الفصل الثالث

الاستكمال

يحتوي هذا الفصل على:

- 1.3 تقديم.
- 2.3 قانون نيوتن الفرقي الأمامي.
- 3.3 قوانين أخرى.
- 4.3 حدودية لاجرانج الاستكمالية.

1.3 تقديم

تتلخص عملية الاستكمال (أو التوليد) في أنها تلك العملية التي تقوم بتقدير قيمة y التي تماثل (أو تناظر) قيمة جديدة للمتغير x وذلك باستخدام قيم y المعلومة لمجموعة من قيم x. وهذه العملية لابد وأن تتم بناء على أسس متينة وليس بشكل اعتباطي أو بمجرد النظر والتخمين. ولنؤكد على ذلك دعنا نضرب المثال التالي:

مثال (1.3)

لو أن $y(0)=0$ و $y(1)=2$ و $y(2)=4$ و $y(5)=10$ فإنه ربما نقاد للاعتقاد بأن $y(3)=6$ أو أن $y(4)=8$ ، أي أنه ربما اعتقدنا بأن الدالة هي $y(x)=2x$.

ولكن هذا غير صحيح دائماً، فالعلاقة:

$$y(x)=2x+x(x-1)(x-2)(x-5)$$

تعطى القيم المذكورة أعلاه والمعطاة ولكن $y(3)=-6$ و $y(4)=-16$ ،أي أن $y(3)\neq 6$ و $y(4)\neq 8$.

من المثال السابق نرى أننا بحاجة إلى معلومات كافية حتى نحصل على الجواب الصحيح؛ وهذا هو بالضبط ما نقوم به في عملية الاستكمال. والاستكمال نوعان استكمال داخلي وخارجي وبذلك نعني استكمال الجدول من الداخل أو من الخارج؛ أي بمعنى أن x تقع داخل مدى الجدول الفرقي أو خارجه. وعموماً سوف نستعمل دائماً كلمة الاستكمال وكفى.

نبدأ أولاً بالاستكمال الخطي كتمهيد للموضوع وحيث نهمل الفروق الثانية وما

أرقى منها في هذه الحالة تكون y_p ، والتي تمثل قيمة y المناظرة لقيمة x التي نسعى لمعرفة y المقابلة لها؛ أي أن $y_p = y(x_p)$ ، معطاة بالعلاقة:

$$y_p = y_o + p\,\Delta\, y_o \qquad \ldots\ldots (1.3)$$

وحيث $x_p = x_o + p\,h$

والاستكمال الخطي ما هو إلاّ حالة خاصة من قانون نيوتن الفرقي الأمامي كما سنرى في البند الموالي ولا نعتد به كثيراً في حساباتنا.

مثال (2.3)

لو حسبنا $y = e^x$ لعدة قيم من x وأردنا حساب y عند $x = 2.01$ ، فإننا نرى من الجدول (1.3) أسفله أن:

$h = 0.2$ ، $x_o = 2.00$ و $x_p = 2.01$ وبذلك فإن $p = \frac{1}{2}$ ، عليه باستخدام الاستكمال y الخطي نحصل على:

$$y_p = 7.3891 + \frac{1}{2}(0.1492) = 7.4637$$

وحيث نلاحظ أن $\Delta\, y_o = 0.1492$.

الجدول (1.3) – المثال (2.3)

x	$y=e^x$	Δy
2.00	7.3891	
		0.1492
2.02	7.5383	
		0.1523
2.04	7.6906	

مثال (3.3)

لو كانت لديك البيانات الموالية: $(0,1),(1,2),(2,5),(3,10)$ أحسب $y(1.5)$ باستعمال الاستكمال الخطي.

الحل:

نكون الجدول (2.3) أسفله ونلاحظ أن $x_o=0$ و $x_p=1.5$ كما أن $h=1$ ، بذلك فإن : $p=1.5$ ، كما أن $\Delta y_o=1$ و $y_o=1$ عليه فإن:

$$y(1.5)=y_o+\Delta y_o=1+(1.5)(1)=2.5$$

الجدول (2.3) – الجدول فرقي للمثال (3.3)

x	y	Δy
0	1	
		1
1	2	
		3
2	5	
		5
3	10	

في هذا المثال يمكن أيضا اعتبار أن $x_o = 2$ و $y_o = 2$ وبذلك فإن $p = \frac{1}{2}$ ونرى أن :

$$y(1.5) = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)3 = 3.5$$

وهكذا نرى التفاوت في النتيجتين وهو أمر يدعو إلى الدهشة. ولكن هذه الدهشة سوف تزول إذا ما تذكرنا بأن الاستكمال الخطي ما هو إلاّ تقريب أولي؛ كما أن اختيارنا يجب أن يكون بحيث:

$$0 < |p| < 1 \qquad \ldots\ldots (2.3)$$

ولهذا المثال لو قمنا بإيجاد صيغة الحدودية الممثلة لهذه البيانات فإننا سوف نحصل على : $y = 1 + x^2$ وبذلك فإن $y(1.5) = 3.25$ وهي القيمة الدقيقة والمتوقعة. ونرى أيضا أن القيمة المحسوبة باستخدام $y_o = 2$ و $p = \frac{1}{2}$ أقرب إلى هذه القيمة. وهذا يتمشى مع العلاقة (2.3).

مما تقدم وكما ذكرنا سابقاً سوف لن نعتد كثيراً بطريقة الاستكمال الخطي.

2.3 قانون نيوتن الفرقي الأمامي

لقد سبق وأن رأينا بالفصل الثاني أن:

$$y(x) = f(x) + (x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots\ldots(x - x_n)\frac{y^{(n)}(\zeta)}{n!} \qquad \ldots\ldots (3.3)$$

وحيث أن $f(x)$ معطاة بالعلاقة:

$$\begin{aligned} f(x) &= y_1 + (x - x_1)[x_1, x_2] + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (x - x_1)\ldots(x - x_n)[x_1, x_2, \ldots., x_n] \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (4.3)$$

ولو أننا نستطيع إهمال $y^{(n)}(\zeta)$ فإنه يمكننا حساب $y(x)$ لأي قيمة x في الفترة المطلوبة.

