

## الباب الثالث

### تحليل المنشآت

يتكون أي منشأ من عناصر أو أعضاء عدة. فمثلا المبنى يتكون عادة من كمرات وأعمدة وأرضيات وأسقف وغيرها. أو الهيكل المفصلي أو الجمالون الذي يتكون من عناصر مختلفة منها الوصلات والأعضاء والكمرات والمفاصل وغيرها. هذه الأعضاء متصلة ومثبتة ببعضها بطريقة تسمح لها أن تؤدي الغرض الذي استعملت من أجله في المنشأ بحيث يكون هذا المنشأ صالحا لتحمل الأوزان التي ستكون عليه من قبل المستعملين له إلى جانب الأحمال الناتجة عن أوزان العناصر المثبتة به والتي تسمى عادة بالأحمال الميتة. ومن الأهمية بمكان معرفة الطريقة التي تعمل بها هذه الأعضاء المختلفة لنقل الأحمال على المنشأ من عنصر إلى آخر إلى أن تصل إلى نقاط التثبيت أو نقاط الارتكاز أو الأساسات حيث تسمى قوى مقاومة الأحمال المؤثرة عليها بردود الأفعال بهذه النقاط للارتكاز.

#### 1-3 نقاط التثبيت أو الركائز في المستوى:

من أساسيات الاستاتيكا دراسة الشروط الكافية واللازمة لاتزان الإنشاءات الهندسية تحت تأثير القوى المعرضة لها. وليكون أي جسم في حالة اتزان فانه يجب أن تتعادل جميع القوى المؤثرة عليه بحيث لا يحدث للجسم حركة أو انتقال. وكذلك أن تتعادل جميع العزوم المؤثرة عليه بحيث لا يحدث للجسم أي احتمال للدوران. ولكي يكون الجسم متزنا يلزم أن يكون النظام المكافئ للقوى المؤثرة عليه مكافئة للصفر. ويتلخص اتزان الجسم بتحقيق الشرط التالي:

$$R = \Sigma F = 0 \quad \& \quad M = 0 \dots\dots\dots(1-3)$$

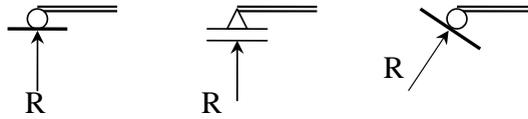
ففي المستوى يختزل هذا الشرط إلى ثلاثة معادلات فقط تعبر عن اتزان القوى في الاتجاهين الأفقي والراسي إضافة إلى اتزان الجسم حتى لا يحدث له دوران. ونلخص هذه الشروط بمعادلات الاتزان الثلاثة التالية:

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0 \quad \& \quad \Sigma M = 0 \dots\dots\dots(2-3)$$

وتطبيق معادلات الاتزان هذه على جسم يتم بتحديد جميع القوى المؤثرة عليه بدقة تامة على البياني الحر للجسم. هذه القوى على البياني للجسم الحر تشمل جميع القوى المؤثرة الخارجية وكذلك ردود الفعل الناتجة عنها عند نقاط التثبيت أو الركائز. ويجب ملاحظة أنواع الركائز ومقدرتها على مقاومة الأحمال التي يمكنها مقاومتها إن كانت مانعة لحركة الجسم أي أنها قوت رد فعل محورية أو مانعة لدوران الجسم أي أنها قوة عزوم.

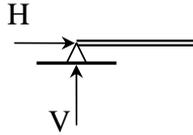
### 1-1-3 المفصل المتحرك على مستوى أملس:

يكون ردّ الفعل للمفصل المتحرك على مستوى أملس دائماً عمودياً على المستوى الأملس شكل (1-3).



شكل (1-3)

### 2-1-3 المفصل الثابت:

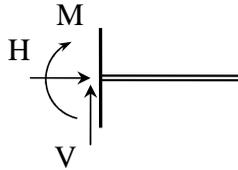


شكل (2-3)

يكون للمفصل الثابت ردّ فعل.

أحدهما أفقي والآخر رأسي شكل (2-3).

### 3-1-3 الكرسي الثابت:



شكل (3-3)

يكون للكرسي الثابت ثلاثة ردود أفعال.

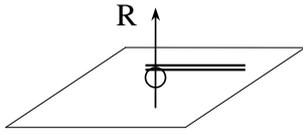
ردّ فعل أفقي وآخر رأسي وعزم

شكل (3-3).

### 2-3 نقاط التثبيت أو الكراسي في الفراغ:

في الفراغ يتزن الجسم إذا تحقق الشرط في المعادلة (1-3) بتحقيق الاتزان للقوى في اتجاه المحاور الأساسية الثلاثة وكذلك اتزان العزوم حول هذه المحاور الثلاثة. وهذا يتم بتحقيق المعادلات الستة التالية:

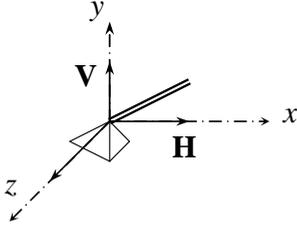
$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0 \quad & \& \quad \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0, \quad \Sigma M_y = 0 \quad & \& \quad \Sigma M_z = 0 \end{aligned} \quad (3-3)$$



### 1-2-3 المفصل المتحرك على مستوى أملس:

يكون ردّ الفعل للمفصل المتحرك على مستوى أملس دائماً عمودياً على المستوى الأملس شكل (4-3).

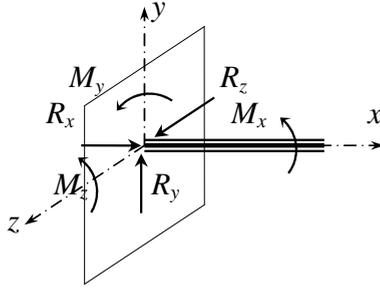
شكل (4-3)



شكل (5-3)

### 2-2-3 المفصل الثابت:

يكون للمفصل الثابت ثلاثة ردود أفعال كل رد فعل منها في اتجاه احد المحاور الأساسية شكل (5-3).



شكل (6-3)

### 3-2-3 الكرسي الثابت:

يكون للكرسي أو نقطة التثبيت الثابتة ستة ردود فعل، ثلاثة قوى كل منها في اتجاه أحد المحاور الأساسية، وثلاثة عزوم كل منها حول أحد المحاور الأساسية شكل (6-3).

### 3-3 الاتزان:

إذا تعرض جسم إلى مجموعة من القوى فيمكن استبدال هذه القوى بمحصلتها كما في المعادلة (1-3).

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k}$$

$R_x$ ,  $R_y$  &  $R_z$  هي المقادير المقياسية لمركبات المحصلة، ويمكن التعبير عن هذه المركبات بمجموع مركبات القوى حسب المعادلة (3-3).

$$R_x = \sum F_x, \quad R_y = \sum F_y, \quad \& \quad R_z = \sum F_z \quad (3-3)$$

أما  $R_x \mathbf{i}$ ,  $R_y \mathbf{j}$  &  $R_z \mathbf{k}$  فهي المركبات المتجهة للمحصلة.

