الفصل الخامس

حلول المعادلات

يحتوي هذا الفصل على:

1.5 الحلول العددية للمعادلات في متغير واحد.

1.1.5 طريقة التنصيف.

2.1.5 طريقة الموضع الخاطئ

3.1.5 طريقة نيوتن ـ رافسون.

2.5 حلول المعادلات الآنية.

1.2.5 حلول المعادلات الآنية الخطية

2.2.5 حلول المعادلات الآنية غير الخطية.

1.5 الحلول العددية للمعادلات في متغير واحد

في هذا البند نهتم بدراسة بعض الطرق التكرارية لحل المعادلات من النوع:

$$f(x) = 0 \qquad \ldots\ldots (1.5)$$

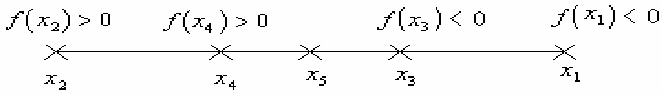
وحيث نلاحظ أن الدقة الناتجة عند استعمال مثل هذه الطرق تقدر بالخطأ الناتج عن التقريب في آخر تكرار.

في المعتاد تستعمل عدة طرق ويتم اختبار تقاربها. فيما يلي نستعرض بعض الطرق وحيث نركز على أكثرها شيوعياً وهي طريقة نيوتن ورافسون.

1.1.5 طريقة التنصيف

حتى نحصل على أحد جذور المعادلة (1.5)، نبحث عن قيمتين $x = x_1$ و $x = x_2$ بحيث يكون $f(x_1)$ و $f(x_2)$ بإشارتين مختلفتين؛ ثم نحسب $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ و $f(x_3)$. فإذا كانت $f(x_1)$ و $f(x_3)$ لهما نفس الإشارة (لنقل) فإنه نعيد الكرة باستخدام x_2 و x_3 ، أي أن نحسب $x_4 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$ و $f(x_4)$ ؛ ونعيد عملية اختبار إشارة $f(x)$ وهكذا ....، ولو افترضنا أن $f(x)$ مستمرة فإننا نصل، عن طريق التقارب، إلى جذر المعادلة $f(x) = 0$. [أنظر الشكل (1.5)].

ونلاحظ أن هذه الطريقة بطيئة ولكنها بسيطة كما أن تسميتها واضحة من طريقة عملها.



الشكل (1.5) توضيح بياني لطريقة التنصيف

مثال (1.5) (مثال توضيحي)

باستخدام طريقة التنصيف أوجد جذور المعادلة $x^2 - 5 = 0$ ، مستخدما رقما عشريا واحدا في حساباتك.

الحل:

نرى هنا أن $f(x) = x^2 - 5$ ، نختار $x_1 = 2$ و $x_2 = 3$ لنرى أن $f(2) = 4 - 5 < 0$ و $f(3) = 9 - 5 > 0$ ، بذلك نحسب $x_3 = \frac{2+3}{2} = 2.5$ و $f(2.5) = (2.5)^2 - 5 > 0$.

وحيث $f(2.5)$ لها نفس إشارة $f(3)$ ، عليه فإن x_4 هي $x_4 = \frac{2+2.5}{2} = 2.25$ ؛ كما أن $f(2.25) = 5.0625 - 5 > 0$ وهكذا فإن $x_5 = \frac{2+2.25}{2} = 2.125$ و $f(x_5) < 0$ نحسب $x_6 = (2.125 + 2.25)/2$ لنحصل على $x_6 = 2.1875$ كما أن $f(x_6) < 0$ ، عليه فإن: $x_7 = (2.21875 + 2.25)/2 = 2.21875$ و $f(x_7) < 0$ نستمر فنحسب $x_8 = (2.21875 + 2.25)/2 = 2.234375$ و $f(x_8) < 0$ بذلك فإن $x_9 = (2.234375 + 2.25)/2$ وتساوي $x_9 = 2.2421875$ و $f(x_9) < 0$ نحسب $x_{10} = (2.24218575 + 2.25)/2$ لنحصل على: $x_{10} = 2.23828125$ و $f(x_{10}) > 0$ ونستطيع الاستمرار في هذه العملية حتى نتوصل إلى الدقة المطلوبة.

وفي مثالنا نرى أنه لو كانت الدقة المطلوبة هي حتى رقمين عشريين فإن الإجابة هي $x = 2.23$ أما إذا كانت الدقة المطلوبة هي حتى رقم عشري واحد فإن الإجابة هي $x = 2.2$.

ونلاحظ أن الحسابات اليدوية متعبة بل ومزعجة عليه نلجأ للحاسوب وحيث نقوم بإحدى طريقتين لإيقاف الحسابات والوصول إلى الدقة المطلوبة.

الطريقة الأولى

أن نحسب، من خلال حلقه أعمل (Do Loop)، وأن نجعل العملية من مائة تكرار أو أكثر إن لزم الأمر، وبالتأكيد سنصل إلى الدقة المطلوبة في إيجاد جذر المعادلة. غير أن هذه الطريقة تأخذ وقتا أو زمنا لا بأس به من زمن الحاسوب، وعليه فهي غير مرغوبة.

الطريقة الثانية

نضع إطاقة أو تسامح (ε) على القيم المتتالية للجذر بحيث تتوقف الحسابات عندما يصل $|x_{n+1} - x_n|$ قيمة معينة (مثلا $\varepsilon = 10^{-4}$) والتي نحددها نحن حسب الدقة التي نرغب في الوصول إليها. أي أننا نجعل:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \qquad \ldots\ldots (2.5)$$

وهذه الطريقة هي الطريقة المثلى للوصول إلى الدقة المطلوبة وبسرعة.

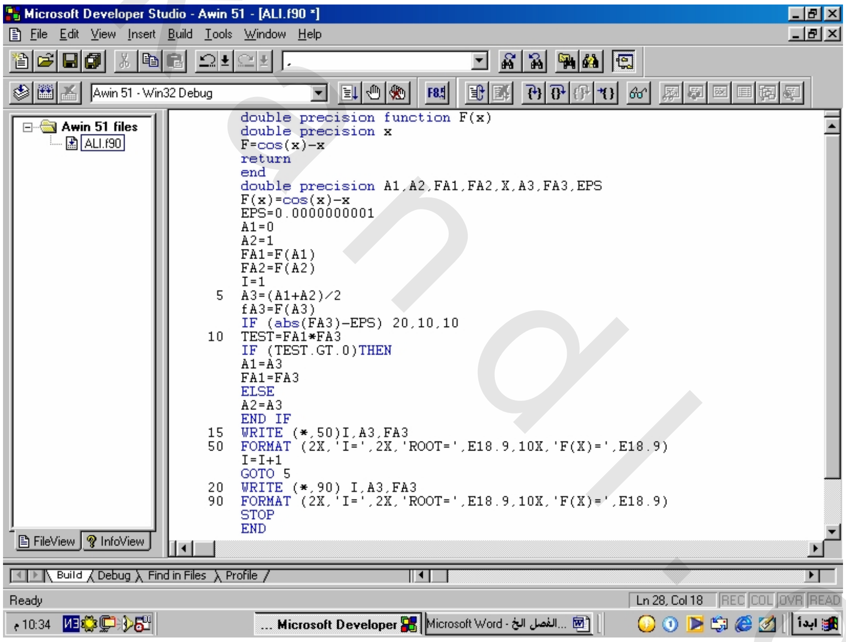
مثال (2.5)

أكتب برنامجا حاسوبيا يحسب جذر المعادلة $\cos x - x = 0$ باستخدام طريقة التنصيف.

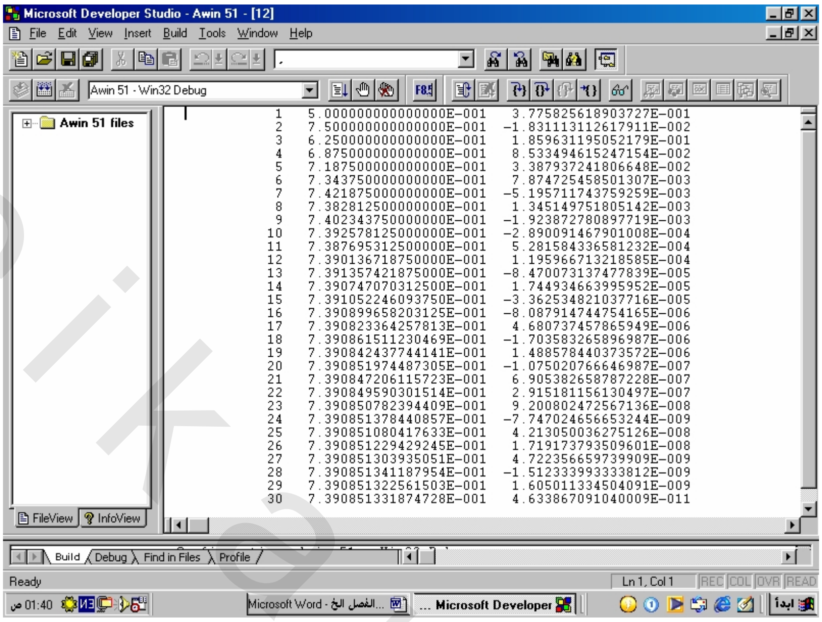
الحل:

نكتب البرنامج الموضح بالشكل (2.5) وهو بلغة فورتران لنحصل على النتائج الموضحة بالشكل (3.5) وحيث نرى أن: $x = 0.739085133\,rad$. وأن الخطأ في $f(x)$ بعد 30 تكرارا يساوي 0.46×10^{-10} .

