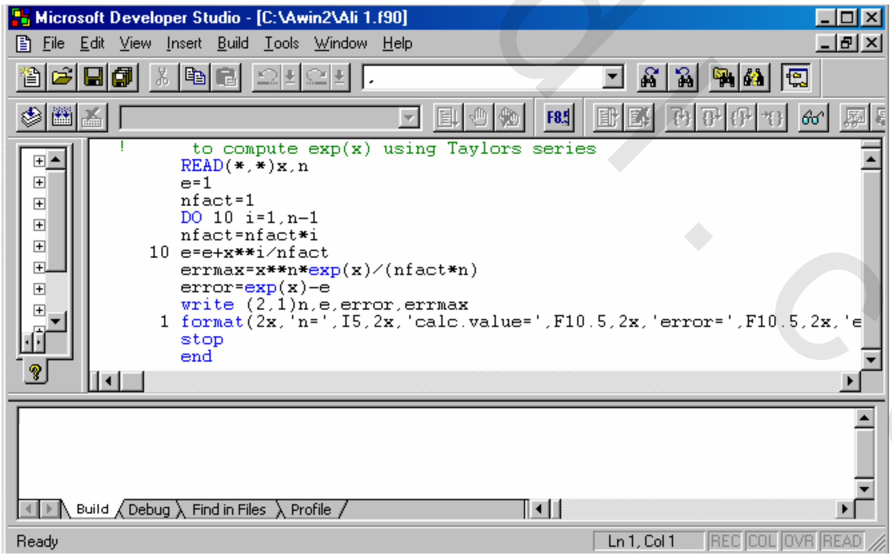
بذلك أن نؤكد على أن الحواسيب ولغات البرمجة ما هي إلا أدوات مساعدة للوصول إلى النتائج المطلوبة في حساباتنا. بيد أنه يجب ملاحظة أن اللغة الرئيسية في هذا الكتاب هي فورتران 90.

مثال (9.1)

أكتب برنامجا يحسب $e^{0.5}$ حتى $0(0.5)^3$ ويقوم أيضا بتقدير الخطأ ومقارنته مع الخطأ الواقعي.

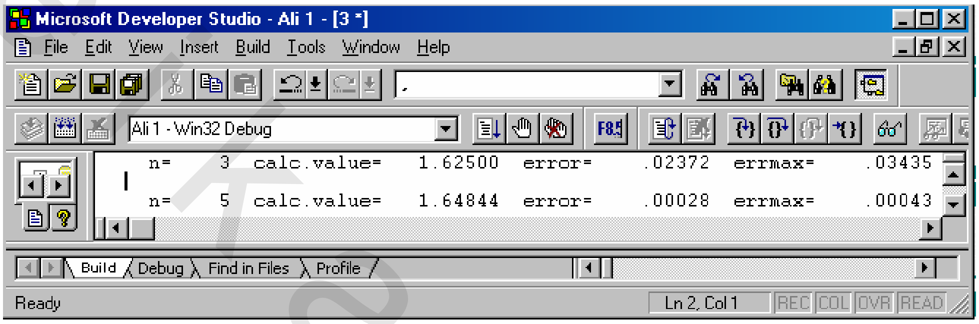
الحل:

استنادا إلى حل المثال (8.1) الفقرة (ب) نقوم بكتابة البرنامج بلغة فورتران (90) وحيث نورد النتائج بالشكل (4.1) والجدول (1.1).



الشكل (4.1) برنامج بلغة الفورتران يحسب e^x حتى $0\left(x^n\right)$ – المثال (9.1)

ومن هذه النتائج نرى مدى الخدمة والدقة التي يقدمها لنا الحاسوب وننوه هنا أن البرنامج عام لهذه الدالة أي أنه نستطيع تغيير رتبة الخطأ وقيمة x أنظر الجدول (1.1) الذي يعطي النتائج لنفس الدالة ولكن بـ $n = 5$ (الصف الثاني).



الجدول (1.1) نتائج برنامج المثال (9.1) لقيم $n = 3,5$ على التوالي.

تمارين (1)

1. أضرب أمثلة عددية من عندك تشرح فيها المراحل المختلفة التي يتم من خلالها الحصول على نتائج عددية ما.

2. متغير a قيمته الحقيقية هي 5 وقيمته المحسوبة هي 4.95 احسب الأخطاء المختلفة.

3. اكتب نبذة مفصلة توضح فيها مسببات الأخطاء الخطيرة التي يمكن أن تحصل عند استخدام الحواسيب.

4. إذا كانت x و y تمثلان أطوالا قيست وكانتا تقريبا $x \cong 3.32$ و $y \cong 5.39$ احسب تقريبا القيم $x+y$ ، $x+0.1y$ و $x+0.01y$ وذلك حتى ثلاثة أرقام عشرية. (ما مصدر الأخطاء في هذه المسألة واحسب قيمتها).

5. لتكن $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ هي تقريبات للكميات $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ وإذا كان ε هو أكبر خطأ ممكن لكل كمية، اثبت أن أكبر خطأ ممكن في المجموع $\sum_{i=1}^{n} x_i$ هو $n\varepsilon$.

6. كيف يتم بتر أو قطع متسلسلة تايلور؟

7. لما يسمى الحد R_{n+1} بالمتبقي وما الفائدة التي نجنيها من هذا الحد؟

8. أعد حل المثال (8.1) ب ولكن بالحساب حتى $0(0.5)^5$ ثم قدر الخطأ الناتج عندئذ وقارن مع نتائج المثال (9.1).

9. أكتب متسلسلة تايلور لما يلي:

(أ) e^{-x} حول $x=0$.

(ب) $\cosh x$ حول $x=0$.

(ج) $\sinh x$ حول $x=0$.

(د) $\cos x$ حول $x=0$.

(ه) $\cos x$ حول $x=\pi/2$.

(و) $\sin x$ حول $x=\pi/2$.

10. أكتب $e^{-0.2}$ حتى $0(0.2)^3$ و $0(0.2)^5$ وقدر الخطأ الناتج في كل حالة. قارن بين النتائج التي تحصلت عليها وناقش.

11. اكتب $\cosh(0.1)$ حتى $0(0.1)^4$. قدر الخطأ الناتج عن ذلك التقريب.

12. اكتب $\ln(1.1)$ حتى $0(0.1)^4$ وذلك بكتابة متسلسلة تايلور للدالة $\ln x$ حول $x=1$ ثم بتر المتسلسلة حسب ما هو مطلوب. هل يمكنك تقدير الخطأ الناتج عن هذا التقريب.