### 1-3-3 اتزان نقطة مادية أو جسيم في الفراغ:

يكون الجسيم، والذي يعرف بأنه من الصغر إلى درجة أنه يمكن تمثيله بنقطة، متزنًا إذا تحقق شرط المجموع الجبري للقوى المؤثرة على الجسيم بأن يكون صفرًا. هذا الشرط يمليه القانون الأول لنيتون كما توضحه المعادلة (4-3). أي أن:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum \mathbf{F} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} = 0 \\ &= \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k} = 0 \dots\dots\dots(4-3) \end{aligned}$$

وهذا الشرط يتحقق إذا كان كل من:

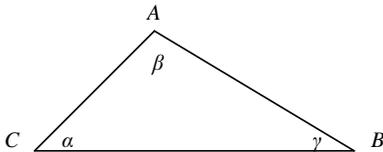
$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad \& \quad \sum F_z = 0$$

وهو ما يعرف بطريقة فصل المتغيرات، وينتج ذلك بتساوى معاملات وحدات المتجهات في طرفي المعادلة حيث الطرف الأيمن يساوى صفرًا. في حالة اتزان جسيم في المستوى فشرط الاتزان يختزل إلى المعادلة (5-3) فقط:

$$\sum F_x = 0 \quad \& \quad \sum F_y = 0 \dots\dots\dots(5-3)$$

### 1-1-3-3 مثلث القوى:

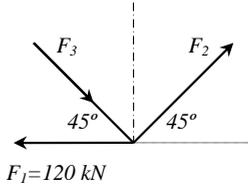
إذا أثرت على نقطة مادية أو (جسيم) ثلاث قوى في المستوى شكل (7-3) فيمكن إثبات أن هذه القوى في حالة اتزان وأن محصلتها تؤول إلى الصفر إذا كوّنت مثلثًا مقفلاً. وفي هذه الحالة يمكن الاستعانة بتطبيق قاعدة تحليل المثلث التي تنص على أن النسبة بين طول كل ضلع مقسوماً على جيب الزاوية المقابلة له في المثلث تساوي مقداراً ثابتاً كما بالمعادلة (6-3) وتسمى أحياناً بقاعدة الجيوب. أي أن:



$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \gamma} \dots\dots\dots(6-3)$$

شكل (7-3)

### مثال 1-3:



شكل (8-3)

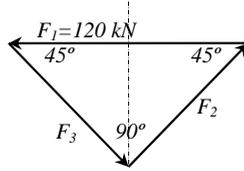
إذا كانت القوى  $F_1$ ,  $F_2$  &  $F_3$  شكل (8-3) في حالة اتزان فأوجد مقدار كل من  $F_2$  &  $F_3$  باستخدام قاعدة الجيوب.

**الحل:**

باستخدام قاعدة الجيوب نجد أن القوى

الثلاثة في اتجاه دوري واحد شكل (9-3). وبالتالي فمحصلتها تساوي صفر.

وعليه نجد أن:



شكل (9-3)

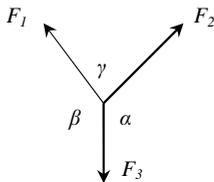
$$\frac{120}{\sin 90} = \frac{F_2}{\sin 45} = \frac{F_3}{\sin 45}$$

$$\begin{aligned} \therefore F_2 = F_3 &= 120 \cdot \frac{\sin 45}{\sin 90} \\ &= 60\sqrt{2} = 84.853 \text{ kN} \end{aligned}$$

### 2-1-3-3 قاعدة لامي:

تنص هذه القاعدة على أن النسبة بين القوة وجيب الزاوية المناظرة لها ثابتة إذا تلاقت

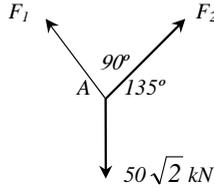
ثلاث قوى عند نقطة كما في شكل (10-3) وكانت محصلتها تساوي صفراً. أي أن:



شكل (10-3)

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma} \dots \dots \dots (7-3)$$

### مثال 2-3:



باستخدام قاعدة لامي احسب مقدار القوتين

$F_1$  &  $F_2$  للقوى المتزنة المتلاقية عند A

شكل (11-3).

شكل (11-3)

الحل:

$$\frac{F_1}{\sin 135} = \frac{F_2}{\sin 135} = \frac{50\sqrt{2}}{\sin 90}$$

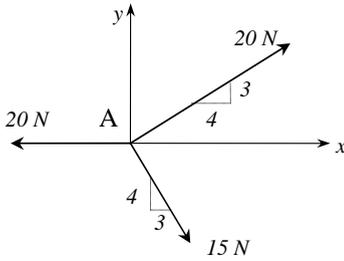
$$F_1 = F_2 = 50\sqrt{2} \frac{\sin 135}{\sin 90} = 50 \text{ kN}$$

### مثال 3-3:

احسب مقدار واتجاه المحصلة للقوى

الموضحة في شكل (12-3) المؤثرة

على النقطة A تحليليا وبالرسم.



الحل:

بالتحليل نحصل على:

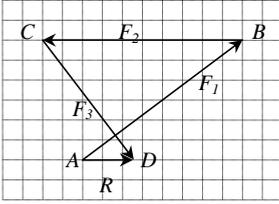
شكل (12-3)

القوة	المقدار N	المركبة الأفقية	المركبة الرأسية
$F_1$	20	16 +	12 +
$F_2$	20	20 -	0
$F_3$	15	9 +	12 -
	$\Sigma$	5 +	0

$$R_x = \Sigma F_x = 5 \text{ N} \quad \& \quad R_y = \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow$$

ومنه نجد أن المحصلة في اتجاه المحور السيني x وتساوي

$$R = 5 N$$



شكل (13-3)

أما بالرسم فنتبع الخطوات التالية:

1- يختار مقياس رسم مناسب، وليكن في

هذا المثال 1 : 2.

2- نبدأ من نقطة ولتكن A ونرسم القوة

$F_1$  مقداراً واتجاهاً إلى النقطة B.

2- نستمر في رسم القوى واحدة بعد

الأخرى في اتجاه دوري واحد حتى

آخر قوة ونصل إلى النقطة D في هذا المثال.

4- نصل نقطة البداية A بنقطة النهاية D يكون المستقيم AD معبراً عن المحصلة مقداراً واتجاهاً

شكل (13-3).

5- بضرب مقدار طول المستقيم AD في مقياس الرسم نحصل على مقدار المحصلة.

وعليه:

$$R = 2.5 \times 2 = 5 N$$

في اتجاه المحور السيني x.

### مثال 3-4:

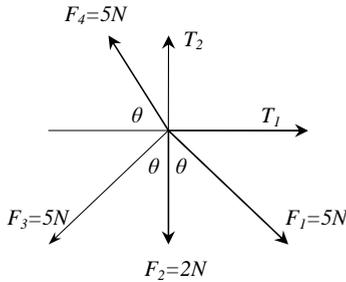
نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى

$$F_1 = 5N, F_2 = 2N, F_3 = 5N, F_4 = 5N$$

إضافة إلى  $T_1$  &  $T_2$  شكل (14-3). فإذا كان

$$\sin \theta = 4/5$$

أوجد مقدار كل من  $T_1$  &  $T_2$  تحليلياً وبيانياً.