لنركز الآن على الحالة التي يكون فيها $x = x_1 + nh \quad (n = 0,1,2,........)$ ؛ أي أن قيم x متساوية التباعد. عندئذ نستطيع حساب الفروق المقسمة كالآتي:

$$[x_1, x_2] = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = \Delta y/h \qquad ......(5.3)$$

و

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_2, x_3] - [x_1, x_2]}{x_1 - x_3} = \frac{\frac{\Delta y_2}{h} - \frac{\Delta y_1}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 y_1}{2!\, h^2} \qquad ......(6.3)$$

و

$$[x_1, x_2, ..., x_{r+1}] = \frac{\Delta^r y_1}{r!\, h^r} \qquad ......(7.3)$$

ولو كانت القيمة المراد حساب الدالة y عندها هي $x_p = x_1 + ph$ ؛ فإن:

$$(x - x_1) = (x_p - x_1) = (x_1 + ph - x_1) = ph \qquad ......(8.3)$$

و

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) &= (x_1 + ph - x_1)(x_1 + ph - x_1 - h) \\ &= ph(p-1)h = p(p-1)h^2\end{aligned} \qquad ......(9.3)$$

و

$$(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_r) = p(p-1)....(p - r + 1)h^r \qquad ......(10.3)$$

وهكذا .....

وباستخدام المعادلات (5.3) – (7.3) و المعادلات (8.3) – (9.3) والتعويض بها في (3.3) مع الأخذ في الاعتبار (3.4) نحصل على:

$$\begin{aligned} y_p = y_1 + p\Delta y_1 + p(p-1)\frac{\Delta^2 y_1}{2!} + \ldots\ldots \\ + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+2)\Delta^{n-1} y_1}{(n-1)!} \\ + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)h^n}{n!} y^{(n)}(\zeta) \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (11.3)$$

ولنبين الكيفية التي وصلنا بها إلى المعادلة (11.3) استنادا للمعادلات المذكورة سابقاً نرى (مثلا) أن:

$$\begin{aligned} (x-x_1)(x_1-x_2)[x_1, x_2, x_3] &= p(p-1)h^2\left(\frac{\Delta^2 y_1}{2!\,h^2}\right) \\ &= \frac{p(p-1)\Delta^2 y_1}{2!} \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (12.3)$$

وبالمثل نصل إلى صيغ مماثلة بالنسبة إلى بقية الحدود.

والعلاقة (11.3) هي ما نسميها بصيغة (أو قانون) نيوتن للفروق الأمامية. ويمثل الحد الأخير ما نسميه بالمتبقي ويمكن إهماله إذا ما كانت $y^{(n)}(\zeta)$ صغيرة جداً.

ملاحظات:

1. يعطى مفكوك $(1+\Delta)^p y_1$ قيمة y_p ولكن بدون متبقي، أي في شكل متسلسلة لانهائية.

2. يكون المتبقي مساوياً للصفر في الحالة التي تكون فيها البيانات ممثلة لحدودية. في هذه الحالة تكون المتسلسلة منتهية وعدد حدودها يعتمد على درجة الحدودية.

3. يستخدم قانون نيوتن عادة عندما يكون $0 < p < 1$ وذلك حتى يتم الحصول على تقارب سريع.

مثال (4.3)

أعد حل المسألة بالمثال السابق (3.3) باستعمال قانون نيوتن الفرقي الأمامي.

الحل:

من البيانات المعطاة نكون الجدول الفرقي الأمامي أسفله، وندرس هنا الحالتين:

أولاً:

لو أن $y_1 = 1$ ، عندئذ $p = 1.5$ ومن الجدول (3.3) أو قانون نيوتن الفرقي الأمامي نجد أن:

$$\begin{aligned}
y_p &= y(1.5) \\
&= y_1 + (1.5)\Delta y_1 + \frac{(1.5)(1.5-1)}{2}\Delta^2 y_1 \\
&= 1 + (1.5)(1) + \frac{(1.5)(0.5)}{2}(2) \\
&= 3.25
\end{aligned}$$

الجدول (3.3) – المثال (4.3)

y	Δy	$\Delta^2 y$
1		
	1	
2		2
	3	
5		2
	5	
10		

ثانياً:

لو أن $y_1 = 2$ ، عندئذ $p = 0.5$ ، كما أن:

$$y_p = y_1 + p\,\Delta y_1 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_1$$
$$= 2 + (0.5)(3) + \frac{(0.5)(0.5-1)}{2}(2) = 3.5 - 0.25 = 3.25$$

وهكذا نرى أنه قد تحصلنا على نفس النتيجة وهي النتيجة المتوقعة للحالتين.. غير أنه لابد من التنويه بأن استخدام p بحيث تحقق المتباينة (2.3) هو الذي يقود إلى الإجابة المطلوبة والصحيحة.

نلاحظ هنا أيضاً بأن قانون نيوتن الفرقي الأمامي قاد إلى الإجابة المتوقعة والصحيحة. وهذا يوضح أهمية وقوة هذا القانون.

مثال (5.3)

قيست المسافة الرأسية y لجسم ساقط تحت تأثير الجاذبية بدلالة الزمن فكانت كما هو معطى بالجدول المرافق، احسب المسافة y عندما $t = 0.2\,s$.

