

# الباب السابع

## الاحتكاك

### 1-7 تمهيد

إذا أثر مستويان على بعضيهما وكان أحدهما أو كليهما أملس فإن القوة الناتجة عن هذا التأثير يكون اتجاهها عموديا على المستوى الأملس. أما إذا كان المستويان خشنان فإن قوة مقاومة للحركة تتولد بينهما، وهذه القوة تعرف بقوة الاحتكاك. ويصطلح بأن قوة الاحتكاك معدومة للمستويات الملساء حيث يكاد أن ينعدم وجود مستو أملس تماما. وهذه القوة المقاومة للحركة أو الاحتكاك تكون مماسية للمستويين وفي اتجاه عكسي للحركة.

مقدار قوة الاحتكاك هذه عادة لا يمكنها منع حركة الأجسام على بعضها طالما أن القوة في الأجسام المتحركة كبيرة. وللاحتكاك أهمية بالغة للحالات الهندسية كما سيُوضح لاحقا. هناك نوعان من الاحتكاك، أحدهما يعرف بالاحتكاك الجاف والآخر بالاحتكاك المائع. يحدث الاحتكاك المائع بين طبقات الموائع عند حركتها نسبة إلى بعضها بسرعات مختلفة. ويعد الاحتكاك المائع من الأهمية بمكان في المسائل ذات العلاقة بحركة السوائل في الأنابيب وعند الفتحات وكذلك أثره على الأجسام المتحركة والغازية في السوائل. ودراسة الاحتكاك يعتبر من الأساسيات لتحليل حركة الأجزاء المشحمة. هذه المواضيع تتناولها كتب هندسة الموائع بالتفصيل وفي هذا الكتاب سنتناول بعض حالات الاحتكاك الجاف ذات الأهمية في الأمور والتطبيقات الهندسية.

في الجزء الأول من هذا الباب سنتناول بالتحليل اتزان المنشآت والأجسام الصلبة بافتراض أن الاحتكاك من النوع الجاف أو الخشن بين مستويات تلاقى الأجسام. وفي الجزء الباقي نتناول بعض التطبيقات المحددة حيث يكون للاحتكاك دور مهم. من هذه التطبيقات السيور وما يعرف بالقلووظ المربّعة وغيرها.

### 2-7 قوانين الاحتكاك الجاف و معامل الاحتكاك

التجربة التالية توضّح وتسهّل فهم قوانين الاحتكاك.

إذا وضع ثقل وزنه  $W$  على مستو أفقي فرد الفعل للمستوى  $N$  يكون رأسيا ومساويا لوزن الثقل شكل (1-7-أ). افرض أن قوة أفقية أثرت على الثقل شكل (1-7-ب) وكانت هذه القوة صغيرة فلا تحدث حركة للثقل، وعليه فإن قوة أفقية أخرى أصبحت متواجدة حتى يتعادل ويحقق الاتزان في

الاتجاه الأفقي. هذه القوة الأفقية هي قوة الاحتكاك الاستاتيكي  $F$ . وقوة الاحتكاك هذه محصلة مجموعة من القوى والعوامل المؤثرة على سطح التماس بين المستوى والنقل.

هذه القوى ربما تكون بسبب عدم انتظام أسطح التماس والتجاذب الجزيئي بينها.

إذا زادت القوة  $P$  زادت قوة الاحتكاك

$F$  مضادة للقوة  $P$  إلى أن يصل مقدارها قيمته

القصى  $F_m$  (1-7-ج). وإذا زادت قيمة  $P$  بعدها

فلا يمكن لقوة الاحتكاك من التعادل معها ويبدأ

النقل في الانزلاق. في حالة أن النقل بدأ في الحركة

تنخفض قيمة قوة الاحتكاك قليلا من  $F_m$  إلى  $F_k$

ويحدث هذا بسبب نقص الترابط بين السطحين

وعدم انتظامهما عند حركة أحدهما نسبة للآخر.

بعدها يستمر النقل في الانزلاق بسرعة متزايدة

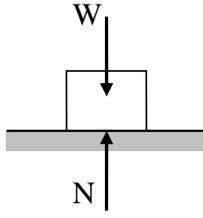
في حين أن قوة تبقى قوة الاحتكاك  $F_k$ ، وتسمى

قوة طاقة الاحتكاك، شبه ثابتة.

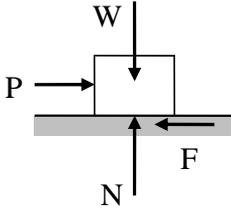
أثبتت التجارب أن القيمة القصوى للقوة

$F_m$  لقوة الاحتكاك الاستاتيكي تتناسب مع قوة

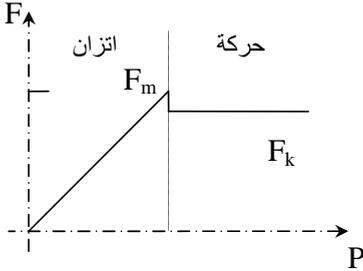
رد الفعل الراسية  $N$  للمستوى. عليه



(أ)



(ب)



(ج)

شكل (1-7)

$$F_m = \mu_s N \quad (1-8)$$

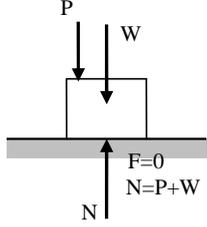
حيث  $\mu_s$  ثابت يسمى معامل الاحتكاك الاستاتيكي.

وبالمثل يمكن التعبير عن مقدار قوة طاقة الاحتكاك

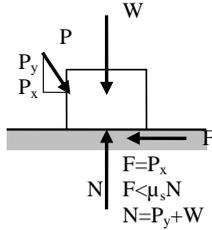
$F_k$  كما يلي:

$$F_k = \mu_k N \quad (1-8)$$

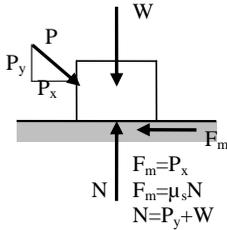
ويسمى  $\mu_k$  معامل طاقة الاحتكاك. ويلاحظ أن معاملات الاحتكاك لا تعتمد على مساحة سطح الاحتكاك وإنما تعتمد أساسا على طبيعة وخواص وحالة هذه الأسطح. ويوضح الجدول (1-8) التالي قيم لبعض هذه الثوابت.



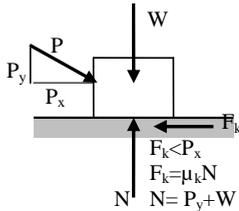
(أ) ليس هناك احتكاك ( $P_x=0$ )



(ب) ليس هناك حركة ( $P_x < F_m$ )



(ج) الحركة على وشك الحدوث ( $P_x = F_m$ )



(د) هناك حركة ( $P_x > F_m$ )

شكل (3-7)

جدول (1-8) قيم تقريبية لثوابت الاحتكاك الاستاتيكي للأسطح الجافة

0.60-0.15	معادن على معادن
0.60-0.20	معادن على خشب
0.70-0.30	معادن على حجر
0.60-0.30	معادن على جلد
0.50-0.25	خشب على خشب
0.50-0.25	خشب على جلد
0.70-0.40	حجر على حجر
1.00-0.20	تربة على تربة
0.90-0.60	مطاط على خرسانة

يتضح مما سبق أن أربعة حالات يمكن

حدوثها عند تلامس جسم صلب مع سطح أفقي:

1- عدم مقدرة القوة على تحريك الجسم على

السطح وبالتالي عدم وجود قوة احتكاك

شكل (2-7-أ).

2- قدرة القوة المؤثرة على تحريك الجسم

على السطح ولكنها لا تستطيع إحداث

حركة للجسم. ويمكن إيجاد قوة الاحتكاك

الناتجة من اتزان الجسم. وحيث أنه لا

ليس هناك ما يدل على الوصول إلى

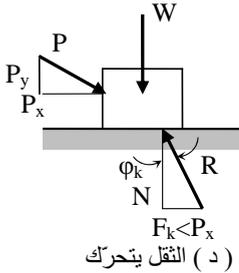
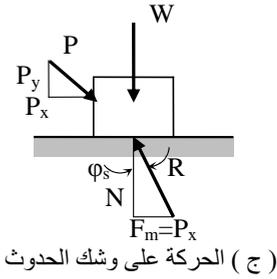
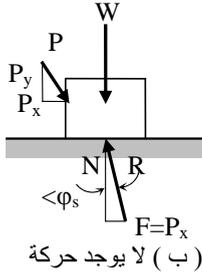
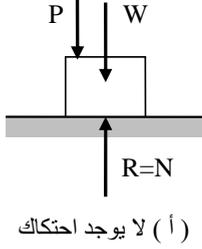
القيمة القصوى لقوة الاحتكاك الاستاتيكي

فالمعادلة  $F_m = \mu_s N$  لا يمكن استخدامها

لتحديد قوة الاحتكاك شكل (2-7-ب).

3- مقدار القوة يجعل الجسم على وشك الحركة.

أو الحركة واقعة لا محالة. عندها تكون قوة الاحتكاك  $F$  وصلت ذروتها  $F_m$  وتعاود مع القوة الرأسية  $N$  ائزان القوى المؤثرة. في هذه الحالة معادلتى الاتزان وكذلك المعادلة  $F_m = \mu_s N$  يمكن استخدامها. يلاحظ أن اتجاه قوة الاحتكاك عكس الاتجاه المتوقع للحركة شكل (7-2-ج).



شكل (3-7)

- 4- الجسم ينزلق بسبب تأثير القوى المستخدمة  
5- ومعادلات الاتزان لم تعد صالحة للتطبيق.  
فإذا كانت  $F$  تساوي قوة طاقة الاحتكاك  $F_k$   
فيمكن تطبيق المعادلة  $F_k = \mu_k N$ . واتجاه  
 $F_k$  يكون عكس اتجاه الحركة شكل (7-2-د).

