الفصل الثاني

الحسبان الفرقي

يحتوي هذا الفصل على:

1.2 المؤثرات الفرقية

لو أعطينا بيانات ما ممثلة لدالة ما فإنه ومما لا شك فيه سوف يتبادر إلى ذهننا أسئلة كثيرة مثل: كيف تفاضل أو كيف تكامل الدالة الممثلة بتلك البيانات والتي لا تتعدى كونها عبارة عن أعداد، وكيف نستخدم العمليات الحسابية البسيطة من جمع وطرح وضرب وقسمة لإنجاز عمليات معقدة مثل التفاضل والتكامل.

قد تكون العملية صعبة بعض الشيء ولكن الحسبان الفرقي سوف يسهل علينا المهمة ويعطينا الجواب للأسئلة المطروحة سابقاً. نبدأ أولا بدراسة مختلف أنواع المؤثرات.

1.1.2 المؤثر الفرقي الأمامي

لو عدنا إلى مفكوك تايلور والذي قمنا بالتعرف عليه في الفصل السابق وأردنا أن نكتب $f(x+h)$ بدلالة $f(x)$ فإننا نحصل على:

$$f(x+h)= f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}\ f''(x)+....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\ f^{(n)}(x) \qquad ......(2.1)$$

وحيث x هي نقطة ما في نطاق تقارب الدالة f كما أن $x+h$ هي نقطة أخرى تبعد عن x بالمقدار الصغير h وتقع أيضاً في نفس النطاق المذكور.

من المعادلة (2.1) نرى أن:

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+O(h) \qquad ......(2.2)$$

الآن لو وضعنا $f(x)=f_j$ و $f(x+h)=f_{j+1}$ لحصلنا على :

$$f'(x) = \frac{f_{j+1} - f_j}{h} + O(h) \qquad \ldots\ldots (2.3)$$

و j هذه يمكن أن تأخذ القيم $j = 0,1,2,....$. مما تقدم نعرف المؤثر الفرقي الأمامي الأول (Δ) للدالة f عند النقطة j بالعلاقة:

$$\Delta\ f_j = f_{j+1} - f_j \qquad \ldots\ldots (2.4)$$

ومن تعريف $\Delta\ f_j$ (المعادلة (2.4)) نتبين السبب في تسمية المؤثر Δ بالمؤثر الفرقي **الأمامي**. من المعادلتين (2.3) و (2.4) نحصل على :

$$f'(x) = \frac{\Delta\ f_j}{h} + O(h) \qquad \ldots\ldots (2.5)$$

وهكذا نرى أن المعادلة (2.5) تعطينا بعض الإجابة عن كيفية تفاضل دالة ما.. في فصل التفاضل والتكامل سوف نتعرض بالتفصيل لمثل هذه المواضيع.

بشكل عام لو كانت المسافة بين أي قيمتين متتاليتين للمتغير x هي h (ثابت) ولو كانت نقطة البداية هي x_o فإن $x_i = x_o + i\,h$ وحيث $i = 0,1,2,....$ وحيث x_n هي آخر نقطة في الجدول، كما أنه لو كانت قيم المتغير التابع مشار إليها بـ$y_i (\equiv f(x_i))$ ، فإن:

$$\Delta\ y_n = y_{n+1} - y_n \qquad (n = 0,1,2,......) \qquad \ldots\ldots (2.6)$$

و Δy_n هي المؤثر الفرقي الأمامي الأول عند النقطة (x_n, y_n). يمكننا تعريف المؤثر الفرقي الأمامي الثاني (أي من الرتبة الثانية) عند النقطة n بالعلاقة:

$$\Delta^2\ y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n \qquad (n = 0,1,2,......) \qquad \ldots\ldots (2.7)$$

وهذه يمكن كتابتها بالتفصيل باستخدام النقاط $(x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})$ و (x_{n+2}, y_{n+2}) وذلك كما يلي:

$$\Delta^2 y_n = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n \qquad \ldots\ldots (2.8)$$

بنفس الطريقة نعرف المؤثر الفرقي النوني(أي من الرتبة n) عند النقطة (x_m, y_m) وبذلك نعني أن:

$$\Delta^n y_m = \Delta^{n-1} y_{m+1} - \Delta^{n-1} y_m \qquad \ldots\ldots (2.9)$$

وانطلاقاً مما تقدم نكون الجدول الفرقي الأمامي على الصورة:

الجدول (1.2) – جدول فرقي أمامي

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
y_o				
	Δy_o			
y_1		$\Delta^2 y_o$		
	Δy_1		$\Delta^3 y_o$	
y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_o$
	Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
y_3		$\Delta^2 y_2$		
y_4				

فعلى سبيل المثال لو كانت لدينا البيانات التالية: $(3,15), (2,7), (1,5), (0,1)$ فإننا نرى أن: $h = 1$ ويكون الجدول الفرقي الأمامي هو كما بالجدول (2.2).

الجدول (2.2)

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1			
	4		
5		-2	
	2		8
7		6	
	8		
15			

ونلاحظ أن المؤثر Δ ينطق (دلتا) كما أن Δy_n غير معرف إذا كانت النقطة (x_n, y_n) هي آخر نقطة بالجدول.