لاحظ أن ε المختارة هي: $\varepsilon = 10^{-10}$. وهكذا توقف الحاسوب بعد 30 تكرار.



الشكل (2.5) – المثال (2.5) – طريقة التنصيف بلغة فورتران.



الشكل (3.5) – نتائج البرنامج بالشكل (2.5) للمثال (2.5).

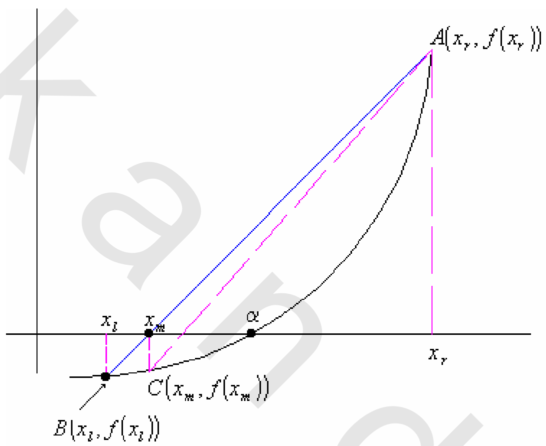
2.1.5 طريقة الموقع الخاطئ

هذه الطريقة مثلها مثل طريقة التنصيف دائما تتقارب ولكنها بطيئة التقارب مقارنة بطريقة نيوتن – رافسون التي سوف نتعرض لها بالبند الموالي؛ كما أنها تحتاج إلى قيمتين ابتدائيتين للبدء.

لتكن الدالة هي $f(x)$ كما هو موضح بالشكل (4.5) ولنختار نقطتين x_r على يمين الجذر (أي أن $f(x_r) > 0$) و x_l على يسار الجذر (أي أن $f(x_l) < 0$).

نرسم الوتر الواصل بين النقطتين $A(x_r, f(x_r))$ و $B(x_l, f(x_l))$ وهذا سوف يقطع المحور ox في x_m .

نقوم باختبار إشارة $f(x_m)$ ؛ فإذا كانت $f(x_m) > 0$ فإننا نستبدلها بـ x_r ؛وإذا كانت $f(x_m) < 0$ نستبدلها بـ x_l وفي الحالتين نعيد فنرسم قاطعاً جديداً يصل بين النقطتين المختارتين بعد اختبار إشارة $f(x_m)$.



الشكل (4.5) – طريقة الموضع الخاطئ.

فمثلا في الشكل (4.5) يكون القاطع الجديد هو المستقيم AC . ونلاحظ أن اختيارنا للنقطتين الابتدائيتين A و B يكون بحيث تقع A و B في جهتين مختلفتين من المحور ox .

ونلخص القاعدة المتبعة في طريقة الموضع الخاطئ كما يلي:

1. إذا كان $f(x_l) \cdot f(x_m) < 0$ فإننا نبدل x_r بـ x_m .

2. إذا كان $f(x_l)\cdot f(x_m)>0$ فإننا نبدل x_l بـ x_m .

كما أن:

$$x_m = x_l - \frac{(x_r - x_l)}{f(x_r)-f(x_l)}\, f(x_l) = \frac{(x_l)\, f(x_r)-(x_r)\, f(x_l)}{f(x_r)-f(x_l)} \qquad \ldots\ldots (3.5)$$

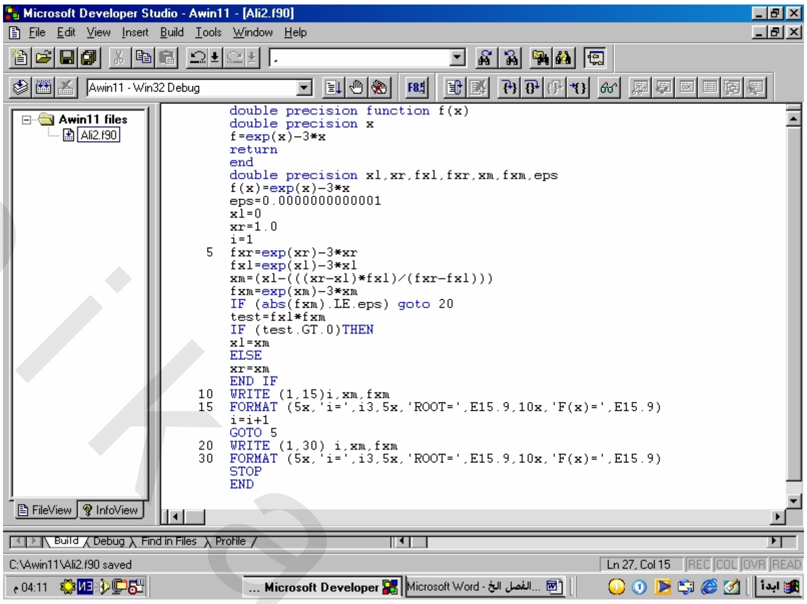
هذا ونستمر في القيام بعملية رسم القاطع الجديد حتى نصل إلى الجذر المطلوب [وهو α في الشكل (4.5)].

مثال (3.5)

أكتب برنامجا حاسوبيا بحسب جذر المعادلة $e^x - 3x = 0$ وذلك باستخدام طريقة الموضع الخاطئ.

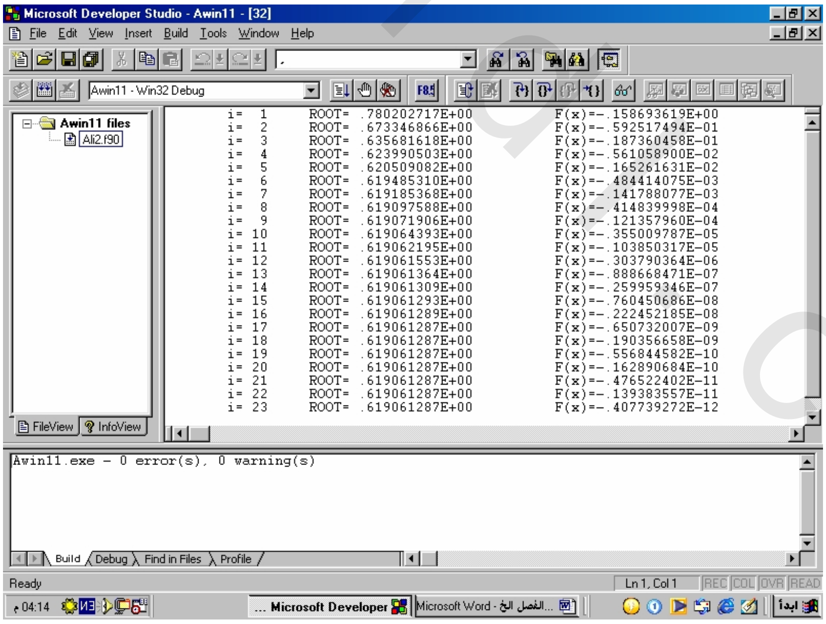
الحل:

بعد وضع تصور للخوارزمية المناسبة نكتب البرنامج الموضح بالشكل (5.5) والمكتوب بلغة فورتران ومنه نحصل على النتائج الموضحة بالشكل (6.5) وحيث نرى أن الجذر هو $x = 0.619061284$.



```
      double precision function f(x)
      double precision x
      f=exp(x)-3*x
      return
      end
      double precision xl,xr,fxl,fxr,xm,fxm,eps
      f(x)=exp(x)-3*x
      eps=0.0000000000001
      xl=0
      xr=1.0
      i=1
    5 fxr=exp(xr)-3*xr
      fxl=exp(xl)-3*xl
      xm=(xl-(((xr-xl)*fxl)/(fxr-fxl)))
      fxm=exp(xm)-3*xm
      IF (abs(fxm).LE.eps) goto 20
      test=fxl*fxm
      IF (test.GT.0)THEN
      xl=xm
      ELSE
      xr=xm
      END IF
   10 WRITE (1,15)i,xm,fxm
   15 FORMAT (5x,'i=',i3,5x,'ROOT=',E15.9,10x,'F(x)=',E15.9)
      i=i+1
      GOTO 5
   20 WRITE (1,30) i,xm,fxm
   30 FORMAT (5x,'i=',i3,5x,'ROOT=',E15.9,10x,'F(x)=',E15.9)
      STOP
      END
```

