الباب الثاني
المتجهات

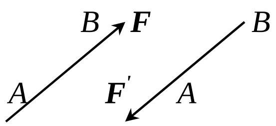
توصف الكميات الطبيعية بأنها كميات مقياسية أو قياسية إذا كان لها مقدار فقط كالكثافة والطول والحجم والوقت والشحنة الكهربائية. أما الكميات التي لها مقدار وهذا المقدار له أهمية من حيث مكانه أو نقطة تأثيره وكذالك اتجاهه فيقال عنها بأنها كميات متجهة كالوزن والسرعة والإزاحة والعجلة والمجال الكهربائي. وتميّز المتجهات بكتابتها بالخط الأسود العريض في الطباعة أو بوضع سهم صغير أعلى الرمز عندما يسهل ذلك طباعة أو عند التعبير اليدوي.

2-1 تعريف المتجهات:

يعرف المتجه بأنه كمية طبيعية له مقدار واتجاه وخط عمل أو نقطة تأثير.

مثال 2-1:

المتجه $\boldsymbol{F}$ الواصل بين النقطتين A & B مبتدئا من A ومتجها إلى B لا يساوى المتجه $\boldsymbol{F'}$ الواصل بين B & A المبتدئ من B ومتجها إلى A حيث أنهما متساويان في المقدار ولكن متضّادان في الاتجاه شكل (2-1). ولذلك فإن:



شكل (2-1)

$$\boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{F'}$$

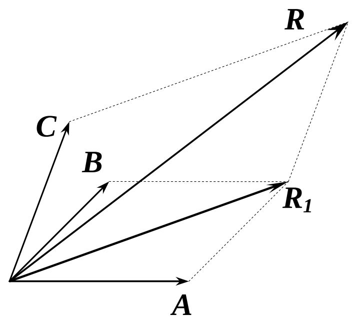
ولكن يمكن القول أن:

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1\text{-}2)$$

2-2 جمع وطرح متجهين:

تستخدم قاعدة متوازي الأضلاع لجمع وطرح متجهين. وهذه القاعدة تؤكدها التجربة ولا يوجد لها برهان رياضي. ويمكن تعميمها لجمع مجموعة من المتجهات أو ما يسمى بمضلع القوى حيث تؤخذ اثنتين اثنتين وتحسب محصلتاهما ثم محصلة المحصلتين وهكذا.

مثال 2-2:



محصلة (أو مجموع) المتجهات A, B & C هو المتجه R حيث المحصلة R_1 هي مجموع المتجهين A, B والمحصلة R هي مجموع المحصلة R_1 والمتجه C شكل (2-2).

شكل (2-2)

$$R_1 = A + B$$

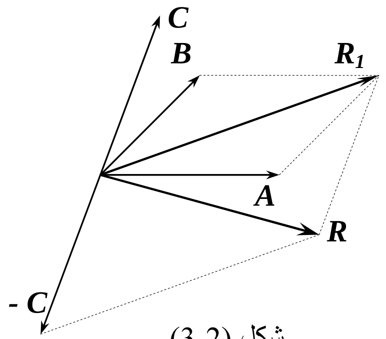
$$R = R_1 + C$$

أي أن:

$$R = A + B + C \qquad \text{.....................................(2-2)}$$

وبنفس الطريقة يمكن طرح المتجهات وذلك بعكس اتجاه المتجه السالب وعلى نفس استقامته.

مثال 2-3:



شكل (2-3)

كما جاء في المثال السابق ، أوجد

$$R = A + B - C$$

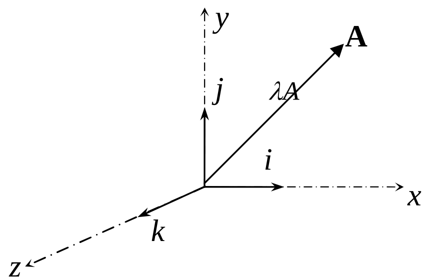
الحل:

$$R_1 = A + B$$

$$R = R_1 + (- C)$$

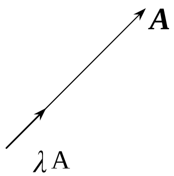
حيث نحصل على (C -) بمدّه في الاتجاه المعاكس للمتجه C شكل (2-3).

3-2 وحدة المتجهات:



شكل (4-2)

يقصد بوحدة المتجهات أن يكون مقدار المتجه يساوى الوحدة الطولية في اتجاه المحاور الأساسية الكارتيزية $x, y \& z$ ويرمز لها بالأحرف $i, j \& k$ في اتجاه هذه المحاور شكل (4-2).



شكل (5-2)

أما وحدة المتجهات المطلقة فيرمز لها بالحرف λ ومقداره يساوى المتجه مقسوما على مقدار المتجه شكل (5-2).

$$\lambda = \frac{A}{|A|} \qquad \text{..................(3-2)}$$

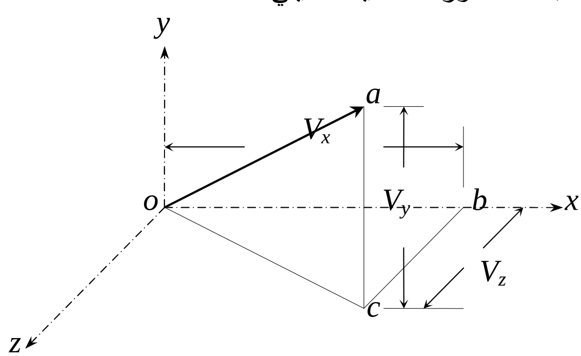
كما يمكن التعبير عن λ_A :

$$\lambda_A = \cos\theta_{xi} + \cos\theta_{yj} + \cos\theta_{zk}$$

حيث $\theta_z, \theta_y, \theta_x$ هي الزوايا التي يصنعها المتجه A مع الاتجاه الموجب للمحاور Z,Y,X على التوالي.

ويتضّح من هذه العلاقة أنه لتحويل أي كمية مقياسية إلى أخرى متجهة فان ذلك يتم بضرب مقدار هذه الكمية في وحدة المتجهات. بمعنى أن يصبح المقدار ألمقياسي معاملا لوحدة المتجهات.

ويرمز للمتجه $\boldsymbol{V}$ بدلالة مركباته في اتجاه المحاور الأساسية كما يلي:



شكل (6-2)

بتطبيق قاعدة المثلث القائم الزاوية نحصل على

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{V} = V_x\, i + V_y\, j + V_z\, k \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5\text{-}2)$$

حيث $Vx = V\cos\theta_x$

$Vy = V\cos\theta_y$

$Vz = V\cos\theta_z$

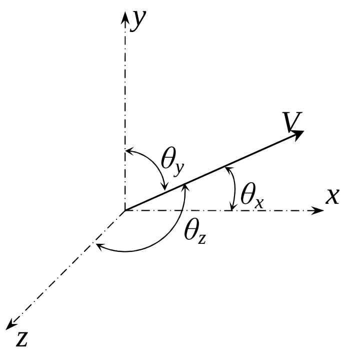
ومنه نجد مقدار أي متجه بدلالة مركباته.

$$|V| = \sqrt{(Vx)^2 + (Vy)^2 (Vz)^2}$$

4-2 زوايا ميل المتجه:

يقصد بزوايا ميل المتجه الزوايا التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب للمحور شكل (2-7). ويرمز لها بالأحرف θ_x , θ_y & θ_z أما جيوب تمام هذه الزوايا فيطلق عليها جيوب تمام الاتجاه.

