

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية

يحتوي هذا الفصل على:

- 1.9 مقدمة
- 2.9 تمثيل المعادلات التفاضلية بمعادلات فرقية
- 3.9 معادلات لابلاس بمنطقة مستطيلة
- 4.9 معادلات تفاضلية مكافئة
- 5.9 معادلات زائدية
- 6.9 اتزان الطرق العددية لحل المعادلات
التفاضلية الجزئية
- 7.9 الطرق العددية الصريحة والضمنية
- 8.9 الشروط الحدية وأنواعها
- 9.9 ملاحظات هامة

obeykandl.com

1.9 مقدمة

يقع العديد من المسائل في الفيزياء والهندسة وبمجالات عدة داخل نطاق هذا الفصل فعلى سبيل المثال نرى أن مسائل تدفق الحرارة والمعادلة الموجية وغيرها يؤول حلها إلى حل معادلات تفاضلية جزئية؛ وعليه وجب أن نولي اهتماما للحلول العددية لهذه المعادلات.

بعض الأمثلة على المعادلات التفاضلية الآتي:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ أو $\nabla^2 u = 0$ وهي معادلة لابلاس. أو $\nabla^2 u \neq 0$ وهي معادلة بواسون.

ومثال آخر:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq k, \quad t \geq 0$$

بالشروط:

$$y(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{x=l} = c$$
$$y(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_0 = 0$$

وعموما تكون المعادلة:

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = g(x, y)$$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية وتمثل:

معادلة ناقصية (Elliptic) إذا كان $B^2 - 4AC < 0$

معادلة مكافئية (Parabolic) إذا كان $B^2 - 4AC = 0$

معادلة زائدية (Hyperbolic) إذا كان $B^2 - 4AC > 0$

وإذا كان A, B, C دوال في x و y أو u فإن هذه المعادلة يمكن أن تتغير من قسم لآخر عند نقاط عدة في نطاقها. لاحظ أننا أوردنا أمثلة نطاقها في المستوى xy .

لنرجع الآن إلى معادلة لابلاس حيث $B=0$ و $A=C=1$ وهي ناقصية ونحاول دراستها في البداية كإحدى النماذج لهذا النوع.

2.9 تمثيل المعادلة التفاضلية بمعادلة فرقية

في مثل هذه الحالات يكون النطاق عبارة عن منطقة في المستوى xy كما بالشكل (1.9). الآن لو كان $\Delta x = h$ فإنه من خلال مفكوك متسلسلة تايلور نجد أن:

$$f(x_n + h) = f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{f''(x_n)h^2}{2!} + \dots$$

و

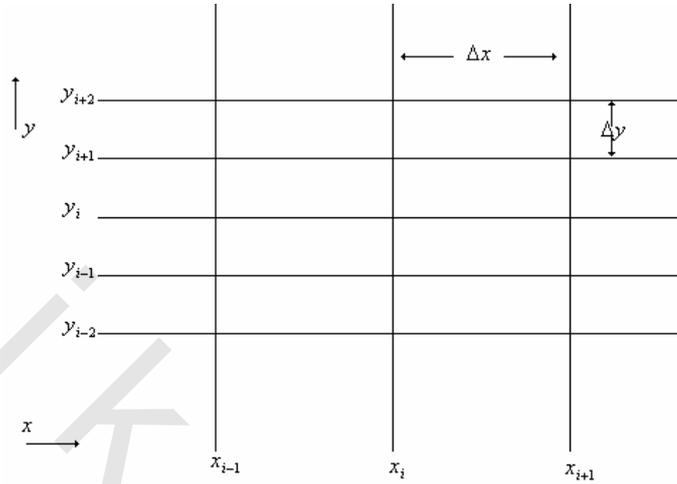
$$f(x_n - h) = f(x_n) - f'(x_n)h + \frac{f''(x_n)h^2}{2!} + \dots$$

و منها نرى أن:

$$\frac{f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}}{h^2} = f''_n + O(h^2)$$

حيث وضعنا $f_n = f(x_n)$

■ ■ الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية ■ ■



الشكل (1.9) توضيح النطاق لمسائل في بعدين

يمكن أيضا الحصول على العلاقة:

$$f'_n = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2h} + O(h^2)$$

وعليه وباستخدام هذه العلاقات في المعادلة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots (1.9)$$

نحصل على:

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{(\Delta x)^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{(\Delta y)^2} = 0 \quad \dots\dots (2.9)$$

لو عرفنا :

$$u_{i,j} \text{ ————— } u(x_i, y_j)$$

أي أن:

$$u_{i,j} \equiv u(x_i, y_j)$$

فإن المعادلة (2.9) تصبح على النحو:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad \dots\dots (3.9)$$

ولو أخذنا $\Delta x = \Delta y = h$ وهو الاختيار المعتاد في مثل هذه الحالات فإن المعادلة (3.9) تصبح:

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{1}{h^2} \{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}\} = 0 \quad \dots\dots (4.9)$$

ولو رجعنا للشكل (1.9) للاحظنا أنه بالنسبة للنقطة المركزية (x_i, y_j) ؛ توجد خمس نقاط ككل يميناً وشمالاً وفوق وتحت و عند المركز وهكذا نستطيع أن نكتب صورياً المعادلة (4.9) على الشكل:

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{1}{h^2} \left\{ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{array} \right\} u_{i,j} = 0 \quad \dots\dots (5.9)$$

والمعادلة (5.9) هي التمثيل الصوري لمؤثر لابلاس ذي النقاط الخمس.