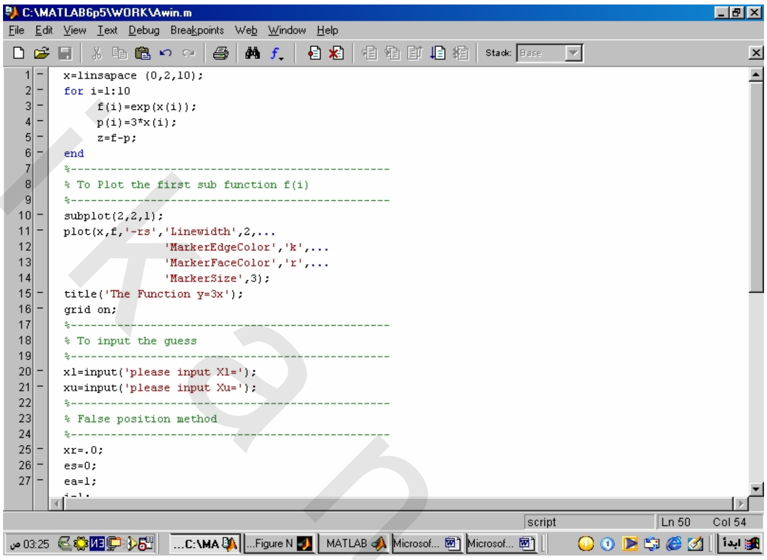
الشكل (5.5) – المثال (3.5) بلغة فورتران



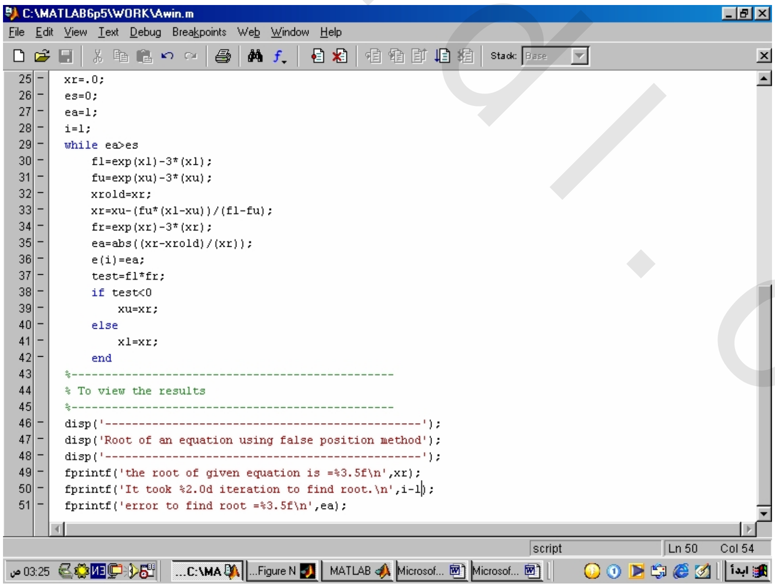
```
     i=  1     ROOT= .780202717E+00          F(x)=-.158693619E+00
     i=  2     ROOT= .673346866E+00          F(x)=-.592517494E-01
     i=  3     ROOT= .635681618E+00          F(x)=-.187360458E-01
     i=  4     ROOT= .623990503E+00          F(x)=-.561058900E-02
     i=  5     ROOT= .620509082E+00          F(x)=-.165261631E-02
     i=  6     ROOT= .619485310E+00          F(x)=-.484414075E-03
     i=  7     ROOT= .619185368E+00          F(x)=-.141788077E-03
     i=  8     ROOT= .619097588E+00          F(x)=-.414839998E-04
     i=  9     ROOT= .619071906E+00          F(x)=-.121357960E-04
     i= 10     ROOT= .619064393E+00          F(x)=-.355009787E-05
     i= 11     ROOT= .619062195E+00          F(x)=-.103850317E-05
     i= 12     ROOT= .619061553E+00          F(x)=-.303790364E-06
     i= 13     ROOT= .619061364E+00          F(x)=-.888668471E-07
     i= 14     ROOT= .619061309E+00          F(x)=-.259959346E-07
     i= 15     ROOT= .619061293E+00          F(x)=-.760450686E-08
     i= 16     ROOT= .619061289E+00          F(x)=-.222452185E-08
     i= 17     ROOT= .619061287E+00          F(x)=-.650732007E-09
     i= 18     ROOT= .619061287E+00          F(x)=-.190356658E-09
     i= 19     ROOT= .619061287E+00          F(x)=-.556844582E-10
     i= 20     ROOT= .619061287E+00          F(x)=-.162890684E-10
     i= 21     ROOT= .619061287E+00          F(x)=-.476522402E-11
     i= 22     ROOT= .619061287E+00          F(x)=-.139383557E-11
     i= 23     ROOT= .619061287E+00          F(x)=-.407739272E-12

Awin11.exe - 0 error(s), 0 warning(s)
```

الشكل (6.5) – نتائج المثال (3.5) بفورتران.

في الشكل (7.5) نعطي برنامجا بالماتلاب لنفس المثال (3.5) وكذلك النتائج المحسوبة بهذا البرنامج [الشكل (8.5)].

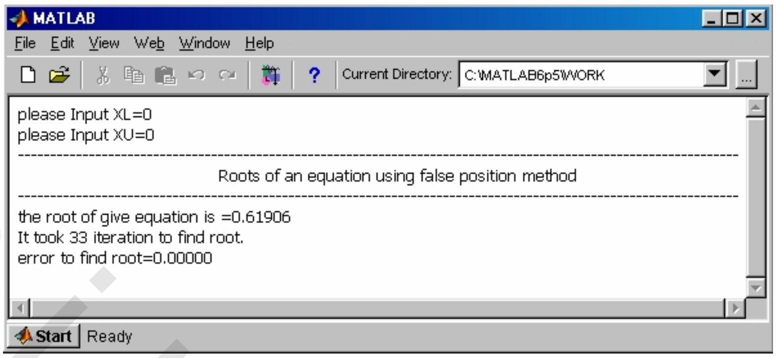


```
x=linsapace (0,2,10);
for i=1:10
     f(i)=exp(x(i));
     p(i)=3*x(i);
     z=f-p;
end
%---------------------------------------------------
% To Plot the first sub function f(i)
%---------------------------------------------------
subplot(2,2,1);
plot(x,f,'-rs','Linewidth',2,...
               'MarkerEdgeColor','k',...
               'MarkerFaceColor','r',...
               'MarkerSize',3);
title('The Function y=3x');
grid on;
%---------------------------------------------------
% To input the guess
%---------------------------------------------------
xl=input('please input Xl=');
xu=input('please input Xu=');
%---------------------------------------------------
% False position method
%---------------------------------------------------
xr=.0;
es=0;
ea=1;
```



```
xr=.0;
es=0;
ea=1;
i=1;
while ea>es
    fl=exp(xl)-3*(xl);
    fu=exp(xu)-3*(xu);
    xrold=xr;
    xr=xu-(fu*(xl-xu))/(fl-fu);
    fr=exp(xr)-3*(xr);
    ea=abs((xr-xrold)/(xr));
    e(i)=ea;
    test=fl*fr;
    if test<0
        xu=xr;
    else
        xl=xr;
    end
%-------------------------------------------------
% To view the results
%-------------------------------------------------
disp('-----------------------------------------------');
disp('Root of an equation using false position method');
disp('-----------------------------------------------');
fprintf('the root of given equation is =%3.5f\n',xr);
fprintf('It took %2.0d iteration to find root.\n',i-1);
fprintf('error to find root =%3.5f\n',ea);
```

الشكل (7.5) – المثال (3.5) بالماتلاب.



الشكل (8.5) – المثال (3.5) – النتائج باستعمال الماتلاب.

3.1.5 طريقة نيوتن – رافسون

بمقارنة هذه الطريقة بغيرها من الطرق الأولى نجد أنها تضاعف الدقة في عدد الأطراف المعنية في كل عملية تكرار؛ ويمكن اشتقاق الطريقة كما يلي:

لو كانت $f(x)$ قابلة للتفاضل في فترة تشتمل على الجذر $x=\alpha$ وإذا كانت $x=x_1$ هي قيمة تقريبية لهذا الجذر فإنه باستخدام نظرية القيمة المتوسطة نجد أن:

$$f'(\zeta)=\frac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha} \qquad \ldots\ldots (4.5)$$

وحيث $\zeta\in[\alpha,x_1]$.

ولكن نحن نعلم بأن $f(\alpha)=0$ عليه فإن:

$$\alpha = x_1-\frac{f(x_1)}{f'(\zeta)} \qquad \ldots\ldots (5.5)$$

وحيث أننا لا نعرف قيمة ζ بالضبط، نضع كتقريب أولى $f'(\zeta) \cong f'(x_1)$ لنحصل على قيمة تقريبية أخرى لـ α من العلاقة نسميها x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{...... (6.5)}$$

والعلاقة (6.5) بدورها تقترح التكرار العام التالي:

$$x_{n+1} = x_n - {f(x_n)}/{f'(x_n)} \qquad \text{...... (7.5)}$$

والتكرار (7.5) هو ما نسميه بطريقة نيوتن-رافسون.

يمكن أيضا اشتقاق العلاقة (7.5) باستخدام مفكوك تايلور.

الآن من المعادلة (7.5) نستطيع أن نكتب:

$$(x_{n+1} - \alpha) = (x_n - \alpha) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{...... (8.5)}$$

ولو عينا الخطأ في كل تكرار بالمعادلة:

$$\varepsilon_n = x_n - \alpha \qquad \text{...... (9.5)}$$

فإن:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{...... (10.5)}$$

ولو رجعنا مرة أخرى إلى متسلسلة تايلور فإن:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2}\varepsilon_n^2 \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{...... (11.5)}$$

وهذه العلاقة الأخيرة توضح بأن:

$$\varepsilon_{n+1} \alpha \varepsilon_n^2 \qquad \ldots\ldots (12.5)$$

وهذا يعني تضييق الخناق على الخطأ باستخدام طريقة نيوتن ورافسون. ولهذا السبب تسمى هذه الطريقة أيضا بالطريقة ذات الرتبة الثانية. ذلك لأن معدل تقاربها أعلى من ذلك بالنسبة للطرق الأخرى والمذكورة آنفا. ولعل المأخذ الذي نأخذه على هذه الطريقة كونها بحاجة لحساب $f'(x)$ عند نقاط عديدة.