$Cos\ \theta_x$, $Cos\ \theta_y$ & $Cos\ \theta_z$



شكل (2-7)

حيث $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y \cos^2\theta_z = 1$

ومن الشكل (2-6) والشكل (2-7) نجد أن:

$$Cos\ \theta_x = \frac{V_x}{|V|}\ , Cos\ \theta_y = \frac{V_y}{|V|} \quad \&\quad Cos\ \theta_z = \frac{V_z}{|V|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6\text{-}2)$$

وبتطبيق المعاداة (2-4) على وحدة المتجهات المطلقة λ والتعبير عنها بدلالة مركباتها نجد أنّ:

$$\lambda = \lambda_x\, i + \lambda_y\, j + \lambda_z\, k \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7\text{-}2)$$

وكذلك بتطبيق المعادلة (2-6) على وحدة المتجهات المطلقة λ نجد أنّ:

ومن المعادلة (2-6) ينتج أن:

$$Cos\ \theta_x = \frac{\lambda_x}{|\lambda|}\ ,\ Cos\ \theta_y = \frac{\lambda_y}{|\lambda|}\quad \&\ Cos\ \theta_z = \frac{\lambda_z}{|\lambda|}\qquad ....(8\text{-}2)$$

وحيث أنّ مقدار وحدة المتجهات المطلقة λ يساوي الوحدة الطولية نحصل على:

$$Cos\ \theta_x = \lambda_x\ ,\qquad Cos\ \theta_y = \lambda_y\ \ \&\qquad Cos\ \theta_z = \lambda_z\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9\text{-}2)$$

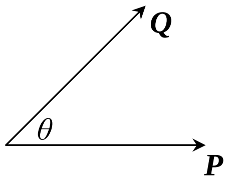
وبتطبيق المعادلة (2-5) ينتج أن:

$$Cos^2\ \theta_x + Cos^2\ \theta_y + Cos^2\ \theta_z = 1\ ....(10\text{-}2)$$

ولهذا تسمى زوايا ميل المتجه $\theta_x\ ,\ \theta_y\ \&\ \theta_z$ بالمتغيرات المقيدة حيث يجب أن تحقق شرط المعادلة (2-10).

5-2 الضرب المقياسي لمتجهين:

يعرف الضرب ألمقياسي لمتجهين يصنعان زاوية θ بينهما شكل (2-8) بأنه يساوى حاصل ضرب مقداراهما وجيب تمام الزاوية بينهما.



شكل (2-8)

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} = PQ\ \mathrm{Cos}\ \theta\quad ....(11\text{-}2)$$

حيث $P\ \&\ Q$ مقدار كل من المتجهين.

ويكون الناتج للضرب ألمقياسي كمية مقياسية. ويتضح أن ناتج ضرب وحدات المتجهات مقياسيا هو:

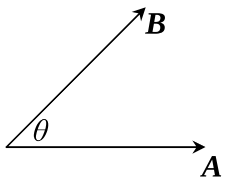
$$i \cdot i\ =\ (1)(1)\ Cos\ (0)\ =\ 1\ = j \cdot j = k \cdot k\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12\text{-}2)$$
$$i \cdot j\ = (1)(1)\ Cos\ (90)\ =\ 0\ = i \cdot k = j \cdot k\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13\text{-}2)$$

أي أنه إذا اختلفت وحدات المتجهات كان الناتج صفرا ، وإذا تشابهت كان الناتج الوحدة.
لاحظ أن الترتيب للمتجهات في حالة الضرب ألمقياسي لا يغير من النتيجة وأنه ليس بالمهم.

6-2 تطبيقات على الضرب ألمقياسي:

1-6-2 الزاوية بين متجهين:

من التطبيق المباشر لتعريف الضرب ألمقياسي شكل (2-9) ينتج أن:



شكل (2-9)

$$Cos\,\theta = \frac{A\cdot B}{|A||B|} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14\text{-}2)$$

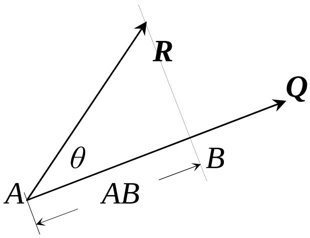
ويمكن كتابتها بطريقة عملية ينصح بها وهى:

$$Cos\,\theta = \frac{A}{|A|}\cdot\frac{B}{|B|} = \lambda_A \cdot \lambda_B \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15\text{-}2)$$

حيث λ_B,λ_A هما وحدتا المتجهات في اتجاه Aو B على التوالي.

2-6-2 مسقط متجه على متجه آخر:

القطعة AB شكل (2-10) تمثل مسقط المتجه $\boldsymbol{R}$ على المتجه $\boldsymbol{Q}$ ويساوى



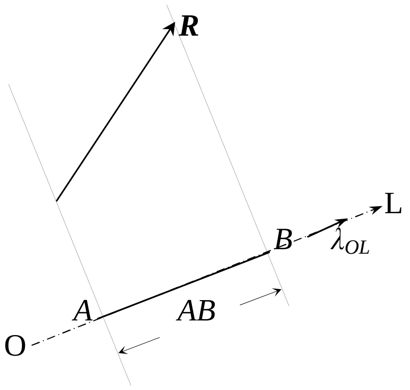
شكل (2-10)

$$AB = \boldsymbol{R}\cdot\lambda_Q \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16\text{-}2)$$

حيث λ_Q هو وحدة المتجهات في اتجاه المتجه Q
والناتج كمية مقياسية.

2-6-3 مسقط متجه على محور

القطعة AB شكل (2-11) تمثل مسقط المتجه $\boldsymbol{R}$ على المحور OL.



شكل (2-11)

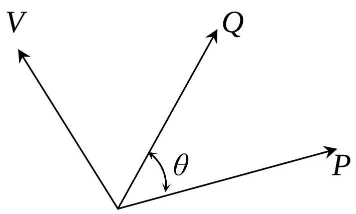
$$AB = \boldsymbol{R} \cdot \lambda_{OL} \quad \text{......................} \quad (2\text{-}17)$$

والناتج كمية مقياسية ويمكن تحويلها إلى كمية متجهة إذا اعتبرت معاملا لوحدة المتجهات.

$$\boldsymbol{AB} = AB\ \lambda_{OL} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\text{-}18)$$

2-7 الضرب ألاتجاهي لمتجهين:

يعرف بان ناتج الضرب ألاتجاهي لمتجهين متجه ثالث.



شكل (2-12)

$$\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{V} \quad \text{..............} (2\text{-}19)$$

ولهذا المتجه شكل (2-12) الخواص الثلاثة التالية:

1- مقداره $V = PQ\ Sin\ \theta$

2- اتجاهه يخضع إلى قاعدة اليد اليمنى.

3- خط عمله عمودي على المستوى المتكون من $\boldsymbol{P}$ & $\boldsymbol{Q}$

2-7-1 الضرب ألاتجاهي لمتجهات الوحدة:

$$i \times i = (1)(1)\ Sin\ (0) = 0 = j \times j = k \times k \quad \text{...................} (2\text{-}20)$$

$$i \times j = (1)(1)\ Sin\ (90) = 1 \quad \text{..............................} (2\text{-}21)$$

مقدارًا ، أما الاتجاه فهو عمودي على المستوى xy أي أنه في اتجاه المحور z الذي وحدة اتجاهه k .

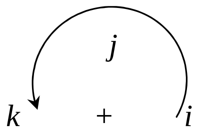
وعليه فإن:

$$i \times j = k \qquad \text{..}(22\text{-}2)$$

وبالمثل فإنّ:

$$i \times k = -j\ ,\ \ j \times i = -k,\ \ j \times k = i,\ \ k \times i = j\ \ \&\ \ k \times j = i \text{................}\ (23\text{-}2)$$

ويسهل الانتباه إلى ناتج الضرب الاتجاهي لوحدات المتجهات بإتباع السهم الدائر عكس عقارب الساعة شكل (13-2).



