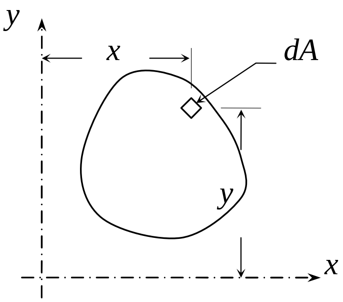
الباب السادس

عزم القصور الذّاتي

يعرف عزم القصور الذّاتي أحيانا بالعزم الثاني للمساحة. وهو من الخواص المهمة للمساحات ومقاطع الأشكال الهندسية التي ترتبط بمقدار مقاومة المقاطع المختلفة لعزوم اللّف والفتل ذات العلاقة بجساءة العناصر الإنشائية.

6-1- عزم القصور الذاتي:

يعرّف عزم القصور الذاتي حول المحاور الأساسية x & y شكل (6-1) بالتالي:



شكل (6-1)

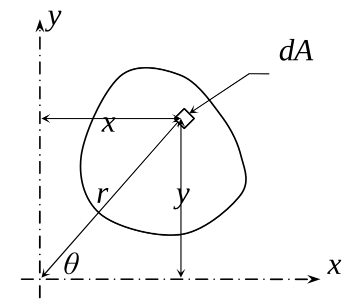
$$I_x = \int y^2 dA \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6\text{-}1)$$

$$I_y = \int x^2 dA \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6\text{-}2)$$

وهما كمية مقياسية موجبة وأكبر من الصفر.

6-2- عزم القصور الذاتي القطبي:

يعرّف عزم القصور الذاتي القطبي شكل (6-2) كما يلي:



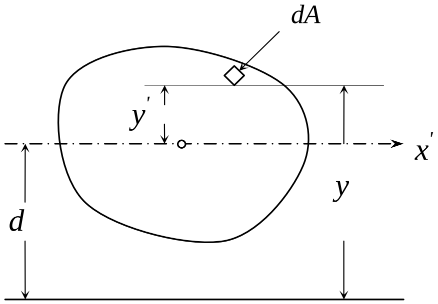
شكل (6-2)

$$\begin{aligned} J_o &= \int r^2 dA \\ &= \int (x^2 + y^2) dA \\ &= \int y^2 dA + \int x^2 dA \\ &= I_x + I_y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6\text{-}3) \end{aligned}$$

6-3- نظرية المحاور المتوازية أو ترحيل المحاور:

من التعريف لعزم القصور الذاتي

ينتج من شكل (6-3) أنّ :



شكل (6-3)

$$I_{AA} = \int y^2 dA$$

$$= \int (d + y')^2 dA$$

$$= \int d^2 dA + \int y'^2 dA + \int 2dy' dA$$

$$= d^2 \int dA + \int y'^2 dA + 2d \int y' dA$$

الحد الأول يكافئ المساحة الكلية مضروبا في مربع البعد d بين المحورين المتوازيين.

الحد الثاني يكافئ عزم القصور الذاتي حول المحور x' المار بمركز الثقل.

الحد الثالث يكافئ العزم الأول للمساحة حول المحور المار بمركز الثقل فهو يساوى الصّفر.

أي أنّ:

$$I_{AA} = I_{x'} + d^2A \text{ ....(6-4)}$$

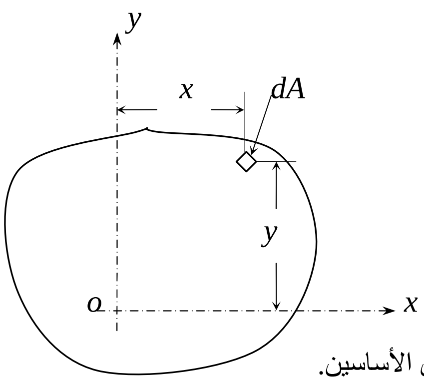
وعليه فعزم القصور الذاتي حول أي محور يكافئ عزم القصور الذاتي حول المحور المار بمركز ثقل المساحة والموازي للمحور المطلوب مضافا إليه حاصل ضرب المساحة ومربع المسافة بين هذين المحورين المتوازيين.

6-3-1- عزم القصور الذاتي للأشكال المركبة:

يتم حساب عزم القصور الذاتي لشكل مركب بتقسيم هذا الشكل إلى أشكال هندسية بسيطة ويؤخذ مجموع عزم القصور الذاتي الجبري لها. ويراعى عند حساب المجموع الجبري لها مراعاة إشارة الفتحات فتؤخذ سالبة الإشارة.

6-4- عزم القصور الذاتي ألضربي:

يعرّف عزم القصور الذاتي ألضربي للمساحة شكل (6-4) بأنه يساوى



$$I_{xy} = \int yx dA \quad \text{........(6-4)}$$

ويتم بتكامل عنصر من المساحة حول المحورين الأساسين.

شكل (6-4)

ويلاحظ أنه في حالة أن أحد المحورين أو كليهما يمران بمركز الثقل فعزم القصور الذاتي ألضربي ينعدم.

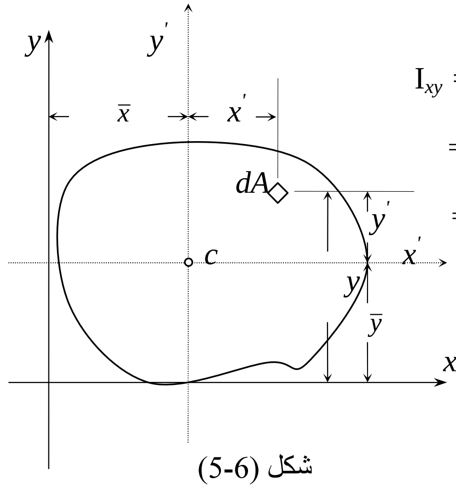
6-5- ترحيل المحاور أو المحاور المتوازية لعزم القصور ألضربي:

من تعريف عزم القصور الذاتي ألضربي لدينا

$$I_{xy} = \int yx dA$$

$$= \int (\bar{x} + x')(\bar{y} + y') dA$$

$$= \int x' y' dA + \bar{y} \int x' dA + \bar{x} \int y' dA + \bar{x}\bar{y} \int dA$$



شكل (6-5)

الحد الأول يساوي عزم القصور ألضربي حول المحورين x' & y' المارّين بمركز ثقل المساحة شكل (6-5).

الحدين الثاني والثالث يساويان عزمي المساحة حول محورين يمران بمركز ثقل المساحة وبالتالي فهما يساويان صفراً.

الحد الرابع يساوى المساحة مضروبة في بعدي مركز الثقل عن المحورين الموازيين. وعليه فانّ

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6\text{-}5)$$

6-6- المحاور الأساسية وعزوم القصور الذاتي الأساسية:

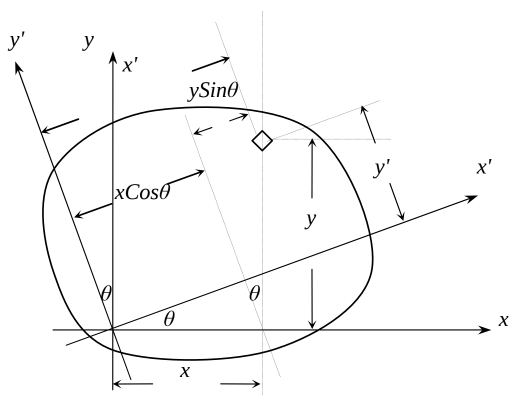
نفرض أن عزوم القصور الذاتي هي:

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA \qquad (6\text{-}6)$$

$$I_{xy} = \int xy dA$$

وأن المحورين x' & y' دارا حول



شكل (6-6)

المحورين x & y بزاوية مقدارها θ

شكل (6-6).

$$x' = x \, Cos\, \theta + y \, Sin\, \theta$$

$$y' = y \, Cos\, \theta - x \, Sin\, \theta$$

من المعادلة الأولى نحصل على

$$I_{x'} = \int y'^2 \, dA = \int (yCos\theta - xSin\theta)^2 \, dA$$

$$= \quad Cos^2\theta \int y^2 dA - 2Sin\theta Cos\theta \int xydA + Sin^2\theta \int x^2 dA \quad \ldots\ldots .(7\text{-}6)$$

$$= I_x \, Cos^2\theta - 2I_{xy} \, Sin\, \theta \, Cos\, \theta + I_y \, Sin^2\theta$$

وبالمثل

$$I_{y'} = I_x \, Sin^2\theta + 2I_{xy} \, Sin\, \theta \, Cos\, \theta + I_y \, Cos^2\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \quad (8\text{-}6)$$

$$I_{x'y'} = Sin^2\theta + 2I_{xy} \, Sin\, \theta \, Cos\, \theta + I_y \, Cos^2\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .. \quad (9\text{-}6)$$

وحيث أن:

$$Sin\, 2\theta = 2\, Sin\, \theta \, Cos\, \theta \qquad \& \qquad Cos\, 2\theta = Cos^2\, \theta - Sin^2\theta$$

$$Sin^2\, \theta = \frac{1 - Cos2\theta}{2} \qquad\qquad Cos^2\theta = \frac{1 + Cos2\theta}{2}$$

المعادلات (6-7) & (6-8) ,(6-9) يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} Cos\, 2\theta - I_{xy} \, Sin\, 2\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ..(10\text{-}6)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} Cos\, 2\theta + I_{xy} \, Sin\, 2\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11\text{-}6)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} Sin\, 2\theta + I_{xy} \, Cos\, 2\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ..(12\text{-}6)$$

لاحظ أنّ إضافة المعادلة (6-10) إلى المعادلة (6-11) ينتج عنه أنّ

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .....(13\text{-}6)$$

وهذا متوقع لان كلاً من الطرفين يساوى عزم القصور الذاتي القطبي J_o.

