الفصل الرابع

التفاضل والتكامل العدديان

يحتوي هذا الفصل على:

1.4 التفاضل العددي

لو عدنا قليلا للوراء لنذكر بمتسلسلة تايلور ووضعنا $\Delta x = h$ وقمنا بفك y_1 بدلالة y_o فإننا نحصل على:

$$y_1 = y_o + h\,D\,y_o + \frac{h^2}{2!}D^2\,y_o + \ldots + \frac{h^n}{n!}D^n\,y_o + \ldots \qquad \ldots\ldots (1.4)$$

وحيث تعني: $D^2\,y_o = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right)_o$ و $D\,y_o = \left.\frac{dy}{dx}\right)_o$

....وهكذا.

ويمكن كتابة (1.4) على الصورة:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n D^n}{n!}\,y_o \qquad \ldots\ldots (2.4)$$

(مرة أخرى نلاحظ أن $D^n\,y_o = \left(\frac{d^n y}{dx}\right)_{x=x_o}$)

الآن لو أجزنا كتابة المعادلة (2.4) على النحو:

$$y_1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n D^n}{n!}\right)y_o \equiv e^{hD}\,y_o \qquad \ldots\ldots (3.4)$$

فإنه يتضح بأن $E \equiv e^{hD}$ وذلك لأن $y_1 = E\,y_o$ ؛ مرة أخرى نغض الطرف ونأخذ لوغاريتم الطرفين للعلاقة $E \equiv e^{hD}$ لنحصل على $\ln E = h\,D$، أي أن:

$$h\,D = \ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\Delta^n}{n} \qquad \ldots\ldots (4.4)$$

وهذه العلاقة، رغم أننا توصلنا إليها بطريقة رياضية غير سليمة،هي علاقة دقيقة

وصحيحة وتربط بين المؤثر التفاضلي D والمؤثر الفرقي الأماميΔ. بالطبع هذه العلاقة تصلح فقط عند النقطة (x_o, y_o) وهي بذلك علاقة خاصة. وللحصول على علاقة سليمة رياضيا وعامة، أي أنها تصلح عند أي نقطة (x_p, y_p) نستعمل قانون نيوتن الفرقي الأمامي كما سنوضحه بعد قليل.

نلاحظ أيضا من العلاقة $E = e^{hD}$ ومن العلاقة $E = (1-\nabla)^{-1}$ أنه يمكننا التوصل إلى علاقة مماثلة للعلاقة (4.4) ولكن الآن بين D و∇، وهذه العلاقة تأخذ الشكل:

$$h\,D = \nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nabla^n}{n} \qquad ......\ (5.4)$$

الآن بالرجوع إلى قانون نيوتن الفرقي الأمامي ولنأخذ في الاعتبار $y_p = y(x_p)$ ؛ ذلك القانون ينص على أن:

$$y_p = y_o + p\,\Delta y_o + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 y_o + ... \qquad (6.4)$$

$$= y_o + p\,\Delta y_o + \frac{1}{2}\left(p^2 - p\right)\Delta^2 y_o + \frac{1}{6}\left(p^3 - 3p^2 + 2p\right)\Delta^3 y_o + ... \qquad ......$$

ونلاحظ أن هذه المتسلسلة نهائية عند التعامل مع بيانات ممثلة لحدودية من الدرجة n.

نفاضل العلاقة (6.4) بالنسبة إلى p لنحصل على:

$$\frac{dx_p}{dp} = \frac{dy(x_p)}{dp} = \frac{dy}{dx_p}\cdot\frac{dx_p}{dp} = hy'_p \qquad ......\ (7.4)$$

وحيث نلاحظ أن:

$$\frac{dx_p}{dp} = \frac{d}{dp}\left(x_o + ph\right) = h \qquad \text{......} (8.4)$$

كما أن $\left(= \frac{dy_p}{dx}\right)$ $y'_p = \frac{dy_p}{dx_p}$.

عليه بإجراء عملية التفاضل على طرفي المعادلة (6.4) نحصل على:

$$h\,y'_p = \Delta\, y_o + \left(p - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_o + \left(\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{1}{3}\right)\Delta^3 y_o + \text{......} \qquad \text{......} (9.4)$$

هذه العلاقة عامة وتصلح لأي y_p ؛ ولكن إذا أردنا التفاضل عند x_o . فإننا نضع $p = 0$ لنحصل على نفس العلاقة السابقة (4.4) التي حصلنا عليها بطريقة رياضية غير سليمة؛ وما نحصل عليه عندما نضع $p = 0$ هو :

$$h\,D\, y_o = \Delta\, y_o - \frac{1}{2}\Delta^2 y_o + \frac{1}{3}\Delta^3 y_o + \text{......} \qquad \text{......} (10.4)$$

نستطيع أيضا أن نحصل على علاقة مماثلة بين D و ∇ إذا استخدمنا العلاقة الاستكمالية:

$$y_p = y_o + p\nabla\, y_o + \binom{p+1}{2}\nabla^2 y_o + \binom{p+2}{3}\nabla^3 y_o + \text{......} \qquad \text{......} (11.4)$$

مثال (1.4)

لديك البيانات أسفله، احسب $D\,y_o$ والبيانات هي:

x	1	2	3	4	5
y	0	3	8	15	24

الحل:

نلاحظ هنا أن $x_o = 1$ و $y_o = 0$ و $h = 1$ كما أنه عندما نكون الجدول الفرقي (1.4) نحصل على $\Delta\, y_o = 3$ و $\Delta^2\, y_o = 2$ و $\Delta^3\, y_o = 0$ و $\Delta^4\, y_o = 0$ و.....الخ.

وبذلك فإن:

$$D\, y_o = \frac{1}{1}\left(3 - \frac{1}{2}(2) + 0\right) = 2$$

الجدول (1.4) – المثال (1.4)

y	$\Delta\, y$	$\Delta^2\, y$	$\Delta^3\, y$
0			
	3		
3		2	
	5		0
8		2	
	7		0
15		2	
	9		
24			

ونلاحظ هنا أننا استخدامنا العلاقة (10.4) للحصول على y'_o .

مثال (2.4)

لنفس البيانات السابقة بالمثال (1.4) احسب $y(1.5)$.