### 3-7 زاوية الاحتكاك

يمكن استبدال القوة الرأسية  $N$  وقوة الاحتكاك  $F$  بمحصلتيهما  $R$ . فإذا افترضنا أن الثقل  $W$  موضوع على مستوى أفقي ولم يؤثر على هذا الثقل أي قوة أفقية فإن  $R$  تتوول إلى القوة الرأسية  $N$  شكل (7-3-أ). وعندما يكون للقوة  $P$  مركبة أفقية  $P_x$  والتي يمكن أن تزيح الثقل فالقوة  $R$  سيكون لها مركبة أفقية  $F$  وعندها سينتج أن هناك زاوية بين  $R$  والاتجاه الرأسى شكل (7-3-ب). إذا زادت قيمة  $P$  إلى أن تصبح الحركة على وشك الوقوع فالزاوية بين  $R$  والاتجاه الرأسى تزيد إلى أن تصل إلى أقصى قيمة لها شكل (7-3-ج). هذه القيمة تسمى زاوية الاحتكاك الاستاتيكي ويرمز لها بالرمز  $\phi_s$ . ونجد من الشكل (7-3-ج) أن:

$$\tan \phi_s = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_s N}{N}$$

$$\tan \phi_s = \mu_s \quad (3-7)$$

إذا بدأ التقل في الحركة فقيمة قوة الاحتكاك تنقص إلى  $F_k$  وكذلك قيمة زاوية الاحتكاك إلى  $\phi_k$  حيث تسمى زاوية طاقة الاحتكاك شكل (7-3-د). ومن هذا الشكل نجد أن:

$$\tan \phi_k = \frac{F_k}{N} = \frac{\mu_k N}{N}$$

$$\tan \phi_k = \mu_k \quad (4-7)$$

ويمكن الوصول إلى نفس النتائج إذا استعمل مستو غيرت زاوية ميله من الصفر إلى أي زاوية  $\theta$ .

#### 4-7 بعض حالات الاحتكاك الجاف أو الناشف

كثير من الحالات والمسائل في التطبيقات الهندسية يكون لها علاقة بالاحتكاك الجاف أو الاحتكاك الناشف مثل حالات الخوابير والمسامير والقلاووظ والسيور. وطرق التحليل واستنتاج القوى المؤثرة والنتيجة عن تأثير الأجسام المختلفة على بعضها تستعمل قوانين الاتزان التي طبقت في الأبواب السابقة لتحليل الجسيمات والأجسام الصلبة والمنشآت.

#### أمثلة

##### مثال (1-7):

جسم وزنه 300 نيوتن على مستوى مانل أثرت عليه قوة موازية للمستوى كما هو موضح بالشكل مقدارها 100 نيوتن.

فإذا كانت معاملات الاحتكاك بين الجسم

والمستوى هي  $\mu_s = 0.25$  &  $\mu_k = 0.20$

فوضّح ما إذا كان الجسم في حالة اتزان

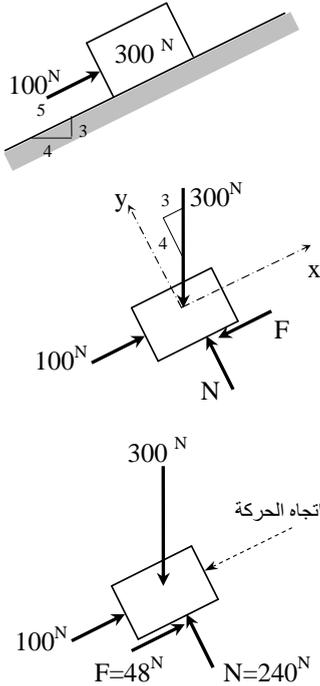
وأوجد قيمة قوة الاحتكاك.

#### الحل:

القوة اللازمة للاتزان: بتحديد قيمة قوة

الاحتكاك اللازمة للاتزان أولاً نجد أنه

يفرض أن اتجاه  $F$  إلى أسفل المستوى



نحصل على:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow 100 - \frac{3}{5}(300) - F = 0 \\ &\Rightarrow F = -80^N \Rightarrow F = 80^N \nearrow \\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow N - \frac{4}{5}(300) = 0 \\ &\Rightarrow N = +240^N \Rightarrow N = 240^N \searrow\end{aligned}$$

مقدار القوة F اللازمة للحصول على الاتزان 80 نيوتن موازية للمستوى وفي الاتجاه إلى الأعلى، وحركة الجسم ستكون منحدره إلى الأسفل.

القوة العظمى للاحتكاك: قيمة القوة العظمى المتولدة للاحتكاك هي:

$$F_m = \mu_s N \Rightarrow F_m = 0.25(240) = 60^N$$

وحيث أن القوة اللازمة للاتزان هي 80 نيوتن وهي أكبر فالالاتزان لا يمكن حدوثه والجسم سينزلق على المستوى إلى الأسفل.

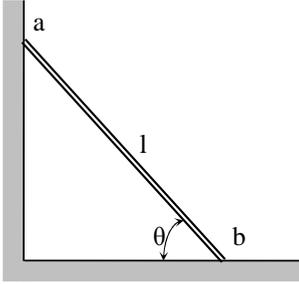
القيمة الفعلية للاحتكاك: يمكن تحديد القيمة الفعلية للاحتكاك كما يلي:

$$\begin{aligned}F_{\text{الفعلية}} = F_k &= \mu_k N \\ &= 0.20(240) = 48^N\end{aligned}$$

ويكون اتجاهها عكس اتجاه الحركة أي أنها إلى أعلى. ويجدر ملاحظة أن القوى المؤثرة على الجسم ليست في حالة اتزان ومقدار المحصلة هو:

$$\frac{3}{5}(300) - 100 - 48 = 32^N$$

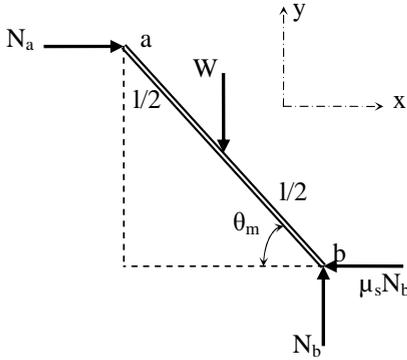
## مثال (2-7):



سلم طوله  $l$  يرتكز على حائط أملس وميل على الأرض بزاوية  $\theta$ . فإذا كان وزن السلم  $W$  ومعامل الاحتكاك بين السلم والأرض  $\mu_s$  فأوجد قيمة الزاوية  $\theta$  التي يكون فيها السلم على وشك الانزلاق.

### الحل:

يوضح شكل (4-7) بياني الحسم الحر للسلم. وحيث أن الحائط أملس ففرد الفعل عنده يكون عموديا على مستواه وهو  $N_a$ . بفرض أن الحركة على وشك الحدوث فإن قيمة قوة الاحتكاك من الأرض على أسفل السلم تكون لها النهاية العظمى الممكنة  $\mu_s N$ . والزاوية  $\theta_m$  هي الزاوية المناظرة للزاوية  $\theta$ . شروط الاتزان هي:



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_a - \mu_s N = 0 \quad (5-7)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -W + N_b = 0 \quad (6-7)$$

$$\Sigma M @ b = 0 \Rightarrow N_a(l \sin \theta_m) - W(l/2 \cos \theta_m) = 0 \quad (7-7)$$

بحل هذه المعادلات الثلاثة نجد أن:

$$N_a = \mu_s W \quad (8-7)$$

$$N_b = W \quad (9-7)$$

بالتعويض من المعادلتين (8-7)، (9-7) في المعادلة (7-7) فإن القيمة النهائية للزاوية التي تناظر الحالة عندما تكون الحركة على وشك الحدوث هي:

$$\tan \theta_m = \frac{1}{2\mu_s} \quad (10-7)$$

$\theta_m$  في المعادلة (10-7) هي النهاية الصغرى. والسلم سيكون في حالة اتزان استاتيكي لأي زاوية أكبر من هذه القيمة. وفي هذه الحالة تؤخذ قوة الاحتكاك من:

$$F = N_a \quad (11-7)$$

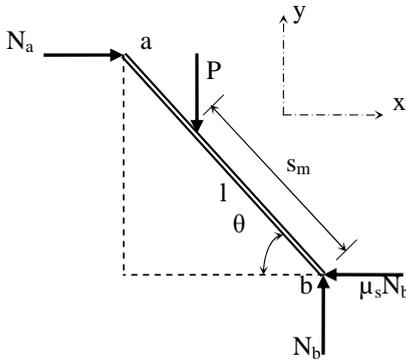
وبالتعويض بهذه النتيجة في المعادلة (7-7) نحصل على:

$$F = \frac{W}{2 \tan \theta} \quad (12-7)$$

وحيث أن  $\theta > \theta_m$  فإن  $\tan \theta > \tan \theta_m$  وبالتالي  $F < F_{\max}$ .

### مثال (3-7):

إذا صعد على السلم في المثال السابق شخص وزنه  $P$  وإهمال وزن السلم لصغر قيمته مقارنة بوزن الشخص فما هو أقصى مكان أعلى السلم،  $s_m$  كما هو موضح في الشكل (5-7)، يمكن للشخص أن يصعده قبل أن يكون السلم على وشك الانزلاق.



