الفصل العاشر

مواضيع متنوعة

يحتوي هذا الفصل على:

- 1.10 طريقة العناصر المحدودة
- 2.10 حول تربيعات جاوس
- 3.10 بعض التوزيعات الإحصائية

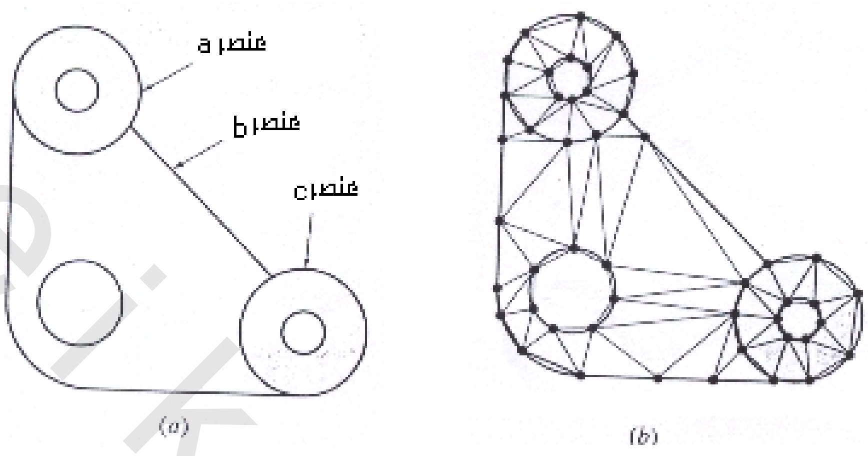
1.10 طريقة العناصر المحدودة (تقديم) Finite Element Method

لقد تعرضنا في الفصلين الأخيرين إلى طريقة الفروق المحدودة في حل مسائل القيم الذاتية وهي صالحة ودقيقة إذا ما كانت هندسة المسألة بسيطة [مستطيل مثلاً]؛ غير أنه في حالة كون النطاق تحت الدراسة مركبا أو معقداً فإننا نستخدم طريقة العناصر المحدودة.

في إيجاز كبير تتلخص طريقة الفروق المحدودة في كتابة المعادلة التفاضلية للمسألة عند نقطة معينة بعد تحويل النطاق إلى شبكة من النقاط وبالتالي تمثيلها بمعادلة فرقية وإيجاد الحل. ولكن، وكما أسلفنا، لهذه الطريقة عيوبها والتي تتمثل في ضرورة وجود تجانس بالمسألة وكذلك افتراض هندسة بسيطة للنطاق.

ولكن لو كانت هندسة النطاق غير منتظمة أو أن الشروط الحدية ليست تلك المعتادة أو أن الأوساط غير متجانسة [مادة الصفيحة مصنوعة من معدنين مختلفين مثلاً]، فإننا نستخدم طريقة العناصر المحدودة حيث يتم تقسيم النطاق إلى مناطق ذات أشكال سهلة- أي تقسيم النطاق إلى "عناصر"؛ ثم نوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية لكل من هذه العناصر. كما يتم ربط هذه العناصر ببعضها البعض لإيجاد الحل الكلي. أي أن المعادلة التفاضلية تحقق بشكل قطعي (أي قطعة قطعة).

وهكذا فإننا في مثل هذه الحالات نقوم باستخدام العناصر بدلا من الشبكة المستطيلية؛ وهذا يعطي تقريباً أفضل لتلك المنظومات التي تملك أشكالاً غير منتظمة. [أنظر الشكل (1.10)].