2.1.2 المؤثر الفرقي الخلفي

لو عرفنا $\nabla y_1 = y_1 - y_o$ وبشكل عام وضعنا:

$$\nabla y_n = y_n - y_{n-1} \qquad \ldots\ldots (2.10)$$

فإن ∇ عندئذ هو المؤثر الفرقي الخلفي الأول (ينطق دل) عند النقطة n . كما أن المؤثر الخلفي الثاني عند النقطة n هو :

$$\nabla^2 y_n = \nabla y_n - \nabla y_{n-1} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} \qquad \ldots\ldots (2.11)$$

و يتضح من المعادلة (2.11) بأن:

$$\nabla^2 y_n = \Delta^2 y_{n-2} \qquad \ldots\ldots (2.12)$$

والمؤثر الفرقي الخلفي من الرتبة m عند النقطة n هو:

$$\nabla^m y_n = \nabla^{m-1} y_n - \nabla^{m-1} y_{n-1} \qquad \ldots\ldots (2.13)$$

ويكون الجدول الفرقي الخلفي كما هو موضح بالجدول (2.3).

الجدول (2.3) - جدول فرقي خلفي.

y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	$\nabla^4 y$
y_o				
	∇y_1			
y_1				
		$\nabla^2 y_2$		
	∇y_2		$\nabla^3 y_3$	
y_2				
		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$
	∇y_3		$\nabla^3 y_4$	
y_3				
		$\nabla^2 y_4$		
	∇y_4			
y_4				

ونلاحظ على المؤثر الفرقي الخلفي ما يلي:

1. أول مواقع للمؤثرات من الرتب المختلفة هي $\nabla y_1, \nabla^2 y_2, \nabla^3 y_3, ..., \nabla^n y_n$.

2. $\nabla^m y_n = \Delta^m y_{n-m}$ فمثلاً $\nabla y_1 = \Delta y_o$ و $\nabla^2 y_2 = \Delta^2 y_o$ وهكذا.

3. ينطق المؤثر الأمامي Δ على أنه دلتا (Delta) والمؤثر الخلفي ∇ على أنه (دِلْ) (Del).

ولو أننا أخذنا في الاعتبار البيانات المعطاة بالجدول(2.2) فإن : $\Delta y_o = 4$ وهي نفسها Δy_1 ، كما أن $\Delta^2 y_o = -2$ و $\nabla^2 y_3 = 6$.

3.1.2 مؤثرات أخرى

كما سبق وأن نوهنا بأن Δ و ∇ هما مؤثران فرقيان ولهما تأثير المؤثرات المعهودة فمثلا نرى أن : $\Delta(\Delta y_n) = \Delta^2 y_n$ و $\nabla(\nabla y_n) = \nabla^2 y_n$ ؛ كما أن:

$$\Delta(\nabla y_n) = \Delta(y_n - y_{n-1}) = \Delta y_n - \Delta y_{n-1} = \nabla(\Delta y_n) \qquad ......(2.14)$$

ومن المعادلة (2.14) نستنتج بأن $\Delta(\nabla) = \nabla(\Delta)$.

من المؤثرات الأخرى مؤثر الإزاحة E و نوضح تأثيره كما يلي:

$$E\, y_n = y_{n+1} \qquad ......(2.15)$$

أي أن المؤثر E يضيف h إلى قيمة x .

من الواضح هنا أن : $\Delta E \equiv E\Delta$ و $\nabla E \equiv E\nabla$.

هذا وتوجد علاقة مهمة بين المؤثرين E و Δ ؛ تلك نوضحها على النحو التالي:

$$\because \quad \Delta y_n = y_{n+1} - y_n = E\, y_n - y_n = (E-1) y_n \qquad \text{......} (2.16)$$

عليه فإن:

$$E = 1 + \Delta \qquad \text{......} (2.17)$$

نلاحظ أيضاً أن:

$$\begin{aligned} E(1-\nabla)\, y_n &= E\, y_n - E\nabla\, y_n = y_{n+1} - E(y_n - y_{n-1}) \\ &= y_{n+1} - Ey_n - Ey_{n-1} = y_{n+1} - y_{n+1} + y_n = y_n \end{aligned} \qquad \text{......} (2.18)$$

بنفس الطريقة يمكن أن نوضح بأن:

$$(1-\nabla)E\, y_n = y_n \qquad \text{......} (2.19)$$

من المعادلتين (2.18) و (2.19) نستنتج بأن:

$$E(1-\nabla) = (1-\nabla)E = 1 \qquad \text{......} (2.20)$$

ومن المعادلة (2.20) نكتب مجازاً:

$$E = (1-\nabla)^{-1} \qquad \text{......} (2.21)$$

يوجد مؤثر آخر وهو المؤثر الفرقي المركزي δ ويعرف بالعلاقة:

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{......} (2.22)$$

أي أن:

$$\delta\, y_{\frac{1}{2}} = \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} \right) y_{\frac{1}{2}} = y_1 - y_o \qquad \text{......} (2.23)$$

ونلاحظ هنا بأن δ (وكذلك δ^3 و δ^5 و .... الخ) تؤثر على قيم y الكسرية من دليلها. (في تركيبها)، بينما تؤثر δ^2 (وكذلك δ^4 و δ^6 و......الخ) على القيم الصحيحة من دليلها وهذا نوضحه كما يلي:

حيث أن:

$$\delta^2 = \left(E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = E^1 - 2 + E^{-1} \qquad \ldots\ldots (2.24)$$

عليه فإن:

$$\delta^2 y_n = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} \qquad \ldots\ldots (2.25)$$

و الجدول (4.2) يمثل جدولاً فرقياً مركزياً.

ونُنوه هنا بأن القيم الكسرية في دليل y هي من صنعنا وتؤول الحسابات كلها بدلالة القيم ذات الدليل الصحيح.