شكل (5-7)

### الحل:

من البياني للجسم الحر للشخص والسلم الموضح في الشكل (5-7) ومن الفرضية أن حركة السلم وشبكة الوقوع فان قوة الاحتكاك عند الطرف  $b$  تكون في نهايتها العظمى الممكنة  $\mu_s N_b$ . ومع معرفة الزاوية  $\theta$  ومن شروط الاتزان نجد أن:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_a - \mu_s N_b = 0 \quad (13-7)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -P + N_b = 0 \quad (14-7)$$

$$\Sigma M @ b = 0 \quad \Rightarrow \quad N_a(l \sin \theta) - P(s_m \cos \theta) = 0 \quad (15-7)$$

بحل هذه المعادلات الثلاثة نجد أن:

$$N_a = \mu_s P \quad (16-7)$$

$$N_b = P \quad (17-7)$$

$$s_m = \mu l \tan \theta \quad (18-7)$$

قيمة  $s_m$  في هذه المعادلة هي القيمة العظمى. وسيكون السلم في حالة اتزان استاتيكي لقيم  $s$  التي أقل من  $s_m$ .

إذا ظل السلم في توازن استاتيكي لأي موضع للشخص عليه فإن القيمة النهائية  $s_m$  يجب أن تحقق المتباينة:

$$\frac{s_m}{l} > 1 \quad \Rightarrow \quad s_m > l \quad (19-7)$$

وتفسير هذه النتيجة هو أن الموضع النهائي للشخص عند موقع أكبر من طول السلم الفعلي  $l$ . وباستخدام المعادلة الأخيرة فإن هذه المتباينة تظهر في الصورة:

$$\frac{s_m}{l} > \mu_s l \tan \theta > 1 \quad (20-7)$$

وعلى ذلك فإذا كان السلم لا ينزلق لأي موضع للشخص عليه فإن معامل الاحتكاك بين السلم والأرض يجب أن يحقق المتباينة:

$$\mu_s > \frac{1}{\tan \theta} \quad (21-7)$$

### مثال (4-7):

إذا كان معامل الاحتكاك بين الأرض والسلم في المثال السابق هو 0.45 فما هي النهاية الصغرى لقيمة الزاوية  $\theta_m$  للسلم بالنسبة إلى الأرض إذا كان يجب أن يظل السلم في توازن لأي موضع للشخص.

### الحل:

باستخدام المعادلة (22-7) التالية نحصل على:

$$\mu_s > \frac{1}{\tan \theta_m} \quad (22-7)$$

$$0.45 > \frac{1}{\tan \theta_m} \quad (23-7)$$

$$\Rightarrow \tan \theta_m > \frac{1}{0.45} = 2.22$$

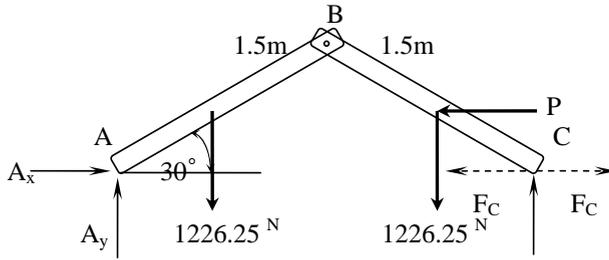
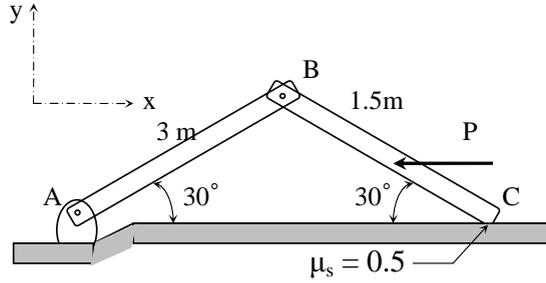
$$\Rightarrow \theta_m > 65.8^\circ \quad (24-7)$$

أي أن السلم يكون مستقرا لأي موضع للشخص عليه إذا كان يصنع مع الأرض زاوية أكبر من أو تساوي  $65.8^\circ$ .

### مثال (5-7):

يوضح الشكل (6-7) جملون أو إطار معرض لقوة مقدارها  $P$ . والمطلوب تحديد أقل وأكبر قيمة للقوة  $P$  والتي يكون عندها الجملون في حالة اتزان استاتيكي علما أن كل من الأعضاء  $AB$  ،  $AC$  متماثلة وكتلة كل منها  $125 \text{ kg}$  وأن قيمة معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين العضو  $BC$  والسطح عند  $C$  هي  $\mu_s = 0.5$ .

الحل:



شكل (6-7)

فهم من مضمون السؤال أن الحركة على وشك الحدوث. وإيجاد أقل وأكبر قيمة للقوة  $P$  هما مسألتان مختلفتان، ويمكن ملاحظة هذا الاختلاف من خلال معرفة أن أوزان الأعضاء  $AB$ ،  $AC$  تحاول عمل انزلاق للجملون عند نقطة  $C$  باتجاه اليمين وبالتالي فإن قيمة  $P$  الصغرى تتضمن أن الانزلاق باتجاه اليمين، أما قيمة  $P$  العظمى فهي تتضمن أن قوة الاحتكاك عند  $C$  ستكون إلى اليسار، وبالتالي فإن  $P$  العظمى ستكون تلك القيمة التي ستتغلب على كل من الوزن وقوة الاحتكاك  $F_C$  عند اليسار، أي أن الاختلاف في الحالتين هو في اتجاه  $F_C$  كما هو في الشكل.

وزن كل من  $AB$ ،  $AC$  هو:

$$W = 125 (9.81) = 1226.25^N$$

من معادلة الاتزان التالية نحصل على:

$$\Sigma M @ A = 0 \quad \Rightarrow$$

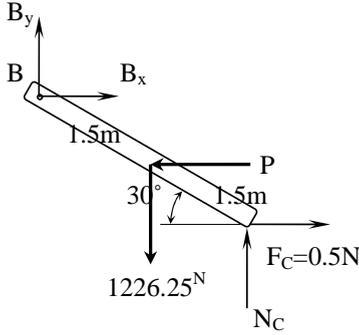
$$N_C (6 \cos 30^\circ) + P (1.5 \sin 30^\circ) - 1226.25 (1.5 \cos 30^\circ) - 1226.25 (4.5 \cos 30^\circ) = 0 \quad (a)$$

من مخطط الجسم الحر للجزء BC

لكلا الحالتين P العظمى شكل (c) و P

الصغرى شكل (d) وبوضع  $F_C = F_{C \max}$

في كلتا الحالتين حيث أن الوضع على وشك الانزلاق ينتج أن:

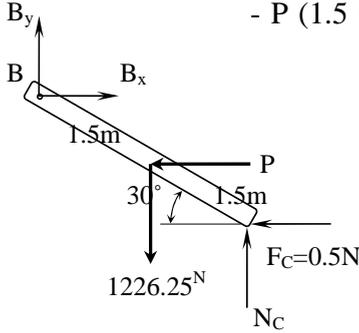


شكل (c)

$$\Sigma M @ B = 0 \quad \Rightarrow$$

$$N_C (3 \cos 30^\circ) - 1226.25 (1.5 \cos 30^\circ)$$

$$- P (1.5 \sin 30^\circ) \pm 0.5 N_C (3 \sin 30^\circ) = 0 \quad (b)$$



شكل (d)

حيث أن الإشارة الموجبة (+) للحد

القيمة  $0.5 N_C (3 \sin 30^\circ)$  تعطي

العظمى للقوة P والسالبة (-) تعطي

القيمة الصغرى لها.

بحل المعادلتين (a)، (b) مرتين

الأولى بأخذ الإشارة الموجبة وفي الثانية

الإشارة السالبة نحصل على قيمتين للقوة P وهما:

$$(العظمى) \quad P = 1730.7^N$$

$$(الصغرى) \quad P = 1058.4^N$$

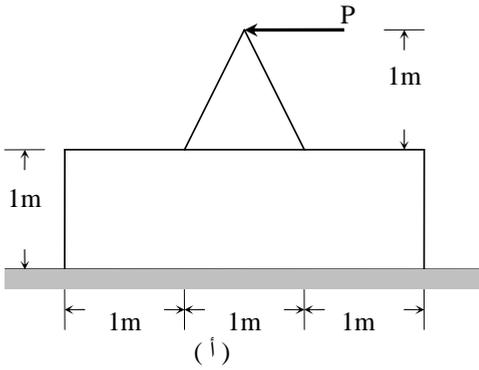
أي أن النظام يكون في وضع اتزان استاتيكي عندما تحقق P المتباينة:

$$1058.4^N \leq P \leq 1730.7^N$$

ملاحظة مهمة:

عند وضع بدء الانزلاق لا بد من فرض اتجاه قوى الاحتكاك على بياني الجسم الحر.

مثال (6-7):



كتلة خشبية هرمية الشكل كتلتها 20 كيلوجرام تستقر فوق كتلة مستطيلة المقطع كتلتها 10 كيلوجرامات كما هي موضحة بالشكل (1-7-7). فإذا علم أن معامل الاحتكاك السكوني  $\mu_s$  بين كافة الأسطح يساوي 0.4، فما أقصى قيمة للقوة P بحيث لا يحدث حركة.

الحل:

في هذا المثال، هناك ثلاث

حالات محتملة للحركة:

1- انزلاق الكتلة الهرمية فوق المستطيلة المقطع شكل (7-7-ب).

2- انقلاب الكتلة الهرمية قبل الانزلاق شكل (7-7-ج).

3- انزلاق الكتلة المستطيلة المقطع شكل (7-7-د).