الحل:

هنا نرى أن $x_p = 1.5 = 1 + p(1)$

وهذا يعني أن $p = \frac{1}{2}$ وباستخدام الجدول الفرقي (1.4) والقانون (9.4) نحصل على:

$$1 \cdot y'(1.5) = 3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)2 + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot 0 = 3$$

أي أن:

$$y'(1.5) = 3$$

مثال (3.4)

هل يمكنك التحقق من صحة إجاباتك بالمثالين السابقين.

الحل:

الإجابة هي بنعم، وذلك على النحو التالي:

حيث أن $x_o = 1$ و $h = 1$ ومن الجدول (1.4) نرى أن البيانات تمثل حدودية من الدرجة الثانية، عليه نسعى لمعرفة صيغتها، وهو أمر سهل كما تعلمنا من الفصل الثاني. وصيغتها هي:

$$y(x) = y_o + \frac{(x-1)}{1}\Delta y_o + \frac{(x-1)}{1}\left(\frac{x-1}{1}-1\right)\frac{\Delta^2 y_o}{2}$$
$$= 0 + (x-1)\cdot 3 + (x-1)(x-2)\frac{2}{2}$$
$$= 3x - 3 + x^2 - 3x + 2 = x^2 - 1$$

الآن للتأكد من صحة تفاضلاتنا في المثالين السابقين نفاضل مباشرة ونعوض لنرى أن:

$$y'(x) = 2x$$

ومنها نجد أن $y'(1) = 2$ و $y'(1.5) = 3$ ؛ وهما النتيجتان اللتان تم التوصل لهما بالمثالين باستعمال التفاضل العددي.

حتى الآن حصلنا على صيغ للتفاضل باستخدام Δ و∇، لكنه يمكننا أيضا استعمال δ و μ أيضا. ذلك نوضحه كما يلي:

من العلاقة $E = e^{hD}$ ومن تعريف δ نرى أن:

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}hD} - e^{-\frac{1}{2}hD}$$

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}hD} - e^{-\frac{1}{2}hD} = 2\sinh\left(\frac{1}{2}hD\right) \qquad \ldots\ldots (12.4)$$

ولكن عندما $0 < x < 1$ يمكننا فك $\sinh^{-1} x$ لنحصل على:

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 \qquad \ldots\ldots (13.4)$$

عليه من العلاقتين (12.4) و(13.4) نرى أن:

$$hD = 2\sinh^{-1}\left(\delta/2\right) = 2\left(\frac{1}{2}\delta - \frac{\delta^3}{48} + \frac{3\delta^5}{1280} + ...\right) \qquad ......(14.4)$$

أي أن:

$$hD\, y_{1/2} = \delta\, y_{1/2} - \frac{\delta^3}{24} y_{1/2} + \frac{3\delta^5}{640} y_{1/2} + ... \qquad ......(15.4)$$

ملاحظة 1:

يمكننا أيضا أثبات أن:

$$h\, y'_o = \mu\delta\, y_o - \frac{1}{6}\mu\delta^3 y_o + \frac{1}{3}\mu\delta^5\, y_o...... \qquad ......(16.4)$$

ونترك برهان ذلك للقارئ المهتم.

ملاحظة 2:

إن الدقة في إجراء عملية التفاضل العددي التي قدمنا لها تعتمد إلى حد كبير على اختيار h وهو الحال في معظم حساباتنا الفرقية.

مثال (4.4)

إذا أعطيت بأن $y_{-2} = 0\,,\, y_{-1} = 3\,,\, y_o = 8\,,\, y_1 = 15\,,\, y_2 = 24$ وأن قيم x المناظرة لها هي $\{1,2,3,4,5\}$. فاحسب y'_o باستخدام العلاقة (16.4). ما هي ملاحظاتك؟

الحل:

$h=1$ وبذلك فإن:

$$y'_o = \mu\delta\, y_o - \frac{1}{6}\mu\,\delta^3 y_o + ...$$

ولكن:

$$\mu\delta\, y_o = \frac{1}{2}\left(y_1 - y_{-1}\right) = \frac{1}{2}(15-3) = \frac{12}{2} = 6$$

كما أن:

$$\begin{aligned}\mu\,\delta^3 y_o &= \mu\,\delta\left(\delta^2 y_o\right) = \mu\,\delta\left(y_1 - 2y_o + y_{-1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(y_2 - y_o\right) + \frac{1}{2}\left(-2y_1 + 2y_{-1}\right) + \frac{1}{2}\left(y_o - y_{-2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}\right)\\ &= \frac{1}{2}(24 - 30 + 6 - 0) = 0\end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$y'_o = 6$$

ومما توصلنا إليه بالمثال السابق من صيغة الحدودية الممثلة لهذه البيانات نرى أن $y'_o = y'(3) = 2\times 3 = 6$ وهي نفس الإجابة التي تحصلنا عليها باستخدام العلاقة (16.4).

2.4 قوانين وقواعد التكامل العددي

لإشتقاق قوانين التكامل سنحصل أولاً على صيغة تكامل y من x_o إلى x_1 ؛ نفعل ذلك بإجراء عملية التكامل بالنسبة إلى p ؛ وذلك نوضحه كما يلي:

$$\int_{x_o}^{x_1} y\,dx = \int_o^1 y(x_o + ph)h\,dp = h\int_o^1 y_p\,dp \qquad \ldots\ldots (17.4)$$

الآن لو استخدمنا قانون نيوتن الفرقي الأمامي والمعادلة (17.4) لحصلنا على:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_{x_o}^{x_1} y\,dx &= \int_o^1\left(y_o + p\,\Delta y_o + \frac{(p^2-p)}{2}\Delta^2 y_o + \ldots\ldots\right)dp \\ &= \left[py_o + \frac{p^2}{2}\Delta y_o + \frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{3} - \frac{p^2}{2}\right)\Delta^2 y_o + \ldots..\right] \qquad \ldots\ldots (18.4) \\ &= y_o + \frac{1}{2}\Delta y_o - \frac{1}{12}\Delta^2 y_o + \frac{1}{24}\Delta^3 y_o - \frac{19}{720}\Delta^4 y_o\end{aligned}$$

يمكن أيضا أن نستخدم القانون الفرقي الخلفي لنحصل على:

$$\frac{1}{h}\int_{x_o}^{x_1} y\,dx = y_o + \frac{1}{2}\nabla y_o + \frac{5}{12}\nabla^2 y_o + \ldots.. \qquad \ldots\ldots (19.4)$$

هذه ببساطة الكيفية التي نقوم فيها بحساب التكامل باستخدام الفروق الأمامية والخلفية. في البند الموالي نوضح استعمال الفروق المركزية لنحصل على قوانين مهمة في التكامل العددي.