المعادلتـان (10-6) ، (12-6) تعبـران عـن محـيط دائـرة. حيـث ينـتج عـن التعـويض لأي قيمـة للزاوية θ أن نحصل على نقطة M تتحرك على محيط دائرة عندما يؤخذ $I_{x'}$ كمحور أفقي و $I_{x'y'}$ كمحور رأسي كما يلي:

من المعادلة (10-6) ينتج أنّ:

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} Cos2\theta - I_{xy} Sin2\theta\right)^2$$

$$= \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 Cos^2 2\theta - I_{xy}\left(I_x - I_y\right) Sin2\theta Cos2\theta + I_{xy}^2 Sin^2 2\theta \;\ldots\ldots(14\text{-}6)$$

من المعادلة (12-6) ينتج أنّ:

$$I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 Sin^2 2\theta + I_{xy}\left(I_x - I_y\right) Sin2\theta Cos2\theta + I_{xy}^2 Cos^2 2\theta \;\ldots\ldots(15\text{-}6)$$

بجمع المعادلتين (14-6) ، (15-6) ينتج أنّ:

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 (1) + I_{xy}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(16\text{-}6)$$

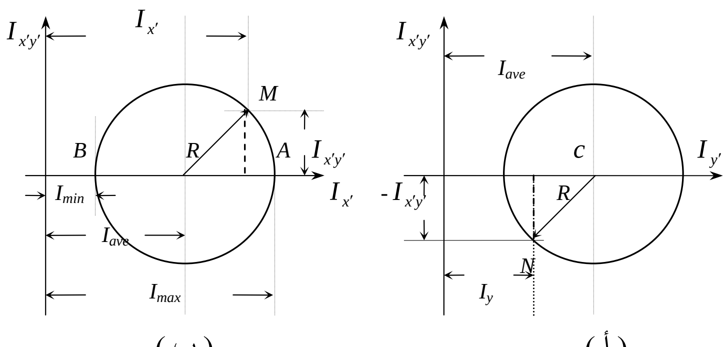
بوضع

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} \qquad \& \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(17\text{-}6)$$

معادلة (15-6) تؤول إلى:

$$\left(I_{x'} - I_{ave}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = R^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(18\text{-}6)$$

وهـي معادلـة دائـرة نـصف قطرهـا R ومركزهـا نقطـة C المنطبقـة علـى المحـور الأفقـي وبُعـدها يساوي I_{ave} شكل (7-6).



شكل (7-6)

المعادلتان (6-11) ، (6-12) تعبران عن نفس الدائرة. ويلاحظ أنّه نتيجةً لتماثل للدائرة حول المحور الأفقي يمكن الوصول إلى نفس النتيجة إذا تم رسم محيط الدائرة بالنقطة N التي إحداثياتها $I_{y'}$ الأفقية، $-I_{x'y'}$ الرأسية شكل (6-7- ب).

النقطة A تمثل القيمة القصوى لعزم القصور الذاتي $I_{x'}$ والنقطة B تمثل قيمته الصغرى. في حين أن كلا النقطتين تكون عندهما قيمة $I_{x'y'}$ تساوى صفراً. وعليه فالقيم التي يمكن أن تأخذها الزاوية θ_m التي تناظر النقطتين A, B يمكن الحصول عليها بوضع قيمة $I_{x'y'} = 0$ في المعادلة (6-12) حيث ينتج أن:

$$Tan\ 2\theta_m = -\ \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \qquad \text{……………………(19-6)}$$

ويمكن الوصول إلى نفس النتيجة بتفاضل المعادلة (6-10) بالنسبة إلى الزاوية θ وتسوية نتيجة التفاضل بالصفر.

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = 0$$

تحدد المعادلة (6-19) قيمتين للزاوية $2\theta_m$ الفرق بينهما 180 درجة وعليه سيكون هناك قيمتان للزاوية θ_m الفرق بينهما 90 درجة. تناظر أحداهما النقطة A شكل (6-7-أ) ودوران المحور حول نقطة الأصل حيث هذه النقطة تمثل القيمة القصوى لعزم القصور الذاتي للمساحة. أما القيمة الثانية فتناظر النقطة B والمحور العموديّ المار بنقطة الأصل وتمثل القيمة الصغرى لعزم القصور الذاتي للمساحة. وهذان المحوران المتعامدان على بعضيهما يسمّيان المحاور الأساسية للمساحة حول نقطة الأصل O ، والقيم المناظرة لهما عزمي القصور الذاتي الأساسي I_{max} , I_{min} أو العزمين الأقصى والأدنى للمساحة حول النقطة O . لاحظ أن عزم القصور الذاتي ألضربي ينعدم ويساوى الصفر عند الحصول على القيم الصغرى والكبرى لعزم القصور الذاتي.

$$I_{max} = I_{ave} + R \qquad \& \qquad I_{min} = I_{ave} - R \text{.......................................(20-6)}$$

من المعادلة (6-17) نحصل على:

$$I_{max,\,min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad \text{……………………(21-5)}$$

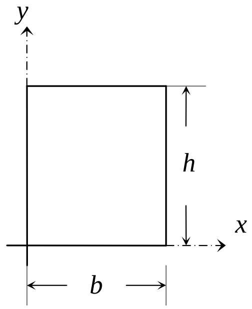
وبالمشاهدة يمكن تمييز المحورين الأقصى والأدنى، أو بالتعويض في المعادلة (6-10) عن أحد قيم الزاوية θ .

عندما يكون للمساحة محور تماثل ، أو أكثر، فالمحور المار بمركز الثقل يكون محور أساسي. وليس بالضرورة أن يكون المحور الأساسي محور تماثل.

أمثلة

مثال 6-1:

أوجد عزم المساحة الثاني للمستطيل المجاور الذي قاعدته b وارتفاعه h حول المحورين الملامسين لضلعيه المتعامدين شكل (6-8).

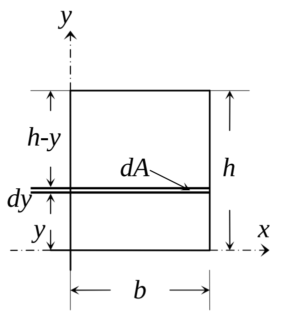


شكل (6-8)

الحل:

من التعريف لعزم القصور الذاتي نجد أن هذا العزم حول المحور الأفقي شكل (6-9) يساوي:

$$I_x = \int y^2 dA$$



شكل (6-9)

باستخدام شريحة أفقية حيث

$$dA = b\,dy$$

وإحداثيات مركز الثقل لهذه الشريحة هي

$$y_e = y \qquad \& \qquad x_e = \frac{b}{2}$$

$$\therefore \qquad I_x = \int_0^h y^2 b\,dy = b\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

وبالمثل باستخدام شريحة رأسية يمكن إثبات أن

$$I_y = \int x^2 dA = \frac{hb^3}{3}$$

ويلاحظ أن الشريحة اختيرت بحيث كانت جميع النقاط بها على أبعاد متساوية من المحور أو الضلع المراد حساب عزم القصور الذاتي حوله أي أن الشريحة موازية له. ويمكن

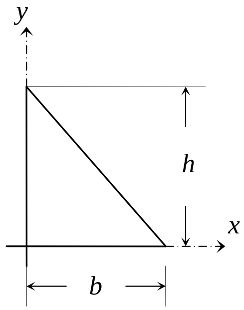
تطبيق النتيجة التي تم الحصول عليها لحساب I_x لحساب I_y بإجراء عملية تكامل لعزم القصور الذاتي للشريحة كما يلي:

$$dI_y = \frac{b^3 dx}{3} \quad \Rightarrow \quad I_y = \frac{b^3}{3}\int_0^h dx \; = \frac{hb^3}{3}$$

وتستذكر بالقول أن عزم القصور الذاتي لمستطيل وما في حكمه حول المحور المنطبق على الحافة يساوي الموازي في المقطوع تكعيب على 3.

مثال 6-2:

أوجد عزم المساحة الثاني للمثلث المجاور الذي قاعدته b وارتفاعه h حول المحورين الملامسين لضلعيه المتعامدين شكل (6-10).