كما أنه يتم ترتيب البيانات في هذه الحالة بحيث تكون y_o داخل جسم الجدول بينما يرقم ما قبلها بالسالب وما بعده بالموجب. لاحظ أنه في حالة الجدول الفرقي الأمامي نبدأ بقمة الجدول بينما نبدأ بقاعدة الجدول بالنسبة للجدول الفرقي الخلفي.

الجدول (4.2)- جدول فرقي مركزي.

y	$\delta\, y$	$\delta^2\, y$	$\delta^3\, y$	$\delta^4\, y$
y_{-1}				
	$\delta\, y_{-\frac{1}{2}}$			
y_0				
		$\delta^2\, y_{-1}$		
	$\delta\, y_{1/2}$		$\delta^3\, y_{-1/2}$	
y_1				
		$\delta^2\, y_o$		$\delta^4\, y_0$
	$\delta\, y_{\frac{3}{2}}$		$\delta^3\, y_{1/2}$	
y_2				
		$\delta^2\, y_1$		
	$\delta\, y\frac{5}{2}$			
y_3				

لو عدنا للجدول (2.2) فإننا نرى أن :

$$\delta\, y_{1/2} = y_1 - y_o = 5 - 1 = 4$$

كما أن:

$$\delta^2\, y_1 = y_2 - 2y_1 - y_o = 7 - 2(5) + 1 = -2$$

مما تقدم رأينا انه يمكننا حساب $\delta\, y_{1/2}$ و $\delta^2\, y_o$. ماذا عن $\delta\, y_o$ و $\delta^2\, y_{1/2}$ ؟ هل

يمكننا حسابهما ! و هل يكون لهما أي معنى؟ للإجابة على هذا السؤال نقدم إلى المؤثر الفرقي المتوسط μ والذي يعرف على النحو:

$$\mu = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad \ldots\ldots (2.26)$$

أي أن:

$$\mu\, y_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}\right) y_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_o\right) \qquad \ldots\ldots (2.27)$$

ومن هذه المعادلة يتضح السبب من وراء تسمية μ بالمؤثر الفرقي المتوسط.

نلاحظ أيضاً أن:

$$\mu\,\delta = \delta\mu = \frac{1}{2}\left(E^{1} + E^{-1}\right) \qquad \ldots\ldots (2.28)$$

وبالتالي فإن:

$$\mu\,\delta\, y_o = \frac{1}{2}\left(E^{1} + E^{-1}\right) y_o = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_{-1}\right)$$

فمثلاً بالرجوع للجدول (2.2) ولو أردنا حساب $\mu\,\delta\, y_1 = \frac{1}{2}\left(y_2 - y_o\right)$ فإنه عندئذ نحصل على:

$$\mu\,\delta\, y_1 = \frac{1}{2}(7-1) = 3$$

ملاحظة هامة:

لاحظ أنه لمؤثر الإزاحة الميزة التالية وهي أن:

$$E^{m}\, y_n = y_{n+m} \qquad \ldots\ldots (2.29)$$

وهذا واضح من العمليات الموضحة في المعادلات (2.15) و (2.23) و(2.25) و (2.26).

2.2 تطبيقات على المؤثرات

(أ) تعيين درجة الحدودية الممثلة ببيانات ما

إحدى التطبيقات المهمة للمؤثرات Δ و ∇ هي تعيين درجة الحدودية المعطاة في شكل بيانات.

الآن حيث أن الحدودية $P_n(x)$ من الدرجة n تأخذ الشكل:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o \qquad ...... (2.30)$$

ولو قمنا بالتركيز على x^n والذي يمثل أكبر قوة(أو أس) في الحدودية فإن:

$$\Delta(x^n) = (x+h)^n - x^n$$

وحيث h هو مقدار الزيادة في x . ولكن نلاحظ أن:

$$(x+h)^n = x^n + n h x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} h^2 x^{n-2} + ... + h^n$$

بذلك فإن:

$$\begin{aligned} \Delta(x^n) &= [x^n + n h x^{n-1} + ... + h^n] - x^n \\ &= n h x^{n-1} + ... + h^n \end{aligned}$$

وبذلك يتضح أن $\Delta(x^n)$ هو حدودية من الدرجة $n-1$، أي أن تأثير Δ على x^n كان في تخفيض درجتها بدرجة واحدة. ونلاحظ أن الحد الريادي للحدودية الناتجة هنا هو $n h^1 x^{n-1}$.

يمكننا السير على نفس النهج و الاستنتاج بأن $\Delta^2\left(x^n\right)$ هو حدودية من الدرجة $n-2$ وحدها الريادي هو $n(n-1)h^2\ x^{n-2}$ و $\Delta^n\left(x^n\right)$ هو ثابت قيمته $n!\,h^n$.

وبذلك فإن $\Delta^{n+1}\left(x^n\right)=0$.

ولو عدنا للحدودية بشكل عام فإن $\Delta^r P_n\left(r\le n\right)$ هو حدودية من الدرجة $n-r$ وحدها الريادي هو

$$n(n-1)\ldots(n-r+1)h^r\,x^{n-r}\,a_n$$ ،

كما أن :

$$\Delta^n P_n = n!\,h^n a_n$$

أي أنه إذا قمنا بكتابة الجدول الفرقي فإن العمود الذي يدلل على $\Delta^n y$ سيكون ثابتاً والعمود الموالي عبارة عن أصفار.