1.2.4 قانون جاوس – إنك

لو استخدمنا الفروق المركزية وقانون بيسل للاستكمال الذي قدمنا له بالفصل السابق ولو قمنا بإجراء عملية تكامل مماثلة كما قمنا به في بداية البند السابق فإننا نحصل على:

$$\frac{1}{h}\int_{x_o}^{x_1} y\,dx = \frac{1}{2}(y_o + y_1) - \frac{1}{12}\,\mu(\delta\, y_1 - \delta\, y_0) + \frac{11}{720}\mu(\delta^3 y_1 - \delta^3 y_0) + .. \qquad ......(20.4)$$

ولو طبقنا هذه الصيغة للفترات $(x_o, x_1), (x_1, x_2)$ و.....و(x_{n-1}, x_n) ثم جمعنا المعادلات الناتجة لحصلنا على:

$$\int_{x_o}^{x_n} y\,dx = \frac{h}{2}(y_o + 2y_1 + .. + 2y_{n-1} + y_n) - \frac{h}{12}\,\mu(\delta\, y_n - \delta\, y_0) + \frac{11h}{720}\mu(\delta^3 y_n - \delta^3 y_0) + ... \qquad (21.4)......$$

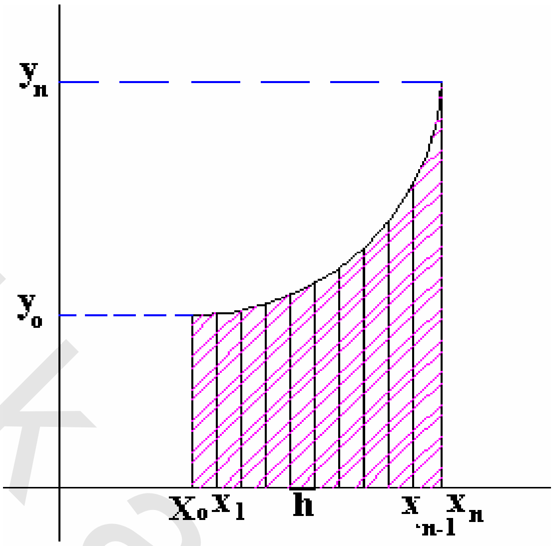
والصيغة (21.4) هذه تسمى بقانون جاوس – إنك.

كما يمثل الحد الأول في هذا القانون قاعدة شبه المنحرف ويرمز له بالرمز ($T.T.$).

هذا الحد هو:

$$T.T. = \frac{h}{2}(y_o + 2y_1 + .. + 2y_{n-1} + y_n) \qquad ......(22.4)$$

وسمي هذا الحد بحد شبة المنحرف لعلاقة هذا الحد بالمساحة تحت منحنى الدالة التي نريد تكاملها كما هو موضح بالشكل (1.4). وهو يمثل تقريب أولي للدالة في نطاقها.



الشكل (1.4) حد شبة المنحرف كتقريب أولي لتكامل الدالة.

2.2.4 قانون جريجوري

حيث أن $\mu\delta = \frac{1}{2}\left(E^{1} - E^{-1}\right)$ فإن $\mu\delta = \frac{1}{2}\left(1+\Delta-(1-\nabla)\right)$ أي أن $\mu\delta = \frac{1}{2}(\Delta+\nabla)$ كما أنه يمكن كتابة $\mu\delta^{3}$ بنفس الكيفية بدلالة Δ و ∇ من رتب عليا، عليه لو قمنا بالتعويض في قانون جاوس – إنك لحصلنا على:

$$\begin{aligned}\int_{x_o}^{x_n} y\,dx = &\frac{h}{2}\left(y_o + 2\left(y_1 + .. + y_{n-1}\right) + y_n\right) + \frac{h}{12}\left(\Delta\, y_o - \nabla\, y_n\right)\\ &- \frac{h}{24}\left(\Delta^2 y_o + \nabla^2 y_n\right) + \frac{19}{720} h\left(\Delta^3 y_o - \nabla^3 y_n\right) \qquad \ldots\ldots (23.4)\\ &- \frac{3}{160} h\left(\Delta^4 y_o + \nabla^4 y_n\right)\end{aligned}$$

وتمثل هذه الصيغة قانون جريجوري وهو قانون مهم وسوف يمكننا من استخراج عدة قواعد مهمة في التكامل العددي.

3.2.4 قاعدة سمبسن

لنأخذ الحالة الخاصة $n = 2$ أي أنه لدينا ثلاثة نقاط، عندئذ ومن قانون جريجوري نتوقف عند الحدود المحتوية على ∇^2 أو Δ^2 وبذلك فإن:

$$\begin{aligned}\int_{x_o}^{x_2} y\,dx &= \frac{h}{2}(y_o + 2y_1 + y_n) + \frac{h}{12}(\Delta y_o - \nabla y_n) \\ &\quad - \frac{h}{24}(\Delta^2 y_o - \nabla^2 y_n) \\ &= \frac{h}{2}(y_o + 2y_1 + y_2) + \frac{h}{12}[y_1 - y_o - (y_2 - y_1)] \\ &\quad - \frac{h}{24}[2(y_2 - 2y_1 + y_0)] \\ &= h\left[\frac{6y_o + 12y_1 + 6y_2 - y_o - y_2 + 2y_1 - y_2 + 2y_1 - y_o}{12}\right] \\ &= \frac{h}{12}[4y_o + 16y_1 + 4y_2] = \frac{h}{3}(y_o + 4y_1 + y_2)\end{aligned} \quad \ldots\ldots (24.4)$$

وتمثل المعادلة (24.4) قاعدة سمبسن لثلاثة نقاط. وفي الحالة العامة ولأي عدد فردي من النقاط $(2n+1)$؛ تأخذ قاعدة سمبسن الصورة:

$$\int_{x_o}^{x_{2n}} y\,dx = \frac{h}{3}[y_o + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}] \quad \ldots\ldots (25.4)$$

والمعادلة (25.4) هي قاعدة سمبسن لتكامل دالة y ذات $(2n+1)$ من النقاط.