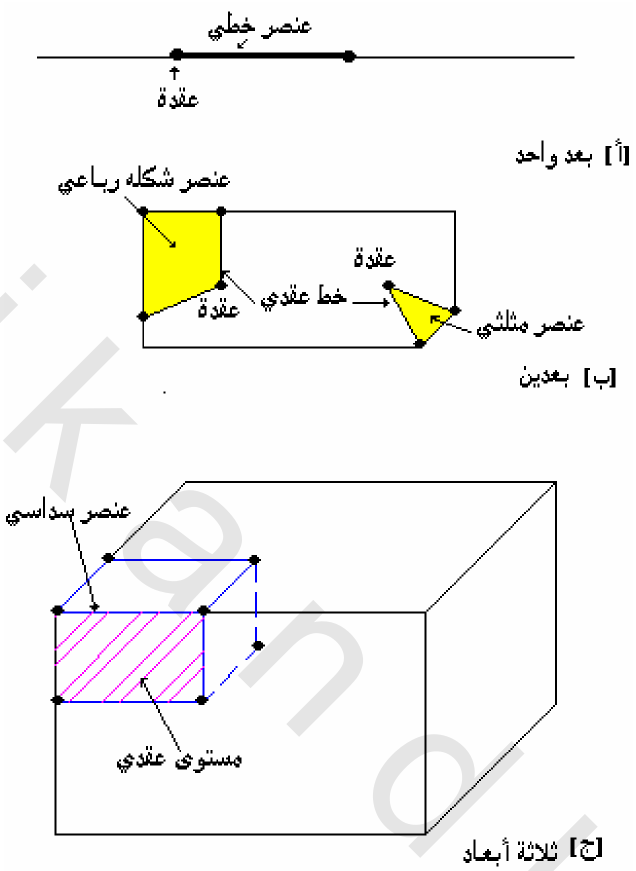


الشكل (1.10) توضيح لطريقة العناصر المحدودة

والخطوات التي تمر بها العملية المذكورة آنفاً هي كما يلي:

1) الفصل (Discretization)

في هذه الخطوة يتم تقسيم نطاق الحل إلى عناصر محدودة وحيث تسمى نقاط تقاطع المستقيمات، التي تكون أضلاع العناصر، بالعقد nodes، كما تسمى الخطوط بالخطوط العقدية (nodal lines) أو بالمستويات. في الشكل (2.10) نوضح العقد والخطوط العقدية في بعد واحد وفي بعدين وفي ثلاثة أبعاد لعدة نطاقات:



الشكل (2.10) العقد والخطوط العقدية في عدة أبعاد

2) معادلات العنصر Element Equations

نكتب معادلات الحل لكل عنصر وذلك كما يلي:

أ) نقوم باختيار دالة مناسبة بمعاملات لاستخدامها كحل تقريبي.

ب) نحسب هذه المعاملات بحيث تكون الدالة ملائمة للحل.

وفي المعتاد يتم استخدام حدوديات من درجة معينة. مثلاً في بعد واحد لو استخدمنا الدالة الملائمة:

$$y(x) = a_o + a_1 x \qquad \text{......} (1.10)$$

وحيث x هو المتغير المستقل و y المتغير التابع، كما نلاحظ أن $y(x)$ يجب أن تمر بنقطتي نهاية العنصر، أي أن:

$y_1 = a_o + a_1 x_1$ و $y_2 = a_o + a_1 x_2$ [وحيث $i = 1,2$, $y_i = y(x_i)$]. ولمثل هذه الحالة نجد أن:

$$a_o = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{......} (2.10)$$

و

$$a_o = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{......} (3.10)$$

وبذلك فإننا نحصل على:

$$y(x) = N_1(x) y_1 + N_2(x) y_2 \qquad \text{......} (4.10)$$

وحيث:

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \qquad \text{......} (5.10)$$

و

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{......} (6.10)$$

وتمثل $y(x)$ دالة التقريب (أو الملائمة)؛ بينما تمثل N_1 و N_2 دالتي الاستكمال.

بعد اختيار الدالة نقوم بحساب أجود ملائمة وذلك بالطرق المعروفة؛ وهذا يقودنا بالتالي إلى معادلات جبرية خطية نكتبها في شكل مصفوفة على الصورة:

$$K\,\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{F} \qquad \ldots\ldots (7.10)$$

وحيث K هي مصفوفة الغلاظة Stiffness matrix وهي ذات علاقة بالعنصر. و $\underset{\sim}{y}$ هي متجه بالمجاهيل عند العقد؛ كما أن $\underset{\sim}{F}$ تمثل المؤثرات الخارجية للمسألة [قوى(دوال مصدر) مثلاً].

3) التجميع (Assembling)

في هذه الخطوة نستعمل مفهوم الاستمرارية للربط بين معادلات العناصر الفردية التي قمنا باشتقاقها وذلك بغية الحصول على التصرف الموحد للمنظومة ككل. نذكر بوجود عقد مشتركة. كما لا ننسى وجود الشروط الحدية والتي يجب وضعها في الحسبان وكذلك استعمال الطرق المختلفة لحل المعادلات الناتجة والتي سبق وأن تعرضنا لها بالتفصيل بالفصل الخامس.