الجدول (4.3) – قيم المسافة الرأسية لجسم ساقط

t(s)	0	2	4	6	8
y(m)	0	19.6	78.4	176.4	313.6

الحل:

نكون الجدول الفرقي (5.3) ونلاحظ أن $h = 2$ و $t_p = 0.2$ و $t_1 = 0$، بذلك فإن $p = \frac{t_p - t_1}{h} = 0.1$ ومن الجدول الفرقي نرى أن $y_1 = 0$ و $\Delta y_1 = 19.6$ و $\Delta^2 y_1 = 39.2$ بذلك ومن قانون نيوتن الفرقي الأمامي نجد أن:

$$y_p = y(0.2) = y_1 + p\,\Delta y_1 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_1$$

الجدول (5.3) – المثال (5.3)

y	Δy	$\Delta^2 y$
0		
	19.6	
19.6		39.2
	58.8	
78.4		39.2
	98.0	
176.4		39.2
	137.2	
313.6		

أي أن:

$$\begin{aligned} y_p &= y(0.1) = 0 + (0.1)(19.6) + \frac{(0.1)(0.1-1)}{2}39.2 \\ &= 1.96 - 1.764 = 0.196\ m \end{aligned}$$

مرة أخرى، وحيث أن الجدول يدلل على أن البيانات ممثلة لحدودية من الدرجة فإنه يمكننا إيجاد صيغتها، ولو قمنا بذلك فإننا نحصل على: $y = 4.9\ t^2$ ولو عوضنا بالقيمة $t = 0.2$ فإننا نحصل على $y = 0.196\ m$ وهي نفس النتيجة التي تم التوصل إليها باستعمال قانون نيوتن الأمامي.

3.3 قوانين أخرى

في هذا البند نعطي بعض القوانين الأخرى ذات العلاقة بالاستكمال؛ غير أننا لن نعطي إلا برهان قانون بيسل وذلك لتوضيح الكيفية التي يتم بها التوصل إلى هذه القوانين. وهذه القوانين هي:

[أ] قانون جاوس الأمامي

في هذه الحالة تكون y معلومة لعدد $(2n+1)$ من النقاط وهي تلك عند $x_0, x_{\pm1}, x_{\pm2}, \ldots\ldots x_{\pm n}$. بنفس الطريقة نحسب الفروق المقسمة على النحو:

$$[x_0, x_1] = \frac{\delta\ y_{1/2}}{h} \qquad \ldots\ldots (13.3)$$

و

$$[x_o, x_1, x_2] = \frac{\delta^2 y_1}{(2!\, h^2)} \qquad \ldots\ldots (14.3)$$

و ...... إلخ.

وباستخدام العلاقات (8.3) – (10.3) نحصل على:

$$\begin{aligned} y_p &= y_o + p\delta\ y_{1/2} + \frac{1}{2} p(p-1)\delta^2 y_o \\ &+ (p+1)p(p-1)\frac{\delta^3}{3!} y_{1/2} + \ldots \end{aligned} \qquad \ldots\ldots (15.3)$$

وهو قانون جاوس الأمامي. لاحظ أننا نستخدم هنا الفروق المركزية.

[ب]قانون جاوس الخلفي

بنفس الطريقة المذكورة آنفاً نستطيع أن نكتب قانون جاوس الخلفي والذي ينص على :

$$y_p = y_o + p\delta\ y_{-1/2} + \binom{p+1}{2}\delta^2 y_o + \binom{p+1}{3}\delta^3 y_{-1/2} + \ldots \qquad \ldots\ldots (16.3)$$

وحيث $\binom{n}{r}$ هي معاملات ذات الحدين، أي أن $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

[ج] قانون سترلنج

لو استعملنا مرة أخرى النقاط عند $x_0, x_{\pm1}, x_{\pm2}, \ldots\ldots x_{\pm n}$ وصيغة مماثلة للصيغة (4.3) فإننا نستطيع أن نكتب y على الصورة:

$$y_p = y_o + (x-x_0)[x_o, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)[x_{-1}, x_o, x_1] + (x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)[x_{-1}, x_o, x_1, x_2] + (x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x_{-2}, x_{-1}, x_o, x_1, x_2] + \dots \quad \dots\dots (17.3)$$

وبحساب الحدود $(x-x_0)$ و $(x-x_0)(x-x_1)$ و $(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)$ و ...... إلخ.

وكذلك الحدود المضروبة فيها على النحو:

$$[x_o, x_1] = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} = \frac{\delta \; y_{1/2}}{h} \quad \dots\dots (18.3)$$

و

$$[x_{-1}, x_o, x_1] = \frac{[x_{-1}, x_o] - [x_o, x_1]}{x_{-1} - x_1} = \frac{\delta^2 \; y_o}{2!\,h^2} \quad \dots\dots (19.3)$$

و

$$[x_{-1}, x_o, x_1, x_2] = \frac{\delta^3 \; y_{1/2}}{3!\,h^3} \quad \dots\dots (20.3)$$

و

$$[x_{-2}, x_{-1}, x_o, x_1, x_2] = \frac{\delta^4 \; y_0}{4!\,h^4} \quad \dots\dots (21.3)$$

وبالتعويض في (17.3) نحصل على:

$$y_p = y_o + p\,\mu\,\delta \; y_o + p^2 \frac{\delta^2 y_o}{2!} + p(p^2+1)\frac{\mu\delta^3}{3!} y_o + p^2(p^2-1)\frac{\delta^4}{4!} y_o + p(p^2-1)(p^2-4)\frac{\mu\delta^5}{5!} y_o + \dots \quad \dots\dots (22.3)$$

وحيث استعملنا العلاقات:

$$\mu\delta\ y_o = \frac{1}{2}\left(\delta\ y_{1/2} + \delta\ y_{-1/2}\right) \qquad \ldots\ldots (23.3)$$

و

$$\mu\delta^3\ y_o = \frac{1}{2}\left(\delta^3\ y_{1/2} + \delta^3\ y_{-1/2}\right) \qquad \ldots\ldots (24.3)$$

والعلاقة (22.3) هي ما نسميها بقانون سترلنج.