ولمعرفة تقارب هذه الطريقة نود الإشارة إلى أن المقدار $|x_{n+1} - x_n|$ يتناقص وبسرعة كلما زادت قيمة n. عليه لو وضعنا:

$$\left| f(x_n) \big/ f'(x_n) \right| < t \qquad \ldots\ldots (13.5)$$

وعينا قيمة t بعدد صغير معين (مثلا $t = 10^{-5}$) فإن الحسابات تتوقف بمجرد أن تتحقق المتباينة (13.5).

وتسمى t بالتسامح أو الإطاقة؛ أي أنها القيمة التي تحقق المتباينة (13.5) بحيث نستطيع بعدها إيقاف الحسابات؛ أما قبلها فلا يجوز ذلك وإلا فلن تكون حساباتنا دقيقة.

وتطبيقات طريقة نيوتن ورافسون كثيرة ومتنوعة، بل وتفوق نظيراتها مثل طرق التنصيف والموضع الخاطئ، حيث أنها تصلح في مواضع وحالات لا تصلح فيها الطريقتان المذكورتان.

مثال (4.5)

لنفس المعادلة $e^x - 3x = 0$ ؛ أكتب برنامجا حاسوبيا لحساب جذرها وذلك باستخدام طريقة نيوتن ورافسون.

الحل:

في الشكل (9.5) نعطي برنامجا مكتوبا بلغة C كما نوضح نتائج هذا البرنامج بالشكل (10.5) وحيث نلاحظ أن الإطاقة أو التسامح الذي تم اختياره هو $\varepsilon = 10^{-5}$.

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
void main( )
{
float diff,x0,x,xn,xl,y,yl,e;
int c=o;
clrscr( );
          e=10E-5;
          x=0;
printf("\tn          x\n\n\n');
do{
y=exp(x)-3*x;
y1=exp(x)-3;
xn=x-y\yl;
prnitf("\t%d      %f\n\n\n",c,xn);
x=xn;
diff=fabs(y/yl);
c++;
}while(diff>e);
getch( );
}
```

الشكل (9.5) – المثال (4.5) بلغة C.

n	x
0	0.500000
1	0.610060
2	0.618997
3	0.619061

الشكل (10.5) –نتائج المثال (4.5) بلغة C.

في الشكل (11.5) نعطي برنامجا بلغة باسكال ونبين النتائج بالشكل (12.5).

```
Program PRO3 (input,output)
Var x:real;
Xn,y:real;
I:integer;
Label Q;
Begin
Writeln (‘please enter x0’);
Read(x);
Q;
if (exp(x)-3*x<>0)then
begin
Xn=x-((exp(x)-3*x)/(Exp(x)-3))
Writeln (‘x’,i,’=’,xn);
X:=Xn;
Goto Q;
end;
end.
```

الشكل (11.5) – المثال (4.5) بلغة باسكال.