مثال (1.10)

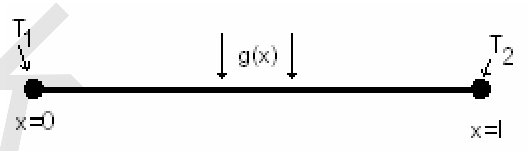
للتبسيط نعطي هنا مثالاً في بعد واحد وذلك عن معادلة بواسون لانتشار الحرارة في بعد واحد:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -g(x)$$

$g(x)$ هي مصدر للحرارة، والانتشار هو على طول قضيب يمتد من $x=0$ إلى $x=\ell$

ونهاياته محفوظتان عند $T_1 = T(0,t)$ و $T_2 = T(\ell,t)$ $(t \geq 0)$ كما بالشكل (3.10) ؛ هذه المسألة هي مسألة قيم حدية عادية. والمطلوب هو إيجاد $T(x)$.

الآن لو أعطيت القيم $T_1 = 40^o C$, $T_2 = 200^o C$ و $\ell = 10\ cm$ و $g(x) = 10$ فإن الحل يكون كما يلي:



الشكل (3.10) انتشار الحرارة في قضيب طوله ℓ .

نفترض بأن $T(x) = ax^2 + bx + c$ عندئذ نرى أن:

$\frac{d^2T}{dx^2} = 2a$ ومنها نرى أن: $a = -5$

ومن الشروط الحدية نجد أن :

$$c = 40$$

و

$$200 = -5(100) + 10b + 40$$

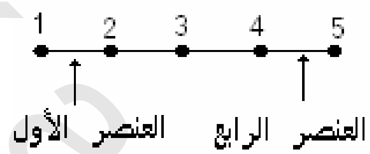
أي أن:

$$b = 66$$

ويكون الحل عندئذ هو :

$$T(x) = -5x^2 + 66x + 40$$

الآن باستخدام طريقة العناصر المحدودة تكون التجزئة البسيطة هي عناصر ذات أطوال متساوية ولتكن من أربع قطع متساوية بخمس عقد كما هو مبين بالشكل (4.10). فمثلاً للعنصر الأول تكون نهاياته هما العقدتين 1 و 2.



الشكل (4.10) العناصر للمثال (1.10)

نكتب الآن معادلات العناصر الأربع، حيث نقوم بتقريب توزيعة درجة الحرارة بالدالة: $\overline{T} = N_1 T_1 + N_2 T_2$

أي أنه لدينا تقريب خطي بين العقدتين.

نستخدم الطريقة المباشرة للوصول إلى المعادلات المطلوبة، وحيث نلاحظ من بداية المسألة أن العلاقة بين فيض الحرارة (q) وانحدار درجة الحرارة $\left(\frac{dT}{dx}\right)$ هو :

$$q = -k'\left(\frac{dT}{dx}\right)$$

وحيث k' هو معامل التوصيل الحراري. ونرى انه عند العقدة 1 :

$$q = -k'\left(\frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}\right)$$

أما خلال العقدة 2 فإن:

$$q_2 = k'\left(\frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}\right)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات على الصورة:

$$q_2 = k'\left(\frac{dT}{dx}\right)(x_2) \text{ و } q_1 = -k'\left(\frac{dT}{dx}\right)(x_1)$$

ومن هذه المعادلات مجتمعة نستطيع أن نكتب(في صورة مصفوفية):

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{dT}{dx}(x_1) \\ \frac{dT}{dx}(x_2) \end{pmatrix}$$

وتصف هذه المعادلة المصفوفية تصرف عنصر نموذجي للمنظومة تحت الدارسة.

غير أن هذه المعادلة يجب أن تعدل انطلاقا من الشروط الحدية المعطاة وهذا يستوجب القيام بتكاملات معينة نصل من خلالها إلى المعادلة النهائية وهي:

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{dT}{dx}(x_1) \\ \frac{dT}{dx}(x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} g(x) N_1(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_2} g(x)\, N_2(x) dx \end{pmatrix}$$

والحد الأخير يمثل حد التأثيرات الخارجية.

نتوه إلى أن الوصول إلى المعادلة المصفوفية الأخيرة ليس أمراً سهلاً؛ ولكننا قمنا باختزال عدد كبير من الخطوات. والسبب في ذلك هو أننا نعطي هنا فكرة مختصرة جداً

عن طريقة العناصر المحدودة ولا يتسع المجال إلى ذكر التفاصيل. ولمن يهمه الأمر الإطلاع على قائمة المراجع بآخر الكتاب.