ويستعمل هذا القانون خاصة عندما يكون $-\frac{1}{4} < p < \frac{1}{4}$.

مثال (6.3)

لو كانت لديك البيانات الموالية فاستعمل قانون سترلنج لحساب $y(0.1)$ ، تحقق من صحة إجابتك. والبيانات هي:

$$(0,1), (\pm 1,2), (\pm 2,5)$$

الحل:

نلاحظ هنا أن $h = 1$ و $x_p = 0.1$ و $x_o = 0$ وبذلك فإن $p = \frac{x_p - x_o}{h} = 0.1$ ، نكون الجدول الفرقي المركزي (6.3) أسفله لنرى أن:

$\delta\ y_{1/2} = 1$ و $\delta\ y_{-1/2} = -1$ وبذلك فإن:

$$\mu\delta\ y_o = \frac{1}{2}(1 + (-1)) = 0$$

وكذلك نرى أن:

$$\delta^2 \ y_o = 2$$

ومن قانون سترلج نجد أن:

$$y_p = y(0.1) = y_o + (0.1)\mu\delta \ y_o + (0.1)^2 \frac{\delta^2 y_o}{2!}$$
$$= 1 + (0.1)(0) + (0.01)\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1.01$$

الجدول (6.3) – المثال (6.3)

y	y	$\delta\ y_{1/2}$	$\delta^2\ y_o$
-2	5		
		-3	
-1	2		2
		-1	
0	1		2
		1	
1	2		2
		3	
2	5		

الآن لو قمنا بإيجاد صيغة الحدودية الممثلة لهذه البيانات والتي هي من الدرجة الثانية، كما هو واضح من العمود الأخير من الجدول (6.3)، فإننا نحصل على: $y = 1 + x^2$ وبالتعويض عن $x = 0.1$ نجد أن: $y = 1.01$. وهكذا نرى أن قانون سترلج أعطانا النتيجة المتوقعة، وهو بذلك من القوانين المهمة والفعالة.

ننوه هنا وفي ختام هذا البند بأن مجموعة القوانين التي قدمنا لها ونحن بصدد دراسة الاستكمال ما هي إلا أمثلة على سبيل الذكر لا الحصر. وسوف نكتفي بهذا القدر لنتجه إلى دراسة أسلوب للاستكمال يعتبر الأعم و الأشمل وهو استخدام حدودية لاجرانج الاستكمالية ذات n من النقاط.

4.3 حدودية لاجرانج الاستكمالية

تعتبر هذه الطريقة معالجة مختلفة في الاستكمال وذلك من ناحية الأسلوب والشمولية حيث أنها تصلح لأي قيم في x متساوية التباعد أو غير ذلك.

فلو أنه كانت لدينا n من النقاط وهي :

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)........, (x_n, y_n)\}$$

فإننا نكون الحدوديات (من الدرجة $n-1$) التالية:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots\cdots(x-x_n)}{(x-x_1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(x-x_n)} \qquad \ldots\ldots (25.3)$$

وحيث نلاحظ أن عدد الحدود بالبسط هو $n-1$ وللحدودية $L_i(x)$ لا يوجد الحد $(x-x_i)$ والسبب واضح من صيغة المقام بالحدودية. ونلاحظ أن عدد الحدوديات من النوع (25.3) هو n ، ذلك لأن $i = 1,2,......., n$.

كما نلاحظ أن $L_i(x_j) = 0$ عندما $i \neq j$. وأن $L_i(x_i) = 1$ ، أي أن:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad \ldots\ldots (26.3)$$

كذلك نرى أنه لو كونا الحدودية:

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}L_i(x)y_i \qquad \ldots\ldots (27.3)$$

فإن:

$$L(x_j)=\sum_{i=1}^{n}L_i(x_j)y_i=\sum_{i=1}^{n}\delta_{ij}\,y_i=y_j$$

لكل $j=1,2,\ldots n$.

وبذلك نستطيع كتابة $y=L(x)=\sum_{i=1}^{n}L_i(x)y_i$ ؛ ونلخص ما توصلنا إليه كما يلي:

((يمكن تمثيل أي مجموعة نقاط بحدودية من الدرجة $n-1$ وحيث n هو عدد النقاط، وتعطى صيغة الحدودية بالعلاقة (27.3))).

أي أن النقاط المعطاة تمر بحدودية من الشكل (27.3). و $L(x)$ المعرفة بالمعادلة (27.3)؛ وهي ما نسميها بحدودية لاجرانج ذات n من النقاط. وهي صالحة لأي مجموعة من قيم x بغض النظر عن تباعدها.

نلاحظ أيضا أن الحدودية (27.3) صالحة للاستعمال لأي دالة y . هذا يعني إمكانية تطبيقها على الدالة $y=k$ (وحيث k ثابت)، هذا يعني أن:

$$L(x)=k=k\sum_{i=1}^{n}L_i(x) \qquad \ldots\ldots (28.3)$$

(تذكر بأن $y_i=k$ لكل i). عليه فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i(x) = 1 \qquad \ldots\ldots (29.3)$$

(لقد وضعنا $L(x) \equiv k$ ؛ ذلك لأنها حدودية من الدرجة 0 وتمر بـ n من النقاط كل y_i لها ثابتة)

والعلاقة (29.3) تعطى اختبارا جيداً عن مدى صحة حساباتنا.

مثال (7.3)

أوجد صيغة الحدودية التي تمر بالنقاط $(-2,5)$ و $(0,1)$ و $(-1,2)$

ثم احسب y المناظرة لــ $x = +1$.