شكل (14-3)

الحل:

أولاً: بيانياً ( بالرسم ):

1- يختار مقياس رسم مناسب، وليكن في

هذا المثال 2 : 1.

2- نبدأ من نقطة ولتكن A ونرسم القوة  $F_1$

مقداراً واتجاهها إلى النقطة B شكل (15-3).

3- نستمر في رسم القوى واحدة بعد الأخرى

في اتجاه دوري واحد حتى آخر قوة ونصل

إلى النقطة E في هذا المثال.

4- من النقطة E نرسم خطاً أفقياً يمثل اتجاه

القوة  $T_1$ .

5- على هذا الخط نسقط عموداً من النقطة A يمثل اتجاه القوة  $T_2$ .

حيث يتقاطعا في نقطة F.

6- المستقيم EF يمثل القوة  $T_1$  مقداراً واتجاهها

في حين أن المستقيم FA يمثل القوة  $T_2$  مقداراً واتجاهها. ويقفل المثلث بجميع القوى في اتجاه

دوري واحد حيث المحصلة تساوي صفراً.

7- بضرب طول المستقيمين EF ، FA في مقياس الرسم نحصل على مقدار كل منهما.

وعليه:

$$\text{في اتجاه المحور السيني } x \quad T_1 = 6 \times \frac{1}{2} = 3N$$

$$\text{في اتجاه المحور الصادي } y \quad T_2 = 8 \times \frac{1}{2} = 4N \quad \text{و}$$

ثانياً: بالتحليل ( بالحساب ):

$$\text{من المعطيات حيث أن } \sin \theta = \frac{4}{5} \text{ نجد أن } \cos \theta = \frac{3}{5}$$

القوة	المقدار N	المركبة الرأسية	المركبة الأفقية
$F_1$	5	$-F_1 \cos \theta = -3$	$F_1 \sin \theta = 4$
$F_2$	2	$-F_2 = -2$	0
$F_3$	5	$-F_3 \cos \theta = -3$	$-F_3 \sin \theta = -4$
$F_4$	5	$F_4 \sin \theta = 4$	$-F_4 \cos \theta = -3$
$T_1$	$T_1$	0	$T_1$
$T_2$	$T_2$	$T_2$	0
	$\Sigma$	$T_2 - 4$	$T_1 - 3$

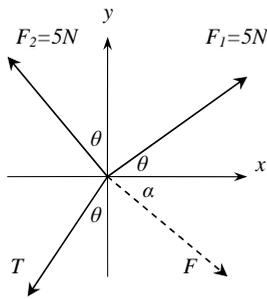
من الاتزان في الاتجاه الأفقي نحصل على:

$$\Sigma F_x = T_1 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 3 \text{ N}$$

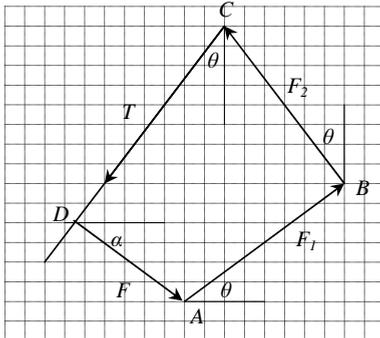
ومن الاتزان في الاتجاه الرأسي نحصل على:

$$\Sigma F_y = T_2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 4 \text{ N}$$

النتائج متطابقة مع الحل البياني.



شكل (16-3)



شكل (17-3)

### مثال 3-5:

باستخدام الرسم، أوجد

مقدار  $T$  &  $\alpha$  التي تجعل  $F$

أقل ما يمكن شكل (16-3) علماً بأن:

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$

### الحل:

1- يختار مقياس رسم مناسب، وليكن في

هذا المثال 1 : 2.

2- نبدأ من نقطة ولنكن  $A$  ونرسم القوة

$F_1$  مقداراً واتجاهاً إلى النقطة  $B$

شكل (17-3).

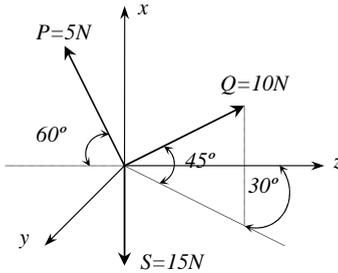
- 3- من النقطة  $B$  نرسم القوة  $F_2$  مقداراً واتجاهها حيث تميل على الرأسى بمقدار الزاوية  $\theta$  وتصل إلى النقطة  $C$ .
- 4- من النقطة  $C$  نرسم خطاً يميل على الرأسى بمقدار الزاوية  $\theta$  يمثل اتجاه القوة  $T$ .
- 5- على هذا الخط نسقط عموداً من النقطة  $A$  حيث يتقاطعا في نقطة  $D$ .
- 6- نصل  $CD$  فيكون ممثلاً للقوة  $T$  اتجاهها ومقدارها بعد ضربه في مقياس الرسم.
- 7- نصل  $DA$  فيكون ممثلاً للقوة  $F$  اتجاهها ومقدارها بعد ضربه في مقياس الرسم.
- 8- الزاوية المطلوبة  $\alpha$  تساوي الزاوية  $\theta$  لأن  $AD$ ،  $CD$  متعامدان.  
وعليه:

$$T = 12.4 \times \frac{1}{2} = 6.2 \text{ N}, \quad F = 6.6 \times \frac{1}{2} = 3.3 \text{ N} \quad \& \quad \alpha = \tan^{-1}(3/4)$$

### مثال 6-3:

في الشكل المجاور،  $O$  نقطة تؤثر عليها القوى الموضحة شكل (18-3).  
والمطلوب:

- 1- اكتب المتجهات  $S$ ،  $P$  و  $Q$ .
- 2- أوجد مقدار واتجاه المحصلة.



شكل (18-3)

الحل:

$$P_x = 5 \sin 60^\circ = 2.5\sqrt{3} \text{ N}$$

$$P_y = 0$$

$$P_z = -5 \cos 60^\circ = -2.5 \text{ N}$$

$$\therefore P = 2.5\sqrt{3}i - 2.5k$$

$$S = -15i$$

$$Q_x = 10 \sin 45^\circ = 5\sqrt{2} \text{ N},$$

$$Q_y = 10 \cos 45^\circ * \sin 30^\circ = 2.5\sqrt{2} \text{ N}$$

$$Q_z = 10 \cos 45^\circ * \cos 30^\circ = 2.5\sqrt{6} \text{ N}$$

$$\therefore \mathbf{Q} = 5\sqrt{2}i + 2.5\sqrt{2}j + 2.5\sqrt{6}k$$

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{S} + \mathbf{Q}$$

$$= (2.5\sqrt{3} - 15 + 5\sqrt{2})i + (2.5\sqrt{2})j + (-2.5 + 2.5\sqrt{6})k$$

$$= -3.6i + 3.54j + 3.62k$$

$$\therefore R = \sqrt{(-3.6)^2 + (3.54)^2 + (3.62)^2}$$

$$= 6.21 \text{ N} \quad \text{وهو مقدار المحصلة}$$

$$\lambda_R = \frac{\bar{\mathbf{R}}}{R} = -\frac{3.6}{6.21}i + \frac{3.54}{6.21}j + \frac{3.62}{6.21}k = -0.58i + 0.57j + 0.583k$$

$$= \cos \theta_x i + \cos \theta_y j + \cos \theta_z k \quad \text{وهو وحدة المتجهات للمحصلة}$$

$$\therefore \theta_x = \cos^{-1}(-0.58) = 125.45^\circ, \quad \theta_y = \cos^{-1}(0.57) = 55.25^\circ$$

$$\& \theta_z = \cos^{-1}(0.583) = 54.34^\circ$$

وهي زوايا ميل المحصلة.