3.9 معادلة لابلاس بمنطقة مستطيلة

Laplace's Equation in a Rectangular Region

إحدى المسائل المعروفة في هذا الخصوص تدفق الحرارة باستقرار في المواد.

ولتوضيح ذلك دعنا ندرس المثال التالي:

مثال (1.9)

صفيحة رقيقة من الحديد الصلب على شكل مستطيل بأبعاد $10\text{cm} \times 20\text{cm}$.
 ثبتت إحدى الحواف (10cm) عند درجة حرارة 10°C بينما ثبتت كل الحواف الأخرى
 عند 0°C . احسب درجة الحرارة عددياً عند النقاط الداخلية.

الحل:

لو اخترنا محاور، الإحداثيات كما بالشكل (2.9) فإنه يمكن صياغة المسألة
 رياضياً كما يلي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 20, \quad 0 < y < 10$$

$$u(x, 0) = 0$$

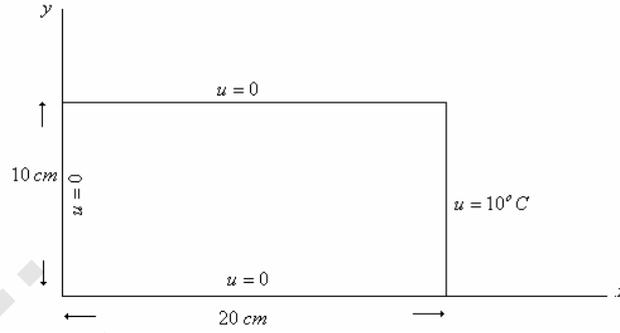
$$u(x, 10) = 0$$

$$u(0, y) = 0$$

$$u(20, y) = 10$$

والشروط كما في هذه المسألة والتي تتعين بها قيمة الدالة عند حدود النطاق تسمى
 بالشروط الحدية لديرىكليت (Dirichlet).

■ ■ الفصل التاسع ■ ■



الشكل (2.9) معادلة لابلاس في مستطيل.

نستعمل الآن المعادلة الفرقية (4.9) ونلاحظ أن أي نقطة يمكن إيجادها بدلالة أربع نقاط مجاورة. نقوم بالتجزئة ولنأخذ في البداية، وللتوضيح، $h = 5 \text{ cm}$ [وهي قيمة كبيرة نسبياً و المفروض أن نأخذ قيمة h صغيرة]، ولو نظرنا للشكل (3.9) للاحظنا أن النقاط مجهولة الحرارة هي ثلاث بداخل المستطيل فلنسمها u_1, u_2, u_3 ولنكتب المعادلة الفرقية ثلاث مرات لنجد أن:

$$\frac{1}{2.5}(0 + 0 + u_2 + 0 - 4u_1) = 0$$

$$\frac{1}{2.5}(u_1 + 0 + u_3 + 0 - 4u_2) = 0$$

$$\frac{1}{2.5}(u_2 + 0 + 10 + 0 - 4u_3) = 0$$

بإعادة الترتيب نحصل على المعادلات:

$$-4u_1 + u_2 = 0$$

$$u_1 - 4u_2 + u_3 = 0$$

$$u_2 - 4u_3 = -10$$

■ ■ الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية ■ ■

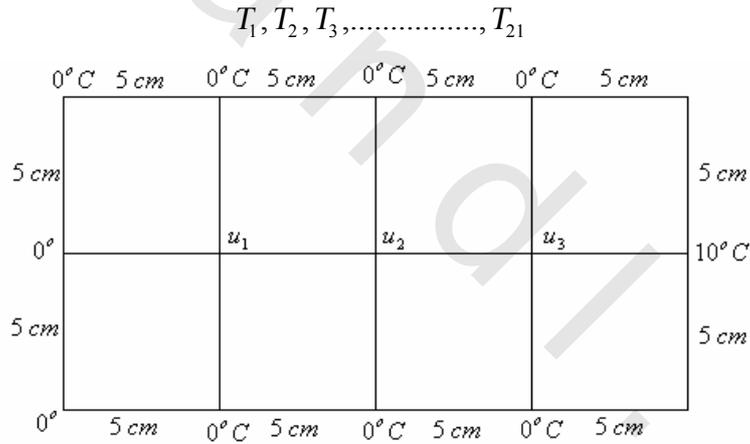
وبحل هذه المعادلات نجد أن:

$$u_1 = 0.1786$$

$$u_2 = 0.7143$$

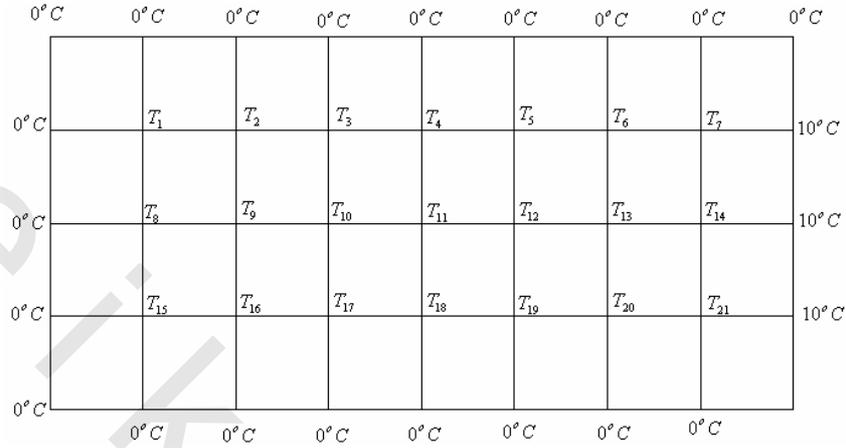
$$u_3 = 2.6786$$

فيما سبق قمنا باختيار h الكبيرة وهي 5 cm و ذلك حتى نوضح طريقة الحل ولكن إذا أردنا دقة أكثر قمنا باختيار قيمة لـ h أصغر؛ فعلى سبيل المثال لو أخذنا $h = 2.5 \text{ cm}$ ؛ فإنه، وبالرجوع للشكل (4.9)، نرى أنه توجد 21 نقطة داخل المستطيل المطلوب تعيين درجة الحرارة عندها وهذه هي:



الشكل (3.9) معادلة لابلاس للحالة $\Delta x = \Delta y = 5 \text{ cm}$.

■ ■ الفصل التاسع ■ ■



الشكل (4.9) معادلة لابلاس للحالة $\Delta x = \Delta y = 2.5 \text{ cm}$.

بكتابة المعادلات كما سبق و حلها نجد أن:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 0.0353 & T_8 &= 0.0499 & T_{15} &= 0.0353 \\
 T_2 &= 0.0913 & T_9 &= 0.1289 & T_{16} &= 0.0913 \\
 T_3 &= 0.2010 & T_{10} &= 0.2832 & T_{17} &= 0.2010 \\
 T_4 &= 0.4296 & T_{11} &= 0.6019 & T_{18} &= 0.4296 \\
 T_5 &= 0.9153 & T_{12} &= 1.2654 & T_{19} &= 0.9153 \\
 T_6 &= 1.9663 & T_{13} &= 2.6289 & T_{20} &= 1.9663 \\
 T_7 &= 4.3210 & T_{14} &= 5.317 & T_{21} &= 4.3210
 \end{aligned}$$

نلاحظ أيضاً انه يمكن إيجاد الحل التحليلي لهذه المسألة وذلك باستخدام طريقة

الفك بواسطة الدوال الذاتية أو باستخدام متسلسلات فورييه Fourier وهي طريقة

شائعة ومستعملة لحل مسائل القيم الحدية بالفيزياء.

لو قمنا بذلك لحصلنا على:

$$u_1 = 0.1094$$

$$u_2 = 0.548$$

$$u_3 = 2.6094$$

ولو قارنا هذه القيم بقيم u_1, u_2, u_3 الناتجة من استخدام $h = 5 \text{ cm}$ ، أو بقيم T_9, T_{11}, T_{13} لتبيننا مدى دقة الطريقة العددية وللاحظنا أيضاً أن مقدار الخطأ قل بكثير عندما صغرنا قيمة h .

وهكذا للحصول على نتائج أفضل علينا إعادة الحسابات ولكن بقيمة لـ h صغيرة (مثلاً: $h = 1 \text{ cm}$).

ملاحظات

1. يمكننا معالجة معادلة بواسون ($\nabla^2 \phi + 5 = 0$) مثلاً بنفس الطريقة السابقة، وما يستجد هنا هو الحد غير الصفري والذي يضاف إلى المعادلات.
2. توجد معادلات بشروط على المشتقة بدلاً من شروط على الدالة وسوف نعطي الطريقة لحل مثل هذه المعادلات فيما بعد.
3. يمكن أيضاً معالجة معادلة لابلاس في ثلاثة أبعاد بطريقة مشابهة غير أنه يجب أن نضع في الحسبان أن النطاق هنا نطاق بالفراغ بدلاً من نطاق في المستوي.
4. لكي نقوم بالحسابات العددية نلجأ إلى الحاسوب والبرمجيات المختلفة. مثل هذه البرامج الفرعية البرنامج : SUBROUTINE LAMPTX (A,NDIM,N,M)

وهو يضع معاملات مؤثر لابلاس في منطقة مستطيلة بـ N من النقاط في الاتجاه السيني و M من النقاط في الاتجاه الصادي. ويخزنها في المصفوفة A التي بعدها NDIM. 5. يدخل أيضاً ضمن نطاق حل هذه المعادلات معادلة الجهد (Potential Equation).

4.9 معادلات تفاضلية مكافئة Parabolic Differential Equations

يوجد العديد من المسائل التي تدخل ضمن هذا النطاق ولعل أحدها هي مسائل التدفق الحراري للحالة غير المستقرة Unsteady-State Heat Flow ؛ ففي بعد واحد تكون المعادلة هي:

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots\dots (6.9)$$

هنا x تمثل الإحداثي السيني (الطول) و t الزمن وفي بعدين، أي في المستوى، تكون المعادلة هي:

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots\dots (7.9)$$

بينما في ثلاثة أبعاد تكون المعادلة على الصورة:

$$k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots\dots (8.9)$$

أما بالنسبة للشروط الابتدائية والحدية يمكن أن تكون بالنسبة لبعد واحد، عبارة عن:

$$u(x,0) = f(x)$$

و

$$u(0,t) = c_1 \quad , \quad u(l,t) = c_2$$

حيث c_1 و c_2 ثوابت.