```
please enter x0
x0=6.1572189951E-01
x0=6.1905229448E-01
x0=6.1906128667E-01
x0=6.1906128674E-01
```

الشكل (12.5) – نتائج المثال (4.5) بلغة باسكال.

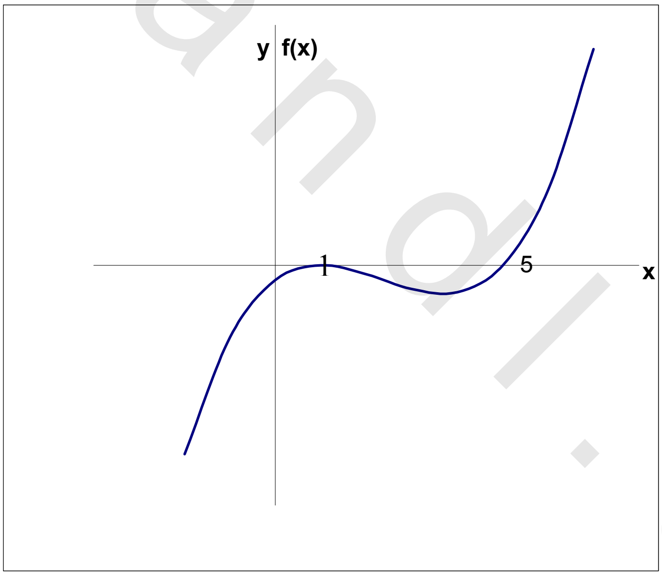
ونلاحظ أنه في نتائج البرنامج يكون الجذر هو :

$$x = 0.619061287$$

في ختام استعراضنا للطرق السابقة من تنصيف وموضع خاطئ وطريقة نيوتن ورافسون نجد أن السؤال التالي يطرح نفسه بإلحاح وهو:

ماذا عن تعدد الجذور؟ إنها مشكلة جدية!

فمثلا لو اعتبرنا المنحنى $f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0$ والمبين بالشكل (13.5).



الشكل (13.5) – تعددية الجذور

نلاحظ أن $f(x) = (x-1)^2(x-5) = 0$ أي أن $x = 1$ مرتين و $x = 5$ مرة واحدة.

وبذلك فالجذر $x = 1$ متكرر (بتعددية =2).

كما نلاحظ أنه يمكن الحصول على الجذر $x=5$ بأي طريقة من الطرق التي أوردناها.بينما $x=1$ يمكن الحصول عليه بطريقة نيوتن ورافسون ولكن لا يمكن الحصول عليه بطريقة التنصيف أو بطريقة الموضع الخاطئ. عليه نحصل على $x=1$ بطريقة نيوتن ورافسون ثم نستعمل طريقة القسمة الاصطناعية لنتخلص من الحد $(x-1)$ فنحصل على حدودية من درجة أقل بواحد، وهذه نحصل على جذورها بإحدى الطرق السابقة. فمثلا للحدودية المذكورة أعلاه نجد أن خارج القسمة هو:

$$x^2-6x+5$$

وذلك يتضح من القسمة الموضحة أسفله:

$$\begin{array}{r|rrrr} \underline{1} & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ & 1 & -7 & 11 & -5 \\ & & 1 & -6 & 5 \\ & & -6 & 5 & 0 \end{array}$$

2.5 حلول المعادلات الآنية

في هذا البند نناقش حلول المعادلات الآنية وحيث نتطرق في البداية إلى حلول المعادلات الخطية ثم نتحول إلى معالجة المعادلات الآنية غير الخطية.

1.2.5 حلول المعادلات الآنية الخطية

لو كان لدينا n من المعادلات في n من المجاهيل ونريد إيجاد قيم هذه المجاهيل فإننا نتعامل عندئذ بما يسمى بالمعادلات الآنية، وتكون خطية لو كانت على الصورة:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \qquad \dots\dots (14.5)$$

أو في صورة أخرى على الشكل:

$$AX = Y \qquad \dots\dots (15.5)$$

وحيث $A = (a_{ij})$ و $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ و $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

وما نبتغيه هو الحصول على X . لاحظ هنا أننا نتعامل مع مصفوفة من المعاملات بعدها هو n^2 .وتنقسم مثل هذه المنظومات إلى قسمين هما:

[أ] منظومة متجانسة ويكون فيها $Y = 0$ ؛ و

[ب] منظومة غير متجانسة ويكون فيها $Y \neq 0$.

ومن مقرر أولي في الجبر الخطي نحن نعلم بأن المنظومة المتجانسة يكون لها حل غير الحل الصفري إذا ما كان $\det(A) = 0$. بينما يكون هناك حل وحيد للمنظومة غير المتجانسة إذا كان $\det(A) \neq 0$.

هذا وتوجد عدة طرق لحل المعادلات الآنية الخطية، منها المباشرة ومنها غير المباشرة. من الطرق المباشرة طريقة كريمر (أو المحددات) وطريقة الحذف لجاوس

وطريقة استعمال معكوس المصفوفة، أما الطرق غير المباشرة فهي الطرق التكرارية ومنها طريقة جاوس وسايدل.

طريقة كريمر

تعتمد هذه أساسا على استعمال المحددات وهي طريقة بسيطة وبالتأكيد لقد تعرض لها الطالب أو القارئ من قبل وفي مراحل مبكرة من دراسته. لو أخذنا على سبيل المثال منظومة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= f_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= f_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= f_3 \end{aligned}$$

فإنه بالتخلص من y و z باستخدام المعادلتين الأخيرتين وباستعمال الأولى نحصل على:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & b_1 & c_1 \\ f_2 & b_2 & c_2 \\ f_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

وحيث:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

كما أن y و z يعطيان بصورة مماثلة على النحو:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & f_1 & c_1 \\ a_2 & f_2 & c_2 \\ a_3 & f_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

و

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & f_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

مثال (5.5)

قم بإيجاد حل المعادلتين:

$$\begin{aligned} x+y&=5 \\ 2x+y&=7 \end{aligned}$$

الحل:

باستخدام طريقة كريمر نرى أن:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=(1)(1)-(1)(2)=-1$$

كما أن:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(5)(1)-(7)(1)}{(-1)}=2$$

وكذلك نجد أن:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(1)(7)-(2)(5)}{(-1)} = 3$$

أي أن:

$$(x, y) = (2,3)$$

لقد قمنا في المثال السابق بالحسابات العددية يدويا و ذلك لأن عدد المعادلات صغير. غير أنه عندما يكون عدد المعادلات كبيراً فإننا بحاجة إلى برمجة و استخدام الحاسوب كما سنوضحه فيما بعد.

طريقة الحذف لجاوس

في هذه الحالة نرتب المعادلات بطريقة معينة ثم نستخدم الأولى لحذف x_1 من بقية المعادلات التي تلي الأولى؛ بعد ذلك نستخدم المعادلة الثانية لحذف x_2 من المعادلات التي تليها وهكذا حتى نصل في النهاية إلى المعادلة الأخيرة حاوية x_n فقط. بعد الحصول على x_n نعود أدراجنا معادلة فنوجد x_{n-1} ثم x_{n-2} حتى x_2 و x_1.

لتوضيح هذه العملية أو الطريقة دعنا نسوق المثال التالي:

مثال (6.5)

أوجد حل المعادلات الآنية التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

الحل:

لحل هذه المنظومة من المعادلات يدويا، نقوم بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى

نعيد ترتيب المعادلات بحيث يكون معامل x_1 يساوي الواحد الصحيح (وإن لم تتواجد معادلة تحقق هذا الشرط نقوم بقسمة أطراف أي معادلة على معامل x_1) وبذلك نحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

الخطوة الثانية

نتخلص من x_1 في المعادلتين الأخيرتين باستعمال المعادلة الأولى وذلك بالضرب في 2- والجمع بالنسبة للثانية وبالضرب في 3- والجمع بالنسبة للثالثة، وهكذا نحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \\ 0 - 3x_2 - 5x_3 &= -21 \\ 0 - 4x_2 - 7x_3 &= -29 \end{aligned}$$

نقوم بعدها بقسمة المعادلة الثانية في المنظومة على 3- لنحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \\ x_2 + \frac{5}{3}x_3 &= 7 \\ -4x_2 - 7x_3 &= -29 \end{aligned}$$

الخطوة الثالثة: نتخلص من x_2 في المعادلة الثالثة باستخدام المعادلة الثانية وذلك بضربها في 4 والجمع وبذلك نحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \\ x_2 + \frac{5}{3}x_3 &= 7 \\ 0 - \frac{1}{3}x_3 &= -1 \end{aligned}$$

الخطوة الرابعة (والأخيرة): من المعادلة الأخيرة نرى أن $x_3 = 3$ وبالتعويض في الثانية نرى أن:

$$x_2 = 7 - \frac{5}{3}(3) = 7 - 5 = 2$$

وأخيرا بالتعويض في الأولى عن x_2 و x_3 نجد أن: $x_1 = 12 - x_2 - 3x_3 = 12 - 2 - 9 = 1$

أي أن حلول المنظومة المعطاة هي: $x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad x_3 = 3$

ويمكن برمجة هذه الطريقة باستخدام إحدى لغات الحاسوب؛ ويفضل ذلك إذا ما كان عدد المعادلات كبيراً.