الحل:

نضع $x_1 = -2$ و $y_1 = 5$ ، $x_2 = 0$ و $y_2 = 1$ و $x_3 = -1$ و $y_3 = 2$. ثم نحسب L_1 , L_2 و L_3 .

وذلك على النحو التالي:

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x+1)}{(-2-0)(-2+1)} = \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right)$$

و

$$L_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{(0+2)(0+1)} = \frac{1}{2}\left(x^2 + 3x + 2\right)$$

و

$$L_3(x) = \frac{(x+2)(x-0)}{(-1+2)(-1-0)} = -x^2 - 2x$$

ومن هذه نحسب:

$$\begin{aligned} y &= y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 \\ &= \frac{5}{2}\left(x^2 + x\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + 3x + 2\right) + 2\left(-x^2 - 2x\right) \\ &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

وهذه هي الصيغة المطلوبة، كما أن $y(1) = 1^2 + 1 = 2$.

لاحظ أن : $\sum_{i=1}^{n} L(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + 3x + 2\right) + \left(-x^2 - 2x\right) = 1$

مثال (8.3)

أعد الحسابات لنفس المثال السابق لو أن نفس الحدودية تمر بالنقطة $(2,5)$. ماذا تلاحظ؟

الحل:

نحسب $L_i(x)$ لنجد أن:

$$L_1(x) = -\frac{1}{8}\left(x^3 - x^2 - 2x\right) \quad \text{و} \quad L_2(x) = -\frac{1}{4}\left(x^3 - x^2 - 4x - 4\right)$$

$$\text{و} \; L_3(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 - 4x\right) \quad \text{و} \quad L_4(x) = \frac{1}{24}\left(x^3 + 3x^2 + 2x\right)$$

ومنها ومن قيم y نجد أن:

$$y = L(x) = 5L_1 + L_2 + 2L_3 + 5L_4 = x^2 + 1$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بالمثال السابق. وهي نتيجة تبعث على الإعجاب

بهذا الأسلوب المتقن والذي يؤكد على أن ((**الحدودية الممثلة ببيانات ما تحمل نفس الصيغة بغض النظر عن زيادة عدد النقاط المارة بها إذا ما استعملنا حدودية لاجرانج.**))

ونظراً لأهمية حدودية لاجرانج الاستكمالية فإننا سوف تعطي مثالاً مفصلاً عنها باستعمال الحاسوب.

مثال (9.3)

أكتب برنامجاً حاسوبياً يحسب حدودية لاجرانج للبيانات الموضحة بالجدول المرافق وذلك عند $x = 4$. ارسم المخطط الانسيابي للمسألة (علماً بأن الحدودية هي من الدرجة الثانية). والبيانات هي:

x	0	2	3	5	1
y	−1	3	8	24	0

الحل:

يمكننا ببساطة رسم المخطط الانسيابي بشكل عام كما هو موضح بالشكل (1.3) وحيث نرى أن الخوارزمية تنساب كما يلي:

أولاً : إدخال البيانات.

ثانياً: حساب $L_i(x)$ مع وضع شرط على قيم i و j عند حسابها حسب التعريف.

ثالثاً: حساب $y = L(x)$.

رابعاً: طباعة النتائج.

خامساً: التوقف.

وانطلاقاً من الشكل (1.3) واستنادا إلى خطوات الخوارزمية نقوم بكتابة البرنامج، وسوف نقوم هنا بإعطاء الحسابات مستخدمين عدة لغات.

فالشكل (2.3) يعطي برنامج الحسابات بلغة بيسك، والشكل (3.3) أ،ب يعطيان نتائج البرنامج وحيث يوضح الشكل (3.3) أ قيمة الحدودية عند $x = 4$ عند أخذ ثلاثة نقاط في الحسابات بينما نحصل على نفس القيمة $(y = 15)$ إذا ما استعملنا خمسة نقاط (الشكل (3.3)ب).

ونلاحظ من المخطط الانسيابي أنه تمت الإشارة إلى المتغيرات بـ X و Y و LX و XP و YP وذلك للتعبير عن النقاط (X, Y) وعن الحدوديات $L_i(x)$ وعن $x = x_p$ المطلوب حساب y عندها وهي y_p .

نعطي أيضا نفس الحسابات باستعمال لغة فوتران (90) [الشكلان (4.3) و(5.3)]؛ وكذلك بلغة بيسك المرئية [الشكلان (6.3) و(7.3)].

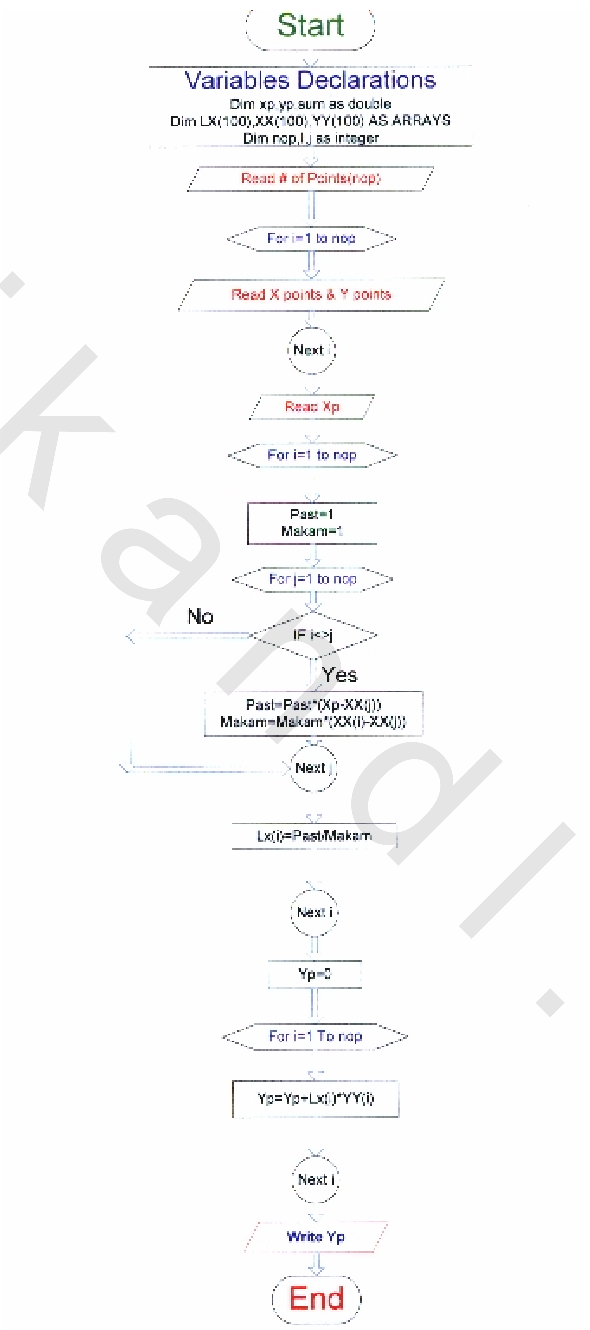
مثال (10.3)