شكل (13-2)

ويتضّح أهمية الترتيب للمتجهات في حالة الضرب ألاتجاهي حيث ينتج عن تغيير الترتيب تغير إشارة المتجه الناتج.
ويمكن إجراء عملية الضرب ألاتجاهي لمتجهين مباشرة بهذه الطريقة فينتج أن:

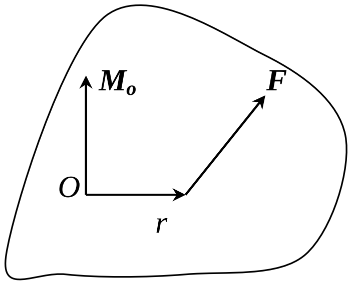
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} &= (P_x i + P_y j + P_z k) \times (Q_x i + Q_y j + Q_z k) \\
&= P_xQ_x(i \times i) + P_xQ_y(i \times j) + P_xQ_z(i \times k) \\
&\quad + P_yQ_x(j \times i) + P_yQ_y(j \times j) + P_yQ_z(j \times k) \\
&\quad + P_zQ_x(k \times i) + P_zQ_y(k \times j) + P_zQ_z(k \times k) \\
\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} &= P_xQ_x(0) + P_xQ_y(k) + P_xQ_z(-j) \\
&\quad + P_yQ_x(-k) + P_yQ_y(0) + P_yQ_z(i) \\
&\quad + P_zQ_x(j) + P_zQ_y(-i) + P_zQ_z(0) \\
&= (P_yQ_z - P_zQ_y)\, i + (P_zQ_x - P_xQ_z)\, j + (P_xQ_y - P_yQ_x)\, k \text{...............}(24\text{-}2)
\end{aligned}$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام المحددات على النحو التالي:

$$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \qquad \text{.....................................(25-2)}$$

8-2 تطبيقات على الضرب ألاتجاهي:

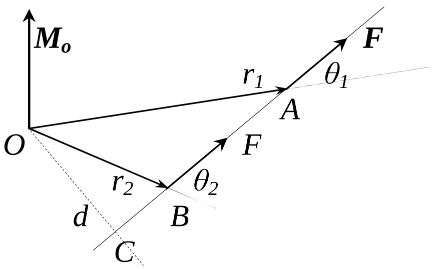
1-8-2 عزم قوة حول نقطة:



شكل (14-2)

يعرّف العزم بقابلية الجسم للدوران إذا أثرت عليه قوة لا تمر بمركز ثقله. وعزم القوة $\boldsymbol{F}$ حول النقطة O شكل (14-2) ينتج بضرب متجه الموضع وهذه القوة اتجاهيا.

$$\boldsymbol{M_o} = r \times \boldsymbol{F} \qquad \text{....................(26-2)}$$



شكل (15-2)

حيث r يسمى متجه الموضع، ويقصد به المتجه المبتدى من النقطة التي يراد حساب العزم حولها والمنتهي عند أي نقطة على خط عمل القوة. والعزم الناتج متجه يخضع لخواص أي متجه حيث يكون اتجاهه عموديًّا على مستوى r & $\boldsymbol{F}$ وخط عمله يخضع لقاعدة اليد اليمنى ومقداره يساوى حاصل ضرب مقدار القوة ومقدار متجه الموضع وجيب الزاوية بينهما. وهذا المقدار لا يتغير في قيمته بتغير متجه الموضع شكل (15-2) وبرهان ذلك هو:

من التعريف نجد أن مقدار العزم = $rF\ Sin\ \theta$

من المثلث OCA نجد أن:

$$Sin\ \theta_1 = \frac{OC}{OA} = \frac{d}{r_1}$$

$$\therefore \qquad d = r_1 \, Sin\theta_1$$

$$\therefore \qquad M = Fd \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27\text{-}2)$$

من المثلث OCB نجد أن:

$$Sin\theta_2 = \frac{OC}{OB} = \frac{d}{r_2}$$

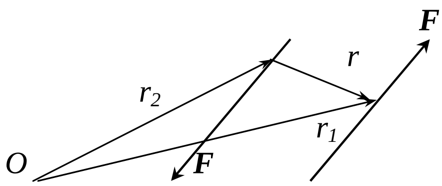
$$\therefore \qquad d = r_2 \, Sin\theta_2$$

$$\therefore \qquad M = Fd \qquad (28\text{-}2)$$

من المعادلتين (2-26)، (2-27) ينتج أن مقدار العزم ثابت ولا يعتمد على متجه موضع القوة.

2-8-2 عزم الازدواج:

ينتج عزم الازدواج عند تأثير قوّتين متساويتين مقدارا ومتضادتين اتجاها ومتوازيتين على جسم شكل (2-16). ويلاحظ أن المركبات لهاتين القوّتين تتلاشى ويبقى العزم الذي مقداره ثابت بغض النظر عن موقع متجه الموضع. ولهذا يعرف العزم بالمتجه الحر حيث لا يتغير تأثيره على الجسم بتغير مستوى تأثيره إلى مستوى آخر موازٍ له.

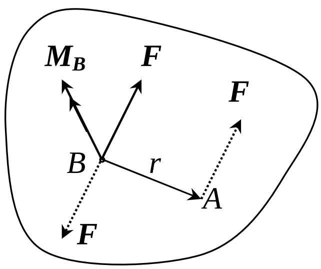


شكل (2-16)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{F} - \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}) \times \boldsymbol{F} \ldots\ldots\ldots\ldots(29\text{-}2)$$

3-8-2 ترحيل القوة:

إذا أثرت قوة على جسم وكانت هذه القوة تمر بالنقطة A شكل (2-17) فيمكن أن ترحّل هذه القوة لتمر بالنقطة B. على أن يضاف إليها عزم ناتج من الضرب ألاتجاهي لمتجه الموضع (المتجه الواصل بين النقطة



شكل (2-17)

المراد ترحيل القوة للعمل عندها والنقطة التي
كانت القوة تعمل عندها) مع القوة.
ويمكن إثبات ذلك بالتأثير على النقطة B بقوّتين متساويتين مقدارا ومتضادتين اتجاها وموازيتين للقوة الأصلية(F) (محصلتهما تساوي صفرا). أحدى هاتان القوّتان (F-) تكوّن ازدواجا مع القوة الأصلية وبالتالي يمكن استبدا لهما بعزم الازدواج الناتج(MB). ويصبح الجسم تحت تأثير نظام مكافىء يتمثل في قوة مساوية للقوة الأصلية تؤثر عند النقطة الجديدة مضافا إليها عزم ناتج ضرب متجه الموضع والقوة اتجاهيا.

أي انه يمكن نقل القوة F من Aإلى B بقوة F وعزم ازدواج r.F=MB

2- 9 النظام المكافئ:

عندما تؤثر مجموعة من القوى على جسيم (أو نقطة) فيمكن استبدال هذه القوى بقوة واحدة تسمى المحصلة. وهي المجموع الجبري لهذه القوى. وعندما تؤثر مجموعة من القوى على جسم فيمكن استبدال هذه القوى بقوة واحدة تسمى المحصلة مضافا إليها عزم. هذا العزم ينتج من المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول أي نقطة على الجسم. أي أن الجسم تحت تأثير كل من:

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F} \qquad \& \qquad \boldsymbol{M} = \sum r \times \boldsymbol{F} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(30\text{-}2)$$

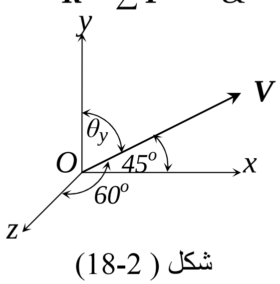
ويطلق على محصلتي القوى والعزوم ($\boldsymbol{R}$ & $\boldsymbol{M}$) النظام المكافئ.
وفي حالة وجود عزوم مؤثرة على الجسم بالإضافة إلى القوى السابقة فالنظام المكافئ يأخذ الشكل العام التالي:

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F} \qquad \& \qquad \boldsymbol{M} = \sum r \times \boldsymbol{F} + \sum \boldsymbol{m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(31\text{-}2)$$

أمثلة متنوعة:

مثال (2-4):

أوجد المركبات الثلاثة للمتجه $\boldsymbol{V}$
$V_x, V_y \,\&\, V_z$ إذا كان مقداره 10



شكل (2-18)

الحل:

بتطبيق المعادلة (2-10) نحصل على:

$$Cos^2\,\theta_x + Cos^2\theta_y + Cos^2\theta_z \;=\; 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + Cos^2\theta_y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \;=\; 1$$

$$\therefore \qquad Cos^2\theta_y \;=\; 1 - ½ - ¼ \;=\; ¼$$

$$Cos\,\theta_y \;=\; \pm ½$$

$\therefore \quad \theta_y = 60^o$ أو $\theta_y = 120^o$

وحيث أن الشكل يوضح أن الزاوية θ_y في الربع الأول فإن $\theta_y = 60^o$.