مثال (1.2)

إذا كانت البيانات الموالية تمثل حدودية ما فأوجد درجتها. والبيانات هي:

(0,0) ، (1,1) ، (2,8) ، (3,27) ، (4,64) ،(5,125)

الحل:

نكتب الجدول الفرقي كما هو مبين أسفله لنرى أن درجة الحدودية هي الثالثة.

الجدول (5.2)- المثال (1.2)

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0				
	1			
1		6		
	7		6	
8		12		0
	19		6	
27		18		0
	37		6	
64		24		
	61			
125				

ملاحظة:

يمكن إثبات أن $\nabla^n P_n =$ ثابت بنفس الكيفية السابقة التي اتبعناها للمؤثر Δ .

(ب) حساب قيم جديدة بالجدول

هنا نستخدم العلاقة (2.21) وأن:

$y_{n+1} = Ey_n$. عندئذ نرى أن:

$$y_{n+1} = Ey_n \equiv (1-\nabla)^{-1} y_n \equiv (1+\nabla+\nabla^2+\ldots+\nabla^m+\ldots) y_n \qquad \ldots\ldots (2.31)$$

ولو أن البيانات تمثل حدودية من الدرجة m فإن الحدود التي تحتوى على $\nabla^{m+1} y_n$ فما أعلى تتلاشى وذلك باستعمال الخاصية التي نوهنا عنها بالبند السابق وبذلك فإن:

$$y_{n+1} = y_n + \nabla y_n + ... + \nabla^m y_n \qquad ......(2.32)$$

والعلاقة (2.32) تمكننا من حساب y_{n+1} من y_n ؛أي أنها تمكنا من حساب مداخل جديدة بالجدول الفرقي.

مثال (2.2)

احسب $y_6 = y(6)$ للمثال السابق (1.2).

الحل:

من الجدول السابق للمثال (1.2) نرى أن:

$$\begin{aligned} y_6 &= y_5 + \nabla y_5 + \nabla^2 y_5 + \nabla^3 y_5 \\ &= 125 + 61 + 24 + 6 = 216 \end{aligned}$$

(ج) تعيين صيغة الحدودية الممثلة ببيانات ما

سبق وأن ذكرنا بأن $x_n = x_o + nh$. من هذه العلاقة نرى أن: $n = \dfrac{x_n - x_o}{h}$. كما أن: $y_1 = E\, y_o$ و $y_2 = E\, y_1 = E^2\, y_o$ وبشكل عام $y_n = E^n\, y_o$ وعليه نرى أن:

$$y_n = y(x_n) = E^n y_o = (1 + \Delta)^n y_o \qquad ......(2.33)$$

وبإجراء الفك باستخدام نظرية ذات الحدين نحصل على:

$$y_n = \begin{pmatrix} 1 + n\Delta + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 + \text{..........} \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}\Delta^r + \text{............} \end{pmatrix} y_o$$

$$= y_o + n\Delta y_o + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \text{.............} + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!}\Delta^r y_o \qquad \ldots\ldots (2.34)$$

وتكون هذه المتسلسلة منتهية إذا كانت البيانات تمثل حدودية. و حيث أن n هي أي قيمة عليه نكون قد وصلنا إلى صيغة الحدودية.

الآن لدينا عدة حالات:

الحالة الأولى

عندما $x_o = 0$ و $h = 1$ في هذه الحالة $n = x_n$ و يكون الجمع (2.34) هو:

$$y_n = y(x_n) = y_o + x_n \Delta y_o + \frac{x_n(x_n - 1)}{2!}\Delta^2 y_o + \ldots.. \qquad \ldots\ldots (2.35)$$

وحيث أن $n = x_n$ هي أي قيمة، عليه نضعها مساوية x ونحصل على:

$$y(x) = y_o + x\Delta y_o + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \ldots.. \qquad \ldots\ldots (2.36)$$

مثال (3.2)

أوجد صيغة الحدودية الممثلة بالبيانات بالمثال (1.2).

الحل:

نلاحظ هنا أن $x_o = 0$ و $h=1$، عليه نستطيع تطبيق العلاقة (2.36) مع مراعاة أن $y_o = 0$ ، $\Delta y_o = 1$ ، $\Delta^2 y_o = 6$ و $\Delta^3 y_o = 6$ وبذلك فإن:

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_o + x\Delta y_o + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 y_o \\
&= y_o + x(1) + \frac{(x^2 - x)}{2!}6 + \frac{(x^3 - 3x^2 + 2x)}{2!}6 \\
&= x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3
\end{aligned}$$

أي أن الحدودية هي $y(x) = x^3$.

الحالة الثانية

عندما يكون لدينا $x_o = 0$ و $h \neq 1$،عندئذ $n = \frac{x_n - 0}{h} \equiv \frac{x}{h}$ ومن العلاقة (2.34) نحصل على :

$$y(x) = y_o + \frac{x}{h}\Delta y_o + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2}{2!} y_o + ... \qquad ......(2.37)$$

مثال (4.2)

إذا كانت البيانات: (6,40)، (4,20) ، (2,8) ، (0,4) ممثلة لحدودية فأوجد صيغتها.

الحل:

نلاحظ هنا بأن $x_o = 0$ و $h=2$، عليه نطبق العلاقة (2.37) لإيجاد صيغة الدالة. ولأجل ذلك نكون الجدول الفرقي الموالي [الجدول (6.2)].

الجدول (6.2) – المثال (4.2).