وللبساطة نعتبر المسألة في بعد واحد ونتبع الطريقة الصريحة والتي سنأتي على ذكر تفاصيلها فيما بعد.

من المعادلة (6.9) تكون المعادلة هي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{c\rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots\dots (9.9)$$

نستبدل المشتقات بالفروق لنجد أن:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=x_i \\ t=t_j}} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + 0(\Delta x)^2 \quad \dots\dots (10.9)$$

و

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\substack{x=x_i \\ t=t_j}} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} + 0(\Delta t) \quad \dots\dots (11.9)$$

حيث:

$u_i^j \equiv u(x_i, t_j)$ ؛ وعليه من المعادلتين (10.9) و (11.9) في المعادلة (9.9) نجد أن:

$$u_i^{j+1} = \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + \left(1 - \frac{2k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}\right) u_i^j \quad \dots\dots (12.9)$$

الآن نجزئ الفترة إلى فترات فرعية متساوية وحيث إن u_i^o معلومة نستطيع أن نحصل على u عند t_1 من المعادلة السابقة وكذلك باستعمال الشروط الحدية.

نلاحظ أيضاً أن Δx و Δt لقيمتها النسبيتين تأثير في الحصول على حل متقارب، وكما سنرى من ائزان الحلول العددية لمثل هذه المعادلات، فيما بعد، انه يوجد شرط على المقدار:

$$\zeta = \frac{k \Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \quad \dots\dots (13.9)$$

فإذا ما كان ζ أكبر من $\frac{1}{2}$ فإن حالة عدم الاستقرار أو الثبات (Instability) تظهر بينما إذا أخذنا ζ أقل من أو تساوي $\frac{1}{2}$ فإننا نحصل على حل دقيق ومنتز.

وإذا كانت $\zeta = \frac{1}{2}$ فإن المعادلة (12.9) تصبح على الشكل:

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) \quad \dots\dots (14.9)$$

نلاحظ أن اختيارنا لقيمة ζ سيحدد قيم (Δt) و Δx بدلالة بعضهما البعض فلو كانت $\zeta = \frac{1}{2}$ واخترنا $\Delta x = 0.25 \text{ cm}$ فإن $\Delta t = 0.206 \text{ sec}$ وذلك في حالة استخدام مادة الحديد الصلب والذي يمتلك الثوابت:

$$c = 0.11 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$$

$$\rho = 7.8 \text{ g/cm}^3$$

$$k = 0.13 \text{ cal/sec}^\circ\text{C g}$$

مثال (2.9)

إذا أعطيت صفيحة كبيرة مسطحة من الحديد الصلب سمكها 2 cm وإذا كانت درجة الحرارة الابتدائية بالصفيحة كدالة في المسافة من أحد الأوجه تعطى بالعلاقة:

$$u = 100x \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u = 100(2 - x) \quad , \quad 1 \leq x \leq 2$$

أوجد الحرارة كدالة في x و t إذا ثبت الوجهان عند درجة 0°C .

الحل:

كما سبق و أن تحدثنا في هذا البند نرى أن اختيار $\Delta x = 0.25\text{ cm}$ سيؤدي إلى تجزئة

الفترة الزمنية إلى فترات فرعية طولها $\Delta t = 0.206\text{ s}$.

نعلم أيضاً أن الشروط الحدية هي:

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(2, t) = 0$$

كما أنه من الشروط الابتدائية نرى أن:

$$u(x, 0) = 100x \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$= 100(2 - x) \quad , \quad 1 \leq x \leq 2$$

ويمكن التعبير عن هذه الشروط بطريقة أخرى، بعد التجزئة، وذلك كالآتي:

الشروط الحدية:

$$u_0^j = 0 \quad \text{و} \quad u_N^j = 0 \quad \text{لكل } j \quad \text{وحيث } N \text{ هي عدد فترات } x \text{ الفرعية.}$$

الشروط الابتدائية:

$$u_i^0 = 100 x_i \quad , \quad 0 \leq x_i \leq 1$$

$$u_i^0 = 100(2 - x_i) \quad , \quad 1 \leq x_i \leq 2$$

وهكذا وبنفس الطريقة المتبعة بالبند السابق نستطيع أن نحسب كل صف من قيم u المقابل لقيمة زمنية معينة . فعلى سبيل المثال الصف الأول ويقابل القيمة الزمنية $t_0 = 0$ يمكن حسابه مباشرة من الشروط الابتدائية لنحصل على:

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.50	1.75	2
u_i^0	0	25	50	75	100	75	50	25	0

لحساب u_i^1 ، أي عندما نزيد الفترة الزمنية بمقدار $0.206s$ ، فإننا نستخدم القيم السابقة والمعادلة (14.9) والشروط الحدية للمسألة. فمثلا لحساب u_i^1 نرى أن:

$$u_1^1 = \frac{1}{2}(u_2^0 + u_0^0) = \frac{1}{2}(50 + 0) = 25$$

كذلك نرى أن:

$$u_2^1 = \frac{1}{2}(u_3^0 + u_1^0) = \frac{1}{2}(75 + 25) = 50$$

وهكذا نستطيع الحصول على بقية القيم بالصف وبذلك تكون قيم u_i^1 على النحو ($t = 0.206s$):

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.50	1.75	2
u_i^1	0	25	50	75	75	75	50	25	0

علي نفس المنوال نستطيع حساب u_i^2 ويمكن بسهولة التوصل إلى القيم عند $t = 0.412 \text{ s}$ على الصورة:.

x_i	0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.50	1.75	2
u_i^2	0	25	50	62.5	75	62.5	50	25	0

وهكذا يمكننا باستخدام الشروط الحدية والابتدائية والمعادلة (14.9) الحصول

علي قيم u عند أي لحظة زمنية معطاة بالعلاقة: $t = n\Delta t$

حيث $\Delta t = 0.206 \text{ s}$ و n عدد صحيح موجب.