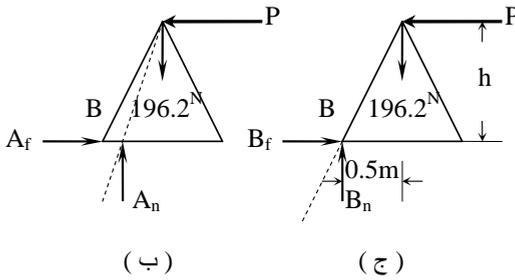
القوى الثلاث المؤثرة على الكتلة الهرمية هي:

1- وزنها ويؤثر في مركز الكتلة ويساوي:

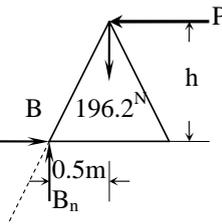
$$W = m \cdot g = 20 (9.81) = 196.2 \text{ N}$$

2- القوة P.

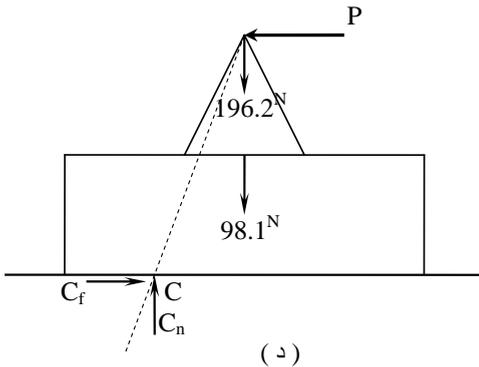
3- رد الفعل على السطح A، وله مركبتان هما قوة الاحتكاك  $A_f$  والقوة العمودية على السطح  $A_n$ .



(ب)



(ج)



(د)

(شكل 7-7)

الحالة الأولى: انزلاق الكتلة الهرمية فوق الكتلة المستطيلة المقطع شكل (7-7-ب):  
هذا الوضع يتطلب أن يكون خط عمل القوة عند A يقطع سطح التلامس عند نقطة ما بين  
الزاوية B والخط العمودي النازل من رأس الكتلة الهرمية.  
بتطبيق معادلات الاتزان نحصل على:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_f - P = 0 \quad (أ)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_n = 196.2^N \quad (ب)$$

من المعادلة (أ) :

$$P = A_f = A_{f \max} = \mu_s \cdot A_n \quad \Rightarrow$$

$$P = 0.4 ( 196.2 ) = 78.48^N$$

الحالة الثانية: انقلاب الكتلة الهرمية قبل الانزلاق. لاحظ أنه في حالة أن الكتلة على وشك  
الانقلاب يكون رد الفعل عند الحافة B فقط.

$$\Sigma M @ B = 0 \quad \Rightarrow \quad - Ph + 196.2 ( 0.5 ) = 0 \quad (ج)$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \mu_s \cdot B_n \quad (د)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad B_n = 196.2 \quad (هـ)$$

من المعادلتين (د) ، (هـ) ينتج أن:

$$P = 196.2 \mu_s$$

وبالتعويض في المعادلة (ج) ينتج أن:

$$196.2 \mu_s h + 196.2 ( 0.5 ) = 0$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{1}{2\mu_s} = \frac{1}{2(0.4)} = 1.25 \text{ m}$$

وحيث أن  $P$  تؤثر على ارتفاع 1.0 متر فقط فإن الكتلة الهرمية لن تنقلب وإنما تنزلق. ويمكن إيجاد قيمة  $P$  بأخذ العزوم حول  $B$  شكل ( ج ):

$$\begin{aligned}\Sigma M @ B = 0 & \Rightarrow -P(1) + 196.2(0.5) = 0 \\ & \Rightarrow P = 98.1^N\end{aligned}$$

وهي قيمة أكبر من الحالة الأولى وبالتالي فهذه الحالة غير ممكنة وتُهمل.

الحالة الثالثة: انزلاق الكتلة مستطيلة المقطع: في هذه الحالة ستنزلق الكتلة مستطيلة المقطع حاملة فوقها الكتلة الهرمية.

$$W = 10(9.81) = 98.1^N \quad \text{وزن الكتلة مستطيلة المقطع}$$

ومن معادلات الاتزان نحصل على:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 & \Rightarrow C_f - P = 0 \\ & \Rightarrow P = C_f = C_{f \max} = \mu_s \cdot C_n \quad (و) \\ \Sigma F_y = 0 & \Rightarrow C_n - 196.2 - 98.1 = 0 \quad (ز) \\ & \Rightarrow C_n = 294.3^N\end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة ( و ) نجد أن:

$$P = 117.7^N$$

أي أن أقصى قيمة للقوة  $P$  التي يمكن التأثير بها على النظام من الكتلتين هي أقل القيم الثلاث وبالتالي فإن  $P$  تساوي 78.48 نيوتن والتي توافق انزلاق الكتلة الهرمية فوق الكتلة مستطيلة المقطع.

### مثال (7-7):

كتلة ارتكاز تؤثر عليها قوتان

كما هو موضح بالشكل ( 8-7 ) فإذا

كانت معاملات الاحتكاك بين هذه

الكتلة والمستوى المائل هي  $\mu_s$

وتساوي 0.35 و  $\mu_k$  وتساوي 0.25

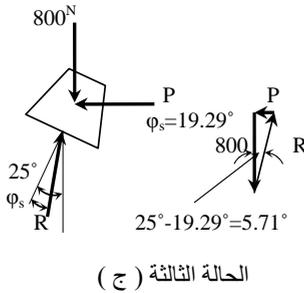
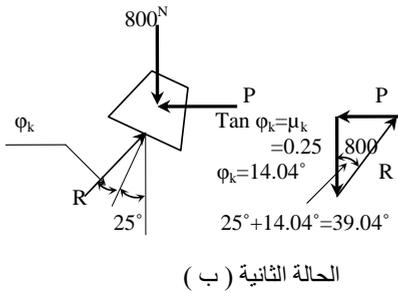
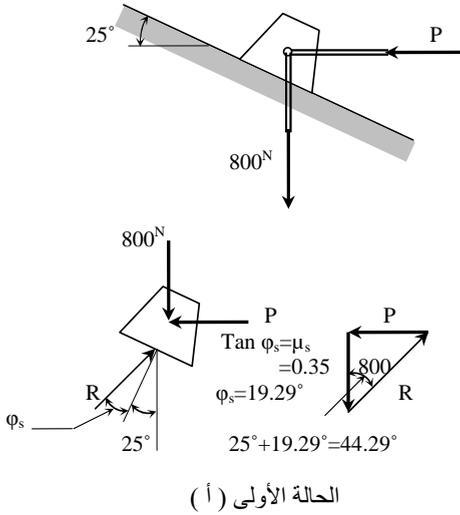
فأوجد قيمة القوة P اللازمة للحالات

الآتية:

ا - بدأ حركة الكتلة لأعلى المستوى.

ب- استمرار الكتلة في الحركة إلى أعلى.

ج- منع حركة الكتلة من الانزلاق.



شكل ( 8-7 )

الحالة الأولى ( أ ):

القوة P اللازمة لتبدأ الكتلة الحركة

إلى أعلى

$$P = 800 \tan 44.29^\circ = 780^N \leftarrow$$

الحالة الثانية ( ب ):

القوة P اللازمة لتستمر الكتلة الحركة في الحركة

$$P = 800 \tan 39.04^\circ = 649 \text{ N} \quad \leftarrow$$

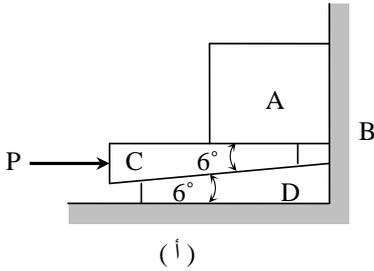
الحالة الثالثة ( ج ):

القوة P اللازمة لمنع الكتلة من الانزلاق إلى أسفل

$$P = 800 \tan 5.71^\circ = 80.0 \text{ N} \quad \leftarrow$$

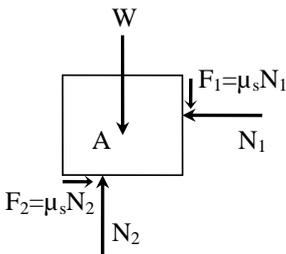
### 5-7 الخوابير

الخوابير أجهزة بسيطة تستعمل لرفع لثقل كبيرة من الحجارة أو أحمال ثقيلة أخرى. هذه الأحمال يمكن رفعها بدفع الخوابير بقوة عادة ما تكون أصغر بكثير من هذه الأحمال. وتعطى الخوابير أشكال خاصة لتبقى في أملكها بسبب تأثير قوة الاحتكاك بين أسطح التلامس. وهذا يجعل الخوابير ذات فائدة عظيمة ومتعددة لتعديل مواضع الآلات الثقيلة.

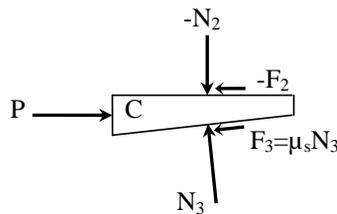


(أ)

شكل (7-9-1) يوضح الكتلة A تلامس الحائط الرأسي B ويطلب رفعها قليلا عن طريق حشر الخابور C بين هذه الكتلة والخابور D. والمطلوب تحديد أقل قوة P التي يمكن استخدامها لرفع هذه الكتلة ذات الوزن W.