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
4			
	4		
8		8	
	12		
20		8	
	20		
40			

بعد ذلك نلاحظ أن $y_o = 4\ ,\ \Delta y_o = 4\ ,\ \Delta^2 y_o = 8$، عليه من العلاقة (2.37) نرى أن:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_o + \frac{x}{h}\Delta y_o + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}-1\right)\frac{\Delta^2}{2!}y_o \\ &= 4 + \frac{x}{2}(4) + \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)\frac{8}{2} \\ &= 4 + 2x + x(x-2) = x^2 + 4 \end{aligned}$$

وهي الحدودية المطلوبة. هذا ويمكن التحقق من صحة ما توصلنا إليه من صيغة وذلك بالتعويض عن قيم $x = 0,2,4,6$ في $y(x)$ للتأكد من مطابقة قيم y المعطاة بالجدول.

الحالة الثالثة

في الحالة العامة $x_o \neq 0$ و $h \neq 1$ تستخدم العلاقة العامة (2.34).

وحيث $n = \dfrac{x_n - x_o}{h}$.

مثال (5.2)

قم بإيجاد صيغة الحدودية الممثلة بالبيانات: (8,68)، (6,40)، (4,20)، (2,8).

الحل:

هنا نرى أن $x_o = 2 \neq 0$ و $h = 2 \neq 1$ بذلك نستخدم العلاقة العامة:

$$y(x) = y_o + \frac{(x - x_o)}{h}\Delta y_o + \frac{(x - x_o)}{h}\left(\frac{(x - x_o)}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2}{2!}y_o + ...$$

ومن الجدول (7.2) نحصل على :

$$\begin{aligned} y(x) &= 8 + \frac{(x-2)}{2}12 + \frac{(x-2)}{2}\left(\frac{(x-2)}{2} - 1\right)\frac{8}{2!} \\ &= 8 + 6x - 12 + (x-2)(x-2-2) \\ &= 8 + 6x - 12 + x^2 - 6x + 8 = x^2 + 4 \end{aligned}$$

الجدول (7.2)- المثال (5.2).

y	Δy	$\Delta^2 y$
8		
	12	
20		8
	20	
40		8
	28	
68		

وهكذا حصلنا على الصيغة المطلوبة والتي تتحقق بكل نقاط البيانات.

ملاحظات هامة

1. من المفيد والمهم ملاحظة أنه يوجد تشابه بين عملية التفاضل والعملية الفرقية، فعلى سبيل المثال لو كانت لدينا حدودية من الدرجة الثانية فإن $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ ثابت وكذلك وكما لاحظنا من هذا البند $\Delta^2 y =$ ثابت . عموماً لو وجدنا ونحن نكون الجدول الفرقي أن $\Delta^m y$ قد ثبتت فإن ذلك يعني أن البيانات تمثل حدودية من الدرجة m .
2. يجب أن نضع في الحسبان دائماً أن $(n+1)$ من النقاط تكفي لتمكيننا من إيجاد المعاملات $(n+1)$ لأي حدودية من الدرجة n .
3. نستخدم المؤثر الفرقي الأمامي وكذلك الخلفي فقط في الحالات التي تكون منها قيم x متساوية التباعد (أي عندما $h =$ ثابت).
4. يجب أن لا نقبل جداول البيانات كما هي وخصوصا إذا حدث أن لم يتقارب الجدول عند لحظة ما. فمن السهل جداً أن تحدث الأخطاء من قبيل التقريب أو من خلال أخطاء مطبعية أو أن يتم تبادل القيم بالجدول أثناء إعداده ...... الخ.

5. طول الخطوة h

يكون تباعد قيم x ، عموماً، مساويا للقيمة h ، أي أنه إذا كانت إحدى القيم هي x فالقيمة الموالية هي $x+h$ والتي تليها $x+2h$ ... وهكذا. هذا هو ما نعنيه بتساوي

التباعد في قيم x و طول الخطوة h. إن اختيار طول الخطوة h مهم للغاية في حالة مسألة ما؛ حيث أن الاختيار المناسب يوفر علينا الوقت والجهد. فلو قمنا باختيار قيمة صغيرة جداً لـ h، فهذا يتسبب لنا في القيام بجهد كبير حتى نحصل على الدقة المطلوبة لحساباتنا. كما أنه في حالة اختيار قيمة كبيرة لـ h لا يمكننا إهمال الفروق من الرتب العليا.

في أغلب الصيغ شائعة الاستعمال يتم إهمال الفروق من الرتب الأعلى من الرتبة الرابعة؛ عليه نختار h على هذا الأساس. ولنوضح أهمية اختيار h دعنا نأخذ في الاعتبار الدالة $y = e^x$. عندئذ نرى أن:

$$\Delta y = e^{x+h} - e^x = e^x\left(e^h - 1\right) \quad \text{و} \quad \Delta^2 y = e^{x+h}\left(e^h - 1\right) - e^x\left(e^h - 1\right) = e^x\left(e^h - 1\right)^2$$

كما أنه لأي عدد صحيح موجب n نحصل على : $\Delta^n y = e^x\left(e^h - 1\right)^n$

فإذا أردنا أن يؤول $\Delta^n y$ إلى الصفر عندما تتزايد قيمة n، يجب أن نختار h بحيث تحقق $e^h - 1 < 1$ أي أن تحقق h المتباينة $h < 0.69$.

وهذا بالتأكيد يعني أنه لو كانت $h > 0.69$ فإن الجدول الفرقي لن يتقارب. نلاحظ هنا ولهذا المثال أنه لو كانت $h << 1$ (صغير جداً) فإن $e^h - 1 \approx h$ وبذلك فإن $\Delta y = hy$ و $\Delta^n y = h^n y$؛ وهكذا نرى من هذه الصيغ للفروق مقدار الجهد الذي سيبذل في مثل هذه الحالة من الحسابات.