ومن المعادلتين (2-3) و (2-9) نجد أن:

$$\boldsymbol{V} = \quad V\,\lambda_V \;=\; V\,(Cos\,\theta_x i + Cos\theta_y j + Cos\theta_z k\,)$$

$$= 10\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,i + 10\cdot ½\,j + 10\cdot ½ k$$

$$= 5\sqrt{5}\,i + 5j + 5k \qquad\qquad = V_x i + V_y j + V_z k$$

$$\therefore \qquad V_x = 5\sqrt{5}\,, \qquad V_y \;=\; 5 \qquad\qquad \& \qquad\qquad V_z \;=\; 5$$

مثال 2-5:

إذا كانت النقاط:

$$A(3,2,1), \qquad B(5,0,2) \qquad \& \qquad C(1,4,0)$$

فأوجد:

1- المتجهين $\boldsymbol{AC}$ & $\boldsymbol{AB}$ وطول كل منهما.

2- وحدة المتجهات λ_{AC} & λ_{AB}.

3- الزاوية بين $\boldsymbol{AC}$ & $\boldsymbol{AB}$.

4- مسقط المتجه $\boldsymbol{AB}$ على المتجه $\boldsymbol{AC}$ ومسقط المتجه $\boldsymbol{AC}$ على المتجه $\boldsymbol{AB}$.

5- محصلة المتجهين $\boldsymbol{AC}$ & $\boldsymbol{AB}$.

الحل:

1- المتجه $\boldsymbol{AB} = (5-3)i + (0-2)j + (2-1)k$

$= 2i - 2j + k$

وطوله يساوي $\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$

المتجه $\boldsymbol{AC} = (1-3)I + (4-2)j + (0-1)k$

$= - 2i + 2j - k$

وطوله يساوي $\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$

2- وحدة المتجهات

$$\lambda_{AB} = \frac{2i - 2j + k}{3} \quad \& \quad \lambda_{AC} = \frac{-2i + 2j - k}{3}$$

3- الزاوية بين $\boldsymbol{AB}$ & $\boldsymbol{AC}$

$$Cos\ \theta = \lambda_{AB} \cdot \lambda_{AC} = \frac{2i - 2j + k}{3} \cdot \frac{-2i + 2j - k}{3}$$

$$= 1/9\ \{(2)(-2) + (-2)(2) + (1)(-1)\} = 1/9(- 4 - 4 - 1)$$

$$= - 9/9 = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi$$ أي أنهما في اتجاهين متضادين.

4- مسقط المتجه $\boldsymbol{AB}$ على المتجه $\boldsymbol{AC}$ يساوي

$$\boldsymbol{AB} \cdot \lambda_{AC} = (\ 2i - 2j + k\ ) \cdot \frac{-2i + 2j - k}{3}$$

$$= 1/3\ (\ -4 -4 -1\ ) = -3$$

ومسقط المتجه $\boldsymbol{AC}$ على المتجه $\boldsymbol{AB}$ يساوي

$$\boldsymbol{AC} \cdot \lambda_{AB} = (\ - 2i + 2j - k\ ) \cdot \frac{2i - 2j + k}{3}$$

$$= 1/3\ (\ -4 -4 -1\ ) = -3$$

5- محصلة المتجهين $\boldsymbol{AB}$ & $\boldsymbol{AC}$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC} = (2i - 2j + k) + (-2i + 2j - k) = 0$$

مثال2-6:

إذا كان

$$\boldsymbol{A} = 3i - 6j + 2k \qquad \& \qquad \boldsymbol{B} = 3i - 4j$$

فأوجد:

1- زوايا ميل $\boldsymbol{A}$.

2- " " $\boldsymbol{B}$.

3- الزاوية بين المتجهين $\boldsymbol{A}$ & $\boldsymbol{B}$.

4- حاصل الضرب ألمقياسي ($\boldsymbol{A.B}$).

5- حاصل الضرب ألاتجاهي ($\boldsymbol{A\times B}$).

الحل:

1- وحدة المتجهات المطلقة λ للمتجه $\boldsymbol{A}$ هي:

$$\lambda_{\boldsymbol{A}} = \frac{\vec{A}}{A} = \lambda_x i + \lambda_y j + \lambda_z k = Cos\,\theta_x i + Cos\,\theta_y j + Cos\,\theta_z k$$

$$= \frac{3i - 6j + 2k}{\sqrt{(3)^2 + (-6^2) + (2^2)}} = \frac{3i - 6j + 2k}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}(3i - 6j + 2k)$$

$$\therefore \quad Cos\,\theta_x = 3/7, \quad Cos\,\theta_y = -6/7 \quad \& \quad Cos\,\theta_z = 2/7$$

$\therefore$ زوايا ميل المتجه $\boldsymbol{A}$ هي:

$$\theta_x = Cos^{-1}(3/7) = 64.62^{\circ} \quad , \quad \theta_y = Cos^{-1}(-6/7) = 121.0^{\circ}$$

$$\& \quad \theta_z = Cos^{-1}(2/7) = 73.4^{\circ}$$

2- وحدة المتجهات المطلقة λ للمتجه $\boldsymbol{B}$ هي:

$$\lambda_B = \frac{\vec{B}}{B} = \lambda_x i + \lambda_y j + \lambda_z k = Cos\,\theta_x i + Cos\,\theta_y j + Cos\,\theta_z k$$

$$\lambda_B = \frac{3i-4j}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}} = \frac{3i-4j}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}(3i - 4j)$$

$\therefore \quad Cos\ \theta_x = 3/5\ , \qquad Cos\ \theta_y = -4/5 \qquad \& \qquad Cos\ \theta_z = 0$

∴ زوايا ميل المتجه **B** هي:

$$\theta_x = Cos^{-1}(0) = 90^{\circ}\ , \qquad \theta_y = Cos^{-1}(-4/5) = 143.13^{\circ}$$

$$\& \qquad \theta_z = Cos^{-1}(3/5 = 53.13^{\circ}$$

3- الزاوية بين المتجهين ***A* & *B***:

$$Cos\ \theta = \frac{A}{|A|}\cdot\frac{B}{|B|} = \lambda_A \cdot \lambda_B = \frac{1}{7}\ (3i - 6j + 2k)\cdot \frac{1}{5}(3i - 4j)$$

$$= \frac{1}{35}\{(3\times3)+(-6)(-4)+0\} = 33/35$$

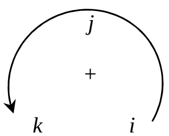
$$\therefore \quad \theta = Cos^{-1}(33/35) = 19.46^{\circ}$$

4- حاصل الضرب ألمقياسي (***A . B***):

$$\boldsymbol{A}\ .\ \boldsymbol{B} = (3i - 6j + 2k)\cdot(3i - 4j) = 3(3) + (-6)(-4) + 0 = 33$$

5- حاصل الضرب ألاتجاهي (***A × B***):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (3i - 6j + 2k)\times(3i - 4j) \\ &= 0 + (3)(-4)k + (-6)(3)(-k) + 0 \\ &\quad + (2)(3)j + (2)(-4)(-i) \\ &= -12k + 18k + 6j + 8i \\ &= 8i + 6j + 6k \end{aligned}$$



كما يمكن إجراء الضرب ألاتجاهي باستخدام المحدّدات على النحو التالي:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} k = 8i + 6j + 6k$$

أو:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} i & j & k \\ 3 & -6 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} i & j \\ 3 & -6 \\ 3 & -4 \end{matrix}$$

$$= 0 + 6j - 12k + 18k + 8i + 0$$

$$= 8i + 6j + 6k$$

مثال 2-7:

القوة $\boldsymbol{F}_1 = (i + 3j + 2k)^N$ تمر بالنقطة $A(1 ،2 ،1)^m$

والقوة $\boldsymbol{F}_2 = (2i + j - 2k)^N$ تمر بالنقطة $B(-2 ،0 ،-3)^m$

والعزم $\boldsymbol{m} = (-2i + 9j + 2k)^{N.m}$ يؤثر عند النقطة $C(2 ،1 ،2)^m$.