### مثال 7-3:

في الشكل (19-3) المبين إذا كان الشد في

الخيطين  $EA$  &  $EB$  معطى كالتالي:

$$\mathbf{T}_{EA} = -4j - 3k$$

$$\mathbf{T}_{EB} = 6i - 6j + 3k$$

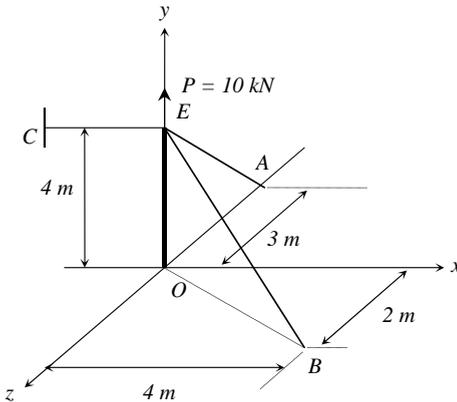
أوجد:

1- مقدار الشد في الخيط  $EC$ .

2- مقدار محصلة الشد في الخيطين

$EA$  &  $EB$ .

3- مركبة الشد  $T_{EB}$  على الخط  $OB$ .



شكل (19-3)

$$O=(0,0,0)$$

$$C=(-1,4,0)$$

$$E=(0,4,0)$$

$$A=(0,0,-3)$$

$$B=(4,0,2)$$

$$OB=(4-0)i + (0-0)j + (2-0)k= 4i+2k$$

الحل:

1- وحدات المتجهات هي:

$$\lambda_{EC} = -i \quad \lambda_{OB} = \frac{OB}{|OB|} = \frac{4i+2k}{\sqrt{4^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2i+k) \quad \& \quad \lambda_P = j$$

من اتزان نقطة E نحصل على:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = \mathbf{T}_{EA} + \mathbf{T}_{EB} + \mathbf{T}_{EC} + \mathbf{P} &= 0 \\ &= (-4j - 3k) + (6i - 6j + 3k) - T_{EC}i + 10j \end{aligned}$$

من تسوية المعاملات نجد أن:

$$i \quad \Rightarrow \quad 6 - T_{EC} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{EC} = 6 \text{ kN}$$

$$j \quad \Rightarrow \quad -4 - 6 + 10 = 0 \quad \text{صح}$$

$$k \quad \Rightarrow \quad -3 + 3 = 0 \quad \text{صح}$$

2- محصلة الشد في الخيطين EB & EA:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{T}_{EA} + \mathbf{T}_{EB} = 6i - 10j$$

$$\therefore R' = \sqrt{6^2 + (-10)^2} \approx 11.662 \text{ kN}$$

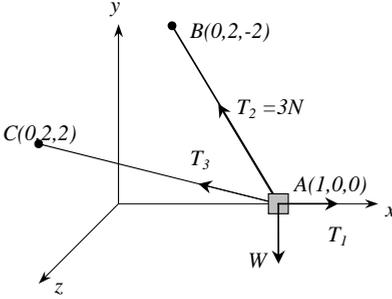
3- مسقط الشد  $T_{EB}$  على الخط OB:

$$\begin{aligned} &= \mathbf{T}_{EB} \cdot \lambda_{OB} \\ &= (6i - 6j + 3k) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2i+k) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (12 + 3) = 3\sqrt{5} \text{ kN}$$

### مثال 8-3:

أوجد وزن الجسم  $W$  الموضوع عند النقطة  $A$  شكل (20-3) وكذلك الشد في الخيطين  $T_1$  &  $T_3$  إذا علم أن الشد في الخيط  $AB$  يساوي  $T_2 = 3 \text{ N}$



شكل (20-3)

### الحل:

النقطة  $A$  متزنة تحت تأثير الشد في الخيوط الثلاثة وكذلك الوزن. هذه القوى يعبر عنها كمتجهات بضربها في وحدة المتجهات.

$$\begin{aligned} \therefore \lambda_1 &= i, \quad \lambda_2 = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \\ &= \frac{-i + 2j - 2k}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}} \\ &= 1/3 (-i + 2j - 2k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \\ &= \frac{-i + 2j + 2k}{3} \quad \& \quad \lambda_4 = -j \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_1 = T_1 \lambda_1, \quad \mathbf{T}_2 = T_2 \lambda_2, \quad \mathbf{T}_3 = T_3 \lambda_3 \quad \& \quad \mathbf{W} = W \lambda_4$$

$$\therefore \mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{W}$$

$$= T_1 i + \frac{T_2}{3}(-i+2j-2k) + \frac{T_3}{3}(-i+2j+2k) - Wj = 0$$

من تسوية المعاملات نحصل على:

$$i \Rightarrow T_1 - \frac{T_2}{3} - \frac{T_3}{3} = T_1 - 1 - \frac{T_3}{3} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$j \Rightarrow \frac{2T_2}{3} + \frac{2T_3}{3} - W = 2 + \frac{2T_3}{3} - W = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$k \Rightarrow -\frac{2T_2}{3} + \frac{2T_3}{3} = -2 + \frac{2T_3}{3} = 0 \Rightarrow T_3 = 3N$$

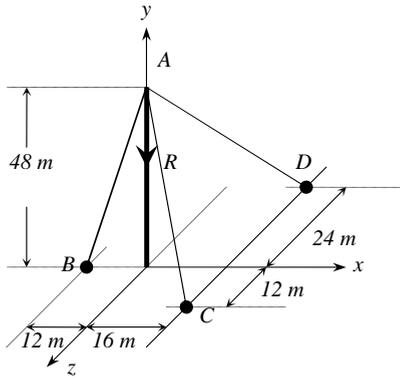
بالتعويض في المعادلات (2) ثم (1) نحصل على:

$$W = 2 + 2 = 4N \quad \&$$

$$T_1 = 1 + 1 = 2N$$

### مثال 9-3:

عمود مثبت رأسيًا بواسطة ثلاثة حبال  
 AB, AC & AD كما هو موضح  
 بالشكل (3-21). فإذا كانت قوة الشد  
 في الحبل AC = 28 N أحسب قوة  
 الشد في الحبلين AB & AD بحيث  
 تكون محصلة القوى الثلاثة المؤثرة عند  
 A في الاتجاه الرأسي وأوجد مقدارها.