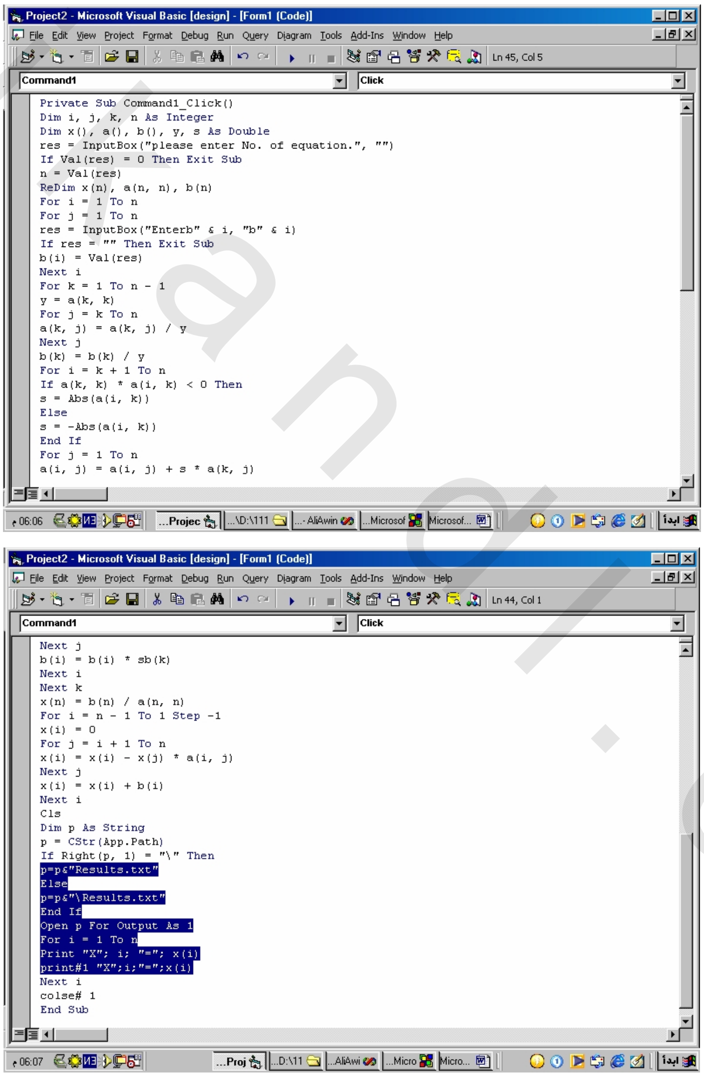
مثال (7.5)

أكتب برنامجا حاسوبيا عاما لحل n من المعادلات الآنية في n من المجاهيل: ثم أوجد حل منظومة المعادلات الموالية:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 3x + 5y + 2z &= 31 \end{aligned}$$

الحل:

يمكن كتابة البرنامج بأي لغة ولقد اخترنا هنا لغة بيسك المرئية الموضحة بالشكل (14.5)؛ ولو قمنا بإجراء البرنامج لحصلنا على $x_1 = 2$ و $x_2 = 3$ و $x_3 = 5$.



الشكل (14.5) – المثال (7.5) بلغة بيسك المرئية.

نلاحظ أنه من الممكن جداً أن يلعب الخطأ الناتج عن التقريب دوراً هاماً في حل المعادلات الآنية، ويظهر ذلك خاصة في طريقة الحذف لجاوس، حيث أن كل خطوة في الحسابات تعتمد على التي قبلها، وهكذا فإنه إذا حدث خطأ فإنه ينتشر.

في المعتاد يتم الكشف عن الخطأ هنا بالرجوع إلى المعادلات والتعويض عن الحلول والمقارنة؛ فمثلا لو اعتبرنا المعادلتين:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 7 \\ 5x_1 - 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

وحدث أن أخطأنا قليلا وحصلنا على الحلول $x_1 = 0.999$ و $x_2 = 1.002$ فإنه عند التعويض نجد أن $3x_1 + 4x_2 = 7.005$ و $5x_1 - 2x_2 = 2.991$. وبمقارنة هذه الأعداد بالأعداد 7 و3 نقاد إلى الاعتقاد بأن النتائج صحيحة تقريبا. غير أن هذه المقارنة ليست دائما سليمة. فمثلاً للمعادلتين:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 1.01x_1 + x_2 &= 2.01 \end{aligned}$$

نرى أنه توجد مجموعتان من الحلول $x_1 = x_2 = 1$ و $x_1 = 0$ و $x_2 = 2.005$ وكلاهما تحققان المعادلتين (بخطأ في 2 و 2.01 مقداره 0.005) ولكن الخطأ في كل قيمة للمتغير $x_i (i = 1,2)$ هو 1. وهذا أمر غير مقبول بل وشائن.

ويمكن أن يحدث الخطأ بسبب خطأ في معاملات المجاهيل، وعليه فإن منظومة المعادلات التي تتحقق بحلول خاطئة تسمى بالمكيفة مرضيا. ويرجع السبب في هذا التكييف المرضي أساساً إلى أن محدد المعاملات يقارب الصفر في قيمته. وكون المحدد

قريب من الصفر يعتبر من الأمور السيئة. تذكر أنه في حالة مساواة المحدد للصفر إما أن نحصل على عدد لانهائي من الحلول أو أن لا نحصل على أي حل.

طريقة معكوس المصفوفة

لو أن $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{B}$ فإنه بالضرب في $\underset{\sim}{A}^{-1}$ نحصل على: $\underset{\sim}{A}^{-1}\,\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{A}^{-1}\,\underset{\sim}{B}$.

وحيث أن $\underset{\sim}{A}^{-1}\,\underset{\sim}{A}=1$ فإننا نحصل على: $\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{A}^{-1}\,\underset{\sim}{B}$ ، عليه لو أمكن حساب $\underset{\sim}{A}^{-1}$ فإننا نتمكن من حساب $\underset{\sim}{X}$ وهو متجه الحل.

مثال (8.5)

أعد حل المثال (6.5) باستخدام معكوس المصفوفة.

الحل:

منظومة المعادلات هي:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+3x_3&=12\\ 2x_1-x_2+x_3&=3\\ 3x_1-x_2+2x_3&=7 \end{aligned}$$

وهذه يمكن كتابتها على الصورة: $AX=B$

وحيث:

$$\underset{\sim}{B}=\begin{pmatrix}12\\3\\7\end{pmatrix} \text{ و } \underset{\sim}{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \text{ و } \underset{\sim}{A}=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&-1&1\\3&-1&2\end{pmatrix}$$

نوجد A^{-1} وهذه يمكن إيجادها بعدة طرق سبق للقارئ أن تعرف لها بدراسته السابقة.

هذا وسوف نقوم هنا بحساب A^{-1} بطريقة سهلة وذلك بوضعها جنبا إلى جنب ويسارا مع $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم نقوم بإجراء عدة عمليات صفية (r) حتى تتحول I_3 إلى اليسار من $\underset{\sim}{A}$ بدلا من اليمين؛ ونوضح الحل كما يلي:

$$\left(\underset{\sim}{A}I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2/(-3)}$$

$$\left(\underset{\sim}{A}I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 + 4r_2]{r_1 \to r_1 - r_2}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \to r_2 + 5r_5]{r_1 \to r_1 + 4r_3}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to -3r_3}$$

$$\left(\underset{\sim}{A} I_3\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & -3\end{array}\right)\equiv\left(I_3\ \underset{\sim}{A}^{-1}\right)$$

وبذلك فإن:

$$\underset{\sim}{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -5 & 4\\ -1 & -7 & 5\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

والحلول هي:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\underset{\sim}{A}^{-1}B=\begin{pmatrix}-1 & -5 & 4\\ -1 & -7 & 5\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\ 3\\ 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12-15+28\\ -12-21+35\\ 12+12-21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

وهي الحلول التي سبق التوصل إليها بطريقة الحذف لجاوس.

الطريقة التكرارية (طريقة جاوس وسايدل)

مرة أخرى نعتبر منظومة المعادلات الآنية الخطية $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{Y}$، ولنفترض أن المعاملات a_{ii} (وهي القطرية) كلها لا تساوي الصفر؛ عندئذ نقوم بكتابة x_i بدلالة البقية كما يلي:

$$x_i=\frac{1}{a_{ii}}\{y_i-a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-.......-a_{in}x_n\},\ i=1,2,.....,n$$

فمثلاً نرى أن:

$$x_1=\frac{1}{a_{11}}\{y_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3-.......-a_{1n}x_n\}$$

كما أن:

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\{y_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - .... - a_{2n}x_n\}$$

.....وهكذا بالنسبة لبقية المتغيرات.

نفترض في البداية قيم ابتدائية لكل x_i ثم نقوم بالتعويض بها ونحسب x_1 (مثلاً)، بعد ذلك نعوض بهذه القيمة الجديدة لـ x_1 وبالقيم الابتدائية الأخرى نحسب x_2. ثم بقيم x_1 و x_2 الجديدة والقيم الابتدائية الأخرى نحسب x_3 . أي أنه في كل مرة نأخذ بالقيمة الجديدة المحسوبة والقيم الأخرى لحساب قيمة جديدة للمتغير الموالي؛ وبذلك نتدرج من القمة حتى القاعدة لنحسب قيم جديدة لكل x_i ثم نعود فنعيد الكرة حتى نصل إلى الحلول المطلوبة.

لفهم ذلك دعنا نوضح الطريقة من خلال مثال خاص وبسيط باستخدام برنامج صغير بالفورتران.

مثال (9.5)

استخدم الطريقة التكرارية لحل المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \\ x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 15 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 10 \\ x_2 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

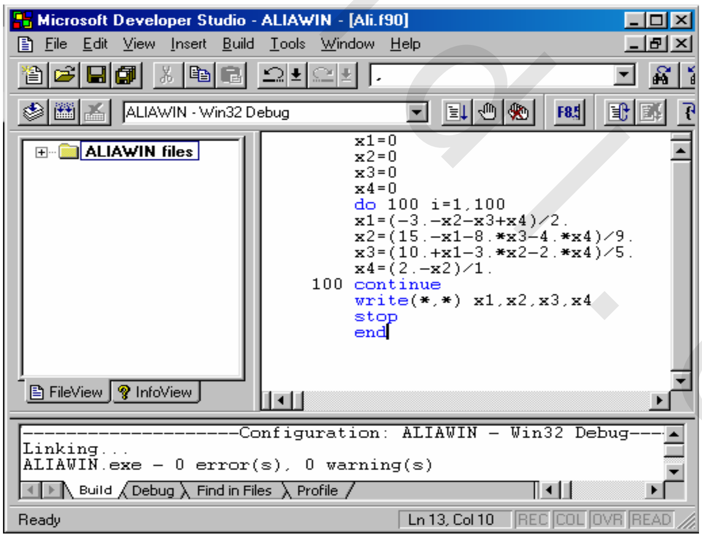
الحل:

نكتب x_i على الصورة:

$$x_1 = \left(-3 - x_2 - x_3 + x_4\right)/2 \quad \text{؛ و} \quad x_2 = \left(15 - x_1 - 8x_3 - 4x_4\right)/9$$

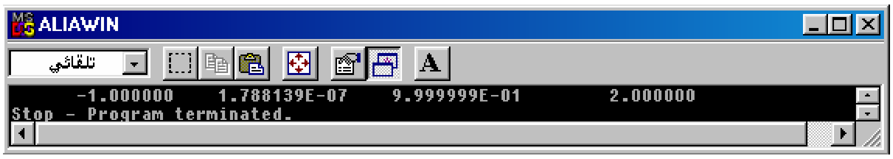
$$x_3 = \left(10 + x_1 - 3x_2 - 2x_4\right)/5 \quad \text{و} \quad x_4 = 2 - x_2$$