ملاحظة هامة:

تذكر دائماً بأن قاعدة سمبسن لا تصلح إلا لعدد فردي من النقاط.

4.2.4 قواعد أخرى

مرة أخرى لو كان لدينا $n = 3$ فإننا نحسب حتى Δ^3 و ∇^3 في العلاقة (23.4) ولو قمنا بذلك فإننا نصل إلى قاعدة الثلاثة أثمان والتي تنص على:

$$\int_{x_o}^{x_3} y\,dx = \frac{3h}{8}\left[y_o + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right] \qquad \text{......} (26.4)$$

وهي قاعدة لأربع نقاط. ويمكن أيضا تعميم هذه القاعدة لعدد $4n$ من النقاط ونترك إثبات ذلك للقارئ.

أيضا لو أن $n = 4$ في (23.4) فإن:

$$\int_{x_o}^{x_4} y\,dx = \frac{2h}{45}\left[7y_o + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4\right] \qquad \text{......} (27.4)$$

وهي قاعدة بول لخمس نقاط.

مثال (5.4)

باعتبار البيانات الموالية، احسب تكامل الدالة الممثلة بهذه البيانات مستخدما ما يلي:

أ. قاعدة شبه المنحرف.

ب. قانون جريجوري.

ج. قاعدة سمبسن.

والبيانات هي:

x	0	1	2	3	4
y	0	3	12	27	48

الحل:

أ. حيث أن $h = 1$ عليه فإن $T.T.$ لهذه الدالة هو:

$$T.T. = \frac{1}{2}\left(0 + 2(3 + 12 + 27) + 48\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2(42) + 2(24)\right) = 66$$

ب. نكون الجدول الفرقي (2.4) ومنه نرى أن الدالة الممثلة للبيانات هي حدودية من الدرجة الثانية كما أن: $\Delta y_o = 3$ و $\nabla y_n = 21$ و $\Delta^2 y_o = \nabla^2 y_n = 6$

الجدول (2.4) – المثال (5.4) الفقرة (ب)

y	Δy	$\Delta^2 y$
0		
	3	
3		6
	9	
12		6
	15	
27		6
	21	
48		

ومن قانون جريجوري نجد أن:

$$\begin{aligned}\int_{x_o}^{x_n} y\,dx &= T.T. + \frac{1}{12}\left(\Delta y_o - \nabla y_n\right) - \frac{1}{24}\left(\Delta^2 y_o + \nabla^2 y_n\right)\\ &= 66 + \frac{1}{12}(3-21) - \frac{1}{24}(6+6)\\ &= 66 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 64\end{aligned}$$

ج. حيث أن عدد النقاط فردي، عليه يمكننا استخدام قاعدة سمبسن ومنها نحصل على:

$$\int_{x_o}^{x_n} y\,dx = \frac{1}{3}\left(0 + 4[3+27] + 2[12] + 48\right) = 64$$

ونتوقع من هذه النتائج أن:

$$\int_{x_o}^{x_n} y\,dx = 64$$

وذلك استنادا إلى ما تحصلنا عليه بالفقرات ب و ج.

أما نتيجة (أ) فهي بكل تأكيد نتيجة تقريبية [لاحظ أن $x_o = 0$ و $x_n = 4$]

مثال (6.4)

هل يمكنك التأكد من صحة إجاباتك بالمثال السابق؟ اشرح بالتفصيل.

الحل:

نعم، يمكننا التأكد من صحة إجاباتنا وذلك كما يلي: من الواضح أن الدالة الممثلة للبيانات هي:

$$y = 3x^2$$

ولو قمنا بتكامل هذه الدالة تكاملا مباشراً فإن:

$$\int_0^4 \left(3x^2\right)dx = \left[x^3\right]_0^4 = 64$$

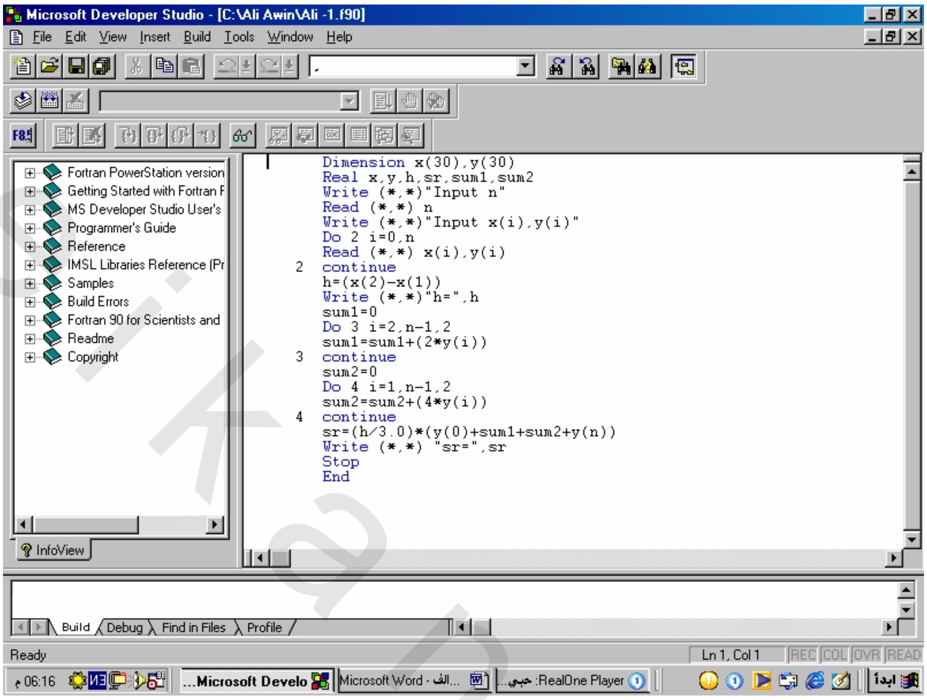
وهذه نفس النتيجة التي تحصلنا عليها باستعمال قانون جريجوري وقاعدة سمبسن.