وعموماً وعندما نتحدث عن أهمية اختيار طول الخطوة h نرى أنه لو جعلنا

$h \to 2h$ فإن $y_1 - y_o \to y_2 - y_o$ و $\Delta \to 2\Delta$. كذلك لو جعلنا $h \to \frac{1}{2}h$ فإن $E \to E_1$ وحيث $E_1 = E^{1/2} = (1+\Delta)^{\frac{1}{2}} \equiv 1 + \Delta_1$ وحيث ...... $\Delta_1 = \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^2 +$.

أي أنه عندما نجعل $h \to \frac{1}{2}h$ فإن $\Delta \to \frac{1}{2}\Delta$ تقريباً و $\Delta^2 \to \frac{1}{4}\Delta^2$ و هكذا.

6. أسلوب δ^2

إذا كانت $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتابعة متقاربة وبحيث $x_n = a + br^n$ فإن النهاية a للمتتابعة يمكن إيجادها بطريقة (أو أسلوب) يسمى بأسلوب δ^2 ونوضح عمل و استخدام هذه الأسلوب كما يلي:

حيث أن :

$$\delta^2 x_n = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} \qquad ......(2.38)$$

وحيث أن:

$$x_n = a + br^n \qquad ......(2.39)$$

عليه فإن:

$$\delta^2 x_n = b(1-r)^2 r^{n-1} \qquad ......(2.40)$$

ومن المعادلة (2.39) نرى أن:

$$(x_{n+1} - x_n)^2 = b^2(1-r)^2 r^{2n} \qquad ......(2.41)$$

عليه من (2.40) و (2.41) نحصل على :

$$x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{\delta^2 \; x_n} = x_{n+1} - br^{n+1} = a \qquad \ldots\ldots (2.42)$$

وهكذا نرى من المعادلة (2.42) و المعادلة (2.40) بأنه يمكننا الحصول على قيمة النهاية a وذلك باستخدام ثلاثة قيم من المتتابعة وهي x_{n-1} , x_n و x_{n+1} .

مثال (6.2)

استخدم أسلوب δ^2 لحساب نهاية المتتابعة:

$$\left\{ 3/2 , 5/4 , 9/8 , 17/16 , 33/32 , \ldots \right\}$$

وذلك بالأخذ في الاعتبار الحدود x_3 , x_4 و x_5 .

الحل:

نلاحظ أن :

$$x_5 = \frac{33}{32} , \; x_4 = \frac{17}{16} , \; x_3 = \frac{9}{8}$$

كما أن :

$$\begin{aligned} \delta^2 x_4 &= x_5 - 2x_4 + x_3 \\ &= \frac{33}{32} - 2\left(\frac{17}{16}\right) + \frac{9}{8} = \frac{33 - 68 + 36}{32} = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

و أن :

$$(x_5 - x_4)^2 = \left(\frac{33}{32} - \frac{17}{16}\right)^2 = \left(\frac{1}{32}\right)^2$$

وبذلك فإن :

$$\frac{(x_5 - x_4)^2}{\delta^2 x_4} = \left(\frac{1}{32}\right)^2 \div \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

وعليه نرى أن قيمة نهاية المتتابعة a هي:

$$a = x_5 - \frac{(x_5 - x_4)^2}{\delta^2 x_4} = \frac{33}{32} - \frac{1}{32} = \frac{32}{32} = 1$$

ويمكن التحقق من ذلك لو دققنا في حدود المتتابعة حيث نرى أن :

$$x_n = \frac{2^n + 1}{2^n} \quad , \quad n = 1,2,3,4,.........$$

وبذلك فإن :

$$a = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^n + 1}{2^n} \right) = 1$$

3.2 الفرق المقسم

حتى الآن اعتدنا على استخدام قيم للمتغير x متساوية التباعد ولكن يمكننا أيضا استخدام أي قيم لـ x . أي أنه ليس من الضروري أن تكون x متساوية التباعد. وفي مثل هذه الحالات نستعمل مؤثراً جديداً و هو المؤثر الفرقي المقسم. ونبدأ بالتعريفات الضرورية التالية:

يعرف الفرق المقسم الأول لـ y_o و y_1 من خلال العلاقة:

$$f(x_o, x_1) \equiv [x_o, x_1] = \frac{(y_o - y_1)}{x_o - x_1} = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} \qquad ......(2.43)$$

ومباشرة نستنتج من (2.43) أن:

$$y_o = y_1 + (x_o - x_1)[x_o, x_1] \qquad \ldots\ldots (2.44)$$

بالمثل يعطي الفرق المقسم الثاني لـ y_o ، و y_1 ، و y_2 بالعلاقة:

$$[x_o, x_1, x_2] = \frac{\{[x_o, x_1] - [x_1, x_2]\}}{(x_o - x_2)} \qquad \ldots\ldots (2.45)$$

وتكون y_o معطاة بالمعادلة:

$$y_o = y_1 + (x_o - x_1)[x_1, x_2] + (x_o - x_1)(x_o - x_2)[x_o, x_1, x_2] \qquad \ldots\ldots (2.46)$$

عموماً نعرف الفرق المقسم النوني (من الرتبة n) بالعلاقة:

$$[x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{\{[x_o, x_1, \ldots\ldots, x_{n-1}] - [x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n]\}}{(x_o - x_n)} \qquad \ldots\ldots (2.47)$$