مستخدماً البيانات أسفله؛ استعمل حدودية لاجرانج لحساب y عند $x = 4$. استخدم أحدى لغات البرمجة في حساباتك. والبيانات هي:

x	0	3	1	2
y	1	28	2	9

الحل:

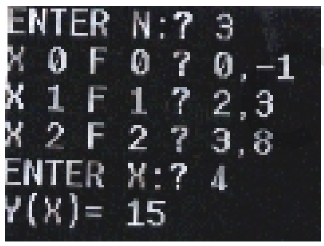
هنا نكتب البرنامج بلغة C لنحصل على $y(4) = 65$ كما هو موضح بالشكلين (8.3) و(9.3).



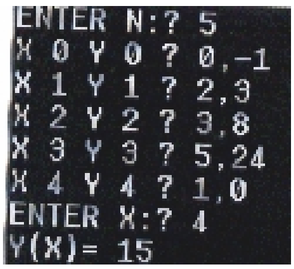
الشكل (1.3)– المخطط الانسيابي للمثال (9.3)

```
INPUT "ENTER N:";N
N=N-1
DIM X(N), Y(N)
FOR I=0 TO N
PRINT "X"; I; "Y"; I;
INPUT X(N), Y(N)
P=0
FOR I=0 TO N
L=1
FOR J=0 TO N
IF I <> J THEN
L=L*(XX-X(J))/(X(I)-X(J))
END IF
NEXT
P=P+Y(I)*L
NEXT
PRINT "Y(X)=";P
END
```

الشكل (**2.3**)- المثال (**9.3**) بلغة بيسك.

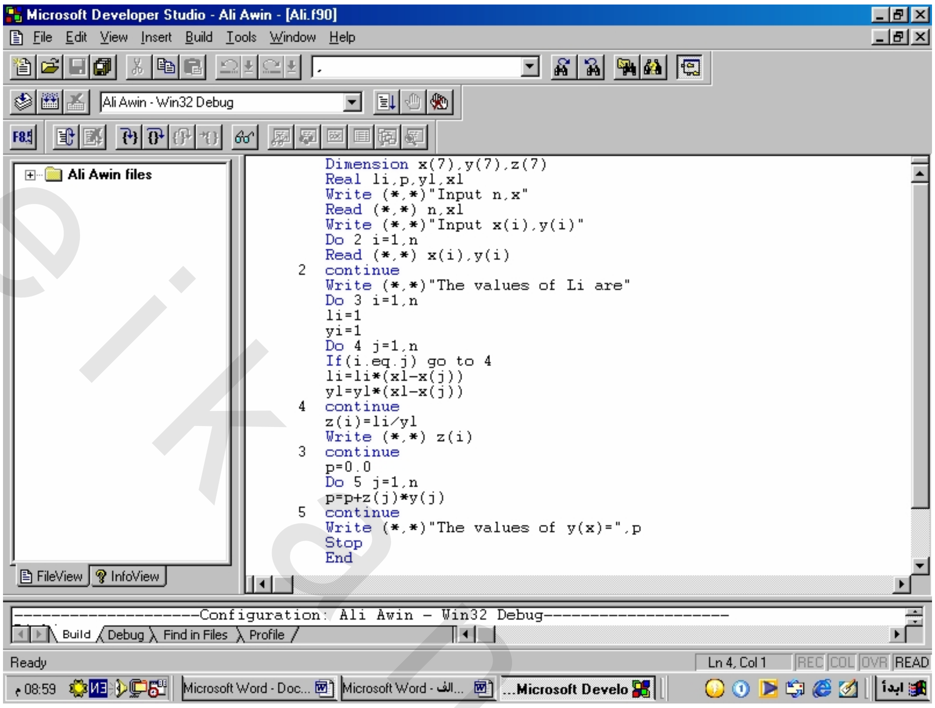


(أ)

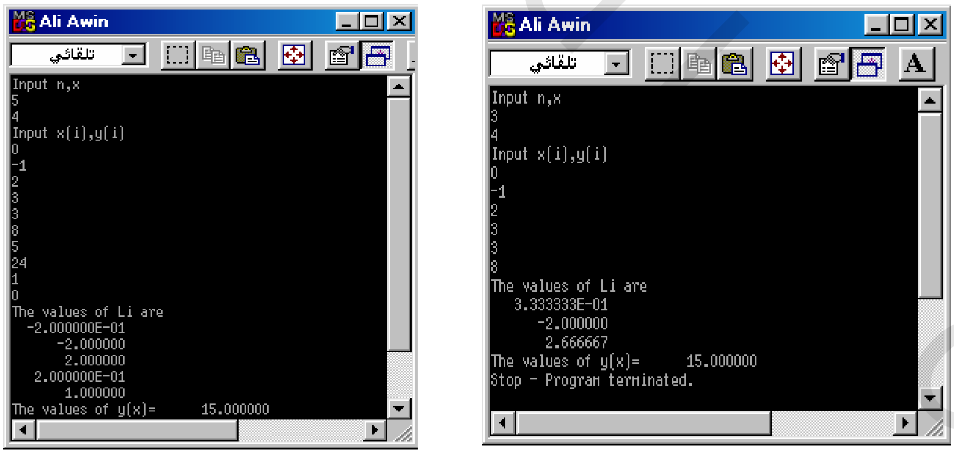


(ب)

الشكل (**3.3**)- نتائج المثال (**9.3**) بلغة بيسك.