(ب)



(ج)

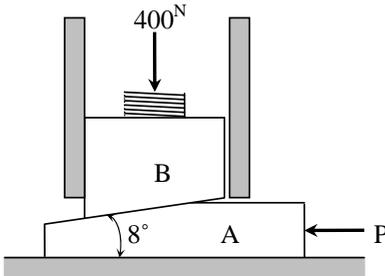
شكل (7-9)

يوضح شكلي (7-9-ب) و(7-9-ج) بياني الجسم الحر للكتلة والخابور C. والقوى المؤثرة على الكتلة هي وزنها والقوة العمودية وقوة الاحتكاك على سطح التلامس بين الكتلة والخابور C والكتلة والحائط B. قيم قوى الاحتكاك هي  $F_1$  وتساوي  $\mu_s N_1$  و  $F_2$  وتساوي  $\mu_s N_2$  لأن الكتلة بدأت الحركة. وحيث أن حركة الكتلة إلى أعلى فاتجاه قوة الاحتكاك  $F_1$  تكون إلى أسفل. ومن الناحية الأخرى وحيث أن الخابور C يتحرك إلى اليمين وحركة الكتلة نسبة للخابور تكون إلى اليسار وبالتالي فقوة الاحتكاك  $F_2$  الناتجة على سطح الكتلة يكون اتجاهها إلى اليمين.

ونلاحظ في الشكل (7-9-ج) أن القوى المؤثرة على الخابور C تتكون من القوة P والقوى العمودية وقوى الاحتكاك على سطحي التماس مع الكتلة A والخابور D. ويمكن إهمال وزن الخابور لصغره مقارنة بالأوزان الأخرى. القوى المؤثرة على C مساوية وفي اتجاه معاكس للقوى  $N_2$  و  $F_2$  المؤثرة على A وبالتالي تم توضيحها وبعلامة سالبة  $N_2$  و  $F_2$ . لذلك قوة الاحتكاك  $F_2$  يجب توجيهها إلى اليسار. وكذلك يجب ملاحظة أن القوة  $F_3$  موجهة إلى اليسار.

مجموع المجاهيل التي يحتويها المخططان البيانيان يمكن اختزالها إلى أربعة إذا تم التعبير عن قوى الاحتكاك بدلالة القوى العمودية. وباعتبار أن الكتلة A والخابور C في حالة اتزان ينتج عنه أربعة معادلات يؤدي حلها إلى إيجاد قيمة القوة P. كما يجدر الإشارة إلى أنه يكون من الأسهل في هذا المثال إذا استبدل القوتين العموديتين وقوتي الاحتكاك معها بمحصليهما. عندئذ يكون كل بياني جسم حر عليه ثلاث قوى فقط وتحليلها يمكن تحديد كل المجاهيل.

### مثال (7-8):



يتم تعديل وضع كتلة الآلة B بتحريك الخابور A. فإذا علم أن معامل الاحتكاك السكوني  $\mu_s$  يساوي 0.35 بين جميع أسطح التماس فأوجد قيمة القوة P اللازمة للحالتين:

أ- رفع الكتلة B.

ب- خفض الكتلة B.

## الحل:

لكننا الحالتين ومن البياني للجسم الحر لكل من الكتلة والخابور وباستخدام قاعدة الجيوب

لتحليل المتثل نجد أن:

زاوية الاحتكاك

$$\varphi_s = \tan^{-1} 0.35 = 19.3^\circ$$

حالة رفع الكتلة:

من بياني الجسم الحر

للكتلة B نجد أن:

$$\frac{R_1}{\sin 109.3^\circ} = \frac{400^N}{\sin 43.4^\circ}$$

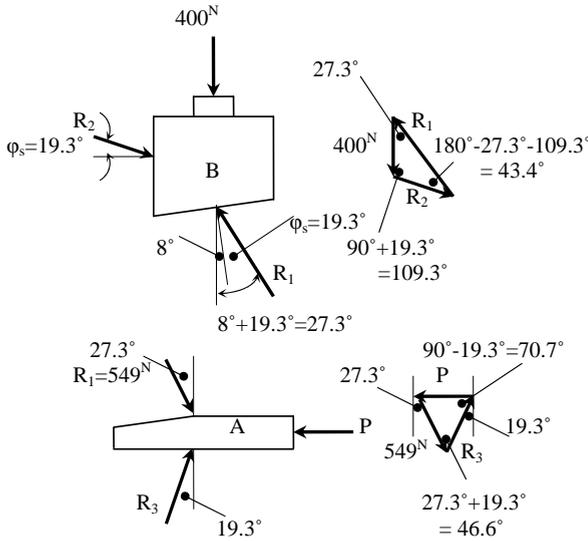
$$\Rightarrow R_1 = 549^N$$

من بياني الجسم الحر

للخابور A نجد أن:

$$\frac{P}{\sin 46.6^\circ} = \frac{549^N}{\sin 70.7^\circ}$$

$$\Rightarrow P = 423^N \leftarrow$$



حالة خفض الكتلة:

من بياني الجسم الحر

للكتلة B نجد أن:

$$\frac{R_1}{\sin 70.7^\circ} = \frac{400^N}{\sin 98.0^\circ}$$

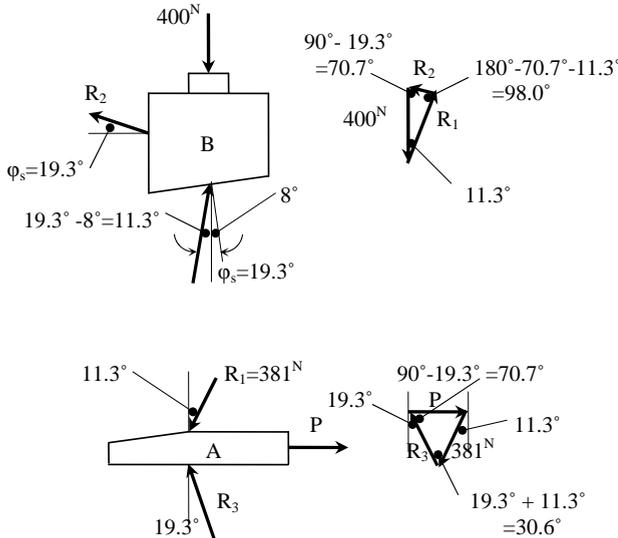
$$\Rightarrow R_1 = 381^N$$

من بياني الجسم الحر

للخابور A نجد أن:

$$\frac{P}{\sin 30.6^\circ} = \frac{381^N}{\sin 70.7^\circ}$$

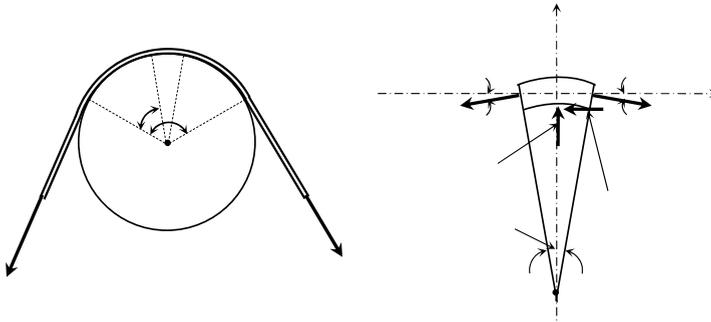
$$\Rightarrow P = 206^N \rightarrow$$



## 6-7 السيور

تستعمل السيور في كثير من المواضع لنقل الحركة من محور إلى آخر. فالمركبات بجميع أنواعها لا يمكنها الاستغناء عن السيور وكذلك آلات المصانع المختلفة. ويعتبر الاحتكاك في السيور هو الخاصية الأساسية لعملها والفائدة منها.

فالسير المار على الأسطوانة الثابتة في الشكل (7-10-أ) ونود تحديد العلاقة بين القوتين  $T_1$  و  $T_2$  للشد في طرفي السير عندما يكون على وشك الحركة إلى اليمين. بأخذ جزء من السير  $PP'$  يضم الزاوية المركزية  $\Delta\theta$ . بفرض أن الشد عند  $P$  يساوي  $T$  وعند  $P'$  يساوي  $T+\Delta T$  كما هو موضح بالبياني شكل (7-10-ب).



القوى المؤثرة على العنصر هي قوتي الشد والقوة العمودية  $\Delta N$  من رد فعل الأسطوانة وقوة الاحتكاك  $\Delta F$ . وحيث أن الافتراض هو أن الحركة علو وسك الحدوث فإن  $\Delta F = \mu_s \Delta N$ . الزاوية  $\Delta\theta$  اختيرت صغيرة جدا لتقترب من الصفر وكذلك التغير في قيم مقادير القوى  $\Delta N$  و  $\Delta F$  والفرق في قوة الشد  $\Delta T$  بين طرفي العنصر  $P$  و  $P'$  يقترب كذلك من الصفر وبالتالي فمقدار الشد عند  $P$  يكاد يبقى دون تغير. هذه الافتراضات أخذت في الاعتبار للمساعدة في محاولة فهم المتغيرات.

من معادلات الاتزان للعنصر  $PP'$  نحصل على:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad (T+\Delta T)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s\Delta N = 0 \quad (24-7)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta N - (T+\Delta T)\sin\frac{\Delta\theta}{2} - T\sin\frac{\Delta\theta}{2} = 0 \quad (25-7)$$

من المعادلة (7-25) نحصل على  $\Delta N$  وبالتعويض في المعادلة (7-24) وبعد الاختصار نحصل على:

$$\Delta T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s(2T+\Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

بالقسمة على  $\Delta\theta$  مع التبسيط ينتج أن:

$$\Delta T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s(T+\frac{\Delta T}{2}) \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)} = 0$$

إذا جعلت  $\Delta\theta$  تقترب من الصفر، فجيب تمام الزاوية يقترب من الوحدة و  $\frac{\Delta T}{2}$  يترب من الصفر

كما أشير سابقاً أعلاه. وكذلك الكسر  $\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)}$  يقترب من الوحدة، كما تشير نتائج نظريات

حساب المثلثات. وحيث أنه من تعريف نهاية  $\frac{\Delta T}{\Delta\theta}$  يساوي المشتقة  $\frac{dT}{d\theta}$  نصل إلى:

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T} = \mu_s d\theta$$

من تكامل حدّي هذه المعادلة بين  $P_1$  و  $P_2$  في شكل (7-10-أ) حيث عند  $P_1$  كانت قيمة  $\theta$  تساوي الصفر و  $T_1 = T$ ، وعند  $P_2$   $\beta = \theta$  و  $T_2 = T$  ينتج أن:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\beta} \mu_s d\theta$$

$$\text{Ln } T_2 - \text{Ln } T_1 = \mu_s \beta$$

أو

$$\text{Ln } \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \quad (26-7)$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة على هيئة:

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \quad (27-7)$$

المعادلات الموضحة يمكن استخدامها وتطبيقها في المسائل التي تحتوي على السيور المنبسطة التي تلتف حول الاسطوانات الدائرية وكذلك الحبال حول الأعمدة والشمادورات في السفن والمراسي في الموانئ. كما يمكن تطبيقها لحل المسائل المتعلقة بالكوابح والبكرات لدراسة عما كانت السيور ستنتزلق أم لا .