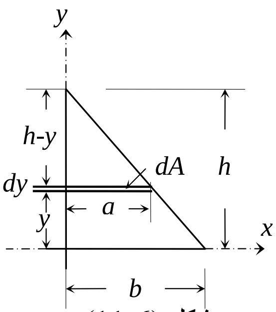


شكل (6-10)

الحل:

من التعريف لعزم القصور الذاتي نجد أن هذا العزم حول المحور الأفقي يساوي شكل (6-11):

$$I_x = \int y^2 dA$$



شكل (6-11)

باستخدام شريحة أفقية نجد أن:

$$dA = a\,dy$$

$$\frac{a}{b} = \frac{h-y}{h} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b}{h}(h\text{-}y)$$

$$\therefore\; dA = \frac{b}{h}(h\text{-}y)\,dy$$

$$\therefore\ I_x = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y)dy \qquad = \frac{b}{h}\left(h\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^h$$

$$= \frac{b}{h}\left(\frac{h}{3}h^3-\frac{1}{4}h^4\right)-0 = \quad \frac{bh^4}{12h}(4-3) = \frac{bh^3}{12}$$

وبالمثل باستخدام شريحة رأسية نجد أن:

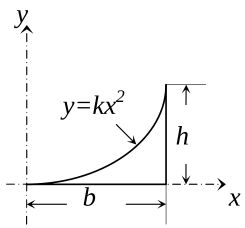
$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

مثال 6-3:

للقطع المخروطي المجاور أوجد

عزم القصور الذاتي حول المحورين

الأساسيين $y \;\&\; x$ شكل (6-12).

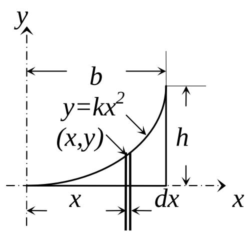


شكل (6-12)

الحل:

باستخدام شريحة رأسية والنتائج التي سبق

الحصول عليها شكل (6-13) نجد أن:



شكل (6-13)

$$dA \;= y\, dx$$

$$dI_x = \frac{dx\cdot y^3}{3}$$

$$I_x = \int_0^b dI_x$$

من الشروط الحدودية نجد أن:

$$@ \qquad x = b\ , \qquad y = h$$

$$\therefore \qquad k = \frac{y}{x^2} = \frac{h}{b^2} \qquad \Rightarrow$$

$$y = \frac{h}{b^2}\ x^2 \quad \Rightarrow \qquad dI_x = \frac{1}{3}\left(\frac{h}{b^2}x^2\right)^3 dx$$

$$\therefore \quad I_x = \int_0^b dI_x = \frac{h^3}{3b^6}\int_0^b x^6 dx = \frac{h^3}{3b^6} * \frac{x^7}{7}\Bigg|_0^b$$

$$I_x = \frac{h^3 b^7}{21 b^6} = \frac{bh^3}{21}$$

باستخدام نفس الشريحة نجد أن:

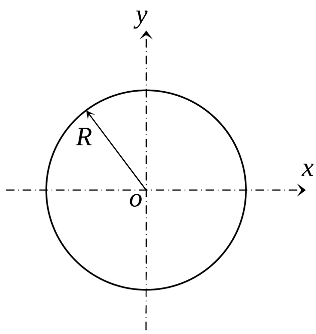
$$dI_y = x^2 dA = x^2\, y dA = x^2 \frac{h}{b^2}\, x^2\, dx$$

$$= \frac{h}{b^2} x^4 dx$$

$$I_y = \int_0^b dI_y = \frac{h}{b^2}\int_0^b x^4 dx = \frac{h}{b^2} * \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^b = \frac{hb^5}{5b^2} = \frac{hb^3}{5}$$

مثال 6-4:

أوجد عزم القصور الذاتي القطبي للدائرة المجاورة ومن ثم عزم القصور الذاتي حول أقطارها شكل (6-14).



شكل (6-14)

الحل:

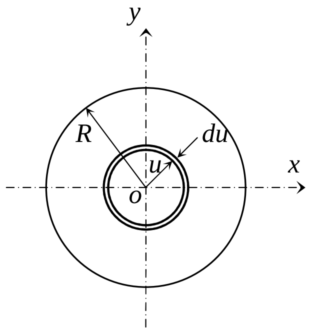
باستخدام شريحة دائرية شكل (6-15) وتعريف عزم القصور الذاتي القطبي نجد أن:

$$J_o = \int r^2 dA = \int dJ_o$$

$$dA = 2\pi\, u\, du$$

$$dJ_o = u^2\, dA$$

$$\therefore \; J_o = \int u^2 dA$$



شكل (6-15)

$$\therefore \; J_o = \int_0^R u^2 * 2\pi u du$$

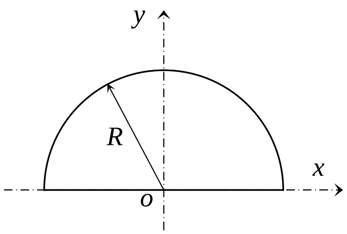
$$= 2\pi \frac{u^4}{4}\Big|_0^R \qquad = \frac{\pi R^4}{2}$$

وحيث أن عزم القصور الذاتي القطبي يكافئ مجموع عزمي القصور الذاتي حول المحورين السينيين x & y ونتيجة لتماثل الدائرة نجد أن:

$$J_o = I_x + I_y \qquad \Rightarrow \qquad I_x = I_y \quad = \frac{\pi R^4}{4}$$

ومن التماثل للدائرة يمكن القول أن عزم القصور الذاتي لنصف الدائرة حول القطر شكل (6-16) يكافئ

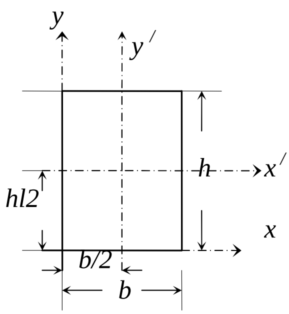
$$I_x = I_y \quad = \frac{\pi R^4}{8}$$



شكل (6-16)

مثال 6-5:

أوجد العزم الثاني للمساحة للمستطيل المجاور الذي قاعدته b وارتفاعه h حول المحورين المتعامدين المارّين بمركز الثقل شكل (6-17).



شكل (6-17)

الحل:

بتطبيق نظرية المحاور المتوازية والنتيجة التي تم الوصول إليها في المثال 6-7-1 نجد أن:

$$I_x = I_{x'} + Ad^2 \qquad \Rightarrow \qquad I_{x'} = I_x - Ad^2$$

$$\therefore\ I_{x'} = \frac{bh^3}{3} - bh\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

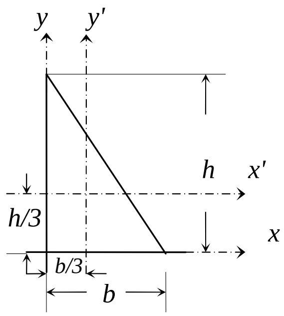
$$= \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} \qquad = \frac{bh^3}{12}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$$I_{y'} = \frac{hb^3}{12}$$

مثال 6-6:

أوجد عزم القصور الذاتي للمثلث المجاور الذي قاعدته b وارتفاعه h حول المحورين المتعامدين المارين بمركز الثقل شكل (6-18).



شكل (6-18)

الحل:

بتطبيق نظرية المحاور المتوازية والنتيجة التي تم الوصول إليها في المثال 6-7-2 نجد أن:

$$I_x = I_{x'} + Ad^2 \qquad \Rightarrow \qquad I_{x'} = I_x - Ad^2$$

$$\therefore\ I_{x'} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2$$

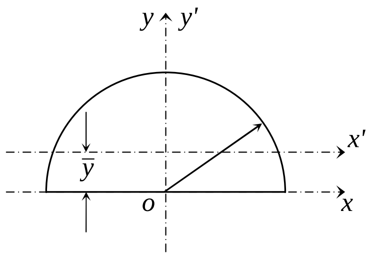
$$= \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} \qquad = \frac{bh^3}{36}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$$I_{y'} = \frac{hb^3}{36}$$

مثال 6-7:

أوجد عزم القصور الذاتي لنصف الدائرة التي نصف قطرها R حول المحورين السينيين $y' \,\&\, x'$ المارين بمركز ثقل نصف الدائرة شكل (6-19).



شكل (6-19)

الحل:

سبق أثبات أن مركز الثقل يقع على بعد يساوى

$$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

وأن عزم القصور الذاتي يساوى

$$I_x = I_y \quad = \frac{\pi R^4}{8}$$

$$I_x = I_{x'} + Ad^2 \quad \Rightarrow \qquad I_{x'} = I_x - Ad^2$$

$$\therefore \quad I_{x'} \quad = \quad \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2} * \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$$

$$= \frac{\pi R^4}{8} - \frac{16R^4}{18\pi^2}$$

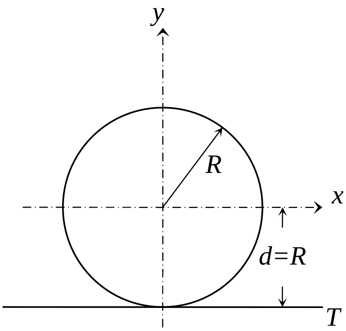
$$= \frac{R^4}{72\pi^2}\left(9\pi^3 - 64\right)$$

ومن تماثل نصف الدائرة حول المحور الرأسي y فان مركز الثقل يقع على هذا المحور وأن عزم القصور الذاتي حول هذا المحور يساوى:

$$I_y = I_{y'} \quad = \frac{\pi R^4}{8}$$

مثال 6-8:

أوجد عزم القصور الذاتي حول المماس للدائرة التي نصف قطرها R.



شكل (6-20)

الحل:

من تطبيق نظرية المحاور المتوازية نجد أن عزم القصور الذاتي حول المماس للدائرة يساوى شكل (6-20).