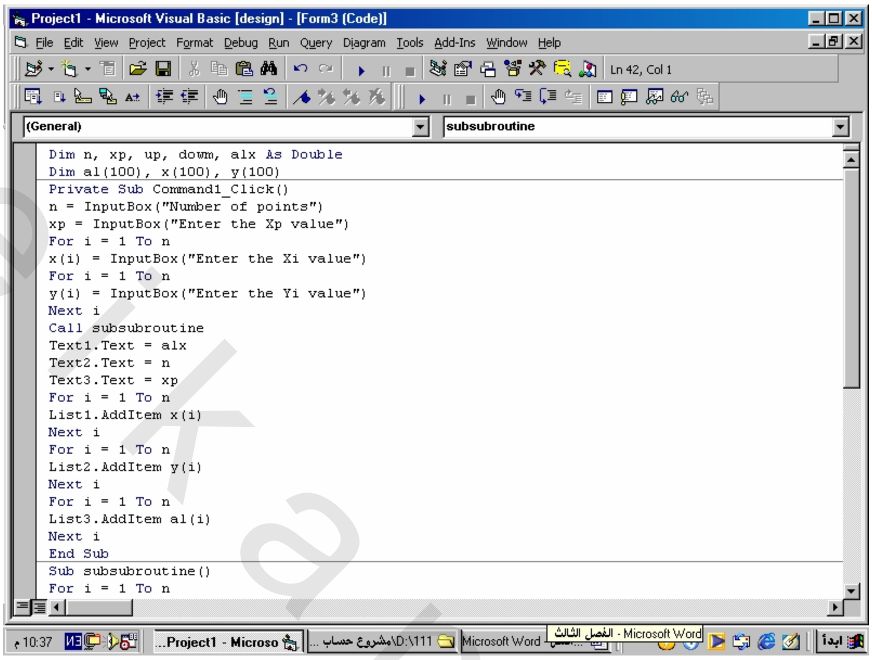


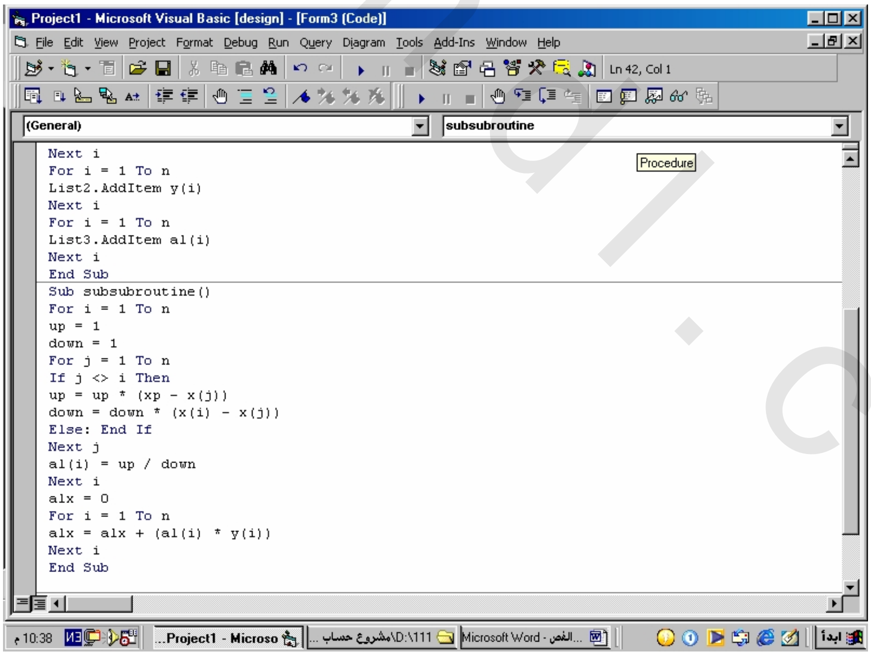
الشكل (4.3)– المثال (9.3) بلغة فورتران (90).



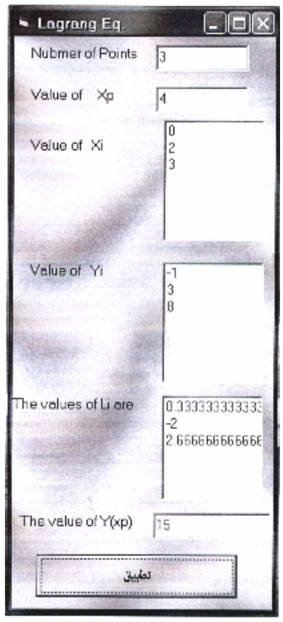
(ب) (أ)

الشكل (5.3)– نتائج المثال (9.3) بلغة فورتران (90).