مثال (7.4)

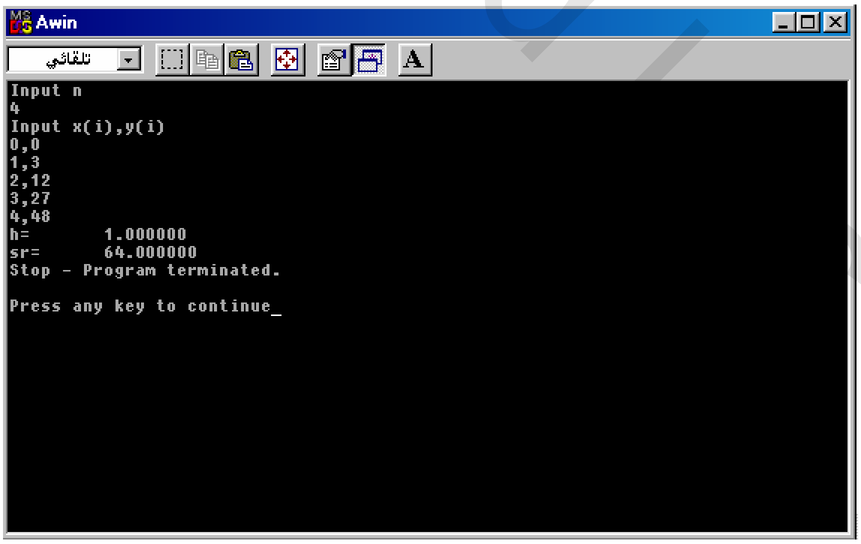
اكتب برنامجا حاسوبيا يحسب تكامل الدالة الممثلة بالبيانات المعطاة بالمثال (5.4) وذلك باستعمال قاعدة سمبسن.

الحل:

نكتب البرنامج الموضح بالشكل (2.4) باستعمال لغة فورتران لنحصل على النتائج بالشكل (3.4).



الشكل (2.4) – المثال (7.4) – بلغة فورتران.



الشكل (3.4) – المثال (7.4) – النتائج

ويمكن أيضا كتابة البرنامج بلغة بيسك المرئية وحيث نقدم البرنامج بهذه اللغة بالشكل (4.4) ونتيجة البرنامج معطاة بالشكل (4.4).

مثال (8.4)

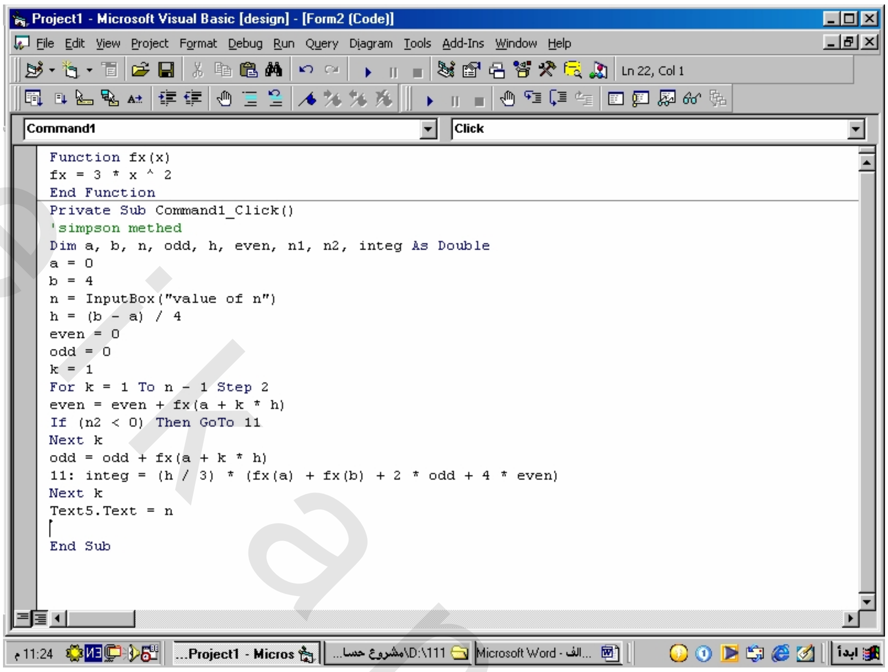
أكتب برنامجا حاسوبيا يحسب تكامل الدالة الممثلة بالبيانات أسفله وذلك باستعمال قاعدة سمبسن؛ والبيانات هي:

x	0	1	2	3	-4
y	1	4	13	28	49

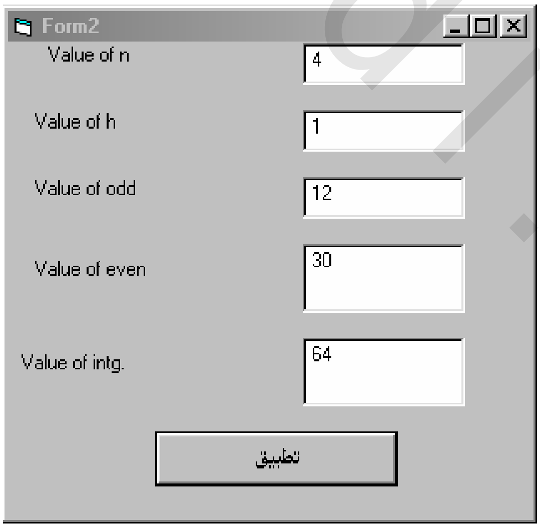
الحل:

نكتب البرنامج الموضح بالشكل (6.4) بلغة C لنحصل على النتائج الموضحة بالشكل (7.4). أي أن $\int_0^4 y\,dx = 68$. ويمكن التأكد من صحة هذه النتائج من تكامل الدالة مباشرة وحيث نرى أن $y = 3x^2 + 1$.

لاحظ أن عدد النقاط في المثالين السابقين فردي.



الشكل (4.4) – المثال (7.4) بلغة بيسك المرئية.