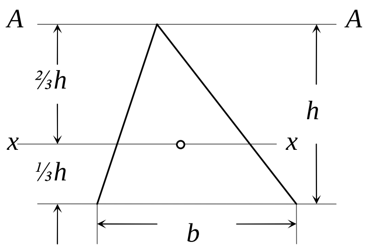
$$I_T = I_x + Ad^2$$

$$= \frac{1}{4}\pi R^4 + \pi R^2 R^2$$

$$= \frac{5}{4}\pi R^4$$

مثال 6-9:

أوجد عزم القصور الذاتي حول محور يمس رأس المثلث ويوازى قاعدته.



شكل (6-21)

الحل:

من تطبيق نظرية المحاور المتوازية نجد أن عزم القصور الذاتي حول محور (A-A) يمر برأس المثلث ويوازي قاعدته شكل (6-21) يساوى

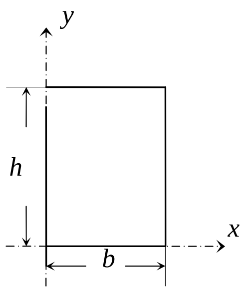
$$I_{AA} = I_x + Ad^2$$

$$= \frac{bh^3}{36} + \frac{1}{2}bh * \left(\frac{2}{3}h\right)^2$$

$$= \frac{bh^3}{36} + \frac{4bh^3}{18} = \frac{bh^3}{4}$$

مثال 6-10:

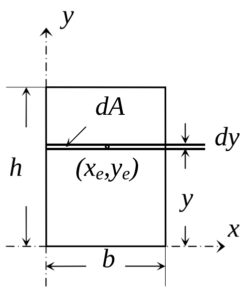
أوجد عزم القصور الذاتي ألضربي للمستطيل المجاور شكل (6-22).



شكل (6-22)

الحل:

باستخدام شريحة أفقية شكل (6-23) نجد أن:



شكل (6-23)

$$dA = b\,dy \qquad \&$$

$$y_e = y \qquad \& \quad x_e = \frac{b}{2}$$

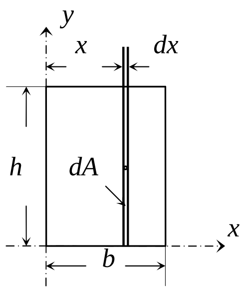
من التعريف لعزم القصور ألضربي نجد أن:

$$I_{xy} = \int x_e y_e dA$$

$$\therefore\ I_{xy} = \int_0^h \frac{b}{2} y * b dy \qquad = \frac{b^2}{2}\int_0^h y dy$$

$$\therefore\ I_{xy} = \frac{b^2}{2} * \frac{y^2}{2}\bigg|_0^h \qquad = \frac{b^2 h^2}{4}$$

وإذا استخدمت شريحة رأسية شكل (6-24) نجد أن:



شكل (6-24)

$$dA = h\,dx \qquad \&$$

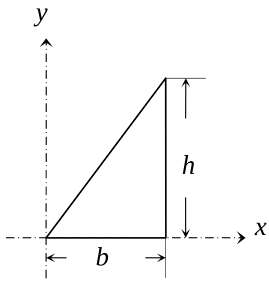
$$y_e = \frac{h}{2} \qquad \& \quad x_e = x$$

$$\therefore\ I_{xy} = \int_0^b \frac{h}{2} x * h dx$$

$$I_{xy} = \frac{h^2}{2}\int_0^b x dx = \frac{h^2}{2}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^b = \frac{b^2h^2}{4}$$

مثال 6-11:

أوجد عزم القصور الذاتي ألضربي للمثلث المبين بالشكل (6-25).



شكل (6-25)

الحل:

معادلة وتر المثلث هي

ص = م س + جـ

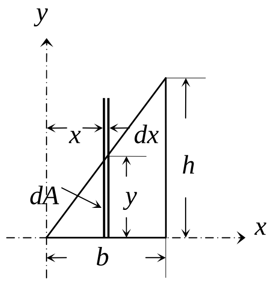
حيث م ميل المستقيم ، جـ الجزء المقطوع من محور الصادات أو

$$y = mx + c$$

ففي هذه الحالة

$$m = \frac{h}{b} \qquad \& \qquad c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{h}{b}x$$

باستخدام شريحة رأسية شكل (6-26) نجد أن:



شكل (6-26)

$$dA = y\,dx$$

$$y_e = \frac{y}{2} \qquad \& \qquad x_e = x$$

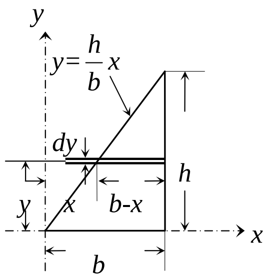
$$I_{xy} = \int x_e y_e dA$$

$$= \int_0^b x\frac{y}{2} * y dx$$

$$= \int_0^b \frac{x}{2} * y^2 dx = \int_0^b \frac{x}{2} * \frac{h^2}{b^2}x^2 dx$$

$$= \frac{h^2}{2b^2} * \frac{x^4}{4}\Big|_0^b = \frac{b^2h^2}{8}$$

وإذا استخدمت شريحة أفقية شكل (27-6) نحصل على:



شكل (27-6)

$$dA = (b-x)dy = (b-\frac{b}{h}y)dy$$

$$x_e = x+\frac{b-x}{2} = \frac{x+b}{2}$$

$$\& \quad y_e = y$$

$$I_{xy} = \int x_e y_e dA = \int_0^h \frac{x+b}{2} * y * \left(b-\frac{b}{h}y\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^h \left(\frac{b}{h}y+b\right)\left(b-\frac{b}{h}y\right)ydy = \frac{1}{2}\int_0^h \left(b^2-\frac{b^2}{h^2}y^2\right)ydy$$

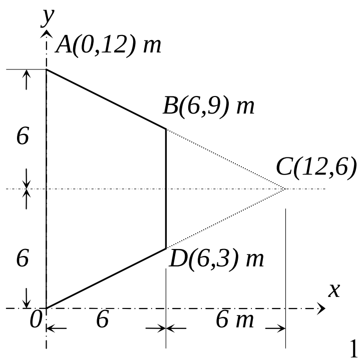
$$= \frac{1}{2}\left(b^2\frac{y^2}{2}-\frac{b^2}{h^2}*\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^h = \frac{1}{2}\left(b^2\frac{h^2}{2}-\frac{b^2}{h^2}*\frac{h^4}{4}\right)$$

$$= \frac{b^2h^2}{8}$$

والنتيجة واحدة باستخدام شريحة رأسية أو أفقية.

مثال6-7-12:

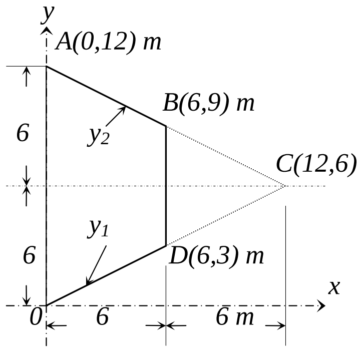
أوجد عزم القصور الذاتي لشبه المنحرف $ABDO$ شكل (28-6) المجاور I_x & I_y وكذلك عزم القصور الذاتي ألضربي I_{xy}.



شكل (28-6)

الحل:

معادلة المستقيم بدلالة الميل هي:



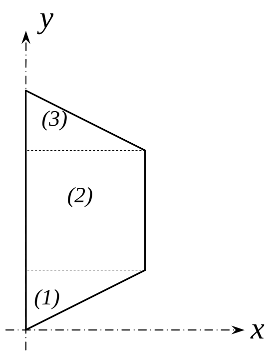
شكل (6-29)

$$y = mx + c$$

حيث m تساوي ميل المستقيم ويساوي ظل الزاوية بين المستقيم ومحور السينات، و c تساوي الجزء المقطوع من محور الصادات من شكل (6-29) نجد أنّ:

$$y_1 = \tfrac{1}{2}\, x \qquad \& \qquad y_2 = 12 - \tfrac{1}{2}\, x$$

باستخدام الأشكال الهندسية شكل (6-30):



شكل (6-30)

$$I_{x1} = I_x + Ad^2$$

$$= \frac{6*3^3}{36} + \frac{6*3}{2}*2^2 \quad = 40.5\ m^4$$

$$I_{x2} = \frac{6*6^3}{12} + 6*6*6^2 \quad = 1404\ m^4$$

$$I_{x3} = \frac{6*3^3}{36} + \frac{6*3}{2}*10^2 \quad = 904.5\ m^4$$

$$I_{x\,Total} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

$$= 40.5 + 1404 + 904.5 \quad = 2349\ m^4$$

$$I_{y1} = I_y + Ad^2$$

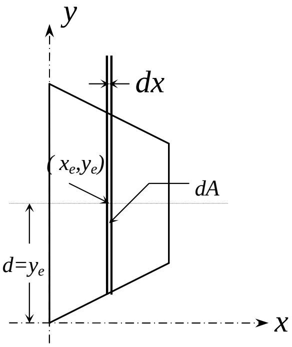
$$= \frac{3*6^3}{36} + \frac{6+3}{2}*2^2 \quad = 54\ m^4$$

$$I_{y2} = \frac{6*6^3}{12} + 6*6*3^2 = 432\ m^4$$

$$I_{y3} = \frac{3*6^3}{36} + \frac{6*3}{2}*2^2 = 54\ m^4$$

$$I_{x\ Total} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

$$I_{y\ Total} = 54 + 432 + 54 = 540\ m^4$$



شكل (31-6)