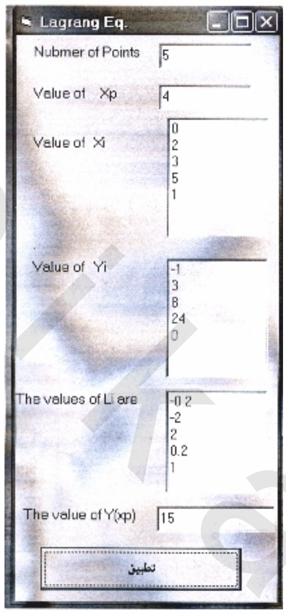




الشكل (6.3)– المثال (9.3) بلغة بيسك المرئية.



(أ)



(ب)

الشكل (7.3)- نتائج المثال (9.3) -لغة بيسك المرئية.

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#define m 10
void main() {

  int i,j,n;
  float X[m],Y[m],L[m],Xc,Yc,Lc;
  clrscr();
  printf(" ENTER NUMBER OF POINTS ");
  scanf("%d",&n);
   printf(" ENTER THE POINTS\N ");
  for(i=0;i<n;i++)  scanf("%f%f",&X[i],&Y[i]);
  scanf("%f",&Xc) ;
  for(i=0;i<n;i++) {
     Lc=1.0;
  for(j=0;j<n;j++) {
       if(j!=i)
      {
    L[i]=Lc*(Xc-X[j])/(X[i]-X[j]);
        Lc=L[i];
         }
                       }

              }
  clrscr();
        printf("  i         X[i]          Y[i]          L[i]
L[i]*Y[i]\n\n");
       Yc=0.0;
   for(i=0;i<n;i++)  {
        printf("%3d%15f%15f%15f%15f\n",i+1,X[i],Y[i], L[i],L[i]*Y[i]);
        Yc=Yc+L[i]*Y[i];  }
        printf("\n            Xc            Yc\n");
        printf("%18f%15f",Xc,Yc);
                               }
```

الشكل (8.3)- المثال (10.3) بلغة C.

i	X[i]	Y[i]	L[i]	L[i]*Y[i]
1	0.000000	1.000000	-1.000000	-1.000000
2	3.000000	28.000000	1.000000	112.000000
3	1.000000	2.000000	4.000000	8.000000
4	2.000000	9.000000	-6.000000	-54.000000

Xc	Yc
4.000000	65.000000

الشكل (9.3)- نتائج المثال (10.3) بلغة C.

ومن المهم ملاحظة أن البرمجة التي أعطيت للحدودية كانت عامة؛ أي أنها تصلح لأي عدد من النقاط وهذا ما يجب فعله عند كتابة أي برنامج. أي أن البرنامج يجب أن يتصف بالعمومية أو الشمولية حتى يكون مفيداً في كل الحالات.

نلاحظ أيضا أنه يمكن القيام بالاستكمال العكسي وحيث نعني بذلك أن نعين قيمة x المناظرة لقيمة ما y إذا ما كانت لدينا بيانات كافية ننطلق منها. أي أنه لو أردنا حساب x المناظرة لقيمة ما من y (أي أننا نعتبر y هي المتغير المستقل و x هي المتغير التابع) فإننا نستعمل الحدودية الاستكمالية التالية:

$$L(y)=\sum_{i=1}^{n} L_i(y)x_i \qquad \ldots\ldots (30.3)$$

ونحسب قيمة x المناظرة لأي قيمة y .

تمارين (3)

1. استعمل مؤثر الإزاحة للحصول على قانون الاستكمال الخطي.

2. احسب قيمة $x^3 - 6x^2 + 12x$ عند $x = 1,2,3$ ، استعمل هذه القيم والاستكمال الخطي وقانون نيوتن الفرقي الأمامي لحساب قيمة الدالة عند $x = 1.5$. قارن بالقيمة المباشرة؟

3. ماذا عن قيمة الدالة عند $x = 2\frac{1}{2}$ للمثال السابق؟

4. كون الجدول الفرقي لقيم $\sin x$ لـ:

$$x = 0\ , 5\ , 10\ , 15\ , 20\ , 25\ , 30$$

وذلك باستعمال ست أرقام عشرية، ثم استخدم قانون سترلنج لحساب $\sin 14^o$.

5. استعمل الجدول أسفله وحدودية لاجرانج لحساب $f(5)$:

x_i	0	2	4	6
$f(x_i)$	10	7	0	-11

6. اشرح كيف يمكنك استخدام متسلسلة تايلور للاستكمال. [أنظر إلى مفكوك الدالة $f(x+t)$].

7. للمسألة 5، هل يمكنك استخدم قانون نيوتن الفرقي الأمامي؟ اشرح!

8. بافتراض أن الحدودية $\varphi(n)$ هي من الدرجة n وتمر بـ $(n+1)$ من النقاط:

$$\left(x_o,\varphi(x_o)\right) \quad , \quad \left(x_1,\varphi(x_1)\right) \quad ,.........., \quad \left(x_n,\varphi(x_n)\right)$$

وأنه يمكن كتابتها على الصورة:

$$\varphi(x) = a_o + a_1(x-x_o) + a_2(x-x_o)(x-x_1) + ...$$
$$+ a_n(x-x_o)(x-x_1)........(x-x_n)$$

قم باشتقاق قانون نيوتن-جريجوري الفرقي الخلفي:

$$\varphi(x_o - ph) = \varphi(x_o) + p\nabla\varphi_o + \frac{p(p+1)}{2!}\nabla^2\varphi_o + ...$$
$$........+\frac{p(p+1)(p+2)....(p+n-1)}{n!}\nabla^n\varphi_o$$

9. قم باشتقاق الصيغ المختلفة للاستكمال التي وردت بالكتاب ولم يتم اشتقاقها.

10. باستخدام البيانات أسفله، أكتب برنامجاً حاسوبياً يحسب $y(6)$ ؛ علماً بأن الدالة تكعيبية في صيغتها. والبيانات هي:

x	−1	−3	3	2	1	7
y	0	−26	28	9	2	344

استخدم أربع نقاط ثم كل النقاط. قارن وناقش.