الشكل (5.4) – المثال (7.4) –النتائج بلغة بيسك المرئية.

```
#include<iostream.h>
#include<conio.h>
main()
{
clrscr();
const float h=1;
float X[5],Y[5];
cout<<"\nX=";
for(int i=0;i<5;++i)
cin>>X[i];
cout<<"\nY=";
for(i=0;i<5;++i)
cin>>Y[i];
float sum1=0,sum2=0;
for(int l=1;l<4;++l)
if(l%2!=0)
    sum1+=Y[l];
    else
    sum2+=Y[l];
    cout<<"\n sum1="<<sum1<<"\n sum2="<<sum2<<"\nh="<<h;
float I=(h/3)*(Y[0]+(4*sum1)+(2*sum2)+Y[4]);
cout<<"\nI=(h/3)*(Y[0]+(4*sum1)+(2*sum2)+Y[4])";
    cout<<"\n I="<<I;
    }
```

الشكل (6.4) – المثال (8.4) بلغة C.

```
X=0 1 2 3 4

Y=1 4 13 28 49

sum1=32
sum2=13
h=1
I=(h/3)*(Y[0]+(4*sum1)+(2*sum2)+Y[4])
I=68
```

الشكل (7.4) – نتائج المثال (8.4) بلغة C.

مثال (9.4)

للبيانات أسفله، أحسب $\int_0^4 y\,dx$ باستعمال قاعدة سمبسن. والبيانات هي:

X	0	1	2	3	4
Y	5	6	9	14	21

الحل:

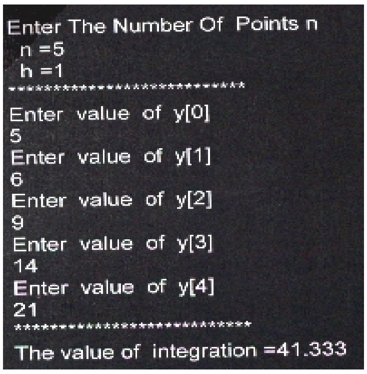
نكتب برنامجا حاسوبيا بلغة C كما بالشكل (7.4) لنحصل على $\int_0^4 y\,dx = 41.3333$ أنظر الشكل (8.4) والذي يعطي نتيجة التكامل.

```
                    SIMBSEN.CPP
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>

main()
{
clrscr();
float h,L,y[10],a=0.0,b=0.0,sum1=0.0,sum2=0.0;
int n,i;
clrscr();

printf("Enter The Number Of Points n \n ");
printf("n=");
scanf("%d",&n);
printf(" h=");
scanf("%f",&h);
printf("****************************\n");
for (i=0;i<=n-1;i++)
{
printf("Enter value of y[%d] \n",i);
scanf("%f",&y[i]);
}
for (i=1;i<=n-1;)
{
sum1+=y[i];
i=i+2;
}
a=4*sum1;
for(i=2;i<n-1;)
{
sum2+=y[i];
i=i+2;
}
b=2*sum2;
printf("****************************");
L=h/3*(a-b+y[0]-y[n-1]);
printf("\nThe value of integration =%.3f\n",L);
getch();
return(0);
}
```

الشكل (7.4) – المثال (9.4) بلغة C.



الشكل (8.4) – نتائج المثال (9.4) بلغة C.

مثال (10.4)

استخدم البيانات بالمثال (9.4) وقاعدة بول لحساب $\int_0^4 y\,dx$.

الحل:

من قاعدة بول وحيث أن عدد النقاط عدد يساوي 5 عليه نجد أن:

$$\int_0^4 y\,dx = \frac{2(1)}{45}\left[7\times 5 + 32(6) + 12(9) + 32(14) + 7(21)\right] = 41.3333$$

وهي نفس النتيجة التي تحصلنا عليها باستعمال قاعدة سمبسن.

3.4 ملاحظات هامة

أ. إن أحد الأمور المهمة هو معرفة مقدار الخطأ في حساباتنا أو تقديره عندما نستعمل أي طريقة. فمثلاً عندما نستعمل طريقة شبة المنحرف نرى أن الخطأ الناتج E_T منها، يحقق المتباينة:

$$|E_T| \le (b-a)\frac{h^2}{12}|f''(x)|_{\max} \qquad \ldots\ldots (28.4)$$

وحيث a و b هما حدود التكامل.

أما عند استخدام طريقة سمبسن فإن الخطأ E_s يحقق المتباينة:

$$|E_s| \le (b-a)\frac{h^4}{180}|f^{(4)}(x)|_{\max} \qquad \ldots\ldots (29.4)$$

وعلى القارئ المهتم إثبات صحة الصيغتين (28.4) و (29.4) وذلك كي يتمكن من فهم أعمق لموضوع الخطأ وتحليله.

ب. إن طريقة شبة المنحرف وطريقة سمبسن للتكامل ما هما إلاّ حالتين من حالات عامة ضمن نطاق ما يسمى بطرق نيوتن- كوتس. ونلاحظ أن في طريقة شبه المنحرف تم تقريب قطع من الدالة $f(x)$ المطلوب تكاملها بخطوط مستقيمة وبالتالي نصل في إجابتنا إلى مجموع من أشباه المنحرفات؛ بينما في طريقة سمبسن يتم تقريب الدالة $f(x)$ بقطوع مكافئية (أي دوال تربيعية في x).

وللحصول على دقة أفضل يمكن تقريب الدالة بحدودية من الدرجة الثالثة أو بمنحنيات من الدرجة الرابعة. وهكذا تقع كل هذه الطرق في قسم كبير يسمى بطرق نيوتن – كوتس.

ونلاحظ أنه في طريقة شبه المنحرف نستخدم نقطتين لكل شبه منحرف [مثلا للأول نستخدم (x_o, y_o) و (x_1, y_1)]؛ بينما في طريقة سمبسن نستخدم ثلاث

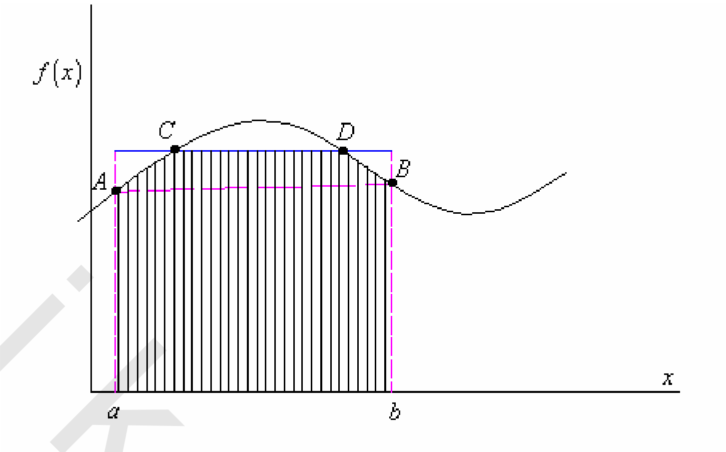
نقاط. وإذا ما اخترنا حدودية من الدرجة الثالثة فإننا نحتاج إلى أربع نقاط وهكذا... كما نلاحظ أيضا أن النقاط متساوية التباعد ؛ أي بطول خطوة ثابت وهو h.