كما نستطيع أن نستنتج أن:

$$\begin{aligned} y_o = y_1 &+ (x_o - x_1)[x_1, x_2] + (x_o - x_1)(x_o - x_2)[x_1, x_2, x_3] + \ldots \\ &+ (x_o - x_1)\ldots(x_o - x_{n-1})[x_1, \ldots, x_n] \\ &+ (x_o - x_1)(x_0 - x_1)..(x_o - x_n)[x_o, x_1, \ldots, x_n] \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (2.48)$$

يمكننا أيضاً، وكما سبق بالنسبة للفروق الأمامية، إثبات أن تطبيق الفرق المقسم النوني على كثير حدودية من الدرجة n يؤدي إلى ثابت. ذلك يتجلى من معالجة الدالة x^m ، حيث أن الفرق المقسم الأول هو :

$$[x, x_1] = \frac{(x^m - x_1^m)}{(x - x_1)} = x^{m-1} + x_1 x^{m-2} + ... + x_1^{m-1}$$

وهي حدودية من الدرجة $m-1$.

الآن من المعادلة (2.48)، نرى أنه لو لائمنا الدالة y بحدودية $f(x)$ من الدرجة $n-1$ فإنه يمكننا كتابه y على الصورة:

$$y = f(x) + (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)[x, x_1, ..., x_n] \quad ......(2.49)$$

وحيث $f(x)$ معطاة بالعلاقة:

$$f(x) = y_1 + (x - x_1)[x_1, x_2] + ... + (x - x_1)......(x - x_{n-1})[x_1, ..., x_n] \quad ......(2.50)$$

مثال (7.2)

إذا كانت $y = \frac{1}{x}$ و $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ و $x_3 = 3$ فقم بملائمة y بحدودية من الدرجة الثانية. ما هي ملاحظاتك؟

الحل:

نلاحظ أن $y_1 = \frac{1}{1}$ و $y_2 = \frac{1}{2}$ و $y_3 = \frac{1}{3}$ وبذلك نكون الجدول الفرقي – الجدول (8.2) - لنجد بأن:

$$f(x) = y_1 + (x-1)[1,2] + (x-1)(x-2)[1,2,3]$$
$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{3}(x-1)(x-2)$$
$$f(x) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x^2$$

الجدول (8.29) –المثال (7.2).

x	y	$[x_1, x_2]$	$[x_1, x_2, x_3]$
1	1		
		$1/2$	
2	$\frac{1}{2}$		$-1/3$
		$-1/6$	
3	$\frac{1}{3}$		

ونلاحظ هنا أنه أمكننا تمثيل دالة ؛لا تمت للحدوديات بأي صلة وهي $\frac{1}{x}$ ؛ بحدودية من الدرجة الثانية.

كما نلاحظ أنه لو حسبنا $f(x)+(x-1)(x-2)(x-3)[x,1,2,3]$ فإننا نصل إلى الدالة الأصلية $y=\frac{1}{x}$.

للتحقق من ذلك دعنا نحسب الحد:

$$(x-1)(x-2)(x-3)[x,1,2,3]$$

ولكي نقوم بذلك نحسب $[x,1,2,3]$ وهذا هو :

$$[x,1,2,3]=\frac{[x,1,2]-[1,2,3]}{x-3}$$
$$\Rightarrow (x-3)[x,1,2,3]=[x,1,2]+1/3$$

ولكن: $[x,1,2]=\dfrac{[x,1]-[1,2]}{(x-2)}$

عليه فإن:

$$(x-2)(x-3)[x,1,2,3]=[x,1]-[1,2]+\tfrac{1}{3}(x-2)=\frac{y-1}{x-1}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}(x-2)$$

و هذا يؤدي إلى:

$$(x-1)(x-2)(x-3)[x,1,2,3]=y-1-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{3}(x-1)(x-2)$$

و بذلك نحصل على:

$$y=f(x)+(x-1)(x-2)(x-3)[x,1,2,3]=\frac{1}{x}$$

مثال (8.2)

إذا كانت النقاط الموالية تمر بحدودية من الدرجة الثانية فأستخدم الفرق المقسم (المعادلة (2.50)) لإيجاد صيغة الحدودية المذكورة.والنقاط هي : (0,4) و(1,5) و (-1,5).

الحل

نكون الجدول الفرق المقسم [الجدول (9.2)] ثم نحسب $f(x)$ لنجد أن :

$$f(x)=5+(x+1)[-1,1]+(x+1)(x-1)[-1,1,0]$$
$$f(x)=5+(x+1)(0)+(x+1)(x-1)(1)=x^2+4$$

وحيث نلاحظ أن h ليست ثابتة هنا.

ونلاحظ أيضاً أنه حتى لو استعملنا أكثر من ثلاثة نقاط فإننا نتوصل إلى نفس الإجابة وهذا ما نوضحه كما يلي:

الجدول (9.2)–المثال (8.2)

x	y	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
-1	5		
		0	
1	5		1
		1	
0	4		

لتكن النقاط المارة بالحدودية هي: (4,20) و (0,4) و (1,5) و (−1,5).

نكون الجدول الفرقي المقسم بالجدول (10.2).