المعادلتان (7-26) و (7-27) تستعمل في حالة أن السير أو الحبل أو الكابح على وشك الحركة فقط. تستعمل المعادلة (7-27) لتحديد قيم  $T_1$  أو  $T_2$  في حين أن المعادلة (7-26) تستخدم لإيجاد قيمة  $\mu_s$  أو زاوية الاحتكاك  $\beta$ . يلاحظ أن  $T_2$  دائماً أكبر من  $T_1$  وأنها القوة المؤثرة على السير أو الحبل في حين أن  $T_1$  هي القوة المقاومة. كما يلاحظ أن قيمة الزاوية  $\beta$  بالتقدير الدائري. وهذه الزاوية  $\beta$  يمكن أن يزيد مقدارها على  $2\pi$  كما في حالة حبل ملفوف على عمود  $n$  مرة فقيمة  $\beta$  في هذه  $2\pi n$ .

### أمثلة

#### مثال (7-9):

لف حبل رسو باخرة ( شيمة ) حول

شمادورة لفتين كاملتين كما هو موضح بالشكل

(7-11). فإذا كان الشد حبل الرسو 7500 نيوتن

وباستخدام قوة مقدارها 150 نيوتن على طرفه

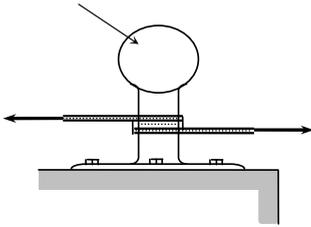
الحر يمكن لعامل أن يمنع حبل الرسو من

الانزلاق. فما هو معامل الاحتكاك بين الحبل

والشمادورة. وما هي قيمة قوة الشد التي في حبل الرسو

التي يمكن للقوة 150 نيوتن أن تقاومها إذا كان عدد

اللفات حول الشمادورة ثلاثة لفات كاملة.



شكل (7-11)

### الحل:

معامل الاحتكاك:

حيث أن الانزلاق على وشك الحدوث، يمكن تطبيق المعادلة (7-6)

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta$$

وبما أن حبل الرسو ملفوف على الشمادورة لفتين كاملتين فان مقدار الزاوية  $\beta$  بالتقدير الدائري هو

$$\beta = 2(2\pi) = 12.6 \text{ زاوية نصف قطرية}$$

$$T_1 = 150^N, \quad T_2 = 7500^N$$

عليه

$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$\mu_s(12.6) = \ln \frac{7500}{150} = \ln 50 = 3.91$$

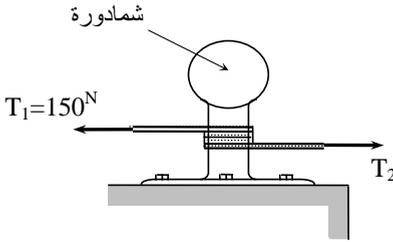
$$\Rightarrow \mu_s = 0.31$$

حالة اللف على الشمادورة ثلاث لفات:

$$\beta = 3(2\pi)$$

$$= 18.9 \text{ زاوية نصف قطرية}$$

$$T_1 = 150^N, \quad \mu_s = 0.31$$



بالتعويض في المعادلة (27-7)

نجد أن:

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta}$$

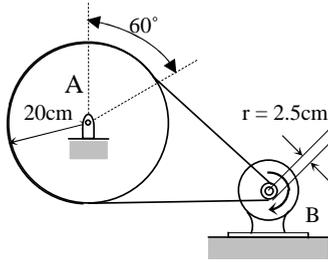
$$\frac{T_2}{150} = e^{(0.31)(18.9)} = e^{5.86}$$

$$= 350$$

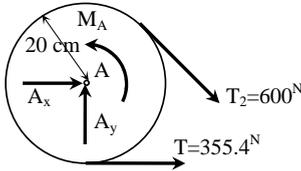
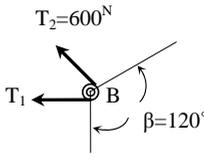
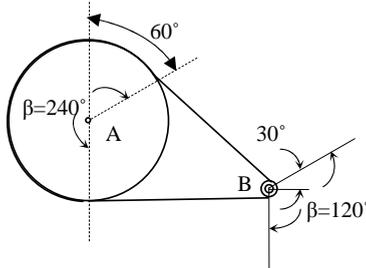
$$\Rightarrow T_2 = 52500^N = 52.5 \text{ kN}$$

~~~~~

مثال (10-7):



سير منبسط يصل بين البكرة A، لمحرك آلة، والبكرة B الموصولة بمحور آلة كهربائية. فإذا كانت معاملات الاحتكاك  $\mu_s$  تساوي 0.25 و  $\mu_k$  تساوي 0.20 بين السير والبكرتين وأن أقصى قوة شد للسير تساوي 600 نيوتن، فما هو أقصى عزم قتل يمكن أن يحدثه السير على البكرة A.



الحل:

حيث أن مقاومة الانزلاق تعتمد على زاوية التماس  $\beta$  بين البكرة والسير وكذلك على معامل الاحتكاك  $\mu_s$  الذي هو نفسه للبكرتين فالانزلاق سيحدث عند البكرة B لصغر الزاوية  $\beta$  عندها. من البكرة B نحصل على:

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \Rightarrow \frac{600}{T_1} = e^{0.25(2\pi/3)}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{600}{1.688} = 355.4^N$$

من البكرة B نحصل على:

يؤثر على هذه البكرة عزم من الآلة المتصلة بها وهذا العزم يساويه في المقدار وبيضاؤه في الاتجاه العزم الناتج من السير. ومن البياني للجسم الحر للبكرة يتضح أن:

$$\Sigma M@A = 0 \Rightarrow M_A - 600(0.2) + 355.4(0.2) = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 191.08^{N.m}$$

يمكن التأكد من أن الانزلاق عند البكرة A بإيجاد قيمة  $\mu_s$  اللازمة لمنع الانزلاق وأنها أصغر من القيمة المعطاة. من المعادلة (7-26) نجد أن:

$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{600}{355.4} = 0.524$$

وحيث أن

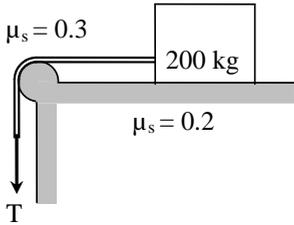
$$\beta = 240^\circ = 4\pi/3 \quad \text{زاوية نصف قطرية}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi}{3} \mu_s = 0.524 \quad \Rightarrow \quad \mu_s = 0.125 < 0.25$$

~~~~~

### مثال (11-7):

قالب كتلته 200 كيلوجرام يراد تحريكه بواسطة قوة الشد في الحبل T كما هو موضح في الشكل (12-7) الذي ينزلق فوق سطح اسطواني ثابت. أوجد قيمة T التي تتسبب في أن تكون الحركة الانزلاقية للقالب على وشك الحدوث.



**الحل:**

وزن القالب هو:

$$W = 200 (9.81) = 1960^N$$

من اتزان بياني الجسم الحر نجد أن:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -T_1 + 0.2 N = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -1960 + N = 0$$

شكل (12-7)

$$\Rightarrow T_1 = 0.2 N = 0.2(1960) = 392^N$$

هذه القيمة هي أقل قيمتي القوتين اللتين تؤثران على الحبل الملتف حول السطح المنحني. وبتطبيق المعادلة (27-7) نحصل على:

$$\frac{T}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \Rightarrow \frac{T}{392} e^{0.3(\pi/2)} = 1.6$$

$$\Rightarrow T = 1.6(392) = 627^N$$

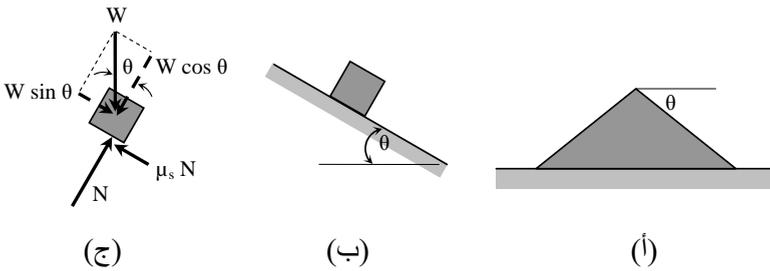
~~~~~

### 7-7 زاوية السكون

إذا صبت مادة حبيبية جافة بحرية على سطح أفقي فإنها تكون، بفعل الاحتكاك بين حبات هذه المادة، كومة أو ربوة على شكل مخروط دائري قائم كما هو موضح بالشكل (7-13-أ). ويبين الشكل (7-13-ب) بياني للجسم الحر لأحدى الحبيبات وزاوية الميل لجانب المخروط  $\theta$  تسمى زاوية السكون. فإذا فرض أن حركة الحبيبة على وشك الحدوث وأن قيمة قوة الاحتكاك التي تؤثر على الحبة عند نهايتها العظمى ومن البياني الموضح في الشكل (7-13-ج) نجد أن:

$$\mu_s = \tan \theta \quad (28-7)$$

$$\theta = \tan^{-1} \mu_s \quad (29-7)$$



شكل (7-13)

## مثال 7-12:

عند تفريغ شاحنة عبوتها من الحصى على الأرض تتكون كومة هرمية قطر قاعدتها 2.50 مترا وارتفاعها 0.75 مترا فما هي زاوية السكون.

الحل:

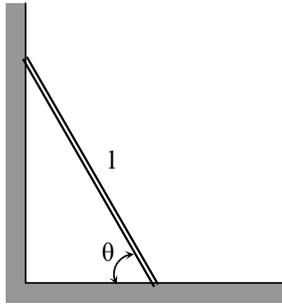
من المعادلة (7-28) نجد أن:

$$\mu_s = \tan \theta = \frac{0.75}{1.25} = 0.60$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1} 0.60 = 30.96^\circ$$