ج. بملاحظة أن $|E_T| \le \frac{(b-a)}{12} Mh^2$ وحيث $M = \left| f^{(2)}(x) \right|_{\max}$ نرى أنه لو وضعنا $d = \frac{(b-a)}{12} M$ فإن $|E_T| \le dh^2$. وبتصغير قيمة h يؤول E_T إلى الصفر. فمثلا لو كان عدد أشباه المنحرفات هو n فإن $h = \frac{(b-a)}{n}$ و بزيادة العدد إلى $2n$ يقل الخطأ بالمعامل 4.

واستنادا إلى هذه الفكرة تم اشتقاق طريقة أدق (أو طريقة تصحيحية) من طريقة شبه المنحرف وتعرف بطريقة رمبرج (Romberg)، وهي طريقة شعبية وتناظر في دقتها طريقة سمبسن.

د. طريقة جاوس للتكامل- تربيعات جاوس (Gauss Quadrature).

تعتبر هذه الطريقة طريقة فعالة، حيث يمكننا استخدامها لأي حالة بغض النظر عن الكيفية التي تعطى بها البيانات، أي متساوية التباعد أو غير متساوية التباعد.. لشرح الكيفية التي تعمل بها الطريقة، دعنا نأخذ في الاعتبار الدالة الموضحة بالشكل (9.4) ،و لو أن المراد هو تعيين المساحة تحت هذا المنحنى الواصل بين A و B، عندئذ نرى أن شبه المنحرف المكون من النقاط B, A, b, a $(abBA)$ يعطى تقريباً للمساحة ولكنه تقريب غير كاف.



الشكل (9.4) – طريقة جاوس.

هنا $h = b - a$ وهي كبيرة. كما أن:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right) = A_1 f(a) + A_2 f(b) \qquad \ldots\ldots (30.4)$$

وحيث $A_1 = A_2 = h/2$.

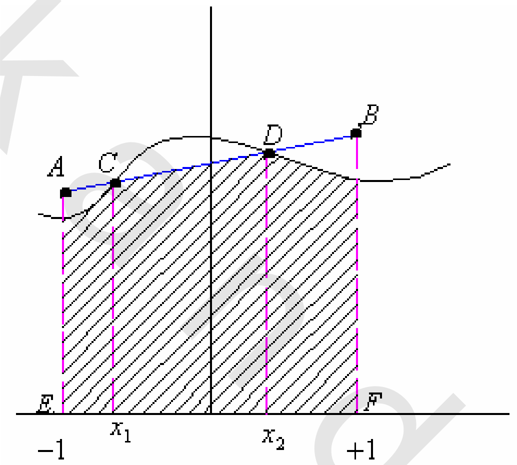
الآن لو اخترنا أي نقطتين داخل الفترة (a,b) وهما C و D وأوصلنا هاتين النقطتين بمستقيم ومددناه ليلتقي بالمستقيم $x = a$ و $x = b$ ؛ عندئذ نحصل على شبه المنحرف الموضح بنفس الشكل (9.4). وتتلخص طريقة جاوس في اختيار C و D بحيث نحصل على أحسن تقريب للمساحة تحت المنحنى؛ أي أحسن تقريب لتكامل الدالة a إلى b .

نختار الآن $a = -1$ و $b = +1$ ثم نفترض أن C كانت عند $x = x_1$ و D عند $x = x_2$ ونكون شبه المنحرف الموضح بالشكل (10.4) وهو $EABF$ ؛ و حيث نلاحظ

أن النقطة C هي $(x_1, f(x_1))$ والنقطة D هي $(x_2, f(x_2))$. نحاكي طريقة شبة المنحرف ونضع:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = c_1\, f(x_1) + c_2\, f(x_2) \qquad \ldots\ldots (31.4)$$

ثم نحاول إيجاد المجاهيل الأربعة وهي x_1 و x_2 و c_1 و c_2 .



الشكل (10.4) طريقة جاوس ($a=+1$ و $b=-1$)

نفترض أيضا أن هذه الطريقة تصلح لعدة دوال بسيطة مثل $y=1$, $y=x$, $y=x^2$ و $y=x^3$. أي أن هذه الدوال تحقق المعادلة (31.4)، عندئذ نرى أن:

$$\int_{-1}^{+1} 1\, dx = 2 = c_1 + c_2 \qquad \ldots\ldots (32.4)$$

و

$$\int_{-1}^{+1} x\, dx = 0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 \qquad \ldots\ldots (33.4)$$

و

$$\int_{-1}^{+1} x^2 \; dx = \frac{2}{3} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \qquad \text{......} \; (34.4)$$

و

$$\int_{-1}^{+1} x^3 \; dx = 0 = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 \qquad \text{......} \; (35.4)$$

وبحل المعادلات $(32.4)-(35.4)$ نحصل على :

$$x_1 = -x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{و} \quad c_1 = c_2 = 1$$

وهكذا نصل إلى صيغة تكامل الدالة المطلوب بطريقة جاوس وذلك كما يلي:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} f(x)dx &= c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{......} \; (36.4)\\ &= f(-0.57735) + f(0.57735)\end{aligned}$$

من المهم ملاحظة أننا عينا حدود التكامل بالعددين $a=-1$ و $b=+1$، إلا إنه يمكننا دائماً القيام بتحويل ما لتغيير حدود فترة التكامل من $[a,b]$ إلى $[-1,+1]$ وهذا التحويل هو من النوع:

$$x = \frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)}{2} x' \qquad \text{......} \; (37.4)$$

وحيث $x'_1 = -1$ و $x'_2 = +1$ ويقابلها $x_1 = a$ و $x_2 = b$.