الآن لو عدنا للمثال وبالمعطيات الخاصة فإننا نستطيع كتابة المعادلات لكل عنصر وذلك كما يلي:

نأخذ $\Delta x = 2.5\ cm$ لنرى أن :

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\ N_1(x)dx) = \int_0^{2.5} 10\left(\frac{2.5-x}{2.5}\right)dx = 12.5$$

كذلك نجد أن:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\ N_2(x)dx) = \int_0^{2.5} 10\left(\frac{x-0}{2.5}\right)dx = 12.5$$

وهكذا تكون المعادلات هي:

$$0.4T_1 - 0.4T_2 = -\frac{dT}{dx}(x_1) + 12.5$$

و

$$-0.4T_1 + 0.4T_2 = -\frac{dT}{dx}(x_2) + 12.5$$

نقوم بعدئذ بكتابة كل المعادلات المماثلة لبقية العناصر وهي خمسة . وبجمعها، مع الوضع في الاعتبار الشروط الحدية، عندئذ نجد أن:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dx}(x_1) - 0.4T_2 &= -3.5 \\
0.8T_2 - 0.4T_3 &= 41 \\
-0.4T_2 + 0.8T_3 - 0.4T_4 &= 25 \\
-0.4T_3 + 0.8T_4 &= 105 \\
-0.4T_4 - \frac{dT}{dx}(x_5) &= -67.5
\end{aligned}$$

و حل هذه بسيط ويعطي النتائج التالية:

$$\frac{dT}{dx}(0) = 66 \ {}^{o}C/_{cm}$$
$$T_2 = 173.75^{o}C$$
$$T_3 = 245^{o}C$$
$$T_4 = 253.75^{o}C$$
$$\frac{dT}{dx}(10) = -34 \ {}^{o}C/_{cm}$$

2.10 حول تربيعات جاوس

لقد تعرضنا في السابق في البند (3.4)-د إلى طريقة جاوس للتكامل (أو ما نسميها أيضا بتربيعات جاوس)؛ وعموماً وكما ذكرنا حينئذ أن الحل يكمن في تعيين c_i و x_i وحيث $i = 1,.......,n$؛ والأمر يؤول إلى حل منظومة معادلات آنية في $c_i's$ و $x_i's$.وفي ذلك نستخدم طريقة معينة مثل طريقة جاوس – سيدل .

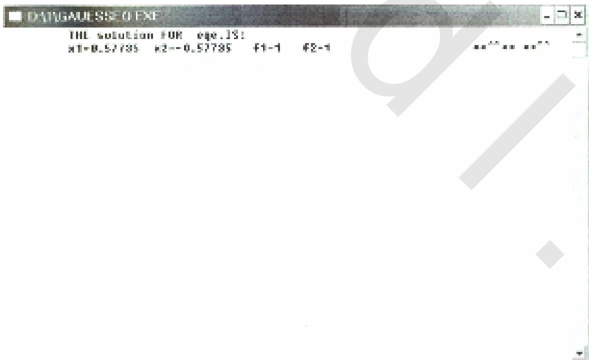
في هذا البند نعطي حسابات حاسوبية لمثل هذه المجاهيل باستخدام طريقة جاوس – سيدل وذلك بلغة C [الشكلان (5.10)-(6.10)]؛ كما نعطي أيضا النتائج في الجدولين (1.10) و (2.10) في حالة استخدام نقطتين وثلاثة نقاط على التوالي. هذا ويمكن للقارئ أن يقوم بالتعميم لعدد أكبر من النقاط؛ غير أنه لابد من التنويه بأنه يجب كتابة المعادلات الآنية أولاً.

```c
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
main(){

float x,y,z,o;
double  x1,x2,f1,f2,k=0.5,kk=0.333;
 int i=0,nn=2,nnn=3 ;
//nn=2;mm=3;
clrscr();
printf("\t THE solution FOR  eqe.IS: \n");
printf("\t\t  **^^** **^^\n\n\n\n");
do{
x=f1;y=f2;z=x1;o=x2;
f1=2-f2;
f2=(-f1*x1)/f2;
x1=(2/3-(f2*( pow( x, nn)))/f1);
 pow(x1,k);
x2=(-(f1*( pow( x, nnn)))/f2) ;
( pow( x2, kk))
;i++;
}while((fabs(f1-x)&&fabs(f2-y)&&fabs(x1-z)&&fabs(x2-o))>10E-5);
printf("i=%d\nrf1=%f\n\rf2=%f\n\rx1=%f\n\rx2=%f",i,f1,f2,x1,x2);
getch();}
```

الشكل (5.10) تربيعات جاوس بلغة C لنقطتين

الجدول (1.10) نتائج البرنامج بالشكل (5.10) لنقطتين.