ثم نكتب البرنامج الموضح بالشكل (15.5) وحيث نرى أنه قد استخدمنا حلقة أعمل من مائة خطوة حتى نضمن الوصول إلى الحلول المطلوبة. غير أنه لابد أن ننوه بأنه كان من الأكفأ والأجدى استعمال إطاقة أو تسامح (حسب الدقة المطلوبة) على القيم المتتالية لكل متغير (مثلا أن نستخدم $\left|x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)}\right| < 10^{-5}$).



الشكل (15.5) – المثال الخاص (9.5)

لو قمنا بإجراء البرنامج بالشكل (15.5) فإننا نحصل على النتائج التالية:



ونود أن نشير هنا إلى أن هذه الطريقة طويلة وتقاربها بطئ إلا إذا كان العديد من المعادلات مساويا الصفر. لهذا السبب لا تستعمل هذه الطريقة إلا إذا فشلت الطريقة المباشرة.

والإجابة عن السؤال المتعلق بتقارب الحلول ليست بسيطة، حيث أنه من الصعب، عادة، تخمين وقف عملية التكرار؛ غير أنه يمكن الاهتداء بما يلي:

[أ] إذا كانت الحلول متقاربة فإنه ربما يأخذ ذلك عدداً لا بأس به من خطوات التكرار.

[ب]لوقف عملية التكرار إما أن نضع نهاية عظمى لعدد مرات التكرار (100 مثلاً في المثال السابق)؛ أو أن نضع قيمة تسامح أو إطاقة على القيم المتتالية لـ x_i .

[ج] إذا لم نتمكن من التوصل إلى الخطوة [ب] فإن ذلك يعني أن العملية غير متقاربة ومن المحبذ إعادة ترتيب المعادلات للحصول على التقارب.

وفي هذا الصدد نورد مبرهنة مهمة عن تقارب الطريقة التكرارية.

مبرهنة

تتقارب طريقة جاوس وسايدل التكرارية إذا ما كان بالمحدد المميز كل حد بالقطر الرئيسي أكبر من (في قيمته المطلقة) مجموع القيم المطلقة لكل الحدود الأخرى في نفس الصف أو العمود.

أي أنه من المؤكد الحصول على التقارب إذا كان:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad ; \quad i = 1, \ldots\ldots, n$$

و

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

2.2.5 حلول المعادلات الآنية غير الخطية

لحل المعادلات الآنية غير الخطية، دعنا نبدأ بحل معادلتين آنيتين غير خطيتين في مجهولين (x, y)، ولتكن هاتين المعادلتين هما:

$$f_1(x, y) = 0 \qquad \ldots\ldots (16.5)$$

و

$$f_2(x, y) = 0 \qquad \ldots\ldots (17.5)$$

والمطلوب هو إيجاد النقطة (x, y) التي تحقق المعادلتين (16.5) و(17.5).

ما سنقوم به هو إيجاد علاقات تكرارية من النوع:

$$x_{i+1} = g_1(x_i, y_i) \qquad \ldots\ldots (18.5)$$

و

$$y_{i+1} = g_2(x_i, y_i) \qquad \ldots\ldots (19.5)$$

وحيث نبدأ بقيم ابتدائية مختارة ونستمر في استعمال (18.5) و (19.5) حتى نصل إلى الحل المطلوب.

للقيام بعمليات تكرارية لابد من طريقة ما؛ والطريقة المعروفة هي طريقة نيوتن ورافسون.

لاشتقاق هذه الطريقة نلجأ كالمعتاد إلى متسلسلة تايلور في متغيرين لنكتب f_1 و f_2 عند (x_{i+1}, y_{i+1}) بدلالة (x_i, y_i) وذلك كما يلي:

$$f_1(x_{i+1}, y_{i+1}) = f_1(x_i, y_i) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{(x_i, y_i)} (x_{i+1} - x_i) + \left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_{(x_i, y_i)} (y_{i+1} - y_i) + \ldots \qquad \ldots\ldots (20.5)$$

و

$$f_2(x_{i+1}, y_{i+1}) = f_2(x_i, y_i) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_{(x_i, y_i)} (x_{i+1} - x_i) + \left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_{(x_i, y_i)} (y_{i+1} - y_i) + \ldots \qquad \ldots\ldots (21.5)$$

ولو أن (x_{i+1}, y_{i+1}) قريبة من الجذر فإننا نضع كتقريب أولى $f_1(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0$ و $f_2(x_{i+1}, y_{i+1}) = 0$ وبذلك نحصل على:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} h + \frac{\partial f_1}{\partial y} k = -f_1(x_i, y_i) \qquad \ldots\ldots (22.5)$$

و

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} h + \frac{\partial f_2}{\partial y} k = -f_2(x_i, y_i) \qquad \ldots\ldots (23.5)$$

وحيث وضعنا:

$$h = x_{i+1} - x_i \qquad \ldots\ldots (24.5)$$

و

$$k = y_{i+1} - y_i \qquad \ldots\ldots (25.5)$$

كما أن المشتقات الجزئية لـ f_1 و f_2 كلها محسوبة عند النقطة (x_i, y_i).

والمعادلتان (22.5) و (23.5) يمكن حلهما في h و k إذا ما كان الجاكوبي J لا يساوي الصفر، أي عندما :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \ldots\ldots (26.5)$$

وحل المعادلتين المذكورتين عندئذ يتمثل في:

$$h = \frac{\begin{vmatrix} -f_1(x_i, y_i) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ -f_2(x_i, y_i) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{J} \qquad \ldots\ldots (27.5)$$

و

$$h = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & -f_1(x_i, y_i) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & -f_2(x_i, y_i) \end{vmatrix}}{J} \qquad \ldots\ldots (28.5)$$

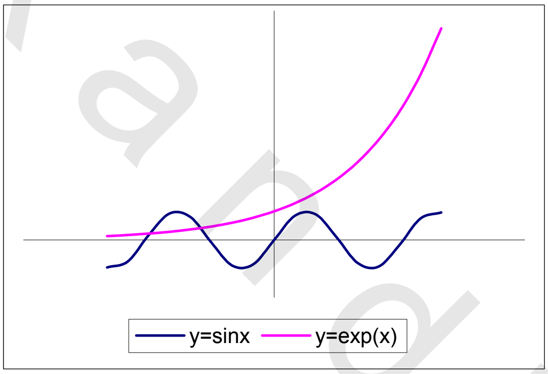
وبالحصول على h و k نعود إلى المعادلتين (24.5) و (25.5) لنعوض بهما ونحصل على (x_{i+1}, y_{i+1}) ثم نعيد الكرة بالقيم الجديدة. كما أننا نتوقف إذا ما حصلنا على الحل المطلوب حسب الدقة المعينة وذلك من خلال وضع إطاقة أو تسامح على القيم المتتالية على x و y .

مثال (10.5)

قم بحل المعادلتين الآنيتين غير الخطيتين $y = e^x$ و $y = \sin x$.

الحل:

نلاحظ من منحنى الدالتين [الشكل (16.5)] أن الحلول لانهائية في العدد غير أنه سوف نقوم هنا بإيجاد حل واحد فقط والبقية يمكن إيجادها باختيار قيم ابتدائية مختلفة.



الشكل (16.5) الدالتان $y = e^x$ و $y = \sin x$.

نلاحظ أن $f_1(x, y) = y - e^x$ وبذلك فإن:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -e^x \quad \text{و} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = +1$$

كما أن $f_2(x, y) = y - \sin x$ وبذلك فإن $\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\cos x$ و $\frac{\partial f_2}{\partial y} = +1$ ويكون الجاكوبي J هو :

$$J = \begin{vmatrix} -e^x & +1 \\ -\cos x & +1 \end{vmatrix} = \cos x - e^x$$

ويجب أن نتحاشى القيم التي تجعل $J=0$ أي تلك التي تحقق $\cos x - e^{x} = 0$. كما نحسب h و k من المعادلتين:

$$h = \frac{\begin{vmatrix} e^{x_i} - y_i & +1 \\ \sin x_i - y_i & +1 \end{vmatrix}}{\left(\cos x_i - e^{x_i}\right)} = \frac{\left(e^{x_i} - \sin x_i\right)}{\left(\cos x_i - e^{x_i}\right)}$$

$$k = \frac{\begin{vmatrix} -e^{x_i} & e^{x_i} - y_i \\ -\cos x_i & \sin x_i - y_i \end{vmatrix}}{\left(\cos x_i - e^{x_i}\right)} = \frac{\left[\cos x_i\left(e^{x_i} - y_i\right) - e^{x_i}\left(\sin x_i - y_i\right)\right]}{\left(\cos x_i - e^{x_i}\right)}$$

ويمكن أن نبدأ بقيمة ابتدائية $(-2.5,0)$.

لو قمنا بذلك وقمنا بكتابة برنامج حاسوبي بلغة C مثلاً [البرنامج بالشكل (17.5)] لحصلنا على النتائج الموضحة بالشكل (18.5) والتي توضح بأن الحل الأول المطلوب هو: $(-3.183, 0.041)$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية؛ والذي تم الحصول عليه بعد 6 تكرارات.

(نلاحظ أنه لو أردنا الحل الثاني فإننا نضع $x_0 = -6$ و $y_o = 0.0$] – أنظر الشكل (18.5)).