أوجد:

1- النظام المكافئ عند نقطة الأصل $O(0,0,0)$. $(\boldsymbol{M_o} \;\&\; \boldsymbol{R})$

2- الزاوية بين $(\boldsymbol{M_o} \;\&\; \boldsymbol{R})$.

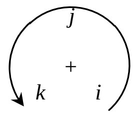
3- مركبة العزم في اتجاه $\boldsymbol{R}$ والمركبة العمودية. $(\boldsymbol{M_R} \;\&\; \boldsymbol{M_N})$

4- زوايا ميل الاتجاه للعزم $\boldsymbol{M_o}$. $(\theta_x, \theta_y\, \theta_z)$

الحل:

1- متجه الموضع لكل من القوتين = $r_1 \;\&\; r_2$

$r_1 = OA = i + 2j + k \qquad \& \qquad r_2 = -2i - 3k = OB$



$$\boldsymbol{M_o} = \sum \mathrm{r}\times\boldsymbol{F} + \sum \boldsymbol{m}$$

$$= (i + 2j + k)\times(i + 3j + 2k)$$

$$+ (-2i - 3k)\times(2i + j - 2k) + (-2i + 9j + 2k)$$

$$\boldsymbol{M_o} = (3k - -2j - 2k + 4i + j - 3i) + (-2k - 4j - 6j + 3i)$$

$$+ (-2i + 9j + 2k) \qquad = 2i - 2j + k$$

$$\boldsymbol{R} = (i + 3j + 2k) + (2i + j - 2k) = 3i + 4j$$

وهما يمثلان النظام المكافئ عند نقطة الأصل.

2- وحدتا المتجهات للمتجهين $\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$:

$$\lambda_M = \frac{2i-2j+k}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = 1/3\ (2i - 2j + k) \qquad \&$$

$$\lambda_R = \frac{3i+4j}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1/5\ (3i + 4j)$$

الزاوية بين $\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$:

$$Cos\ \theta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1/15\ (6 - 8) = 1/15\ (-2)$$

$$\therefore \quad \theta = Cos^{-1}(-2/15) = 97.66^\circ$$

3- مسقط $\boldsymbol{M_o}$ على المحصلة $\boldsymbol{R}$:

$$M_R = \boldsymbol{M_o} \cdot \boldsymbol{\lambda_R} = (2i - 2j + k) \cdot 1/5\ (3i + 4j)$$

$$= 1/5\ (6 - 8) = -2/5\ N.m$$

وهي كمية مقياسية. لتحويلها إلى متجه وجب اعتبارها معاملا لوحدة المتجهات المطلقة λ.

$$\therefore \quad \boldsymbol{M_R} = -2/5\ \boldsymbol{\lambda_R} = -2/25\ (3i + 4j)$$

$$= 1/25\ (-6i - 8j)$$

$$\& \quad \boldsymbol{M_N} = \boldsymbol{M_o} - \boldsymbol{M_R} = (2i - 2j + k) - 1/25\ (-6i - 8j)$$

$$= 1/25\ (56i - 42j + 25k)\ N.m$$

4- من وحدة المتجهات لمحصلة العزوم نجد أن:

$$\lambda_M = 1/3\ (2i - 2j + k) = Cos\ \theta_x i + Cos\ \theta_y j + Cos\ \theta_z k$$

$\therefore \quad \theta_x = Cos^{-1}(2/3) = 48.19^\circ , \qquad \theta_y = Cos^{-1}(-2/3) = 131.81^\circ$

$\& \quad \theta_z = Cos^{-1}(1/3) = 70.53^\circ$

مثال 2-8:

القوة $\boldsymbol{F_a} = 3i^{\,N}$ تؤثر عند النقطة A (0 ،0 ،10)^{m}

والقوة $\boldsymbol{F_b} = 4j^{\,N}$ تؤثر عند النقطة B (15 ،0 ،-15)^{m}.

أمكن تحويلهما إلى نظام مكافئ عند نقطة الأصل $O(0,0,0)$.

أوجد:

1- ($\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$).

2- الزاوية بين ($\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$).

3- مركبة العزم في اتجاه $\boldsymbol{R}$ والمركبة العمودية. ($\boldsymbol{M_R}$ & $\boldsymbol{M_N}$)

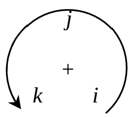
4- أوجد النقطة الواقعة في المستوى $X = 0$ والتي تتحول فيها المجموعة إلى نظام مكافئ يتكون من قوة مفردة وعزم في اتجاه هذه القوة.

الحل:

1- متجها الموضع r_a & r_b:

$$r_a = 10k \qquad \& \qquad r_b = 15i - 15k$$

محصلة المتجهات تساوي مجموعها:



$$\therefore \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{F_a} + \boldsymbol{F_b} = 3i + 4j$$

$$\boldsymbol{M_o} = \sum r \times \boldsymbol{F} = r_a \times \boldsymbol{F_a} + r_b \times \boldsymbol{F_b}$$

$$= 10k \times 3i + (15i - 15k) \times 4j$$

$$\boldsymbol{M_o} = 30j + 60k + 60i \ N.m$$

$$= 60i + 30j + 60k = 30\{2i + j + 2k\} \ N.m$$

2- وحدتا المتجهات للمتجهين $\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$:

$$\lambda_M = \left(\frac{30}{30}\right)\frac{2i + j + 2k}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 1/3\,(2i + j + 2k) \qquad \&$$

$$\lambda_R = \frac{3i+4j}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1/5\ (3i + 4j)$$

الزاوية بين $\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$:

$$Cos\ \theta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1/15\ (6 + 4) = 10/15 = 2/3$$

$$\therefore \quad \theta = Cos^{-1}(2/3) = 48.19^\circ$$

3- مسقط $\boldsymbol{M_o}$ على المحصلة $\boldsymbol{R}$:

$$\begin{aligned} M_R &= \boldsymbol{M_o} \cdot \boldsymbol{\lambda_R} \\ &= 30(2i + j + 2k) \cdot 1/5\ (3i + 4j) \\ &= 30/5\ (6 + 4) = 60\ N.m \end{aligned}$$

وهي كمية مقياسية. لتحويلها إلى متجه وجب اعتبارها معاملا لوحدة المتجهات المطلقة λ.

$$\begin{aligned} \therefore \quad \boldsymbol{M_R} &= 60\ \boldsymbol{\lambda_R} = 60/5\ (3i + 4j) \\ &= (36i + 48j) \\ \& \quad \boldsymbol{M_N} &= \boldsymbol{M_o} - \boldsymbol{M_R} \\ &= (60i + 30j + 60k) - (36i + 48j) \\ &= (24i - 18j + 60k) \end{aligned}$$

4- النقطة الواقعة في المستوى $X = 0$ والتي تتحول فيها المجموعة إلى نظام مكافىء يتكون من قوة مفردة وعزم في اتجاه هذه القوة هي النقطة $(0, y, z)$. حيث عندها تكون المركبة العمودية للعزم $\boldsymbol{M_N}$ منعدمة وهذا يحدث عندما يتساوى المتجه الناتج من الضرب ألاتجاهي لمتجه الموضع الجديد والمحصلة مع $\boldsymbol{M_N}$. أي أن:

$$\begin{aligned} (24i - 18j + 60k) &= (yj + zk) \times (3i + 4j) \\ &= -3yk + 3zj - 4zi \\ &= -4zi + 3zj - 3yk \end{aligned}$$

من تسوية المعاملات نحصل على:

$$i \Rightarrow \quad 24 = -4z \quad \Rightarrow \quad z = -6\ m$$

$j \Rightarrow \quad -18 = 3z \quad \Rightarrow \quad z = -6$ صح

$k \Rightarrow \quad 60 = -3y \quad \Rightarrow \quad y = -20\ m$

مثال2-9:

في الشكل (2-19) المجاور تؤثر القوى

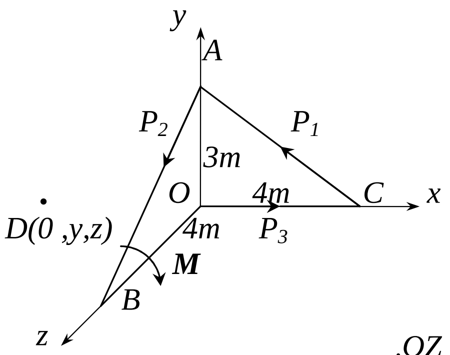
$\boldsymbol{P_1} = 5\ kN$ في اتجاه CA.