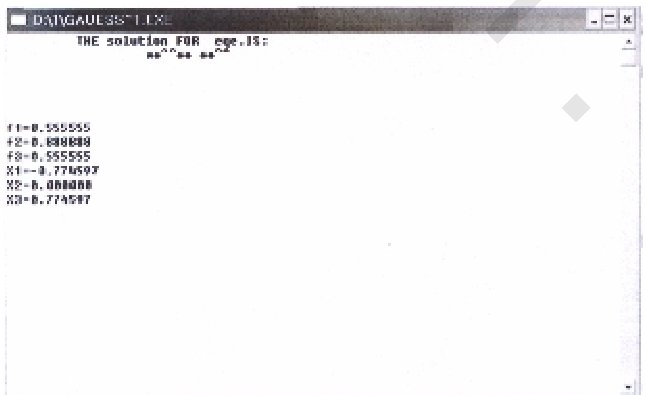


```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
void main(){

float x,y,z,o,d,t;
double  x1,x2,f1,f2,x3,f3,k=0.5,kk=0.333,kkk=0.25,kkkk=0.2;
 int i=0,nn=2,nnn=3,nnnn=4,nnnnn=5 ;
//nn=2;mm=3;
clrscr();
printf("\t THE solution FOR  eqe.IS: \n");
printf("\t\t  **^^** **^^\n\n\n\n");
do{
x=f1;y=f2;z=x1;o=x2;d=f3;t=x3;
f1=2+(-f2-f3);
f2=((-f1*x1)+(-f3*x3))/x2;
f3=(2/3-(f1*(pow( x1,nn)))-(f2*(pow( x2,nn))))/(pow( x3,nn));
//pow(x1,k);pow(x2,k);pow(x3,k);
x1=(-(f2*(pow( x2,nnn)))-(f3*(pow( x2,nnn))))/f1 ;
pow(x1,kk);
x2=(2/5-(f1*(pow( x1,nnnn)))-(f3*(pow( x3,nnnn))))/f2;
pow(x2,kkk);
x3=((-f1*(pow( x1,nnnnn))-(f2*(pow( x2,nnnnn))))/f3;
 pow(x3,kkkk);
i++;
}while((fabs(f1-x)&&fabs(f2-y)&&fabs(x1-z)&&fabs(x2-o)&&fabs(f3-d)&&fabs(x3-t))>
10E-5);
printf("i=%d\nrf1=%f\n\rf2=%f\n\rf3=%f\n\rx1=%f\n\rx2=%f\nx3=%f\n\r",i,f1,f2,f3,
x1,x2,x3);
;getch();}
```

الشكل (6.10) تربيعات جاوس بلغة C لثلاثة نقاط

الجدول (2.10) نتائج البرنامج بالشكل (6.10) لثلاثة نقاط.



3.10 بعض التوزيعات الإحصائية

المتوسط والانحراف المعياري Mean & Standard Deviation

لكي نعرف ما هو المتوسط وما هو الانحراف المعياري علينا أن ندرس بعض التعريفات أولاً:

تعريف 1

تسمى فئة القياسات اللانهائية لكمية ما بالتعداد الام (Parent Population) كما تسمى فئة قياسات محدودة للكمية بتوزيعة عينة أو بعينة.

كما أن العلاقة التي تربط البارامتر الأم (P.P) (Parent Parameter) والبارامتر التجريبي (E.P) (Experimental Parameter) هي:

$$P.P = \lim_{N\to\infty}\left(E.P.\right) \qquad \ldots\ldots (8.10)$$

تعريف 2

متوسط التعداد الأم (μ) هو عبارة عن نهاية مجموع القياسات x_i للكمية x مقسوماً على عدد القياسات عندما يؤول هذا العدد إلى مالا نهاية.