بطريقة التكامل:

باستخدام شريحة رأسية نجد أن:

$$dA = (y_2 - y_1)dx \ , \quad x_e = x$$

$$\& \quad y_e = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{12 - \frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{2} = 6$$

$$dI_x = \bar{I}_x + A\,y_e^2 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12}dx + (y_2 - y_1)dx * \left(\frac{y_2 + y_1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\left(12 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right)^3}{12}dx + \left(12 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right)dx * \left(\frac{12 - \frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(12 - x)^3}{12}dx + (12 - x)dx * 6^2$$

$$= \left(-\frac{x^3}{12} + 3x^2 - 72x + 576\right)dx$$

$$\therefore \ I_x = \int dI_x = \int_0^6 \left(-\frac{x^3}{12} + 3x^2 - 72x + 576\right)dx$$

$$= \left|\frac{-x^4}{4 \cdot 12} + \frac{3x^3}{3} - \frac{72x^2}{2} + 576x\right|_0^6 = 2349\ m^4$$

$$I_y = \int x_e^2 dA = \int_0^6 x^2 (y_2 - y_1) dx$$

$$= \int_0^6 x^2 \left(12 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^6 (12x^2 - x^3) dx$$

$$= \left| \frac{12x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right|_0^6 = \frac{12 \cdot 6^3}{3} - \frac{6^4}{4} = 540 \ m^4$$

$$I_{xy} = \sum I_{xy} = I_{xy1} + I_{xy2} + I_{xy3}$$

$$= \sum \left(-\frac{b^2 h^2}{72} + A * \overline{x} * \overline{y} \right)$$

$$= \left\{ -\frac{6^2 * 3^2}{72} + \frac{6*3}{2} * 2 * 2 \right\} + \{ 0 + 6*6*3*6 \} + \left\{ -\frac{6^2 * 3^2}{72} + \frac{6*3}{2} * 2 * 10 \right\}$$

$$= \{ -4.5 + 36 \} + \{ 648 \} + \{ -4.5 + 180 \} = 855 \ m^4$$

$$I_{xy} = \int x_e y_e dA = \int_0^6 x * 6 * (12 - x) dx$$

$$= \int_0^6 (72x - 6x^2) dx = \left| 72 \frac{x^2}{2} - 6 \frac{x^3}{3} \right|_0^6 = 864 \ m^4$$

مثال 6-13:

إذا كانت

$$I_{xx} = 10000 \ cm^4, \ I_{yy} = 4000 \ cm^4 \ \& \ I_{xy} = -4000 \ cm^4$$

فأوجد:

1- أقصى وأدنى عزم قصور ذاتي I_{max} , I_{min} وزاوية ميلهما θ_m.

2- عزم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u,v) التي دارت بزاوية مقدارها 45 درجة.

الحل:

للتسهيل نفرض أن:

$$A = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \quad , B = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \quad \& \quad C = I_{xy}$$

لذلك:

$$R = \sqrt{B^2 + C^2}\,, \quad I_{max} = A+R, \;\; I_{min} = A-R \;\; \& \;\; Tan\, 2\theta_m = -\frac{C}{B}$$

$$\therefore \quad A = \frac{10000 + 4000}{2} = 7000\ cm^4$$

$$B = \frac{10000 - 4000}{2} = 3000\ cm^4$$

$$C = -4000\ cm^4$$

$$R = \sqrt{(3000)^2 + (-4000)^2} = 5000\ cm^4$$

$$I_{max} = 7000 + 5000 = 12000\ cm^4$$

$$I_{min} = 7000 - 5000 = 2000\ cm^4$$

$$Tan\, 2\theta_m = -\frac{-4000}{3000} = 1.333$$

$$\therefore \quad 2\theta_m = Tan^{-1}(1.333) = 53.13^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta_m = 26.56^\circ$$

$$I_{uu} = A + B\, Cos2\theta - C\, Sin2\theta$$
$$= 7000 + 3000\, Cos90^\circ - (-4000)\, Sin90^\circ$$
$$= 7000 + 0 + 4000 = 11000\ cm^4$$

$$I_{vv} = A - B\, Cos2\theta + C\, Sin2\theta$$
$$= 7000 - 3000\, Cos90^\circ + (-4000)\, Sin90^\circ$$
$$= 7000 - 4000 = 3000\ cm^4$$

$$I_{uv} = B\, Sin2\theta + C\, Cos2\theta = 3000\, Sin90^\circ + (-4000)\, Cos90^\circ$$
$$= 3000\ cm^4$$

باستخدام دائرة مور نجد أن:

مقياس الرسم: نفرض أن كل وحدة طولية بالرسم تمثل $1000\ cm^4$

من الرسم شكل (6-32) نستنتج أن:

1- $I_{max} = 12\times1000 = 12000\ cm^4$

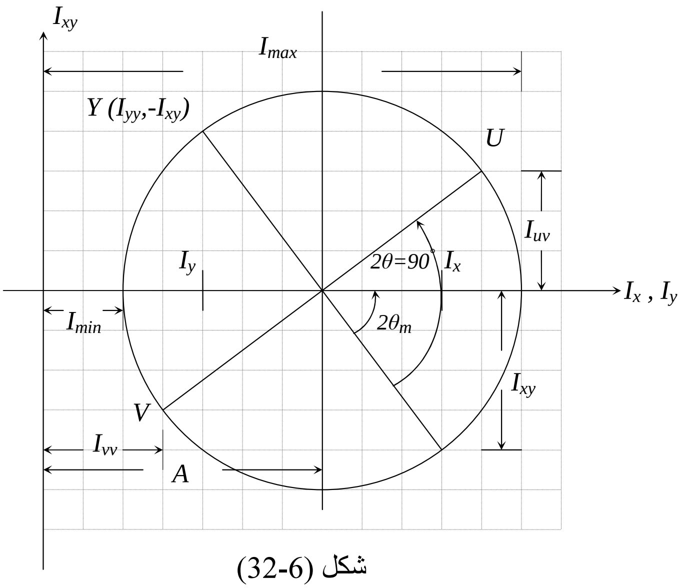
$I_{min} = 2\times1000 = 2000\ cm^4$

$\theta_m \approx 26.5°$

2- $I_{uu} = 11\times1000 = 11000\ cm^4$

$I_{vv} = 3\times1000 = 3000\ cm^4$

$I_{uv} = 3\times1000 = 3000\ cm^4$



شكل (6-32)

~~~~~~~~~~~~~~

مثال 6-14:

إذا كانت $I_{xx} = 8\ m^4$, $I_{yy} = 2\ m^4$ & $I_{xy} = -4\ m^4$

فأوجد:

1- أقصى وأدنى عزم قصور ذاتي I_{max} , I_{min} وزاوية ميلهما θ_m.
~~~~~~~~~~~~~~

2- عزم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & Iuv حول المحاور (u,v) التي دارت بزاوية مقدارها 45 درجة.

الحل:

$$A = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} = \frac{8+2}{2} = 5\ m^4$$

$$B = \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2} = \frac{8-2}{2} = 3\ m^4$$

$$C = I_{xy} = -4\ m^4$$

$$R = \sqrt{B^2+C^2} = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = 5\ m^4$$

$$I_{max} = A+R = 5+5 = 10\ m^2$$

$$I_{min} = A-R = 5-5 = 0$$

$$Tan2\theta_m = -\frac{C}{B} = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$2\ \theta_m = 53.13° \Rightarrow \theta_m = 26.56°$$

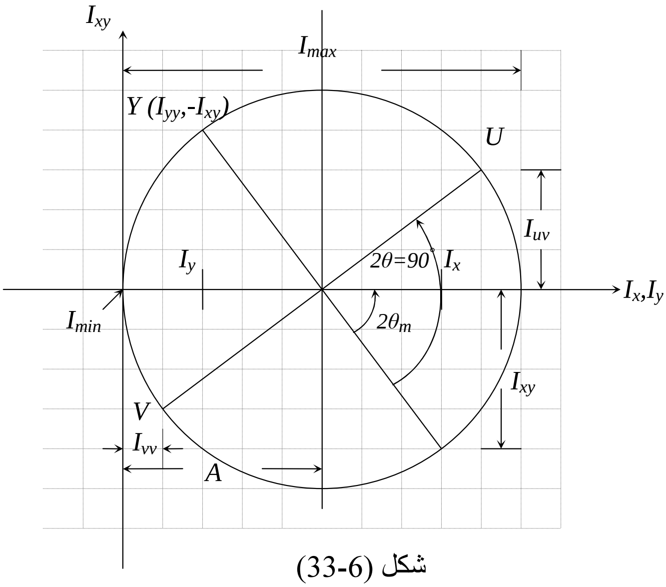
$$I_{uu} = A + B\ Cos2\theta - C\ Sin2\theta$$
$$= 5 + 3\ Cos90^{\circ} - (-4)\ Sin90^{\circ}$$
$$= 5 + 0 + 4 = 9\ m^4$$

$$I_{vv} = A - B\ Cos2\theta + C\ Sin2\theta$$
$$= 5 - 3\ Cos90^{\circ} + (-4)\ Sin90^{\circ}$$
$$= 5 - 4 = 1\ m^4$$

$$I_{uv} = B\ Sin2\theta + C\ Cos2\theta = 3\ Sin90^{\circ} + (-4)\ Cos90^{\circ}$$
$$= 3\ m^4$$

باستخدام دائرة مور شكل (6-33) نجد أن:

مقياس الرسم: نفرض أن كل وحدة طولية بالرسم تمثل $1\ m^4$



شكل (6-33)

من الرسم نستنتج أن:

1- $I_{max} = 10 \times 1 = 10\ m^4$

$I_{min} = 0$

$\theta_m \approx 26.5°$

2- $I_{uu} = 9 \times 1 = 9\ m^4$

$I_{vv} = 3 \times 1000 = 3000\ cm^4$

$I_{uv} = 1 \times 3 = 3\ m^4$

مثال 6-15:

في شكل هندسي كانت $I_{xx} = I_{yy} = 14\times10^4\ cm^4\ \&\ I_{xy} = -12\times10^4\ cm^4$

فأوجد باستخدام دائرة مور:

1- أقصى وأدنى عزم قصور ذاتي I_{max} , I_{min} وزاوية ميلهما θ_m.