شكل (3-21)

### الحل:

إحداثيات النقاط المختلفة هي:

$$A(0,48,0), \quad B(-12,0,0), \quad C(16,0,12) \quad \& \quad D(16,0,-24)$$

وحدات المتجهات هي:

$$\lambda_{AB} = \frac{12(-i-4j)}{12\sqrt{(-1)^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-i-4j)$$

$$\lambda_{AC} = \frac{4(4i-12j+3k)}{4\sqrt{4^2 + (-12)^2 + 3^2}} = \frac{1}{13}(4i-12j+3k)$$

$$\lambda_{AD} = \frac{8(2i-6j-3k)}{8\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{7}(2i-6j-3k)$$

$$\& \quad \lambda_R = -j$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AD} = T_{AB}\lambda_{AB} + T_{AC}\lambda_{AC} + T_{AD}\lambda_{AD} \\ &= T_{AB} * \frac{1}{\sqrt{17}}(-i-4j) + 28 * \frac{1}{13}(4i-12j+3k) + T_{AD} * \frac{1}{7}(2i-6j-3k) \\ &= -Rj \end{aligned}$$

من تساوى المعاملات نحصل على:

$$i \Rightarrow -\frac{T_{AB}}{\sqrt{17}} + \frac{112}{13} + \frac{2T_{AD}}{7} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

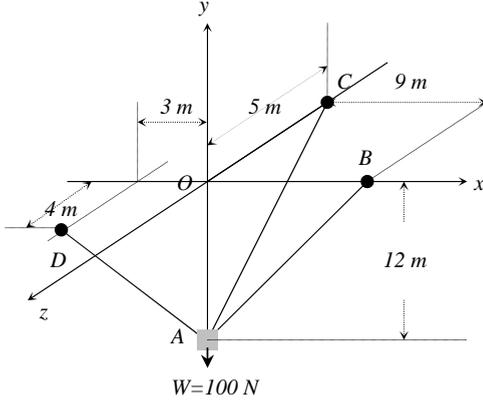
$$j \Rightarrow -\frac{4T_{AB}}{\sqrt{17}} - \frac{336}{13} - \frac{6T_{AD}}{7} = -R \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$k \Rightarrow \frac{84}{13} - \frac{3T_{AD}}{7} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_{AD} = \frac{7(84)}{3(13)} \approx 15.08 \text{ N}$$

بالتعويض في المعادلات (1) ثم (2) نحصل على:

$$T_{AB} = \frac{1176}{91}\sqrt{17} \approx 53.28 \text{ N} \quad \& \quad R = \frac{8232}{91} = 90.46 \text{ N}$$

### مثال 10-3:



شكل (22-3)

ثقل وزنه  $100\text{ N}$  محمول بواسطة  
ثلاثة أسلاك  $AB$ ,  $AC$  &  $AD$  كما  
هو موضَّح بالشَّكل (22-3). أحسب  
الشَّد في الأسلاك الثلاثة.

الحل:

إحداثيات النقاط المختلفة هي:

$$A(0, -12, 0), \quad B(9, 0, 0), \quad C(0, 0, -5) \quad \& \quad D(-3, 0, 4)$$

وحدات المتجهات هي:

$$\lambda_{AB} = \frac{(9i + 12j)}{\sqrt{9^2 + 12^2}} = \frac{1}{5}(3i + 4j)$$

$$\lambda_{AC} = \frac{(12j - 5k)}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13}(12j - 5k)$$

$$\lambda_{AD} = \frac{(-3i + 12j + 4k)}{\sqrt{(-3)^2 + 12^2 + 4^2}} = \frac{1}{13}(-3i + 12j + 4k)$$

$$\& \quad \lambda_W = -j$$

نقطة  $A$  متزنة تحت تأثير الوزن  $100\text{ N}$  والشَّد في الأسلاك الثلاثة وبالتالي فمحصلة هذه القوى  
تساوى الصفر.

$$\therefore \mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AD} + \mathbf{W}$$

$$\mathbf{R} = T_{AB} \lambda_{AB} + T_{AC} \lambda_{AC} + T_{AD} \lambda_{AD} + W \lambda_W$$

$$= T_{AB} * \frac{1}{5}(3i + 4j) + T_{AC} * \frac{1}{13}(12j - 5k)$$

$$+ T_{AD} * \frac{1}{13} (-3i+12j+4k) - 100j$$

من تساوى المعاملات نحصل على:

$$i \Rightarrow \frac{3}{5} T_{AB} - \frac{3}{13} T_{AD} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$j \Rightarrow \frac{4}{5} T_{AB} + \frac{12}{13} T_{AC} + \frac{12}{13} T_{AD} - 100 = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$k \Rightarrow -\frac{5}{13} T_{AC} + \frac{4}{13} T_{AD} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

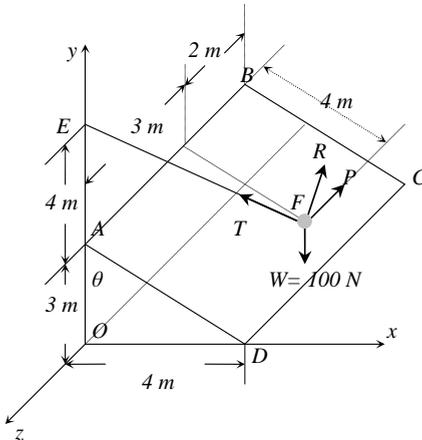
$$\therefore T_{AC} = \frac{4}{5} T_{AD} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$T_{AB} = \frac{5}{13} T_{AD} \quad \dots\dots\dots (5)$$

بالتعويض في المعادلات (2) ثم (4) ثم (5) على التوالي نحصل على:

$$T_{AD} = \frac{1625}{32} = 50.78 \text{ N} \quad , \quad T_{AC} = \frac{325}{8} = 40.63 \text{ N}$$

$$\& \quad T_{AB} = \frac{625}{32} = 19.53 \text{ N}$$



شكل (23-3)

### مثال 11-3:

جسم موضوع عند النقطة  $F$  في المستوى المائل  $ABCD$  وفي حالة اتزان تحت تأثير القوة  $P$  التي تعمل في اتجاه المحور  $z$ ، والقوة  $R$  العاملة في الاتجاه العمودي على المستوى المائل  $ABCD$  والسلك الواصل بين النقطتين  $F$  و  $E$  شكل (23-3). أوجد مقدار كل من القوى  $P$ ,  $R$  و  $T_{FE}$  علماً بأن وزن الجسم  $100\text{N}$ .

الحل:

إحداثيات النقاط المختلفة هي:

$$A(0,3,0)^m \quad C(4,0,-5)^m, \quad D(4,0,0)^m, \quad E(0,7,0)^m$$

أما إحداثيات النقطة  $F$  فهي:

$$4 \sin \theta = 4 * 4/5 = 3.2, \quad 3 - 4 \cos \theta = 3 - 4 * 3/5 = 0.6 \quad \& \quad -3$$

$$\therefore F(3.2, 0.6, -3)^m$$

وحدات المتجهات هي:

$$\lambda_{FE} = \frac{-3.2i + 7j + 3k}{\sqrt{(-3.2)^2 + 7^2 + 3^2}} = -0.3874i + 0.8475j + 0.3632k$$

$$\lambda_W = -j \quad \lambda_P = -k$$

ولحساب متجه الوحدة  $\lambda_R$  فإن ذلك يتم بضرب المتجهين  $AD \times DC$  حيث يكون الناتج متجه عمودي على المستوى  $ABCD$  ثم قسمة الناتج على قيمته.

$$AD \times DC = (4i - 3j) \times (-5k) = 20j + 15i = 15i + 20j$$

$$\therefore \lambda_R = \frac{15i + 20j}{\sqrt{15^2 + 20^2}} = \frac{1}{5}(3i + 4j)$$