أي أن:

$$\mu = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum x_i\right) \qquad \ldots\ldots (9.10)$$

وهكذا نلاحظ أن المتوسط هو بمثابة مركز هذه القيم أو القياسات (لاحظ الفرق

بين المتوسط والوسيط ($\mu_{1/2}$) والذي يمثل القيمة عند منتصف العدد N من القياسات ؛ أي أن نصف القياسات تأتي قبله ونصفها بعده).

تعريف 3

يمثل الانحراف للقيمة x_i من المتوسط بالفرق بين القيمة x_i والمتوسط μ أي أن $d_i = x_i - \mu$.

لاحظ أن متوسط الانحراف في كل القيم يساوي الصفر.

حيث أن:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}\sum(x_i-\mu)\right)=\lim\frac{1}{N}\sum x_i-\mu=\mu-\mu=0$$

تعريف 4

تسمى نهاية متوسط مربعات الانحرافات من المتوسط μ بالاختلاف (أو التغاير) σ^2 (Variance) أي أن:

$$\sigma^2=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum(x_i-\mu)^2\right]$$

تعريف 5

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للاختلاف أي أن:

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}$$

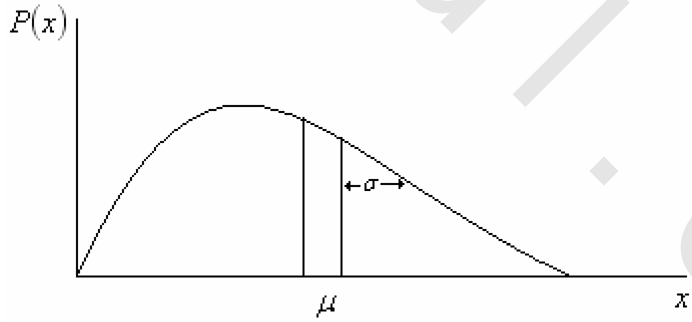
نلاحظ أن μ و $\mu_{1/2}$ تمثل أكثر القيم المحتملة. كما أن μ هو أحد البارامترات

التي تعين التوزيعة الاحتمالية (Probability Distribution). كما أنها تحمل نفس الوحدات مثل القيمة الحقيقية للكمية المقاسة (True Value).

أما σ و σ^2 فهي تختص بمقدار عدم التأكد (uncertainty) اللصيق بالمحاولات التجريبية لتعيين القيمة الحقيقية أو بصورة أخرى يكون الانحراف المعياري مقياسا مناسبا لعدم التأكد في ملاحظاتنا نتيجة للتقلبات (أو الاضطرابات) (fluctuations).

ولو نظرنا للشكل (7.10) والذي يمثل العلاقة بين الاحتمالية $P(x)$ والكمية x لتبينا معاني كل من المتوسط والوسيط والانحراف المعياري.

وبصدد ذكر التوزيعات الاحتمالية فإننا نود الذكر بأنه توجد توزيعات منفصلة (Discrete) وتوزيعات مستمرة؛ وأن القيمة المتوقعة لأي بارامتر $f(x)$ تعرف على أنها:



الشكل (7.10) توضيح للمتوسط والوسيط والانحراف المعياري

$$\langle f(x) \rangle = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum f(x)\right] = \sum f(x_i)P(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)P(x)\,dx$$

ويمكننا مرة أخرى اعتبار البارامترين الأساسيين في أي عينة على أنهما:

المتوسط: $$\mu = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i$$

و

الاختلاف : $$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum(x_i - \bar{x})$$

وحيث نرى هنا أننا قسمنا على $N-1$ بدلا من N والتي تدل الآن على عدد درجات الحرية؛ فبتعيين $\bar{x}$ نقصت درجات الحرية من N إلى $N-1$.

وهذا ما سبق وأن تطرقنا إليه في فصل سابق.

وهكذا لو تم تعيين $\bar{x}$ و σ^2 فإنه لتعيين أي بارامتر آخر (ثالث) للعينة نقسم على $N-2$.و عموماً لو كانت البارامترات المعينة m وعدد القياسات N فإنه لتعيين البارامتر رقم $m+1$ نقسم على $N-m$

بعض التوزيعات الاحتمالية

1. التوزيعة ذات الحدين

وهي تصف احتمال ملاحظة r من المحاولات الناجحة في n منها وذلك عندما تكون احتمالية النجاح في كل محاولة تساوي p .

$$P_B(r,n,p) = {}^nC_r\, p\, q^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\, p^r (1-p)^{n-r}$$