لا يفوتنا ملاحظة التماثل الواضح في هذه المسألة و المرتبط بالتأكد بالشروط الابتدائية. الآن بالرجوع للحل التحليلي، والذي يمكن التوصل إليه باستخدام متسلسلات فورييه، نرى أن:

$$u = 800 \sum_0^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2} \cos \left[\frac{(2n+1)\pi(x-1)}{2} \right] e^{-0.3738(2n+1)^2 t}$$

وإذا قمنا بحساب u لقيم مناظرة للقيم التي تم حسابها فيما سبق فإننا نجد أن الخطأ في الحل لا يتجاوز 4%، وهذا يوضح مدى صلاحية الطرق العددية في مثل هذه المسائل.

5.9 معادلات زائدية Hyperbolic Equations

تمثل هذه المعادلات القسم الثالث والتي من أهمها في الفيزياء المعادلة الموجية التي تصف تذبذب وتر مثلاً؛ والمعادلة التفاضلية في هذه الحالة هي:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T g}{w} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \dots\dots (15.9)$$

حيث y هي الإزاحة الرأسية و w الوزن لوحدة الطول و T قيمة الشد الثابتة في الوتر و g عجلة الجاذبية و x الإزاحة الأفقية.

نقوم مرة أخرى باستخدام الفروق المحدودة ونكتب:

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{T g}{w} \left(\frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \right)$$

بالحل لـ y_i^{j+1} نجد أن:

$$y_i^{j+1} = \frac{T g(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2} (y_{i+1}^j + y_{i-1}^j) - y_i^{j-1} + 2 \left(1 - \frac{T g(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2} \right) y_i^j \quad \dots\dots (16.9)$$

ولو قمنا باختيار:

$$\zeta \equiv \frac{T g(\Delta t)^2}{w(\Delta x)^2} = 1$$

أو أن:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{Tg/w}} \quad \dots\dots (17.9)$$

لسهلت لنا الحسابات ولحصلنا على:

$$y_i^{j+1} = y_{i+1}^j + y_{i-1}^j - y_i^{j-1} \quad \dots\dots (18.9)$$

لاحظ أن y_i^{j+1} تعتمد على الشروط عند t_{i-1}, t_j

مثال (4.9)

خذ في الاعتبار المعادلة الموجية:

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} \quad \left(c^2 \equiv \frac{Tg}{w} \right)$$

و الشروط الحدية:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u(20, t) &= 0 \\ y_t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

والشروط الابتدائية:

$$y(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 10 \\ 20 - x, & 10 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

هذه المسألة تمثل تذبذب وتر طوله 20 cm ، سرعته الابتدائية صفر والإزاحة الابتدائية معطاة بـ $y(x, 0)$ كما أن طرفيه مثبتان

وإذا كان $c = 10 \text{ cm/s}$ فأوصف كيف تقوم بحل هذه المسألة عددياً.

من معطيات المسألة وإذا أخذنا $\zeta = 1$ فإنه باختيار $\Delta x = 5 \text{ cm}$ (وذلك لسهولة التوضيح) فإن $\Delta t = 0.5 \text{ s}$.

الآن نترجم الشروط المختلفة كالاتي:

الشروط الحدية:

$$\text{حيث } n \text{ هو عدد الفترات الفرعية لـ } x. \quad y_0^j = 0, \quad y_n^j = 0$$

الشروط الابتدائية:

$$y_i^0 = x_i, \quad 0 \leq x_i \leq 10$$

$$= 20 - x_i, \quad 10 \leq x_i \leq 20$$

$$y_j^1 = y_j^0 \quad \text{و}$$

الآن عند $t = 0$ نرى أن:

$$x_i \quad 0 \quad 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20$$

$$y_i^0 \quad 0 \quad 5 \quad 10 \quad 5 \quad 0$$

وحيث إن $y_i^1 = y_i^0$ فإنه عند $t = 0.5 \text{ s}$ نحصل على:

$$x_i \quad 0 \quad 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20$$

$$y_i^1 \quad 0 \quad 5 \quad 10 \quad 5 \quad 0$$

باستخدام المعادلة (18.9) والمعلومات السابقة من y_i^0 و y_i^1 والشروط حدية والابتدائية نستطيع كتابة الحل لـ $t = 1 \text{ s}$ كالآتي:

$$x_i \quad 0 \quad 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20$$

$$y_i^2 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \quad 5 \quad 0$$

وهكذا نستطيع، بنفس الطريقة، كتابة الحل عند t_3 و t_4 و... الخ.

نرجع الآن لسبب اختيارنا للعدد γ على أنه الوحدة. هذا الاختيار بالطبع خاضع لكل استفسار وعن مدى صلاحيته.