```
#include<math.h>
#include<conio.h>
#include<conio.h>
#include<stdio.h>
main( )
{
clrscr( );
float x1,y1,y2=0,x2=0,num1,den1,num2,den2,d,f1,f2;
int i=1;
cout<<"Enter the initial x0,y0?"<<'\n';
cin>>x1>>y1;
d=1000
while(d>pow(10,-4))
{
num1=sin(x1)-y1;
den1=cos(x1);
num2=exp(x1)-y1;
den1=-1;
x2=x1-(num1/den1);
y2=y1-(num2/den2);
cout<<"x"<<i<<"="<<x2<<'\t'<<"y"<<i<<"="<<y2<<'\n';
++I;
d=fabs(x2-x1);
x1=x2;
y1=y2;
}
```

الشكل (17.5) – المثال (10.5) بلغة C.

```
Enter the initial x0,y0?
-2.5
0
X1=-3.247022        y1=0.082085
X2=-3.223744        y2=0.038890
X3=-3.180429        y3=0.039806
X4=-3.181409        y4=0.041568
X5=-3.183172        y5=0.041527
X6=-3.183132        y6=0.041454
```

الشكل (18.5) نتائج المثال (10.5).

مثال (11.5)

قم بكتابة برنامج حاسوبي لحساب حلول المعادلتين الآنيتين غير الخطيتين $y = \cos x$ و $x = \sin y$. وذلك باستعمال طريقة نيوتن ورافسون.

الحل:

لو قمنا برسم الدالتين في المستوى $x-y$ لوجدنا أنه يوجد حل واحد عند $(0.768...,0.695...)$ تقريبا.

الآن نضع:

$$f_1(x, y) = \cos x - y = 0$$

و

$$f_2(x, y) = +x - \sin y = 0$$

ونلاحظ أن:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -1 \text{ و } \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\sin x$$

كما أن:

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\cos y \text{ و } \frac{\partial f_2}{\partial x} = +1$$

والجاكوبي هو :

$$J = \begin{vmatrix} -\sin x & -1 \\ 1 & -\cos y \end{vmatrix} = \sin x \cos y + 1 \neq 0$$

كما أن:

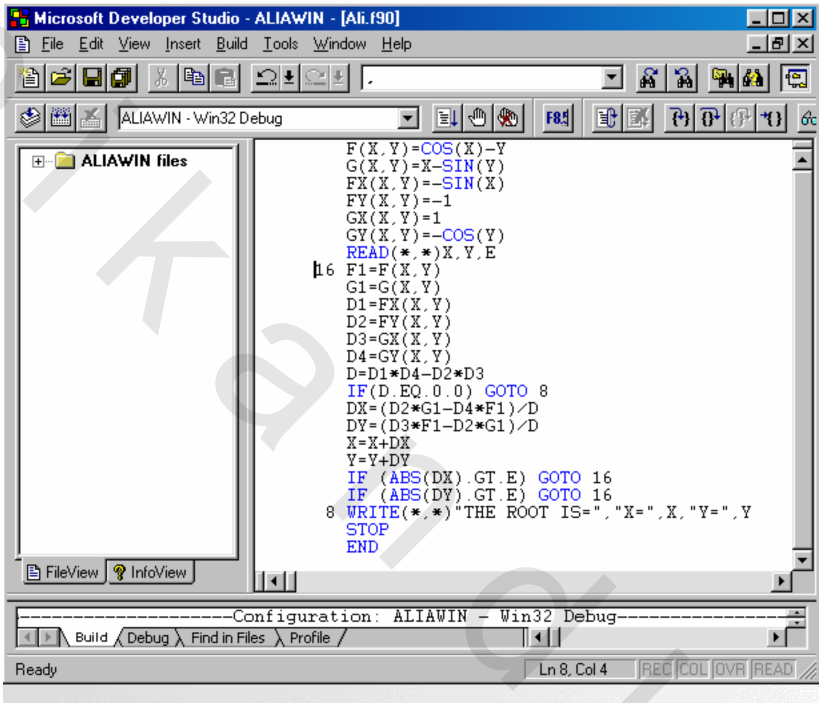
$$h = \frac{(\cos x - y)\cos y - (x - \sin y)}{1 + \sin x \cos y}$$

و

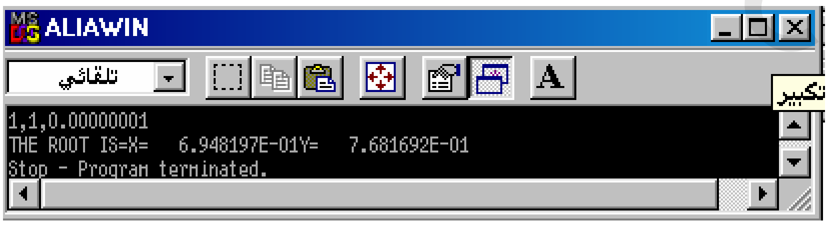
$$k = \frac{\sin x(x - \sin y) + (\cos x - y)}{1 + \sin x \cos y}$$

نقوم بكتابة البرنامج الموضح بالشكل (19.5) وهو بلغة فورتران 90 لنحصل

على النتيجة المتوقعة والموضحة بالشكل (20.5). وحيث نلاحظ أننا استخدمنا تسامحا بقيمة تساوي 10^{-8} وقيمة ابتدائية للحل هي (1,1).



الشكل (19.5) – المثال (11.5) بلغة فورتران 90.



الشكل (20.5) نتائج المثال (11.5).

ويمكننا تعميم هذه الطريقة لـ n. من المعادلات في n من المجاهيل إلا أن العملية تصبح صعبة؛ ذلك لأننا سوف نحسب n^2 من المشتقات الجزئية. عليه وكبديل نستعمل طريقة نيوتن ورافسون المعدلة وذلك باعتبار المعادلة الأولى معادلة في x والثانية معادلة في y وهكذا.....؛ ثم نستخدم طريقة نيوتن ورافسون في متغير واحد والتي سبق وأن تعرضنا لها بالبند (3.1.5). فمثلاً لمعادلتين في مجهولين نستخدم:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f_1(x_i, y_i)}{\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{(x_i, y_i)}} \qquad \ldots\ldots (29.5)$$

و

$$y_{i+1} = y_i - \frac{f_2(x_i, y_i)}{\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_{(x_i, y_i)}} \qquad \ldots\ldots (30.5)$$

والعيب في هذه الطريقة، رغم سهولتها، يكمن في أمرين:

الأول: أنها تأخذ زمنا أطول من طريقة نيوتن ورافسون المعتادة.

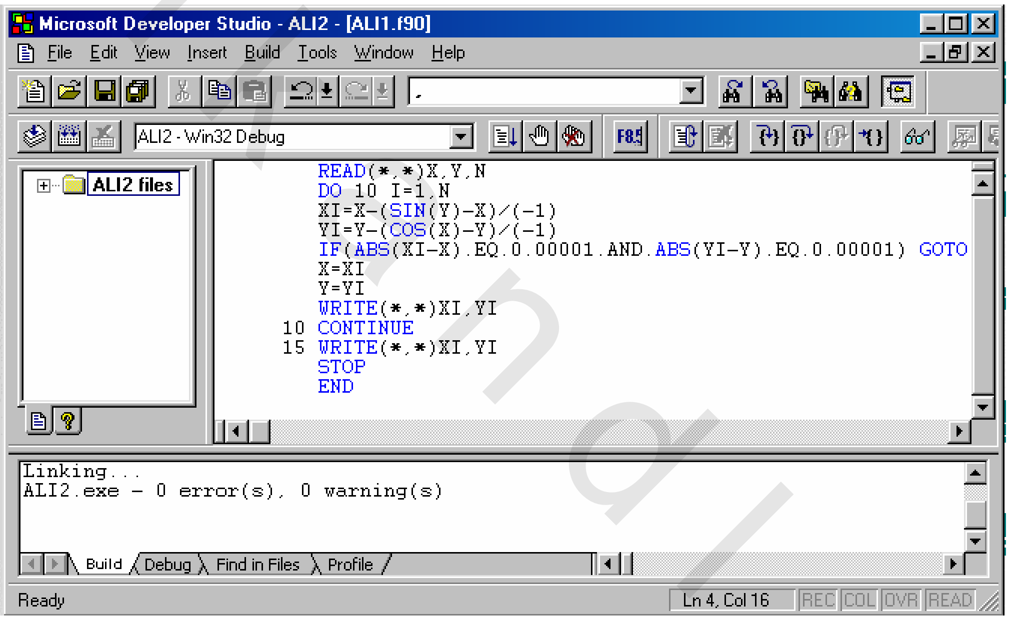
الثاني: قد يحدث أحيانا أن اختيارنا لـ f_1 و f_2 لا يؤدي إلى التقارب، فإذا حدث ذلك نبدل f_1 بـ f_2 و f_2 بـ f_1 وعندئذ سنحصل بالتأكيد على التقارب.

مثال (12.5)

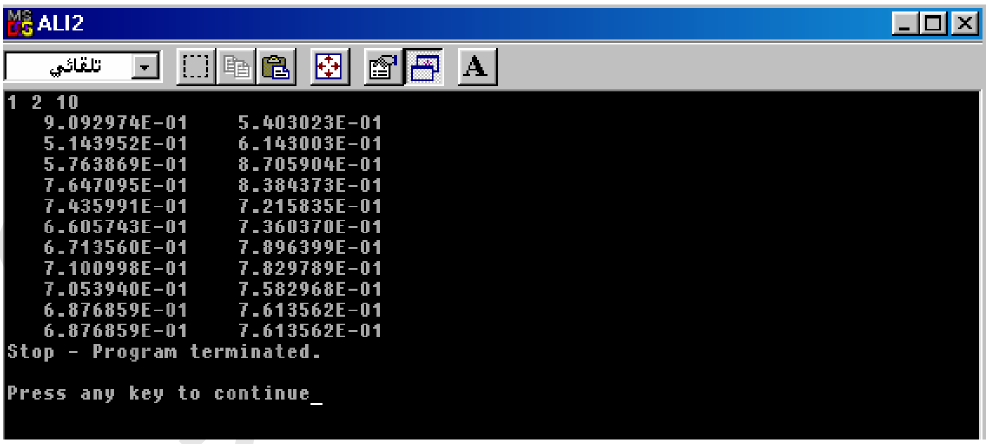
أعد حل المثال (10.5) وذلك باستعمال طريقة نيوتن ورافسون المعدلة.

الحل:

نكتب البرنامج الموضح بالشكل (21.5) ولو قمنا بإجرائه لحصلنا على النتائج الموضحة بالشكل (22.5). وحيث نستخدم إطاقة على القيم المتتالية في x و y تساوي 10^{-5}.



الشكل (21.5) – المثال (12.5) بلغة فورتران.



الشكل (22.5) – نتائج المثال (12.5).

تمارين (5)

1. باستعمال الطرق المختلفة من تنصيف وموضع خاطئ ونيوتن ورافسون، احسب جذور المعادلات التالية:

[أ] $x^3 - 28 = 0$ [ب] $\cos x = \frac{1}{2}$ [ج] $e^x = 5x$

[د] $\ln x - x + 2 = 0$ [ه] $x^2 - 2x - 3.5 = 0$ [و] $\tan x = 1.1$

2. اكتب برامج حاسوبية للمسألة (1) الفقرات [أ]، [ج]، [و].

3. استخدم طريقة التنصيف لحساب قيمة الجذر السالب للمعادلة $x^3 - 2x - 3 = 0$.

4. المعادلة $x^2 - x = 0$ لها جذران هما $x = 0$ و $x = 1$، فإذا استخدمنا التكرار $x_{i+1} = x_i^2$، فأي الجذرين يمكن الحصول عليه بقيمة ابتدائية $x_o = \frac{1}{3}$ ؟ ماذا عن الجذر الثاني ؟.

5. العملية التكرارية باستعمال طريقة نيوتن ورافسون للمعادلة $x^2 - x = 0$ هي :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\left(x_i^2 - x_i\right)}{2x_i - 1} = \frac{x_i^2}{2x_i - 1}$$

اكتب برنامجا حاسوبيا لإيجاد الجذرين باستخدام قيم ابتدائية $\frac{1}{2}$, 5 و 10 بالترتيب المذكور. اشرح نتائجك.

6. استخدم طريقة الحذف لجاوس وطريقة كريمر وطريقة معكوس المصفوفة لحل منظومة المعادلات التالية:

[أ]

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

[ب]

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_2 \qquad + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

[ج]

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 4 \\ 5x - 2y - z &= -2 \\ 2x + 2y + z &= 9 \end{aligned}$$

7. استخدم طريقة جاوس وسايدل لحساب حلول المعادلات بالفقرة [ب] بالسؤال السابق.

8. أوجد قيم المجاهيل إلى ثلاثة أرقام عشرية في المعالتين:

$$\begin{aligned} 8.7x - 2.3y &= 4.8 \\ 3.2x - 7.4y &= 5.3 \end{aligned}$$

9. قم باشتقاق طريقة نيوتن ورافسون في حالة ثلاثة معادلات آنية غير خطية:

$f_1(x, y, z) = 0$ و $f_2(x, y, z) = 0$ و $f_3(x, y, z) = 0$.

ماذا عن طريقة نيوتن ورافسون المعدلة في هذه الحالة.

10. احسب جذور المعادلات الآنية غير الخطية الموالية:

[أ] $x = \sin y \quad , \quad y = e^x$

[ب] $y = \ln x \quad , \quad y = \cos x$

[ج] $y = x^2 \quad , \quad y = e^x$