2- عزم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & Iuv حول المحاور (u,v) التي دارت بزاوية مقدارها ($\alpha=30°$) درجة.

الحل:

مقياس الرسم: نفرض أن كل وحدة طولية في الرسم تمثل $1\times10^4\ cm^4$

من الرسم شكل (6-34) نستنتج أن:

1- $I_{max} = 26 \times 10^4\ cm^4$

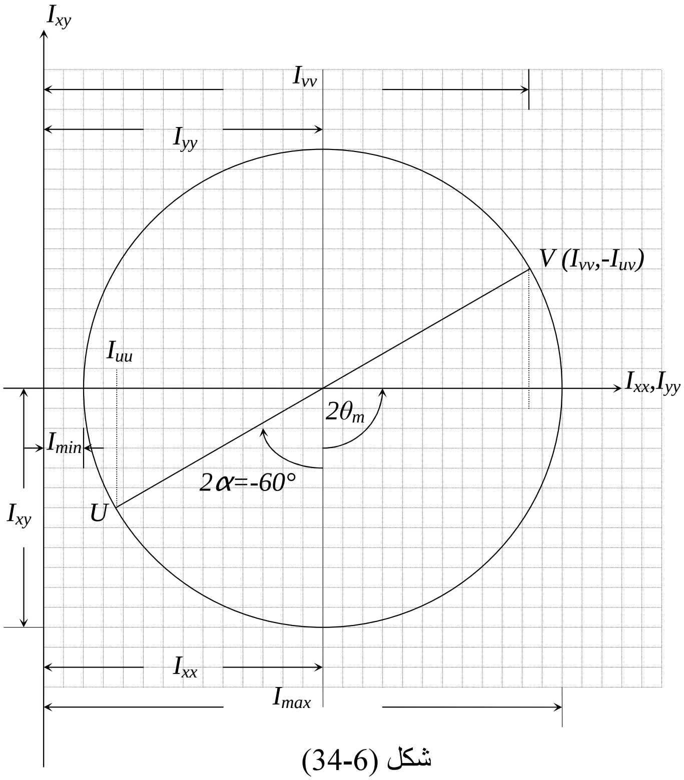
$I_{min} = 2 \times 10^4\ cm4$

$\theta_m \approx 45°$

2- $I_{uu} = 3.6 \times 10^4\ cm^4$

$I_{vv} = 24.4 \times 10^4\ cm^4$

$I_{uv} = -6 \times 10^4\ cm^4$



شكل (6-34)

تحقيق الحل بالحسابات:

$$A = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = \frac{14 + 14}{2} * 10^4 = 14\times10^4 \ cm^4$$

$$B = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} = 0$$

$$C = I_{xy} = -12\times10^4 \ cm^4$$

$$R = \sqrt{B^2 + C^2} = 12\times10^4 \ cm^4$$

$$I_{max} = A+R = 14\times10^4 + 12\times10^4 = 26\times10^4 \ cm^4$$

$$I_{min} = A-R = 14\times10^4 - 12\times10^4 = 2\times10^4 \ cm^4$$

$$Tan2\theta_m = -\frac{C}{B} = \infty \quad \Rightarrow$$

$$2\ \theta_m = 90° \Rightarrow \quad \theta_m = 45°$$

$$I_{uu} = A + B\ Cos2\theta - C\ Sin2\theta$$
$$= 14\times10^4 - (-12\times10^4)\ Sin(-60^{\circ})$$
$$= 14\times10^4 - 10.39\times10^4 = 3.61\times10^4 \ cm^4$$

$$I_{vv} = A - B\ Cos2\theta + C\ Sin2\theta$$
$$= 14\times10^4 + (-12\times10^4)\ Sin(-60^{\circ})$$
$$= 14\times10^4 + 10.39\times10^4 = 24.39\times10^4 \ cm^4$$

$$I_{uv} = B\ Sin2\theta + C\ Cos2\theta = (-12\times10^4)\ Cos(-60^{\circ})$$
$$= -6\times10^4 \ cm^4$$

لاحظ أن إشارة الزاوية موجبة إذا كانت في اتجاه عكس عقارب الساعة (CCW) وتكون سالبة إذا كانت في اتجاه عقارب الساعة (CW).

مثال 6-16:

إذا كانت عزوم القصور الذاتي لشكل ما هي:

$$I_{xx} = 11\ m^4\ , \qquad I_{yy} = 5\ m^4 \qquad \& \qquad I_{xy} = 4\ m^4$$

فأوجد:

أقصى وأدنى عزم قصور ذاتي (I_{max}, I_{min}) وزاوية ميل المحاور الرئيسية. وإذا دارت المحاور (x, y) إلى (u, v) بزاوية قدرها (θ=45°) فأوجد I_{uu}, I_{vv} & I_{uv} بالحساب وتأكد من النتائج باستخدام دائرة مور.

الحل:

$$A = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} = \frac{11+5}{2} = 8\ m^4$$

$$B = \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2} = \frac{11-5}{2} = 3\ m^4$$

$$C = I_{xy} = 4\ m^4$$

$$R = \sqrt{B^2+C^2} = \sqrt{(3)^2+(4)^2} = 5\ m^4$$

$$I_{max} = A+R = 8+5 = 13\ m^2$$

$$I_{min} = A\text{-}R = 8\text{-}5 = 3\ m^4$$

$$Tan2\theta_m = -\frac{C}{B} = -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$2\ \theta_m = -53.13° \Rightarrow \qquad \theta_m = -26.56°$$

$$I_{uu} = A + B\ Cos2\theta - C\ Sin2\theta$$
$$= 8 + 3\ Cos90^{\circ} - 4\ Sin90^{\circ}$$
$$= 8 + 0 - 4 = 4\ m^4$$

$$I_{vv} = A - B\ Cos2\theta + C\ Sin2\theta$$
$$= 8 - 3\ Cos90^{\circ} + 4\ Sin90^{\circ} = 8 + 4 = 12\ m^4$$

$$I_{uv} = B\ Sin2\theta + C\ Cos2\theta$$
$$= 3\ Sin90^{\circ} + 4\ Cos90^{\circ} \quad = 3\ m^4$$

تحقيق باستخدام دائرة مور شكل (6-35):

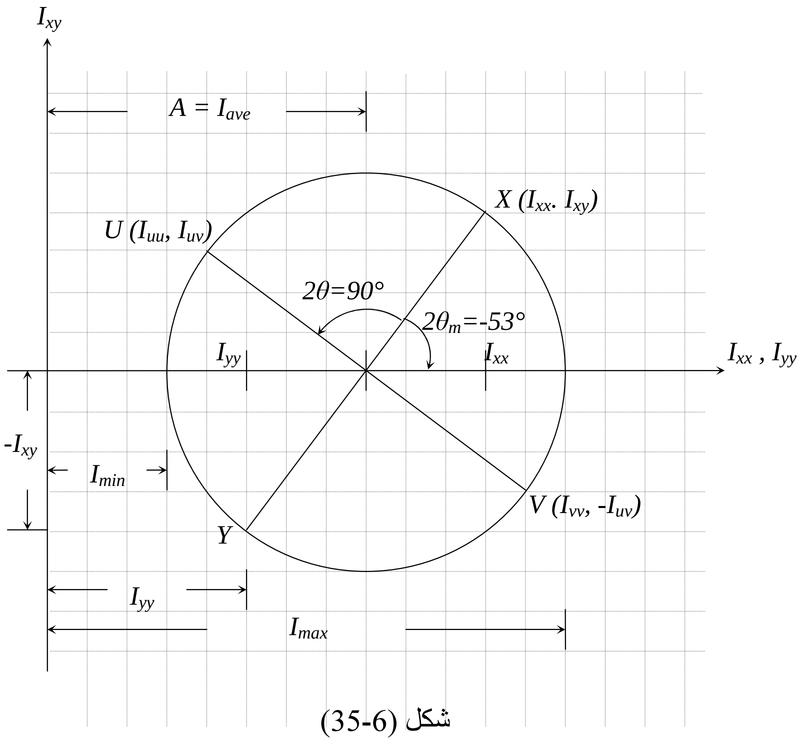
مقياس الرسم: نفرض أن كل وحدة طولية تمثل $1\ m^4$.