عموماً إذا اختيرت النسبة أكبر من الواحد فإن التقارب يكون غير مؤكد، أي أن اتزان الطريقة مرتبط بوحدة هذه النسبة.

من المدهش حقاً أنه إذا كانت النسبة أقل من الواحد فإن الدقة تكون أقل؛ بينما تكون دقيقة جداً عندما تكون $\zeta = 1$.

كل هذا يقودنا للحديث عن اتزان الطرق العددية لحل مثل هذه المعادلات وهو ما سنقوم بعمله بالبند الموالي.

6.9 اتزان الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

Stability of Numerical Methods to Solve Partial Differential Equations

عندما نتحدث عن تقارب الحل لأي معادلة تفاضلية فإنه علينا أن نربط بين ذلك وبين مفهومين مهمين وهما عدم التناقض (Consistency) والاتزان (Stability).

عدم التناقض

هذا يعني أنه إذا قرب أي حل عددي (باستخدام الفروق المحدودة) حل معادلة تفاضلية ما فإنه لا يمكن أن يكون حلاً لأي معادلة أخرى. وهذه الخاصية تعتبر دائماً صالحة أو مضمونة ولا تناقض كثيراً.

الاتزان

وتعتبر هذه الخاصية شرطاً ضرورياً وكافياً للتقارب. وتعين خاصية المعادلة الفرقية التي استعملت للحل، وذلك عندما $\Delta t \rightarrow 0$ وحيث عندئذ تتواجد نهاية عظمى للمدى الذي تكبر إليه أي معلومة، صادرة عن الشروط الابتدائية أو قد نتجت عن الشروط الحدية أو برزت من خلال أي نوع من الأخطاء الحسابية، في حساباتنا.

ويمكن اختبار هذه الخاصية باستخدام مفكوك فورييه وتعريف معامل تكبير ζ ووضع الشرط $|\zeta| \leq 1$ على هذا المعامل وبالتالي نصل إلى الشرط الذي تحققه ζ . غير أنه يمكننا مناقشة هذه المسألة أيضاً بالرجوع لمسألة القيم الذاتية.

$$Ax = \lambda x$$

وتذكر أنه لـ N من القيم الذاتية المختلفة تكون المتجهات الذاتية مستقلة خطياً. لتوضيح ذلك نرجع للمثال (2.9) وهو مثال تدفق الحرارة في الحالة غير المستقرة؛ وحيث إن التجزئة إلى N من النقاط تعطي مركبات متجه الحل للمعادلة وهي:

$$u_i^{j+1} = \zeta(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + (1 - 2\zeta)u_i^j$$

فإنه يمكن كتابة المسألة على الصورة:

$$\begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\zeta & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \zeta & (1-2\zeta) & \zeta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta & (1-2\zeta) & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \zeta \\ 0 & & \dots & \dots & \zeta & (1-2\zeta) & & u_N^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^j \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N^j \end{bmatrix} \quad \dots (19.9)$$

ولو تجاوزنا وكتبنا المتجه على النحو u^{j+1} ورمزنا للمصفوفة المربعة بـ A فإننا نرى أن:

$$u^j = Au^{j-1} = A^2u^{j-2} = \dots = A^ju^0$$

كما يكون مقدار الخطأ هو e^j وحيث:

$$e^j = u^j - \tilde{u}^j = \dots = A^je^0$$

وهكذا نرى كيف ينتشر الخطأ من e^0 ؛ يمكن أيضاً كتابة الخطأ بدلالة القيم الذاتية λ لـ A والمركبات الاتجاهية المماثلة (x_i) على النحو:

$$e^j = \sum_{i=0}^N c_i \lambda^i x_i$$

وهكذا من هذا المفكوك نرى أنه إذا كانت القيم الذاتية اقل من أو تساوي الواحد فإن الأخطاء لا تتزايد. أي أن الحسابات متزنة وهذا يعني أنه يمكن كتابة الشرط التحليلي للاتزان كالآتي:

((لكي يحصل اتزان بالحسابات يجب أن تكون أكبر قيمة ذاتية لمصفوفة المعاملات (A) أقل من أو تساوي الواحد (1))).

بالرجوع للمثال السابق وبالنظر للمصفوفة A بالمعادلة (19.9) نرى السبب في

$$\text{كون } \zeta = \frac{1}{2}.$$

7.9 الطرق العددية الصريحة والضمنية Explicit and Implicit Numerical Methods

حتى الآن تم استعمال الطريقة الصريحة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية، فيها يتم استخدام شبكة معينة من النقاط بالنطاق ويتم حساب u صراحة للنقاط غير المعلومة بدلالة قيم u المعطاة بالمسألة. وباستعمال هذه الطريقة الصريحة يجب التحقق من تقارب كل مسألة؛ أي أنه يجب التأكد في كل معادلة تفاضلية من أن القيم العددية المحسوبة تمثل تقريباً للقيم الحقيقية للحل.

أو بمعنى آخر لو كان الخطأ هو w (ويمثل الفرق بين الحل التحليلي والحل

العددي)؛ فإنه يقال عن طريقة الفروق المحدودة بأنها متقاربة إذا كان $w \rightarrow 0$ عندما $\Delta x \rightarrow 0$ و $\Delta t \rightarrow 0$. وهذا بدوره يضع شرطاً على بعض الكميات بالمعادلات التفاضلية كما سبق وأن حصلنا على:

$$\frac{T g \Delta t}{c p (\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$$

بالنسبة لمعادلة تدفق الحرارة - الحالة غير المستقرة و:

$$\frac{T g (\Delta t)^2}{w (\Delta x)^2} = 1$$

بالنسبة للمعادلة الموجية.