الجدول (10.2)–المثال(8.2) بنقطة إضافية

x	y	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	
-1	5			
		0		
1	5		1	
		1		0
0	4		1	
		4		
4	20			

الآن نوجد $f(x)$ وحيث نرى أن:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5+(x+1)[-1,1]+(x+1)(x-1)[-1,1,0]+(x+1)(x-1)(x-0)[-1,1,0,4] \\ &= 5+(x+1)(0)+(x^2-1)[1]+x(x^2-1)(0) \\ &= x^2+4 \end{aligned}$$

وهكذا نرى أنه قد توصلنا إلى نفس النتيجة .

في ختام هذا الفصل نشير إلى امتداد مبرهنة برول؛ ونترك برهانها كتمرين للطالب، وذلك لكي نكتب y في صيغتها النهائية باستخدام هذه المبرهنة والنتيجة التي توصلنا إليها سابقاً بالمعادلة (2.49).

امتداد مبرهنة برول

إذا كانت $f(x)$ دالة حقيقية ومعرفة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للتفاضل k من المرات في $[a,b]$ فإنه يوجد عدد $\zeta \in (a,b)$ بحيث يكون:

$$[x, x_1,....., x_k]=\frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}$$

باستخدام هذه المبرهنة والمعادلة (2.49) يمكننا كتابة y على الصورة:

$$y= f(x)+(x-x_1)(x-x_2).......(x-x_n)\frac{y^{(n)}(\zeta)}{n!}$$

وحيث :

$$i=0,1,......,n \quad ; \quad \zeta \in [\min x_i , \max x_i]$$

تمارين (2)

1. أثبت صحة ما يلي:

(أ) $\Delta(c)=0$ وحيث c ثابت.

(ب) $\nabla(x)=h$.

(ج) $\nabla^3(a\,x^2)=0$ وحيث a ثابت، ماذا عن قيم المؤثر الفرقي من رتبة أعلى من 3.

2. أثبت أن $\nabla^{n+1}P_n(x)=0$ و حيث $P_n(x)$ حدودية من الدرجة n .

3. كون الجدول الفرقي للدالة x^4 وذلك باستخدام القيم $x=0,0.1,0.2,0.3,0.4$ ، ثم أمده حتى $x=1$ وذلك باستخدام خصائص المؤثرات الفرقية الأمامية أو الخلفية.

4. ما هي درجة الحدودية الممثلة بالبيانات التالية:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	6	13	32	69	130	221

5. ما هي صيغة الحدودية التي تمر بالنقاط التالية:

$(6,11)$ ، $(4,0)$ ، $(2,7)$ ، $(0,10)$. أحسب $P(8)$.

6. إذا كان $y=x^n$ و $h=1$ فأثبت أن $\Delta^n y=n!$.

7. كون الجدول الفرقي للدالة $\sqrt{x}$ للقيم $1\le x\le 5$ بحيث تكون $h=1$ مرة و $h=\frac{1}{2}$ مرة أخرى. قارن أعمدة الفروق الثانية بالجدولين.

8. ما هي الحدودية التي تمر بالنقاط:

(0,7)، (0.1,7.164)، (0.2,7.272)، (0.3,7.348)، (0.4,7.416)، (0.5,7.5)

9. كون الجدول الفرقي لقيم y المعطاة أسفله.

k	0	1	2	3	4	5	6
y_n	0	1	16	81	256	625	1296

10. أوجد وصحح الخطأ الوحيد بالقيم التالية:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
y_k	0	0	1	6	24	60	120	210

11. استعمل الخواص الخطية للمؤثر الفرقي لإثبات أنه في حالة $y_k = k^3$ فإن $\Delta\, y_k = 3k^2 + 3k + 1$ و $\Delta^2\, y_k = 6k + 6$. ما هي ملاحظاتك؟

12. أثبت أنه إذا كان $y_k = c^k$ فإن $\Delta\, y_k = e^k(c-1)$.

13. أثبت أن: $\Delta(\sin k) = 2\sin\frac{1}{2}\cos\left(k + \frac{1}{2}\right)$.

14. احسب القيم الناتجة لـ y_k من الفروق الأولى المعطاة:

k	0		…		…		…		…		…		…
Δy_k		1		2		4		7		11		16	

15. أثبت أن $\mu\delta\ y_n = \delta\ \mu\ y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n+1} - y_{n-1}\right)$.

16. إذا كان x_n هو مجموع n من الحدود الأولى للمتسلسلة:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}............$$

فطبق أسلوب δ^2 على S_6 و S_7 و S_8 . قارن النتيجة التي تحصلت عليها بالعدد $\pi/4$.

17. أوضح أن $\delta \equiv \Delta(1+\Delta)^{-\frac{1}{2}} \equiv \nabla(1+\nabla)^{-\frac{1}{2}}$.

18. أثبت ما يلي:

(أ) $\Delta^3 y_o = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_o$.

(ب) $\delta^4 y_o = y_2 - 4y_1 + 6y_o - 4y_{-1} + y_{-2}$

19. أثبت أن $\mu\delta$ و $\Delta\left(1+\frac{1}{2}\Delta\right)(1+\Delta)^{-1}$ متكافئان وذلك باستعمال المؤثر E .

20. أثبت أنه إذا كان $P(x) = x^2 + 2x$ فإن $[x, x_1, x_2]$ مقدار ثابت لأي قيمة x .[x_1 و x_2 نقطتان ثابتتان].

21. خذ في الاعتبار الدالة $y = \frac{1}{x^2}$ ، ولو أن $x = 1$ ، $x_2 = 2$ و $x_3 = 3$. فقم بملائمة الدالة لحدودية من الدرجة الثانية. ثم تحقق من أن $y = \frac{1}{x^2}$ باستعمال المعادلة **(2.49)**.