من الرسم نستنتج أن:

$I_{max} = 13\ m^4$, $I_{min} = 3\ m^4$

$Tan(2\theta_m) \approx -53°$ $\theta_m \approx -26.5°$

$I_{uu} = 4\ m^4$, $I_{vv} = 12\ m4$ & $I_{uv} = 3\ m^4$



شكل (6-35)

مثال 6-17:

إذا كانت $I_{xx} = 4000\ cm^4$, $I_{yy} = 800\ cm^4$ & $I_{xy} = 1200\ cm^4$

فأوجد:

1- أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m باستخدام دائرة مور.

2- عزوم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u , v) التي دارت بزاوية قدرها $(\alpha = 45°)$.

الحل:

مقياس الرسم:

مقياس الرسم: نفرض أن كل وحدة طولية تمثل $400\ cm^4$.

من الرسم شكل (6-36) نجد أن:

$$I_{max} = 11\times400 = 4400\ cm^4$$

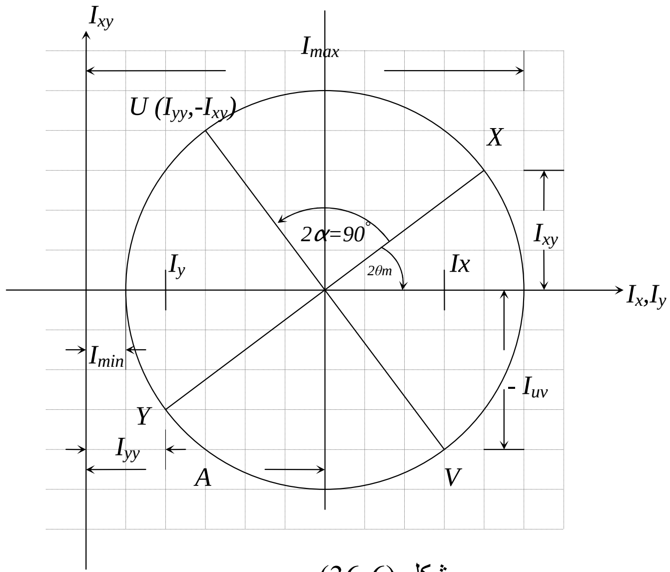
$$I_{min} = 1\times400 = 400\ cm^4$$

$$2\theta_m \approx -37° \Rightarrow \theta_m = -18.5°$$

$$I_{uu} = 3\times400 = 1200\ cm^4$$

$$I_{vv} = 9\times400 = 3600\ cm^4$$

$$I_{uv} = 4\times400 = 1600\ cm^4$$



شكل (6-36)

مثال 6-18:

إذا كانت $I_{xx} = 60000\ cm^4$, $I_{yy} = 10000\ cm^4$ & $I_{xy} = 0$

فأوجد:

1- أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m باستخدام دائرة مور.

2- عزوم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u , v) التي دارت بزاوية α بحيث كان $(Tan 2\alpha = ¾)$

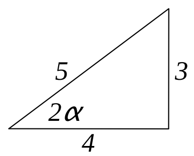
الحل:

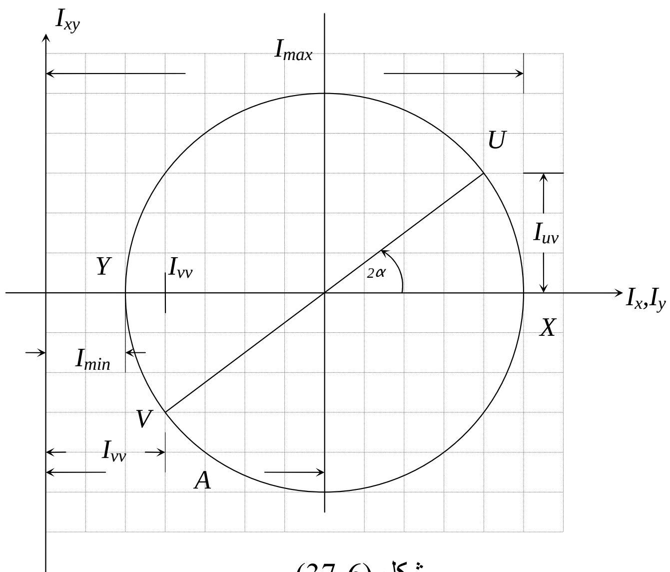
في هذا المثال يجب ملاحظة أن القيم المعطاة لعزوم القصور الذاتي الأساسية حيث أن قيمة العزم ألضربي تساوي صفر.

مقياس الرسم: نفرض أن كل وحدة طولية تمثل $5000\ cm^4$.

من الرسم شكل (6-37) نجد أن:

$$I_{max} = 12 \times 5000 = 60000\ cm^4$$
$$I_{min} = 2 \times 5000 = 10000\ cm^4$$
$$\theta_m = 0$$
$$I_{uu} = 11 \times 5000 = 55000\ cm^4$$
$$I_{vv} = 3 \times 5000 = 15000\ cm^4$$
$$I_{uv} = 3 \times 5000 = 15000\ cm^4$$





شكل (6-37)

التحقيق الحسابي للحل:

$$A = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} = \frac{60000+10000}{2} = 35000\ cm^4$$

$$B = \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2} = \frac{60000-10000}{2} = 25000\ cm^4$$

$$C = I_{xy} = 0$$

$$R = \sqrt{B^2+C^2} = 25000\ cm^4$$

$$I_{max} = A+R = 35000+25000 = 60000\ cm^4 = I_{xx}$$

$$I_{min} = A-R = 35000-25000 = 10000\ cm^4 = I_{yy}$$

$$Tan2\theta_m = -\frac{C}{B} = 0 \Rightarrow 2\,\theta_m = 0 \Rightarrow \theta_m = 0$$

$$I_{uu} = A + B\ Cos2\theta - C\ Sin2\theta$$

$$= 350000 + 25000(\frac{4}{5}) = 55000\ cm^4$$

$$I_{vv} = A - B\ Cos2\theta + C\ Sin2\theta$$

$$= 350000 - 25000(\frac{4}{5}) = 15000\ cm^4$$

$$I_{uv} = B\ Sin2\theta + C\ Cos2\theta = 25000(\frac{3}{5}) = 15000\ cm^4$$

~~~~~~~~~~~~~~

مثال 6-19:

إذا كانت $I_{xx} = 12000\ cm^4\ ,\ I_{yy} = 4000\ cm^4\ \&\ I_{xy} = -3000\ cm^4$

فأوجد:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m باستخدام دائرة مور.
~~~~~~~~~~~~~~

2 - عـزوم القـصور الـذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حـول المحـاور $(u, \ v)$ التــي دارت بزاوية$(\alpha=45°)$.

الحل:

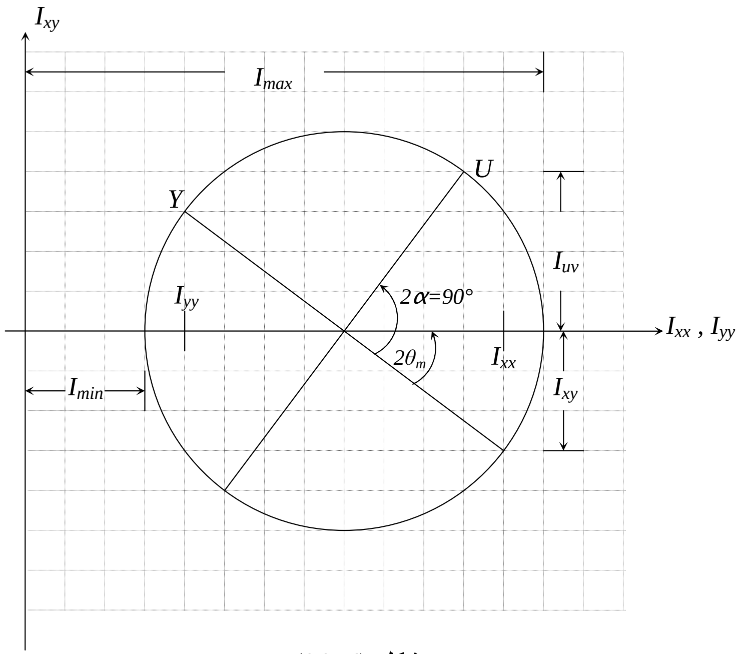
مقياس الرسم $1 \equiv 1000\ cm^4$

من الرسم شكل (6-38) نجد أن:

$$I_{max} = 13\times1000 = 13000\ cm^4$$
$$I_{min} = 3\times1000 = 3000\ cm^4$$

$$2\theta_m = 37° \quad \Rightarrow \quad \theta_m = 18.5°$$

$$I_{uu} = 11\times1000 = 11000\ cm^4$$
$$I_{vv} = 5\times1000 = 5000\ cm^4$$
$$I_{uv} = 4\times1000 = 4000\ cm^4$$



شكل (6-38)