ولقد رأينا بالبند السابق كيف نصل إلى مثل هذه الشروط.

كمثال آخر على استخدام الطريقة الصريحة، لو أخذنا المسألة:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < T$$

بالشروط الابتدائية:

$$u(x,0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

والشروط الحدية:

$$u(0,t) = g_0(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(1,t) = g_1(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

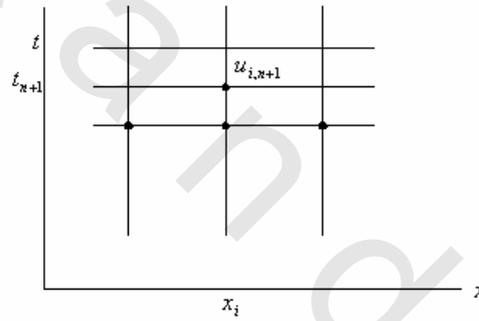
فإن المعادلة الفرقية هي:

$$u_{i,n+1} = \lambda u_{i-1,n} + (1 - 2\lambda)u_{i,n} + \lambda u_{i+1,n}$$

حيث:

$$\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

ويكون هذا الحل متقارباً إذا كان $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$. وكما نرى أنه لحساب $u_{i,n+1}$ نستعمل ثلاث القيم لـ u وهي $u_{i,n}$ و $u_{i-1,n}$ و $u_{i+1,n}$ كما هو موضح بالشكل (5.9) والذي يمثل شبكة النقاط (x_i, t_n) .



الشكل (5.9) الطريقة الصريحة

هذا عن الطريقة الصريحة، أما الطريقة الضمنية فإنها تستخدم صيغة أخرى لحساب الفروق وذلك كالآتي (بالنسبة لنفس المثال):

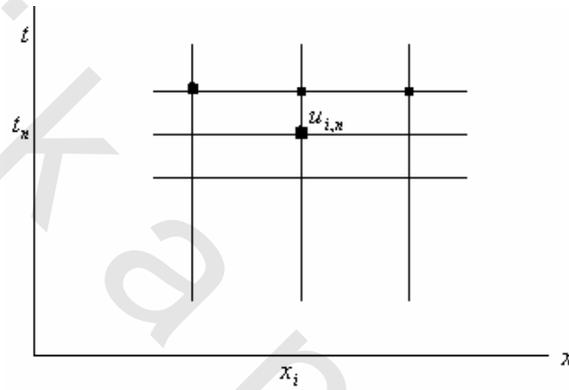
$$\frac{u_{i,n+1} - u_{i,n}}{\Delta t} = \frac{u_{i-1,n+1} - 2u_{i,n+1} + u_{i+1,n+1}}{(\Delta x)^2}$$

أي أنه تم اعتبار النقطة عند t_{n+1} عند حساب المشتقة الثانية وبذلك تحسب $u_{i,n}$ بدلالة النقاط الثلاث $u_{i-1,n+1}$ و $u_{i,n+1}$ و $u_{i+1,n+1}$ كما بالشكل (6.9).

والميزة في استخدام الطريقة الضمنية هو أنها تتقارب عندما $\Delta x \rightarrow 0$ و $\Delta t \rightarrow 0$

$$\cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

بغض النظر عن النسبة



الشكل (6.9) الطريقة الضمنية

8.9 الشروط الحدية وأنواعها Boundary Conditions and Their Kinds

ونحن نتكلم عن الشروط الحدية نفترض أن القارئ لا بد وأن مرت به الأنواع المختلفة لهذه الشروط؛ غير أنه لا بأس أن نتعرض، من خلال مثال ما، لهذه الشروط في عجالة وكيفية معالجتها عند تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة فرقية: لنأخذ المثال:

$$u_{xx} + u_{yy} = u_t$$

حيث:

$$u = u(x, y, t)$$

معرفة في منطقة R (محدودة) في المستوى xy . يمكن أن تكون الشروط الحدية

كالآتي:

$$1. \text{ شرط ديريكليت (النوع الأول) } u = g.$$

$$2. \text{ شرط نيومان (النوع الثاني) } \alpha u_n + \beta u_s = g.$$

(u_s المشتقة المماسية و u_n المشتقة العمودية).

$$3. \text{ شرط روبن (النوع الثالث) } \alpha u_n + \beta u_s + \gamma u = g.$$

وحيث α, β, γ و g كلها ثوابت.

وترجمة مثل هذه المسائل إلى فروق محدودة تعتمد على الشرط الحدي المعين. فلو

أخذنا في هذا المثال الشرط الحدي: $-u_x + au = g$ عند $x=0$ ؛ فإننا نرى أنه لحساب

u_t و u_{yy} لن تكون هناك أي مشكلة ولكن المشكلة تكون في حساب u_{xx} .