~~~~~

## تمارين



شكل (7-14)

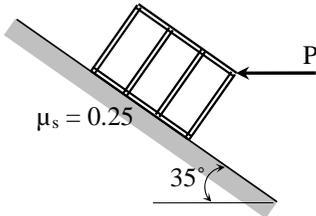
7-1 يوضح شكل (7-14) سلم وزنه  $W$  وطوله  $l$  وهو ساكن على أرض مكسوة بطبقة من الجليد يمكن أن يفرض معامل الاحتكاك عليها يساوي صفرا. فإذا فرض أن الحائط الرأسي أملس فلاي مدى لقيم  $\theta$  سوف يكون السلم متزنا.

## 7-2 كتلة صندوق الشحن المبين

في شكل (7-15) هي 580 كيلو جرام

أثرت عليه القوة  $P$  وكان مقدارها

6000 نيوتن.



شكل (7-15)

أ- أوجد مقدار واتجاه قوة الاحتكاك

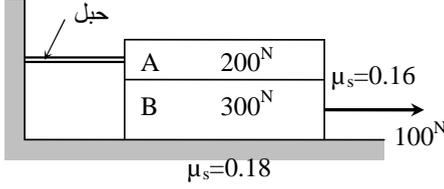
التي تؤثر على صندوق الشحن.

ب - ما هي قيمة  $P$  التي تتسبب في أن

يكون لصندوق الشحن حركة

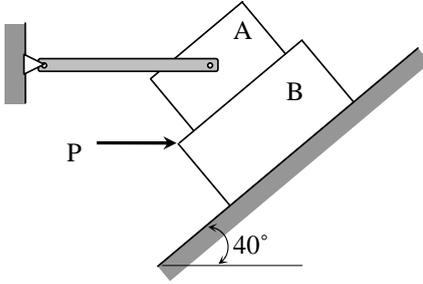
انزلاقية وشيكة إلى أعلى المستوى.

ج - أوجد النهاية الصغرى لقيمة  $P$  اللازمة لحفظ صندوق الشحن من الانزلاق إلى أسفل السطح المائل.



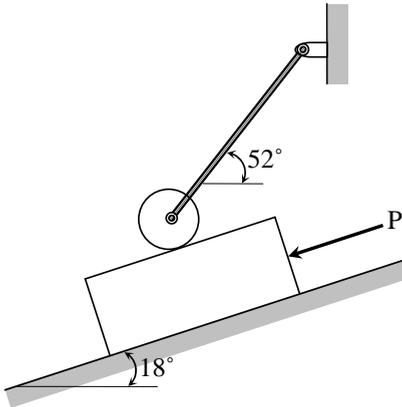
شكل ( 16-7 )

3-7 أوجد قوى الاحتكاك المبذولة بالقالب B على القالب A وعلى الأرض كما بالشكل ( 16-7 ).



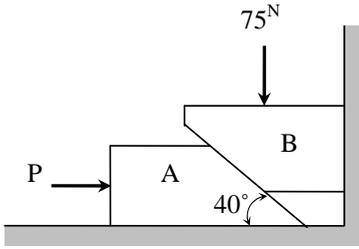
شكل ( 17-7 )

4-7 في شكل ( 17-7 ) الوصلة لا وزن لها. القالب A يزن  $100^N$  والقالب B يزن  $350^N$ . وكان معامل الاحتكاك بين القالبين A ، B يساوي 0.15 و معامل الاحتكاك بين القالب B والسطح المائل يساوي 0.20. أ- لأي مدى لقيم  $P$  سوف يظل القالب B في موضع التوازن المبين. ب- أوجد المدى المناظر للقوة في الوصلة.



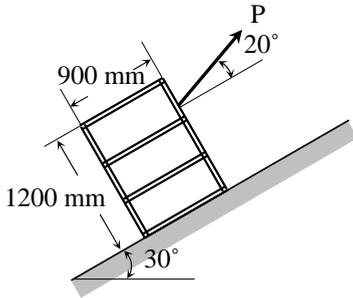
شكل ( 18-7 )

5-7 في شكل ( 18-7 ) يزن الدراج 500 نيوتن ويزن القالب 1500 نيوتن. ومعامل الاحتكاك لجميع الأسطح  $\mu_s = 0.40$ . أوجد النهاية الصغرى لقيمة  $P$  التي سوف تتسبب في أن يكون القالب على وشك الحركة.



شكل (19-7)

6-7 القالب A في شكل (19-7) يزن 25 نيوتن والقالب B يزن 18 نيوتن. معامل الاحتكاك الاستاتيكي على كل الأسطح هو 0.11. في التشكل المبين، لأي مدى لقيم P سوف تكون المجموعة متزنة؟



شكل (20-7)

7-7 صندوق شحن كتلته 200 kg موضوع على معبر منحني كما هو موضح بالشكل (20-7). فإذا كان معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين الصندوق والمعبر يساوي 0.35 فأوجد:

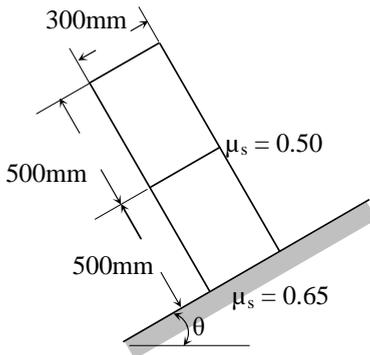
أ- قيمة P إذا كانت الحركة الانزلاقية إلى أعلى المستوى وشيكة.

ب- لأي مدى لقيم الارتفاعات فوق المستوى يمكن تسليط هذه القوة

إذا كان صندوق الشحن لا ينقلب؟

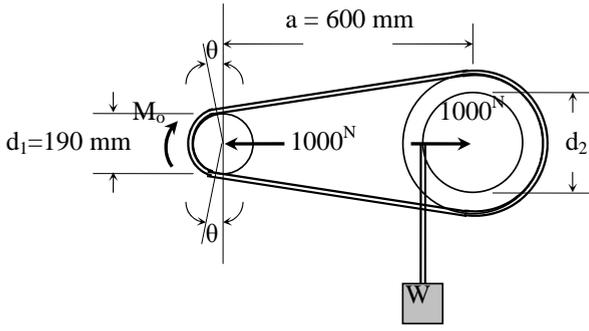
ج- إذا أزيلت القوة P، هل ينقلب صندوق الشحن في ناحية اتجاه عكس دوران عقرب الساعة؟

د- إذا أزيلت القوة P، هل سينزلق صندوق الشحن على المنحدر إلى أسفل؟



شكل (21-7)

8-7 بين شكل (21-7) قالبين متطابقين في حالة سكون على مستوى مائل. ناقش ما يحدث عندما تزداد الزاوية  $\theta$  تدريجياً بدء من  $\theta = 0$ .



شكل ( 22 - 7 )

### 9-7 يراد رفع وزن

$W$  بتسليط عزم  $M_o$  على

البكرة  $A$  في شكل (7-22).

افتراض أن السير سوف لا

ينزلق على الكرة الكبيرة.

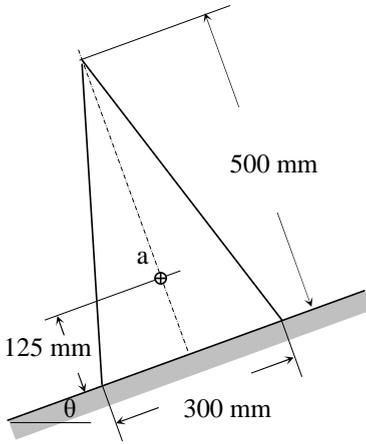
أوجد قيمة النهاية العظمى

للوزن الذي يمكن رفعه.

تعطى الزاوية  $\theta$  بالعلاقة

$$\sin \theta = (d_2 - d_1) / 2a$$

ومعامل الاحتكاك الاستاتيكي بين السير والبكرة الصغيرة هو 0.22.



شكل ( 23-7 )

### 10-7 بين شكل ( 23-7 ) مخروطا

دائريا قائما في حالة سكون على سطح

مائل خشن. تؤثر قوة الوزن في نقطة  $a$ .