من الاتزان للنقطة  $F$  نحصل على:

$$R + P + T_{FE} + W = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$R \lambda_R + P \lambda_P + T_{FE} \lambda_{FE} + W \lambda_W = 0$$

$$R * \frac{1}{5}(3i + 4j) + P * (-k) + T_{FE} * (-0.3874i + 0.8475j + 0.3632k) + W * (-j) = 0$$

من تساوى المعاملات ينتج أن:

$$i \Rightarrow \frac{3R}{5} - 0.3874 T_{FE} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$j \Rightarrow \frac{4R}{5} + 0.8475 T_{FE} - 100 = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$k \Rightarrow -P + 0.3632 T_{FE} = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

بالتعويض في المعادلات (1) ، (2) نستنتج قيمة  $R$  &  $T_{FE}$  ثم من المعادلة (3) نحصل على قيمة  $P$ .

$$\therefore T_{FE} = 73.31 \text{ N}, \quad R = 47.334 \text{ N} \quad \& \quad P = 26.626 \text{ N}$$

### 2-3-3 اتران جسم في الفراغ.

عندما يكون جسم تحت تأثير عزم ازدواج فإن محصلة قوتى الازدواج تساوى صفراً. وعليه فشرط الاتزان لجسم في الفراغ يستلزم أن تكون محصلة العزوم مساوية للصفر كذلك.

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = 0 \quad \& \quad \mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \sum \mathbf{m} = 0$$

حيث  $\mathbf{m}$  تمثل أي عزوم مؤثرة على الجسم. وهذان الشرطان يمثلان ستة معادلات هي:

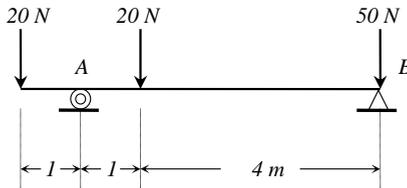
$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad \& \quad \sum F_z = 0 \quad \text{كقوى}$$

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0 \quad \& \quad \sum M_z = 0 \quad \text{وكعزوم}$$

في حالة اتران جسم في المستوى، هذه المعادلات الستة تختزل إلى ثلاثة فقط هي:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad \& \quad \sum M = 0$$

ومعلوم أن العزم في المستوى  $xy$  يؤثر حول المحور  $z$  ولذلك يختصر في كتابته دون الإشارة إلى هذا المحور.



شكل (24-3)

### مثال 12-3:

أوجد ردود الأفعال عند الركائز للكمرة المجاورة شكل (24-3).

## الحل:

تتلخص خطوات الحل لمثل هذه

المسائل في الآتي:

1- تحلل القوى المائلة إن وجدت

إلى مركبات أفقية ورأسية.

2- تحلل ردود الفعل عند المستوى

المائل فقط إلى مركبتين احدهما

أفقية والأخرى رأسية. والمركبتين بدلالة رد الفعل، أي أن هناك مجهول واحد.

3- حسب نوع نقطة الارتكاز نفرض اتجاهات ردود الأفعال شكل (25-3).

4- من معادلات الاتزان نحسب قيم ردود الأفعال هذه ونغير الاتجاه إذا كانت الإجابة سالبة.

5- يمكن التحقق من صحة الإجابة بتطبيق معادلة العزوم حول نقطة غير التي أخذت لحساب

أحد ردود الفعل المجهولة.

من تطبيق معادلة الاتزان في الاتجاه الأفقي لهذا المثال نجد أن:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = 0$$

من تطبيق معادلة العزوم حول نقطة التثبيت  $B$  مع فرض أن العزوم في اتجاه عقارب الساعة

للحل موجبة نحصل على:

$$\sum M @ B = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y (5) - 20 (6) - 20 (4) = 0$$

$$\therefore A_y = 40 \text{ N} \quad \uparrow$$

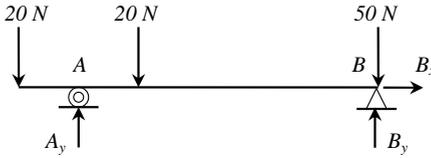
من تطبيق معادلة الاتزان في الاتجاه الرأسي نجد أن:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -20 + 40 - 20 - 50 + B_y = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 50 \text{ N} \quad \uparrow$$

يجب الاهتمام بأن الجواب يظهر المقدار والتمييز والاتجاه. يمكن التحقق من الإجابة بأخذ العزوم

حول نقطة  $A$  وتحقيق أن مجموعها الجبري يساوى الصفر.



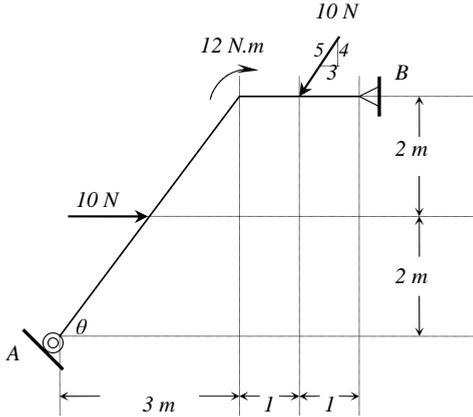
شكل (25-3)

### مثال 3-13:

أوجد ردود الأفعال عند

نقاط الارتكاز A & B

شكل (3-26).

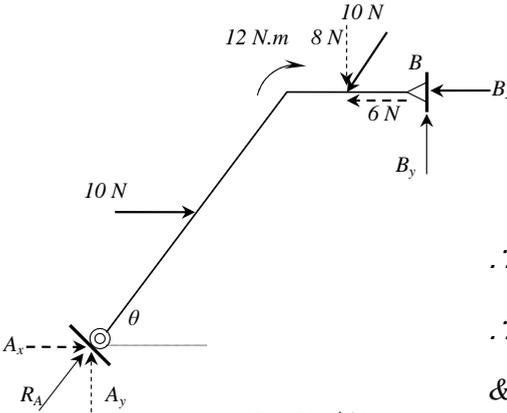


شكل (3-26)

الحل:

بتحليل القوة 10 N المائلة إلى مركبتين نجد أن المركبة الرأسية تساوي 8 N والمركبة الأفقية تساوي 6 N وكذلك رد الفعل عند المفصل A العمودي على المستوى الأملس فالمركبة الأفقية تساوي  $A_x = R_A \cos \theta$  والمركبة الرأسية تساوي  $A_y = R_A \sin \theta$  شكل (3-27).

حيث  $\sin \theta = 4/5$  &  $\cos \theta = 3/5$ .