$\boldsymbol{P_2} = 5\ kN$ في اتجاه AB.

$\boldsymbol{P_3} = 4\ kN$ في اتجاه OC.

والعزم $\boldsymbol{M} = 12\ kN.m$ في اتجاه BO.

أوجد:



شكل (2-19)

1- عزم القوة $\boldsymbol{P_1}$ والقوة $\boldsymbol{P_2}$ حول المحور OZ.

2- الزاوية BAC.

3- النظام المكافئ للمجموعة ($\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$) عند نقطة الأصل O.

4- استبدل المجموعة ($\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$) إلى قوة مفردة عند النقطة $D(0,y,z)$ وأوجد إحداثيات النقطة D.

الحل:

من الأبعاد المعطاة نجد أن إحداثيات النقاط المختلفة هي:

$A(0,3,0), \quad B(0,0,4) \quad \& \quad C(4,0,0)$

وحدة المتجهات لكل متجه هي:

$$\lambda_{CA} = \frac{\overrightarrow{CA}}{CA} = \frac{-4i + 3j}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}(-4i + 3j)$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{-3j + 4k}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}(-3j + 4k)$$

$\lambda_{OC} = i$ حيث أنها على امتداد المحور السيني

القوى المعطاة مقاديرها وهي كميات مقياسية. هذه المقادير المقياسية تتحول إلى كميات متجهة باعتبارها معاملات لوحدات المتجهات.

$\therefore \quad \boldsymbol{P_1} = 5\,\lambda_{CA} = (-4i + 3j) \qquad \boldsymbol{P_2} = 5\,\lambda_{AB} = (-3j + 4k)$

$\boldsymbol{P_3} = 4\,\lambda_{OC} = 4i \qquad \& \qquad \boldsymbol{M} = -12\,k$ تبعا لقاعدة اليد اليمنى

1- لحساب عزم القوة $\boldsymbol{P_1}$ والقوة $\boldsymbol{P_2}$ حول المحور OZ نفرض متجه موضع لكل منهما يصل بين أي نقطة على امتداد المحور المطلوب حساب العزم حوله وأي نقطة على خط عمل القوة.

$$\therefore \quad r = \mathbf{OA} = 3j$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{M_{o1}} = r \times \boldsymbol{P_1} = 3j \times (-4i + 3j) = 12k$$

$$\& \quad \boldsymbol{M_{o2}} = r \times \boldsymbol{P_2} = 3j \times (-3j + 4k) = 12i$$

أي أن القوة $\boldsymbol{P_2}$ لا تسبب عزما حول الحور OZ وأن العزم حول هذا المحور يساوي صفرا.

2- الزاوية BAC

$$Cos\,\theta = \lambda_{AC} \cdot \lambda_{AB} = 1/5(+4i - 3j) \cdot 1/5(-3j + 4k) = 1/25\,(+9)$$

$$\therefore \quad \theta = Cos^{-1}(9/25) = 68.90^{\circ}$$

3- النظام المكافئ للمجموعة ($\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$) عند نقطة الأصل O

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{P_1} + \boldsymbol{P_2} + \boldsymbol{P_3}$$

$$= (-4i + 3j) + (-3j + 4k) + 4i$$

$$= 4k \quad N.m$$

$$\boldsymbol{M_o} = \sum r \times \boldsymbol{F} + \sum \boldsymbol{M} = r \times \boldsymbol{P_1} + r \times \boldsymbol{P_2} + \boldsymbol{M}$$

$$= 12k + 12i - 12\,k = 12i\ N.m$$

لاحظ أن $\boldsymbol{P_3}$ ليس لها عزم حول O لأنها تمر بها.

لاحظ أن وحدة المتجهات لمحصلة القوى هي وحدة المتجهات k، وأن وحدة المتجهات لمحصلة العزوم هي وحدة المتجهات i. وعليه فأن مركبة العزوم في اتجاه محصلة القوى $\boldsymbol{M_R}$ تساوي صفراً لتعامد $\boldsymbol{M_0}$ مع $\boldsymbol{R}$ في حين أن $\boldsymbol{M_N}$ تساوي العزم $\boldsymbol{M_o}$.

متجه الموضع $\boldsymbol{OD} = yj + zk$

$$\therefore \quad \boldsymbol{OD} \times \boldsymbol{R} = 12i = (yj + zk) \times 4k$$

$$= 4yi = 12i$$

من تسوية المعاملات نجد أن

$$y = 3\ m$$

أما الاحداثي z فيساوي أي قيمة حقيقية.

$D(\,0,3,$ ‎-∞ إلى +∞‎ $)\ m$

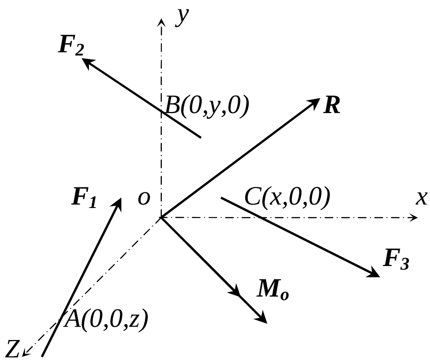
مثال2-10:

في الشكل (2-20) المجاور تؤثر القوى

$$\boldsymbol{F_1} = P_1 i + 2j - 3k$$

$$\boldsymbol{F_2} = -2i + P_2 j + 3k$$

$$\boldsymbol{F_3} = 5i - 4j + P_3 k$$



شكل (2-20)

عند النقاط $A(0,0,z)$، $B(0,y,0)$ & $C(x,0,0)$ على التوالي.

وكانت محصلة هذه المجموعة وعزمها عند نقطة الأصل $O(0,0,0)$ هما:

$$\boldsymbol{R} = 4i + 3j \qquad \& \qquad \boldsymbol{M_o} = 6i - 8j$$

أوجد:

1- قيم كل من $x, y, z, P_1, P_2, \& P_3$.

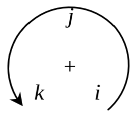
2- مركبة العزم العمودية $\boldsymbol{M_N}$ على محصلة القوى $\boldsymbol{R}$.

الحل:

1- متجهات الموضع لكل من القوى

$$r_1 = \mathbf{OA} = zk \quad , \quad r_2 = \mathbf{OB} = yj$$

$$\& \quad r_3 = \mathbf{OC} = xi$$



$$\mathbf{M_o} = \sum r \times \mathbf{F} = 6i - 8j$$

$$= zk \times (P_1 i + 2j - 3k) + yj \times (-2i + P_2 j + 3k)$$

$$+ xi \times (5i - 4j + P_3 k)$$

$$= zP_1 j - 2zi + 2yk + 3yi - 4xk - xP_3 j$$

$$= (-2z - 3y)i + (zP_1 - xP_3)j + (2y - 4x)k$$

من تساوى المعاملات نحصل على:

$$i \Rightarrow \quad 6 = (-2z - 3y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$j \Rightarrow \quad -8 = (zP_1 - xP_3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$k \Rightarrow \quad 0 = (2y - 4x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

وكذلك من محصلة القوى نحصل على:

$$\mathbf{R} = 4i + 3j$$

$$= (P_1 i + 2j - 3k) + (-2i + P_2 j + 3k) + (5i - 4j + P_3 k)$$

$$= (P_1 - 2 + 5)i + (2 + P_2 - 4)j + (-3 + 3 + P_3)k$$

من تساوى المعاملات ينتج أن:

$$i \Rightarrow \quad 4 = P_1 + 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$j \Rightarrow \quad 3 = P_2 - 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$k \Rightarrow \quad 0 = P_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

من حل هذه المعادلات الستة نحصل على المجاهيل الستة.

وينتج أن:

$P_1 = 1, \quad P_2 = 5, \quad P_3 = 0, \quad x = 5/3, \quad y = 10/3 \quad \& \quad z = -8$

ويظهر أن الابتداء بالحل بمحصلة القوى كان أفضل عمليا وأسرع.