كما أن:

$$q = 1-p$$
$$\mu = np$$
$$\sigma^2 = np(1-p)$$

2. توزيعة بواسون

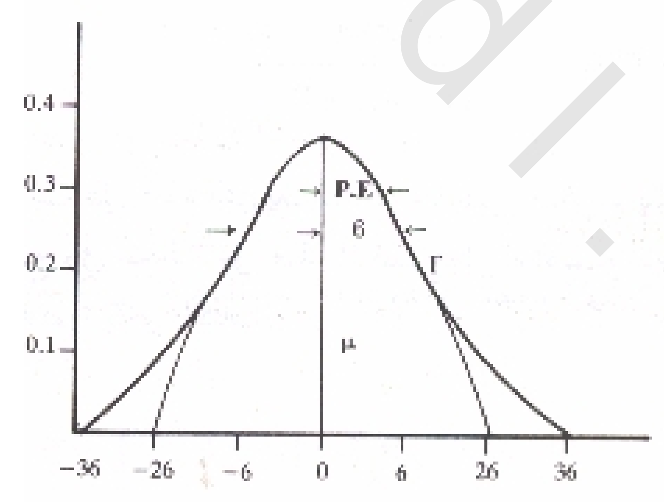
وتصلح هذه لوصف العينات الصغيرة من تعدادات ضخمة كما أنها تعتبر حالة خاصة من التوزيعة ذات الحدين عندما تكون n كبيرة و μ ثابتة:

$$P_p(x,\mu) = \frac{\mu^2}{x!} e^{-\mu}$$

3.التوزيعة الجاوسية

تعتبر هذه أيضاً حالة خاصة من التوزيعة ذات الحدين وذلك لـ n كبيرة و p محدودة .. كما أنها تناسب التوزيعة المتناسقة السلسة.

$$P_G(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right]$$



الشكل (8.10) التوزيعة الجاوسية

والشكل (8.10) يوضح هذه التوزيعة حيث نلاحظ أن المحور الأفقي يمثل $x-\mu$ وأن نصف العرض $\Gamma = 2.3456$ والخطأ المحتمل $P.E. = 0.62456$.

والعرض الكلى هو العرض عند نصف القيمة العظمى. كما أن الخطأ المحتمل هو القيمة المطلقة للانحراف $x-\mu$ بحيث يكون احتمال الانحراف لأي ملاحظة عشوائية $|x_i - \mu|$ أقل من أو يساوي النصف.

والتوزيعة الجاوسية مناسبة جداً وذلك من خلال التجارب المختلفة التي تم تطبيق التوزيعة عليها؛ و تسمى أيضا بالتوزيعة الطبيعية.

4.التوزيعة اللورانترية

هذه التوزيعة تصلح لوصف بيانات فيزياء نووية، حيث يتم استخدامها عند التصرف الرنيني Resonance Behavior، وذلك ما يحدث عادة في حالة التغير في القطاع العرضي للتفاعلات النووية نسبة للطاقة أو من خلال التغير فيه بالنسبة لسرعة امتصاص الإشعاع كما يحدث بظاهرة موسبار وتوصف التوزيعة اللورانترية على الشكل:

$$P_L(x,\mu,\Gamma) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma/2}{(x-\mu)^2 + \Gamma^2/4}$$

إن الحديث حول هذه التوزيعات وغيرها يطول ولكن لم يكن بوسعنا هنا سوى التعريج وفي عجالة على هذا الموضوع ولمن له اهتمام أكبر به أن يرجع للمراجع المذكورة بآخر الكتاب .

تمارين (10)

1. قم بكتابة تفاصيل المثال (1.10).

2. أكتب برنامجا حاسوبيا يحسب معاملات و إحداثيات تربيعيات جاوس لعدد 4،5،6 نقاط و قارن بما جاء بالفصل الرابع.طبق ما توصلت إليه من نتائج على أمثلة من عندك و سجل ملاحظاتك.

3. ((لا فرق بين المتوسط و الوسيط)) ما مدى صحة هذه العبارة ؟

4. ما هي العلاقة بين الاختلاف والانحراف المعياري؟

5. قم باشتقاق صيغ μ و σ^2 للتوزيعة ذات الحدين.

6. من خلال تمحيصك بالتوزيعتين الجاوسية واللورانتزية؟ هل يمكنك اكتشاف الفرق بينهما؟

7. اضرب بعض الأمثلة على المجالات التي يمكن تطبيق التوزيعة اللورانتزية بها.