تحقيق الحل حسابيا:

$$A = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} = \frac{12000+4000}{2} = 8000\ \ cm^4$$

$$B = \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2} = \frac{12000-4000}{2} = 4000\ cm^4$$

$$C = I_{xy} = -3000\ cm^4$$

$$R = \sqrt{B^2+C^2} = \sqrt{(4000)^2+(-3000)^2} = 5000\ cm^4$$

$$I_{max} = A+R = 8000+5000 = 13000\ cm^4$$

$$I_{min} = A\text{-}R = 8000 - 5000 = 3000\ cm^4$$

$$Tan2\theta_m = \frac{C}{B} = -\frac{-3000}{4000} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow$$

$$2\ \theta_m = 37° \quad \Rightarrow \quad \theta_m = 18.5°$$

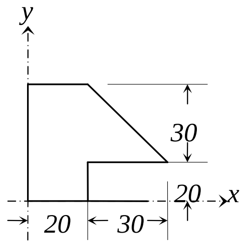
$$I_{uu} = A + B\ Cos2\theta - C\ Sin2\theta$$
$$= 8000 + 4000\ Cos90^{\circ} - 3000\ Sin90^{\circ}$$
$$= 8000 + 0 + 3000 \quad = 11000\ cm^4$$

$$I_{vv} = A - B\ Cos2\theta + C\ Sin2\theta$$
$$= 8000 - 4000\ Cos90^{\circ} - 3000\ Sin90^{\circ}$$
$$= 8000 - 3000 \quad = 5000\ cm^4$$

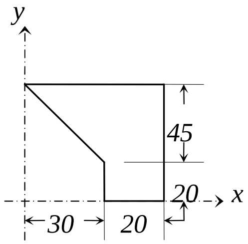
$$I_{uv} = B\ Sin2\theta + C\ Cos2\theta \quad = 4000\ Sin90^{\circ} - 3000\ Cos90^{\circ}$$
$$= 4000\ cm^4$$

تمارين

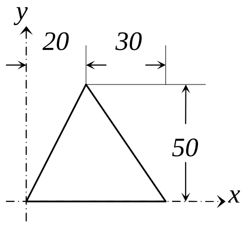
1-6 للشكل (6-39) إلى شكل (6-50) التالية أوجد العزم الثاني للمساحة وكذلك العزم الثاني ألضربي حول المحاور المارة بمركز الثقل $\bar{I}_{xx}, \bar{I}_{yy}\ \&\ \bar{I}_{xy}$ والمحاور $(x\,,y)$ $I_{xx}, I_{yy}\ \&\ I_{xy}$.



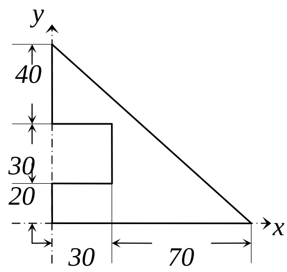
شكل (6-39)



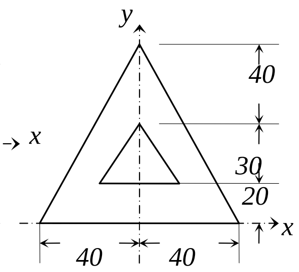
شكل (6-40)



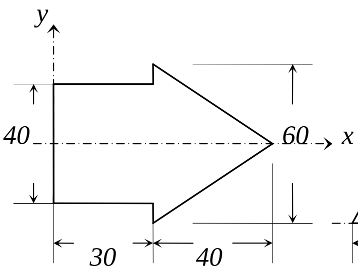
شكل (6-41)



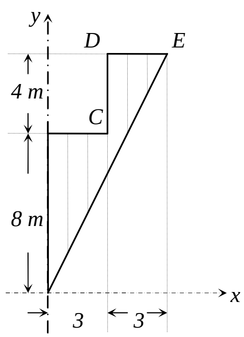
شكل (6-42)



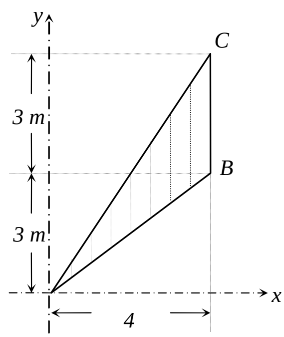
شكل (6-43)



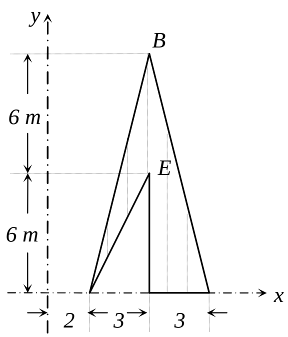
شكل (6-44)



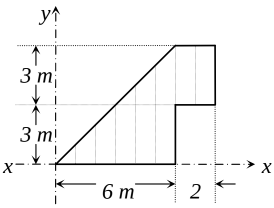
شكل (6-45)



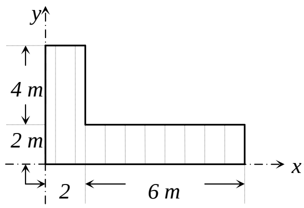
شكل (6-46)



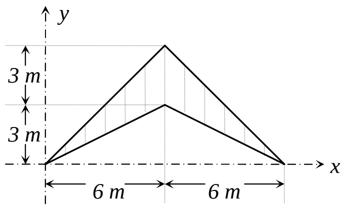
شكل (6-47)



شكل (48-6)



شكل (49-6)



شكل (50-6)

2-6 إذا كانت $I_{xx} = 12\ m^4$, $I_{yy} = 4\ m^4$ & $I_{xy} = -3\ m^4$ فأوجد:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m باستخدام دائرة مور.

2 - عـزوم القـصور الـذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حـول المحـاور (u , v) التـى دارت بزاوية(α=45°).

3 – تأكد من الحل حسابيا.

3-6 إذا كانت $I_{xx} = I_{yy} = 14\times10^4\ cm^4$ & $I_{xy} = -12\times10^4\ cm^4$ فأوجد بيانيا وتحليليا:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m.

2 - عزوم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u , v) التى دارت بزاوية (α=-30°).

4-6 إذا كانت $I_{xx} = 11\ m^4$, $I_{yy} = 5\ m^4$ & $I_{xy} = 4\ m^4$ فأوجد:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m باستخدام دائرة مور.

2 - عـزوم القـصور الـذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حـول المحـاور (u , v) التـى دارت بزاوية(α=45°).

3 – تأكد من الحل حسابيا.

5-6 إذا كانت $I_{xx} = 100\ m^4$, $I_{yy} = 100\ m^4$ & $I_{xy} = 50\ m^4$ فأوجد:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m باستخدام دائرة مور.

2 - عزوم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u , v) التي دارت بزاوية بحيث كانت $\left(\frac{4}{3}\right)$ $\alpha=\frac{1}{2}Tan^{-1}$.

3 – تأكد من الحل حسابيا.

6-6 إذا كانت $I_{xx} = 90\ m^4$, $I_{yy} = 30\ m^4$ & $I_{xy} = -40\ m^4$ فأوجد:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m.

2 - عزوم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u , v) التي دارت بزاوية قدرها $\theta = 45°$.

3 – تأكد من الحل حسابيا بعد الحل باستخدام دائرة مور.

7-6 إذا كانت $I_{xx} = 12\ m^4$, $I_{yy} = 4\ m^4$ & $I_{xy} = -3\ m^4$ فأوجد:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m.

2 - عزوم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u , v) التي دارت بزاوية قدرها $\theta = 45°$.

3 – تأكد من الحل حسابيا بعد الحل باستخدام دائرة مور.

8-6 شكل هندسي فيه $I_{xx} = 11\ m^4$, $I_{yy} = I_{xy} = 3\ m^4$ فأوجد تحليليا وبيانيا:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميل المحاور θ_m.

2 - عزوم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u , v) التي دارت بزاوية قدرها $\theta = 45°$ حول المحور xx.

9-6 إذا كانت $I_{xx} = 14\times10^4\ cm^4$, $I_{yy} = 6\times10^4\ cm^4$ & $I_{xy} = -5\times10^4\ cm^4$ فأوجد بيانيا وتحليليا:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m.

2 - عزوم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u , v) التي دارت بزاوية $(\alpha=-30°)$.

10-6 شكل هندسي فيه $I_{xx} = I_{yy} = 10\ m^4$ & $I_{xy} = 5\ m^4$ فأوجد:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m.

2 - عزوم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u , v) التى دارت بزاوية قدرها $\theta = 45°$.

3 – تأكد من الحل حسابيا بعد الحل باستخدام دائرة مور.

11-6 إذا كانت $I_{xx} = 11\ m^4$, $I_{yy} = 3\ m^4$ & $I_{xy} = -3\ m^4$ فأوجد:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m باستخدام دائرة مور.

2 - عزوم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u , v) التى دارت بزاوية(α=45°).

3 - تأكد من الحل حسابيا.

12-8-6 إذا كانت $I_{xx} = 1000\ cm^4$, $I_{yy} = 400\ cm^4$ & $I_{xy} = -400\ cm^4$ فأوجد:

1 - أقصى وأدنى عزم قصور ذاتي I_{max} , I_{min} وزاوية ميلهما θ_m.

2 - عزم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u,v) التي دارت بزاوية مقدارها 45 درجة.