2- وحدة العزوم

$$\lambda_R = 1/5\,(4i + 3j)$$

$$\boldsymbol{M_R} = [\,\boldsymbol{M_o} \cdot \lambda_R\,]\,\lambda_R$$

$$= [\,(6i - 8j) \cdot 1/5\,(4i + 3j)\,]\,1/5\,(4i + 3j)$$

$$= 0$$

$$\boldsymbol{M_N} = \boldsymbol{M_o} - \boldsymbol{M_R}$$

$$= \boldsymbol{M_o} = 6i - 8j$$

تمارين

1-2 تؤثر القوى $F_1 = 3i$ نيوتن عند (0، 25 ، 0) متر والقوة $F_2 = 4j$ نيوتن عند النقطة (0, 0, 25). أوجد:

1- العزوم عند نقطة الأصل (0, 0, 0).

2- النظام المكافئ للقوّتين عند نقطة الأصل.[$\boldsymbol{R}$ & $\boldsymbol{M_o}$]

3- الزاوية بين $\boldsymbol{R}$ & $\boldsymbol{M_o}$ ومركبة $\boldsymbol{M_o}$ على $\boldsymbol{R}$.

2-2 القوّة $F_a = 2i + 3j$ تمر بالنقطة $A(4,3,0)$

والقوة $F_b = -j + k$ تمر بالنقطة $B(0,3,4)$

والعزم $M = -5i + 2j - 5k$ يؤثر عند النقطة $C(2,1,2)$.

أوجد:

أ - النظام المكافىء عند نقطة الأصل (0, 0, 0).[$\boldsymbol{R}$ & $\boldsymbol{M_o}$]

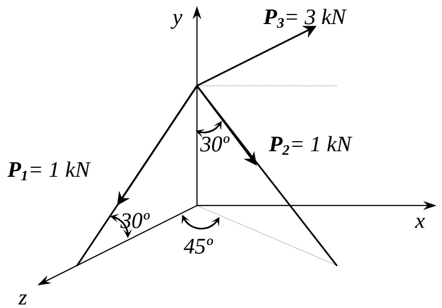
ب - زوايا ميل $\boldsymbol{R}$.

ج - مركبة العزم في اتجاه $\boldsymbol{R}$ والمركبة العمودية.[$\boldsymbol{M_N}$ & $\boldsymbol{M_R}$]

د - الزاوية بين [$\boldsymbol{R}$ & $\boldsymbol{M_o}$].

ه - النقطة الواقعة في المستوى $z = 1$ والتي تتحول فيها المجموعة إلى نظام مكافئ مفرد وعزم في اتجاه هذه القوة.

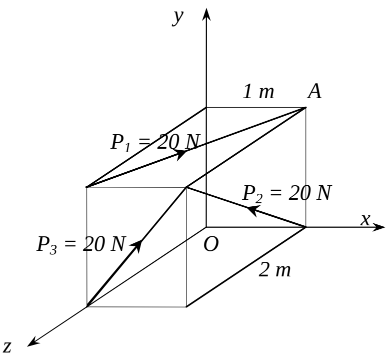
3-2 في الشكل (2-20) المجاور أحسب مركبات القوى $P_1, P_2 \& P_3$ في الاتجاهات الثلاثة الأساسية $x, y \& z$ ثم احسب المحصلة.



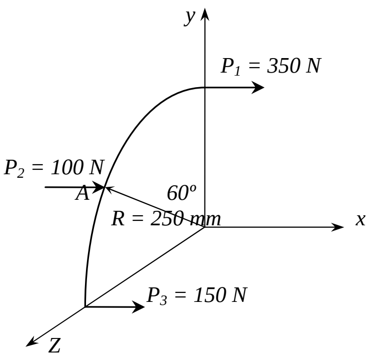
شكل (2-21)

4-2 إلى **9-2** للأشكال التالية من (2-22) إلى (2-27) أوجد:

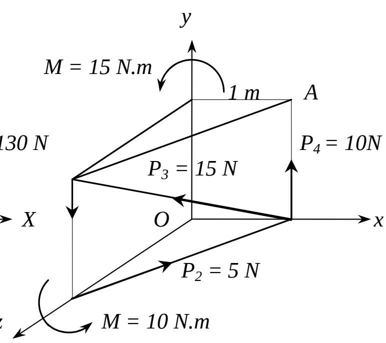
* - محصلة القوى وعزمها عند النقطة $O(0,0,0)$. $[\ R\ \&\ M_o\ ]$
* - الزاوية بين. $[\ R\ \&\ M_o\ ]$
* - حلل العزم إلى مركبتين أحداهما في اتجاه المحصلة والأخرى عمودية عليها.
* - محصلة هذه المجموعة وعزمها عند أي نقطة $A(x,y,z)$. $[\ R\ \&\ M_A\ ]$
* - استبدل المجموعة المكافئة $[\ R\ \&\ M_o\ ]$ عند نقطة الأصل بقوة واحدة مفردة أو قوة مفردة وعزم في اتجاه هذه القوة



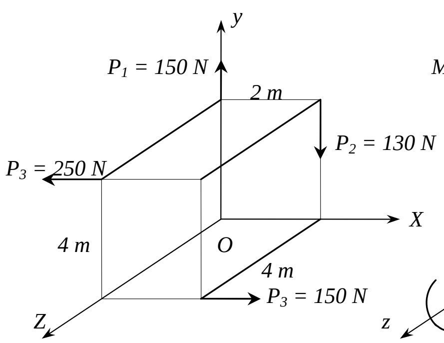
شكل (2-22)



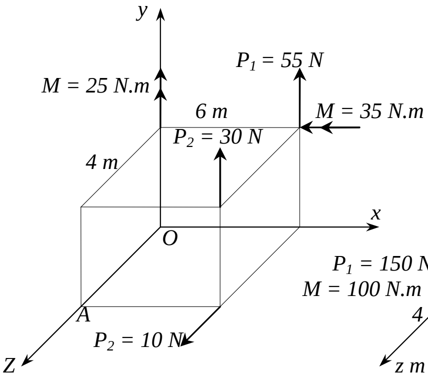
شكل (2-23)



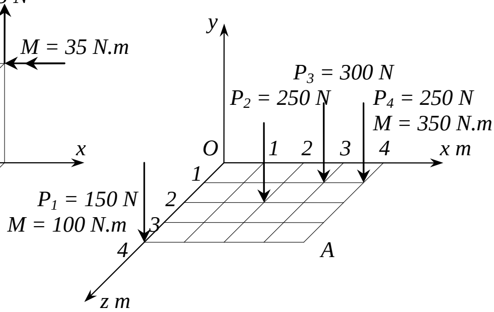
شكل (2-24)



شكل (2-25)



شكل (2-27)



شكل (2-26)

10-2 إذا كانت القوة $\boldsymbol{F_1} = i + 2j - 2j$ تؤثر عند النقطة $A(1,3,-2)$

والقوة $\boldsymbol{F_2} = 3i + 4j$ تؤثر عند النقطة $B(3,0,-2)$

والقوة $\boldsymbol{F_3} = i + 2k$ تؤثر عند النقطة $C(1,5,-6)$

والعزم $\boldsymbol{M} = 4i -2j -2k$ يؤثر عند النقطة $D(1,0,-2)$.

أوجد:

* - محصلة هذه المجموعة وعزمها عند النقطة $O(0,0,0)$. $[\ \boldsymbol{R}\ \&\ \boldsymbol{M_o}\ ]$
* - مركبتي العزم $[\ \boldsymbol{M_N}\ \&\ \boldsymbol{M_R}\ ]$.
* - الزاوية بين القوة $\boldsymbol{R}$ والعزم $\boldsymbol{M_o}$.
* - إحداثيات النقطة $A(0,y,z)$ والتي تتحول فيها المجموعة إلى نظام مكافئ قوة مفردة وعزم في اتجاه هذه القوة.

11-2 إذا كانت القوة $\boldsymbol{F_1} = i + 2j - 2j$ تؤثر عند النقطة $A(1,0,-2)$.