(فمثلا لو كانت $a=0$ و $b=1$ فإن (37.4) تستوجب أن $x_1 = \left(\frac{0+1}{2}\right) + \left(\frac{1-0}{2}\right)(-1) = 0$ و $x_2 = \left(\frac{0+1}{2}\right) + \left(\frac{1-0}{2}\right)(1) = 1$ كما هو متوقع).

وهذا ويمكن تعميم طريقة جاوس لعدة نقاط (أكثر من 2) أي لـ n من النقاط، عندئذ يكون لدينا:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = c_1\, f(x_1) + c_2\, f(x_2) + ... + c_n\, f(x_n) \qquad ......(38.4)$$

وفي هذه الحالة يجب تعيين n من $c_i{}'s$ و n من $x_i{}'s$ ؛ أي يجب تعيين $2n$ من المجاهيل..

والجدول (3.4) يعطي معاملات تربيعات جاوس والإحداثيات السينية للنقاط من 2 إلى 6. [أنظر المراجع].

الجدول (3.4) معاملات تربيعيات جاوس والإحداثيات x_i لعدد من النقاط من 2 إلى 6.

عدد النقاط	المعاملات c_i	الإحداثيات x_i
2	$c_1 = c_2 = 1$	$x_1 = -x_2 = -0.57735$
3	$c_1 = c_3 = 0.5$	$x_1 = -x_3 = -0.774597$
	$c_2 = 0.8$	$x_2 = 0$
4	$c_1 = c_4 = 0.347855$	$-x_1 = +x_4 = 0.861136$
	$c_2 = c_3 = 0.652145$	$-x_2 = +x_3 = 0.33998$
5	$c_1 = c_5 = 0.236927$	$-x_1 = x_5 = 0.9061799$
	$c_2 = c_4 = 0.478629$	$-x_2 = x_4 = 0.538469$
	$c_3 = 0.568$	$x_3 = 0.0$
6	$c_1 = c_6 = 0.171325$	$-x_1 = x_6 = 0.9324695$
	$c_2 = c_5 = 0.360762$	$-x_2 = x_5 = 0.6612094$
	$c_3 = c_4 = 0.467914$	$-x_3 = x_4 = 0.2386192$

وكمثال على استخدام هذه الطريقة نأخذ في الاعتبار التكامل $I=\int_0^1\left(1-x^5\right)dx$ ولو اعتبرنا نقطتين فقط فإن التحويلة المطلوبة هي: $x=\frac{1+x'}{2}=0$

ذلك لأن $x'=1$ تقابلها $x=1$ و $x'=-1$ تقابلها $x=0$.

بذلك فإن :

$$I=\int_0^1\left(1-x^5\right)dx=\int_{-1}^1\left[1-\left(\frac{1+x'}{2}\right)^5\right]\left(\frac{1}{2}dx'\right)$$
$$\equiv\int_{-1}^{+1}f(x')\,dx'$$

وحيث:

$$f(x')=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1+x'}{2}\right)^5\right]$$

عليه وباستخدام المعادلة (36.4) نجد أن:

$$I=\frac{1}{2}\left\{\left[1-\left(\frac{1-0.577335}{2}\right)^5\right]+\left[1-\left(\frac{1+0.577335}{2}\right)^5\right]\right\}\cong 0.8472$$

نلاحظ أيضا أن التكامل المباشرة يعطي القيمة التامة $5/6$ ؛ بذلك فإن الخطأ في هذه الطريقة هو: $E=5/6-I=-0.0139$

مما تقدم نرى نجاح هذه الطريقة وسرعة تقاربها مقارنة بطريقة شبة المنحرف المعتادة. وهي أيضا تضاهي طريقة سمبسن في الدقة.

نلاحظ أيضا أننا سقنا المثال السابق للتوضيح فقط وعلى القارئ أن يكتب برنامجا حاسوبيا مستعيناً بالجدول (3.4) للحصول على قيمة التكامل المذكور بدقة أعلى.

تمارين (4)

1. أثبت أن:

$$hD = \nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\nabla^i}{i}$$

2. استنتج العلاقة:

$$y_p = y_o + p\nabla y_o + \binom{p+1}{2}\nabla^2 y_o + \ldots\ldots$$

ثم أثبت العلاقة بين D و ∇ والمذكورة بالتمرين 1 ؛مستخدماً طريقة تفاضل المتسلسلات.

3. احسب $\sin x$ باستخدام أربعة أرقام عشرية ثم احسب مشتقة $\sin x$ عند $x = \pi/4$. وذلك للقيم الموالية:

أ- $x = 42,44,46,48$ ب- $x = 30,40,50,60$

قارن بين النتيجتين وبين المشتقة المباشرة.

4. أثبت صحة ما جاء من صيغ للخطأ في البند (3.4).

5. خذ في الاعتبار حدودية لاجرانج الاستكمالية ذات الأربع نقاط x_o, x_1, x_2, x_3 لإثبات أن:

$$L'(o) = \left(-11y_o + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3\right)/6h$$

6. تحقق من صحة القوانين المختلفة للتكامل التي جاءت بهذا الفصل ولم تثبت.

7. أثبت قاعدة سمبسن في الحالة العامة، أي عندما يكون لدينا $2n+1$ من النقاط.

8. باستخدام قانون جريجوري، أثبت أن:

$$\int_0^{nh} y\,dx = h\left[\frac{1}{2}y_o + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right] - \frac{h^2}{12}\left(y'_n - y'_o\right) + \frac{h^4}{720}\left(y'''_n - y'''_o\right) + \ldots\ldots\ldots$$

9. من نتيجة التمرين 8، هل يمكنك إيجاد مجموع مكعبات الأعداد الصحيحة من 1 إلى n (أي $\sum_{n=1}^{n} i^3$) [استخدام الدالة $y = x^3$]

10. عالج التكامل $\int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ بشتى الطرق العددية التي تناولناها. ما هي الصعوبات التي تواجهك وكيف يمكنك التغلب عليها.

11. احسب $H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ عند $x = 0.5$ وباستعمال أربعة أرقام عشرية.

12. استعمل تربيعات جاوس لحساب التكامل $\int_0^1 3x^2\,dx$ لنقطتين وثلاثة نقاط. قارن بالتكامل المباشر.