شكل (3-27)

$$\cup \sum M @ B = 0 \Rightarrow$$

$$A_y(5) - A_x(4) - 10(2 + 12 - 8(1)) = 0$$

$$4/5 R_A(5) - 3/5 R_A(4) - 20 + 12 - 8 = 0$$

$$\therefore R_A = 10 \text{ N} \quad \checkmark$$

$$\therefore A_x = 10 * 3/5 = 6 \text{ N} \rightarrow$$

$$\& A_y = 10 * 4/5 = 8 \text{ N} \uparrow$$

مخطط الجسم الحر

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$6 + 10 - 6 - B_x = 0$$

$$\therefore B_x = 10 \text{ N} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$8 - 8 + B_y = 0$$

$$\therefore B_y = 0$$

تحقيق:

$$\cup \sum M @ A = 10(2) + 12 + 8(4) - 6(4) - 10(4) = 0$$

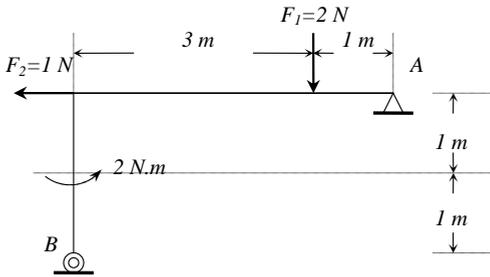
صح

مثال 3-14:

أوجد ردود الفعل عند نقاط

التثبيت A & B للمنشأ الموضح

بالشكل (28-3).



شكل (28-3)

الحل:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$A_x - 1 = 0$$

$$\therefore A_x = 1\text{ N} \rightarrow$$

$$\cup \sum M @ A = 0 \Rightarrow B_y(4) - 2 - 2(1) = 0$$

$$\therefore B_y = 1\text{ N} \uparrow$$

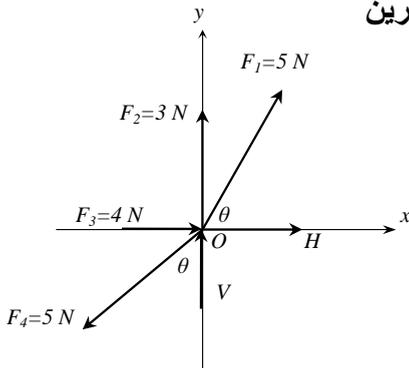
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 1 = 0$$

$$\therefore A_x = 1\text{ N} \rightarrow$$

تحقيق:

$$\cup \sum M @ A = -2 - 1(2) + 2(3) - 1(4) + 1(2) = 0 \quad \text{صح}$$

تمارين



شكل (29-3)

1-3 نقطة مادية متزنة تحت

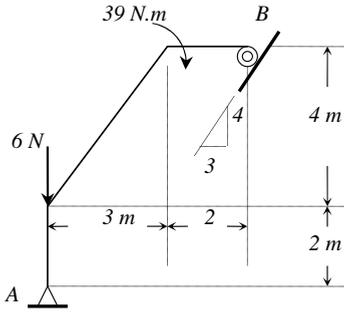
تأثير القوى  $F_1, F_2, F_3, F_4$

شكل V & H (29-3).

أوجد باستخدام الرسم مقدار

كل من V & H.

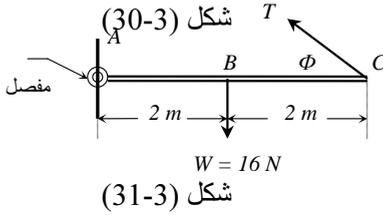
تأكد من النتائج بالتحليل.



2-3 أوجد ردود الفعل عند

نقاط التثبيت  $A$  و  $B$

شكل (30-3).



3-3 قضيب طوله  $4\text{ m}$  ووزنه  $16\text{ N}$

يؤثر في المنتصف، ومثبت بمفصل

عند  $A$ ، ولكي يتزن القضيب ثبت بخيط

عند  $C$  يميل بزاوية  $\Phi$  شكل (31-3)

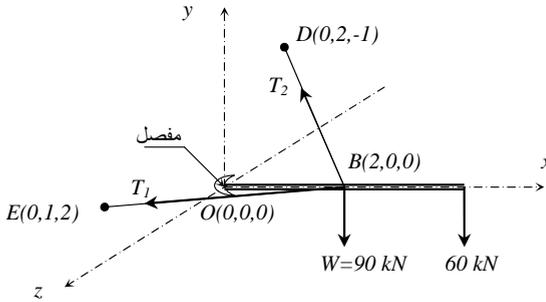
فإذا كان أقصى شد في الخيط  $10\text{ N}$

أوجد:

1- أقل قوة شد للاتزان.

2- أقل زاوية ميل لازمة للاتزان.

3- ردود الفعل عند المفصل  $A$  في حالة أقل زاوية ميل للخيط.



4-3 قضيب وزنه  $90\text{ kN}$  مثبت

بمفصل عند طرفه  $O$  ومربوط

بخيطين عند منتصفه  $B$ ، وعند

نهايته  $C$  علق ثقل مقداره

$60\text{ kN}$  شكل (32-3).

أوجد:

1- مقدار الشد في الخيطين

$.BE$  و  $.BD$

2- الزاوية بين الخيطين

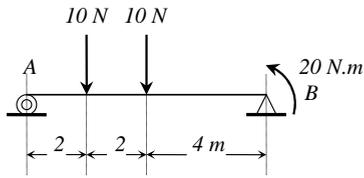
$.BE$  و  $.BD$

3- عزم القوة  $60\text{ kN}$  حول النقطة  $B$ .

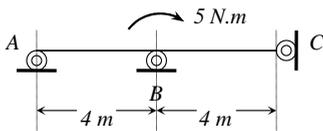
4- ردود الفعل عند المفصل  $O$ .

شكل (32-3)

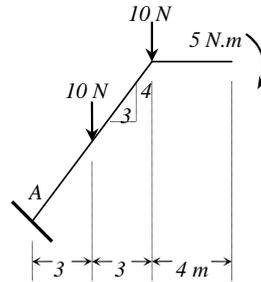
5-3 إلى 12-3 للأشكال (33-3) إلى (40-3) أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت للمنشآت الآتية:



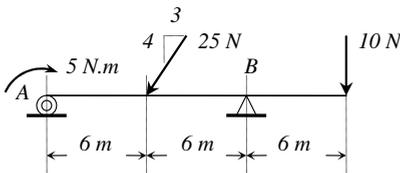
شكل (34-3)



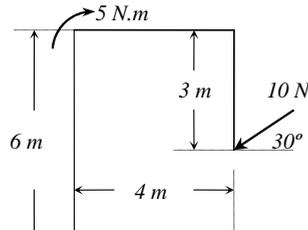
شكل (35-3)



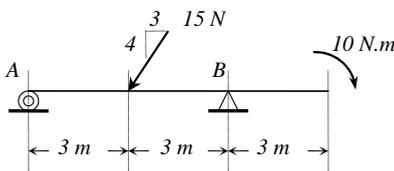
شكل (33-3)



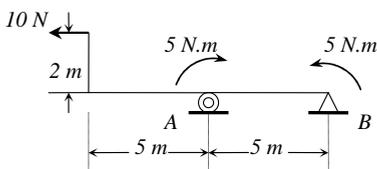
شكل (36-3)



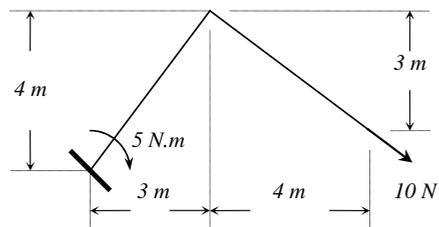
شكل (37-3)



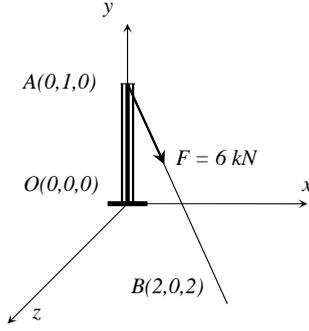
شكل (38-3)



شكل (40-3)



شكل (39-3)



شكل (41-3)

13-3 قضيب مثبت عند  $O$  بدعامة تمنع الحركة

والدوران في جميع الاتجاهات شكل (41-3).