أوجد:

* - عزم القوة حول النقطة $O(0,0,0)$ كمتجه وقيمة العزم ومتجه الوحدة للعزم.
* - مركبتي العزم $[\ \boldsymbol{M_N}\ \&\ \boldsymbol{M_R}\ ]$.
* - الزاوية بين القوة $\boldsymbol{F_1}$ والعزم $\boldsymbol{M_o}$.
* - عزم القوة حول النقطة $B(3,0,4)$.
* - عزم القوة حول الخط DC الواصل بين النقطتين $C(2,3,-4)\ \&\ D(5,3,-8)$.

12-2 القوّة $\boldsymbol{F_a} = 3i$ بالنيوتن تؤثر عند النقطة $A(0,0,10)$ بالمتر والقوّة $\boldsymbol{F_b} = 4j$ بالنيوتن تؤثر عند النقطة $B(5,0,15)$ بالمتر أمكن تحويلهما إلى نظام مكافئ عند نقطة الأصل.

أوجد:

* - مركبتي العزم [$\boldsymbol{M_N}$ & $\boldsymbol{M_R}$].

* - أوجد النقطة الواقعة في المستوى $x = 0$ والتي تتحول فيها المجموعة إلى نظام مكافئ قوة مفردة وعزم في اتجاه هذه القوة.

13-2 إذا كانت القوة $\boldsymbol{F_1} = P_1 i + 2j - 3k$ تؤثر عند النقطة $A(0,0,z)$

والقوة $\boldsymbol{F_2} = -2i + P_2 j + 3k$ تؤثر عند النقطة $B(0,y,0)$

والقوة $\boldsymbol{F_3} = 5i - 4j + P_3 k$ تؤثر عند النقطة $C(x,0,0)$

ومحصلة هذه المجموعة وعزمها عند النقطة $O(0,0,0)$ هما:

$$\boldsymbol{R} = 4i + 3j \quad \& \quad \boldsymbol{M_o} = -8k$$

أوجد:

* - قيم x, y, z, P_1, P_2 & P_3.
* - مركبة العزم العمودية $\boldsymbol{M_N}$ على $\boldsymbol{R}$.
* - استبدل المجموعة إلى قوة مفردة وحدد نقطة تمر بها هذه القوة.

14-2 القوى $\boldsymbol{F_1} = 2i$ تؤثر عند النقطة $A(0,0,1)$، $\boldsymbol{F_2} = 2j$ تؤثر عند النقطة $B(0,-1,0)$ والقوة $\boldsymbol{F_3} = k$ تؤثر عند النقطة $C(1,0,0)$ حيث القوى بالنيوتن والأبعاد بالمتر.

أوجد:

* - المجموعة المكافئة عند نقطة الأصل.
* - استبدل المجموعة إلى قوة مفردة فقط في اتجاه $\boldsymbol{R}$ وأوجد إحداثيات إحدى النقط التي تمر بها هذه القوة.

15-2 القوة $\boldsymbol{P} = -3k$ نيوتن والعزم $\boldsymbol{M_o} = -8i$ نيوتن متر يؤثران عند النقطة $A(1,0,0)$ تم تمثيلهم بقوة مكافئة واحدة $\boldsymbol{F}$ تؤثر عند النقطة $B(x,y,0)$ أوجد قيمتي x & y.

16-2 استبدل القوة $\boldsymbol{F} = i + j + k$ بالكيلو نيوتن والعزم $\boldsymbol{M_o} = i + 2j + 2k$ بالكيلو نيوتن متر اللتان تؤثران عند النقطة $C(1,0,0)$ إلى قوة مفردة تمر بالمستوى $y = 1$.

17-2 قضيب مثبت عند النقطة O يؤثر عليه القوة $\boldsymbol{F}$ المارة بالنقطة A شكل (2-27).

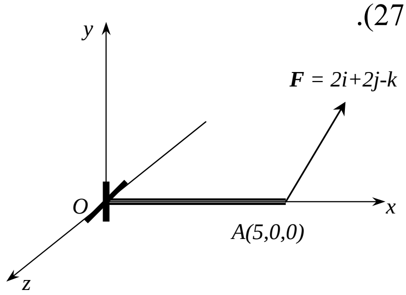
أوجد:

أ- متجه الوحدة λ_{OA} & λ_F.

ب- زوايا اتجاه القوة $\boldsymbol{F}$ θ_x, θ_y & θ_z.

ج- مسقط $\boldsymbol{F}$ على OA.

د- عزم القوة $\boldsymbol{F}$ حول نقطة الأصل.

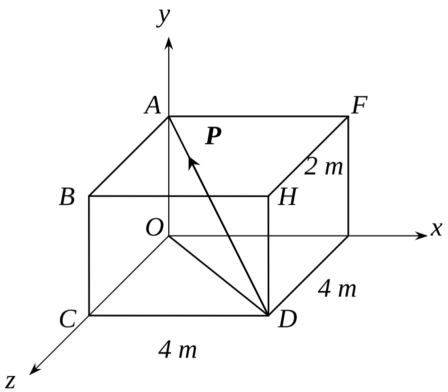


شكل (2-27)

18-2 إذا كانت القوة $\boldsymbol{P} = 36N$ تؤثر في اتجاه DA شكل (2-28) فأوجد:

أ - مركبات القوة في الاتجاهات الثلاثة P_x, P_y & P_z.

ب - الزاوية المحصورة بين $\boldsymbol{P}$ والقطر DO.



شكل (2-28)

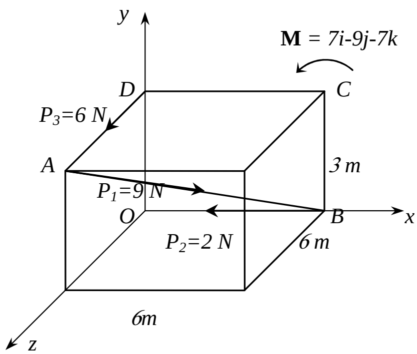
19-2 القوة $\boldsymbol{P_1}=9N$ في اتجاه AB والقوة $\boldsymbol{P_2}=2N$ في اتجاه BO والقوة $\boldsymbol{P_3}=6N$ في اتجاه DA والعزم المركز $\boldsymbol{M}=7i-9j-7k$ شكل (2-29).

المطلوب:

1- أكتب $\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}$ & $\boldsymbol{P_3}$ كمتجهات والزاوية ABO.

2- أوجد العزوم وكذلك النظام المكافئ حول O ومركبة العزم في اتجاه $\boldsymbol{R}$. [$\boldsymbol{M_R}$]

3- حوّل هذه المجموعة لمجموعة مفردة [$\boldsymbol{M_R}$ & $\boldsymbol{R}$] تمر بالمستوى $y=0$ وأوجد x & z .



شكل (2-29)

20-2 القوة $F_1 = 8i - 6j$ تؤثر عند النقطة A والقوة $F_2 = -4i$ تؤثر عند النقطة B والقوة $F_3 = 3$ تؤثر في اتجاه CD وعزم مركز $\boldsymbol{M_1} = 2i - 7j + 18k$ يؤثر عند النقطة A وعزم مركز آخر $\boldsymbol{M_2} = -2i + 3j + 6k$ يؤثر عند النقطة C. حيث:

$A(0,3,0)$ ، $B(4,0,0)$ ، $C(0,0,1)$ & $D(0,3,1)$.

أوجد:

1- المتجه $\boldsymbol{AB}$ والمتجه $\boldsymbol{AD}$ والزاوية المحصورة بينهما.

2- زوايا ميل العزم المركز $\boldsymbol{M_2}$.

3- النظام المكافيء [$\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$] عند النقطة $O(0,0,0)$.

4- الزاوية بين [$\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$].

5- مركبتي محصلة العزوم $\boldsymbol{M_o}$ [$\boldsymbol{M_N}$ & $\boldsymbol{M_R}$].

6- حوّل مجموعة النظام المكافئ [$\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$] إلى نظام مكافئ مفرد يمر بالمستوى $x=0$ [$\boldsymbol{M_R}$ & $\boldsymbol{R}$] ثم أوجد z,y.

7- عزم القوة F_3 حول المحور ox.