لعمل ذلك نركز على النقطة $(0, j)$ ثم نستخدم مفكوك تايلور لحساب $u_{1,j}$

بدلالة $u_{0,j}$ ومشتقاتها؛ أي أن:

$$u_{1,j} = u_{0,j} + u_x \Delta x + u_{xx} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + 0(\Delta x)^3$$

وبذلك نرى أن:

$$u_{xx} = \frac{2}{(\Delta x)^2} [u_{1,j} - u_{0,j} - u_x(\Delta x)] + 0(\Delta x)$$

الآن باستخدام الشرط الحدي $u_x = au - g$ نحصل على:

$$u_{xx} = \frac{2}{(\Delta x)^2} [u_{1,j} - (a \Delta x + 1)u_{0,j} - g(\Delta x)] + 0(\Delta x)$$

وبذلك تكون المعادلة الفرقية للمسألة عند $(0, j)$ هي:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(\Delta x)^2} [u_{1,j,n+1} - (a \Delta x + 1)u_{0,j,n+1} - g(\Delta x)] \\ & + \frac{1}{(\Delta y)^2} [u_{0,j+1,n+1} - 2u_{0,j,n+1} - u_{0,j-1,n+1}] = \frac{u_{0,j,n+1} - u_{0,j,n}}{\Delta t} \end{aligned}$$

لاحظ أنه في مسائل التوصيل الحراري ولو كان الجانب $x=0$ معزولاً

$(u_x = 0)$ (أي أن $a = g = 0$) فإن المشتقة الثانية عند $(0, j)$ تأخذ الشكل البسيط:

$$u_{xx} = \frac{2}{(\Delta x)^2} [u_{1,j} - u_{0,j}] + 0(\Delta x)$$

9.9 ملاحظات هامة

1. لم نركز على التفاصيل الرياضية بالبنود السابقة وخصوصاً ببند الاتزان والشروط الحدية وذلك لأن موضوع الكتاب هو الطرق العددية؛ وهذا يعني أننا نستخدم الطرق ونترك للقارئ المهتم أو للرياضي الخوض في التفاصيل الرياضية والبراهين المختلفة ولن نجد الوقت هنا لغير التطبيقات.

2. في حالة تواجد مشتقات من الرتبة الثانية مع مشتقات من الرتبة الأولى كما في حالة الإحداثيات الأسطوانية أو الكروية فإنه يمكننا (مثلا) استخدام التقريب:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_{i-1} - 2u_i - u_{i+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2 \Delta r}$$

وحيث قمنا بتقريب الجزء الثاني باستخدام الفروق المركزية.

3. لقد قدمنا في دراساتنا السابقة للطرق الصريحة والضمنية ولكن بشكل عام . في الحقيقة توجد طرق متخصصة مثل طريقة كرانك ونكلسون وطريقة دوفورت وفراكل، وطريقة بركات وكلاارك وغيرهم وللقارئ المتلهف للاطلاع على مثل هذه الطرق أن يرجع للمراجع الموجودة بآخر هذا الكتاب.

تمارين (9)

1. استعمل مؤثر لابلاس في الإحداثيات القطبية لكتابة المعادلة الفرقية لـ $\nabla^2 u = 0.2$ على منطقة نصف دائرية نصف قطرها 4. خذ $\Delta r = 1$ و $\Delta \theta = \pi/6$. والشروط الحدية هي $u = 10$ على الحافة المستقيمة و $u = 0$ على الحافة الدائرية.
2. أوجد الحرارة عند $t = 2.062$ s في المثال (2.9) الذي يتناول تدفق الحرارة في الحالة غير المستقرة وذلك إذا كانت :

$$u(x,0) = 100 \sin \frac{\pi x}{2}$$

استعمل الطريقة الصريحة بـ $\Delta x = \frac{1}{4}$ ؛ قارن بالحل التحليلي:

$$100 e^{-0.3738t} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

3. تحقق من صحة التقريبات الفرقية التالية، وذلك عند استخدامها في بعدين عند النقطة $(0, j)$.

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{u_{i-2,j} - 4u_{i-1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{(\Delta x)^4} + 0(\Delta x)^2 \quad (\text{أ})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} + 0((\Delta x + \Delta y)^2) \quad (\text{ب})$$

4. أكتب المعادلات الفرقية للمعادلات التفاضلية

$$. u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_t \quad (\text{أ})$$

■ ■ الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الجزئية ■ ■

(ب) $u_t - ku_{xx} = e^{-t}$

(ج) $u_t - ku_{xx} - ru = q(t)$

(د) $u_{tt} = c^2 u_{xx} + Q \sin \omega t$

5. أوصف طريقة حلك، عددياً، للمعادلة التفاضلية:

$$u_t - ku_{xx} = q(x, t) \quad 0 < x < L, t > 0$$

بالشروط:

$$u(0, t) = 0 \quad t > 0$$

$$u(L, t) = 0 \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0 \quad 0 < x < L$$

6. أكمل حل المثال (4.9) وذلك لتشمل اللحظات الزمنية حتى $t = 5 \text{ sec}$.

7. قم بحل المعادلة التفاضلية الجزئية التالية عددياً:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_t \quad 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad 0 < x < a, 0 < y < b$$

$$u(x, y, c) = 0 \quad 0 < x < a, 0 < y < b$$

$$u(x, 0, z) = u(x, b, z) = 0 \quad 0 < x < a, 0 < z < c$$

$$u(0, y, z) = u(a, y, z) = 0 \quad 0 < y < b, 0 < z < c$$

(تمثل هذه المسألة إحدى معادلات لابلاس في ثلاثة أبعاد).