تؤثر عليه قوة مقدارها  $6 \text{ kN}$  عند  $A$

وفي اتجاه  $AB$ .

أوجد:

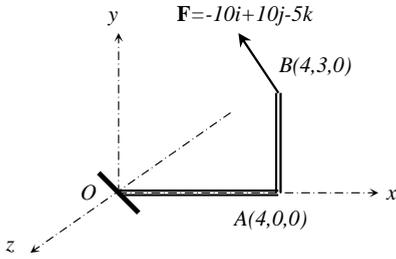
1- العزوم عند  $O$ .

2- القوة المكافئة  $R$  و  $M$ .

3- الزاوية بين  $R$  و  $M$  ومسقط

$M$  على  $R$  ( $M_R$ ).

4- ردود الفعل عند الكرسي  $O$ .



شكل (42-3)

14-3 قضيب  $OAB$  مثبت عند النقطة  $O$

يؤثر عليه القوة  $F$  عند النقطة  $B$

شكل (42-3). أوجد:

1- متجه الوحدة  $\lambda_{BO}$  و متجه الوحدة

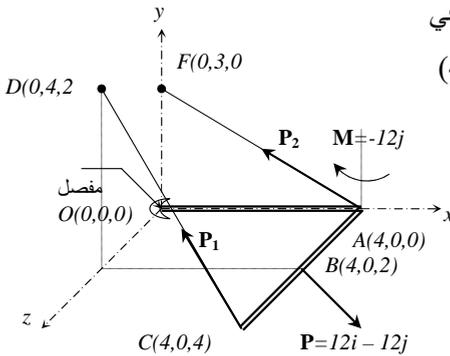
للقوة  $F$  ( $\lambda_F$ ).

2- عزم القوة  $F$  حول نقطة  $O$ .

3- الزاوية بين  $F$  و  $BO$ .

4- زوايا ميل القوة  $F$ . ( $\theta_x$ ,  $\theta_y$  &  $\theta_z$ ).

5- ردود الفعل عند نقطة التثبيت.



شكل (42-3)

15-3 قضيب  $OAC$  مثبت بمفصل عند  $O$  وفي

حالة اتزان. تؤثر عليه القوة شكل (43-3)

عند  $B(4,0,2)$   $P = 12i - 12j$

والقوتين  $P_1$  تؤثر في اتجاه  $CD$  حيث

$P_2$  و  $C(4,0,4)$ ,  $D(0,4,2)$

تؤثر في اتجاه  $AF$  حيث  $A(4,0,0)$

$M = -12j$  وعزم مركز  $F(0,3,0)$

حيث جميع القوى بالنيوتن والأبعاد

بالمتر. أوجد:

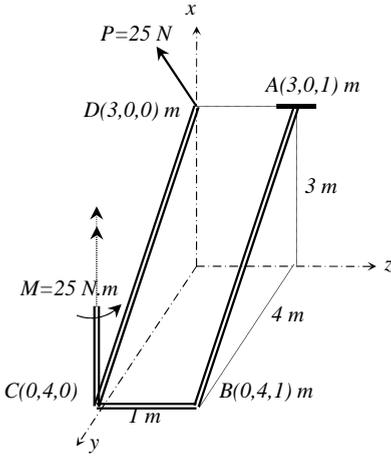
1- المتجهات  $AF$ ,  $CD$  &  $CA$

والزاوية  $DCA$ .

2- أكتب معادلة العزم حول  $O$  بدلالة  $P_1$  &  $P_2$ .

3- أوجد  $P_1$  &  $P_2$  واستخدم العزم حول الخط  $OY$  ( $M_{OY}$ ) للتأكد من صحة النتائج.

4- أوجد رد الفعل عند  $O$  في اتجاه  $Z$  فقط.



شكل (43-3)

16-3 قضيب على شكل حرف U مثبت عند  $A$

بحيث لا يمكنه الحركة ولا الدوران في جميع

الجهات شكل (3-43). يؤثر عليه عند  $C$

عزم قيمته  $25 N.m$  وعند  $D$  قوة عمودية

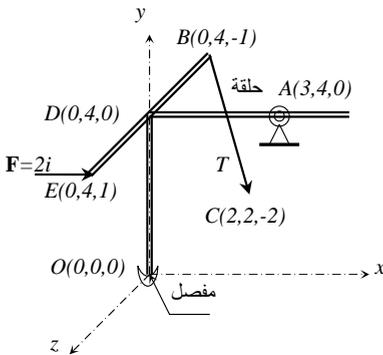
على المستوى  $ABCD$  قيمتها  $25 N$ .

أوجد:

1- الزاوية بين  $CD$  &  $CB$

2- عزم القوة  $P$  حول  $A$ .

3- ردود الفعل عند  $A$ .



شكل (44-3)

17-3 الهيكل الموضح بالشكل مثبت

بالمفصل  $O$  الذي يسمح بالدوران في

جميع الاتجاهات ويمنع الحركة في

اتجاه المحاور الرئيسية  $x$ ,  $y$  &  $z$

ومثبت بالحلقة في  $A(3,4,0)$  التي

تسمح بالدوران في جميع الاتجاهات

وتمنع الحركة في اتجاه  $y$  &  $z$

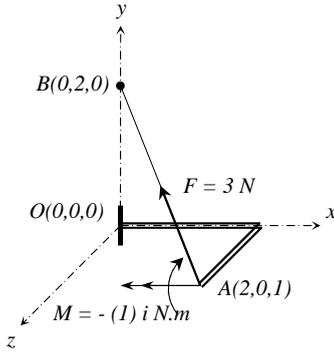
شكل (44-3).

تؤثر القوة  $F = 2i$  عند النقطة  $E(0,4,1)$

وللاتزان مسك بالخيط  $BC$ .

أوجد :

- 1- عزم القوة  $F$  حول نقطة  $O$ .
- 2- الشد في الخيط  $BC$  باستخدام العزم حول المحور  $OA$ .
- 3- أوجد ردود الفعل عند  $A$  باستخدام العزم حول  $O$ .
- 4- أوجد ردود الفعل عند  $O$  باستخدام بقية شروط الاتزان.



شكل (3-45)

### 18-3 قضيب $OA$ المثبت عند $O$

بعامة ثابتة وتؤثر عليه القوة

$F = 3 N$  عند  $A$  وفي اتجاه

$M_A = - (1) i N.m$  وعزم  $AB$

يؤثر عند  $A$  شكل (3-45).

أوجد:

- 1- عزم القوة  $F$  عند  $O$ .
- 2-  $M_o$  &  $R$  والزواوية بينهما.
- 3- ردود الفعل عند الدعامة الثابتة  $O$ .
- 4- زوايا ميل  $AB$ .