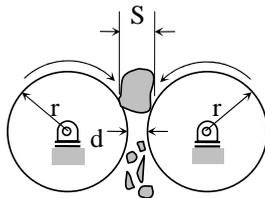
أ - لأية قيمة للزاوية  $\theta$  يكون المخروط

على وشك الانقلاب؟

ب - كم تكون قيمة معامل الاحتكاك

الاستاتيكي اللازمة إذا كان المخروط

سينقلب قيل أن ينزلق؟



شكل ( 24-7 )

### 11-7 أسطوانتان كبيرتان نصف قطر كل

منهما  $r$  يساوي 600 mm، تلتقان في اتجاهين

متضادين وتكونان العنصر الأساسي لكسارة

زلط. المسافة  $d$  بين سطحيهما تحدد المقاس

المطلوب للزلط شكل (7-24). فإذا كانت

المسافة  $d$  تساوي 25 mm ومعامل الاحتكاك

$\mu_s = 0.30$  فما هو أكبر حجم  $s$  للصخر الذي

يمكن سحبه بالكسارة تحت تأثير الاحتكاك.

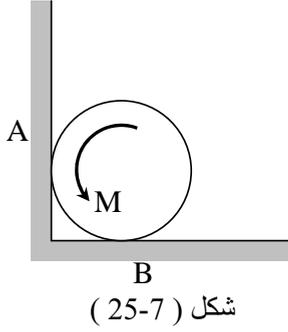
12-7 أوجد مقدار العزم  $M$  الذي يمكن

إحداثه على الأسطوانة عندما يكون الدوران

على وشك الوقوع. وزن الأسطوانة  $W$  ونصف

قطرها  $r$  ومعامل الاحتكاك الاستاتيكي  $\mu_s$

متساو للسطحين  $A$  ،  $B$  شكل (25-7).



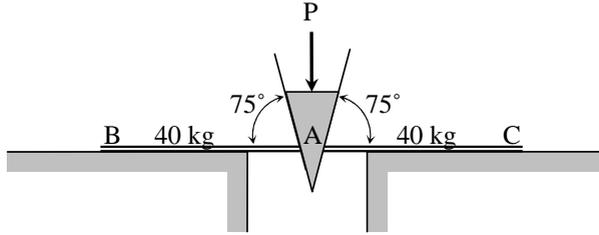
شكل (25-7)

13-7 إذا كان وزن الأسطوانة في المثال السابق  $W$  ونصف قطرها  $r$  فعبر عن أقصى عزم  $M$

يمكن إحداثه على الأسطوانة حتى لا تدور بافتراض أن معامل الاحتكاك الاستاتيكي هو:

أ- صفر للسطح  $A$  و  $0.40$  للسطح  $B$ .

ب-  $0.30$  للسطح  $A$  و  $0.40$  للسطح  $B$ .



شكل (26-7)

14-7 سفين  $A$  مهمل الوزن يراد دقه بين لوحين  $B$  ،  $C$  كتلة كل منهما  $40 \text{ kg}$  كما هو موضح

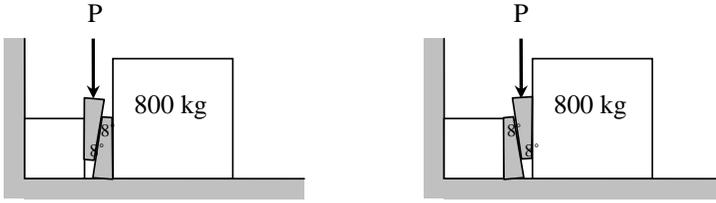
في الشكل (26-7). فإذا كان معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين كل الأسطح يساوي  $0.35$  فما

مقدار القوة  $P$  اللازمة لبدأ السفين أن يتحرك لكل من:

أ- حالة حرية الحركة للوحين.

ب- حالة أن اللوح  $C$  ثابت ولا يمكنه الحركة.

15-7 خابوران زاويتاهما 8 درجات ووزناهما مهمل يستعملان في تحريك وتوجيه كتلة مقدارها 800 كيلوجرام كما هو موضح بالشكل ( 27-7 ). فإذا كان معامل الاحتكاك الاستاتيكي 0.25 عند جميع الأسطح فما هو مقدار أصغر قوة P يمكن استعمالها على أي من الخابورين عندما تكون الإزاحة للكتلة على وشك الابتدء.

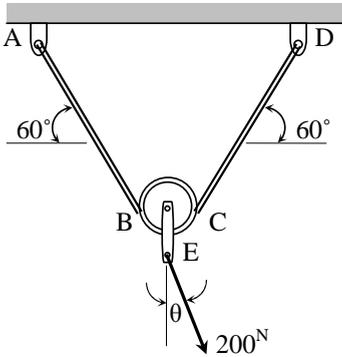


شكل ( 27-7 )

16-7 في الشكل ( 28-7 ) الموضح

محور البكرة مجمّد ولا يمكنه الدوران نسبة إلى الكتلة. فإذا كان معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين السير ABCD والبكرة هو 0.30 فأوجد:

- أكبر قيمة ممكنة للزاوية  $\theta$  تبقى على المنظومة في حالة اتزان.
  - ردود الفعل عند كل من A ، D .
- افرض أن امتداد الجزأين المستقيمين من السير يلتقيان عند E.

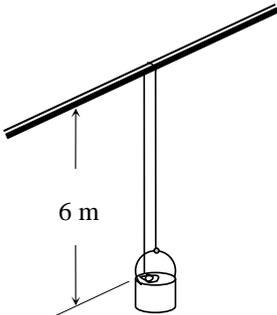


شكل ( 28-7 )

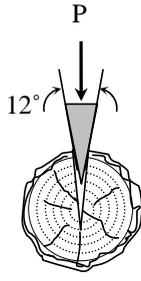
17-7 في الشكل ( 29-7 ) الموضح حبل طوله 15

مترا يمر فوق محور أفقي، أحد طرفي الحبل مثبت بجرذل كتلته 2.4 كيلوجرام وبقية الحبل ملفوفة وموضوعة داخل الجردل. فإذا كان معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين الحبل والمحور يساوي 0.30 وأن كتلة الحبل تساوي 800 جرام لكل متر ودور المحور ببطة فإلى أي بعد يمكن للجرذل أن:

- يرتفع قبل أن ينزلق الحبل على المحور.
- ينخفض قبل حدوث الانزلاق.



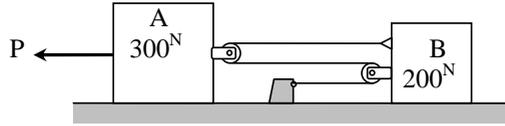
شكل ( 29 - 7 )



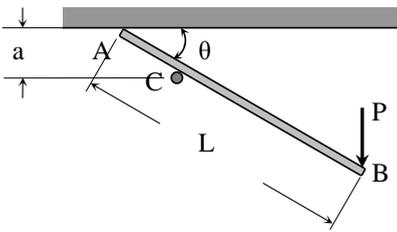
شكل ( 30-7 )

**18-7** خابور زاوية رأسه  $12^\circ$  يستعمل لشق جذع شجرة كما هو موضح بالشكل (30-7). فإذا كان معامل الاحتكاك بين الخابور والخشب يساوي 0.35 وأن مقدار القوة  $P$  المستعملة لدق الخابور هو 2.5 كيلو نيوتن فأوجد مقدار القوى المؤثرة على الجذع بعد دق الخابور.

**19-7** كتلتان مربوطتان بجبل كما بالشكل (31-7). فإذا كان معامل الاحتكاك بين أسطح التلامس هو 0.30 مع إهمال قوة الاحتكاك المتولدة في البكرات، أوجد مقدار أصغر قوة  $P$  اللازمة لتحريك البكرات.



شكل ( 31-7 )



شكل ( 32 - 7 )

**20-7** قضيب نحيل طوله  $L$  محشور بين الوند  $C$  وسقف أفقي كما هو موضح بالشكل (32-7) وعليه حمل مقداره  $P$  عند الطرف  $B$ . فإذا كانت الزاوية  $\theta$  تساوي  $30^\circ$  وكان معامل الاحتكاك الاستاتيكي يساوي 0.35 عند الطرفين  $A$  ،  $C$  ، فما هو مدى قيم النسبة  $L/a$  الذي يحصل فيه على اتزان؟



## المراجع

- 1 علي سالم زريق، ميكانيكا الإنشاءات، المركز الوطني لتخطيط التعليم، 2007.
- 2 ياسر محمد الخبيطي، محمد ابراهيم الرجوب و طارق رشيد عبد الحميد، الاستاتيكا، دار المسيرة - عمان - 2006.
- 3 A. K. Gupta, *Statics*, Laxmi Publications, 2006.
- 4 N. P. Bali, *Statics*, Laxmi Publications, 2005.
- 5 A. P. Roberts, *Statics and Dynamics*, Cambridge University press, 2003.
- 6 I. Todhunter, *Analytical Statics*, Adamant Media Corporation, 2002.
- 7 L. Silverberg and J. P. Thrower, *Marks' Mechanics*, McGraw-Hill Professional, 2001.
- 8 L. E. Goodman and W. H. Warner, *Statics*, Courier Dover Publications, 2001.
- 9 A. S. Hall, *Statics*, UNSW Press, 1999.
- 10 أحمد محمد عبد العال، الاستاتيكا، مؤسسة فينوس العالمية للنشر، 1999.
- 11 J. L. Meriam and L. G. Kraige, *Statics*, John Wiley and Sons Inc, 4<sup>th</sup> ed., 1998.
- 12 B Muvdi , A. W. AL-Khafaji and J. W. McNabb, *Statics for Engineers*, Springer, 1997.
- 13 W. A. Nash, *Statics and Mechanics of Materials*, McGraw-Hill Professional, 1992.
- 14 J. F. Shelly, *Vector Mechanics for Engineers*, McGraw-Hill Professional, 1990.
- 15 J. McCormac and R. E. Elling, *Structural Analysis*, Harper & Row, New York, 1988.
- 16 J. C. Smith, *Structural Analysis*, Harper & Row, New York, 1988.

- 17 H. I. Laursen, *Structural Analysis*, 3d ed., McGraw-Hill, New York, 1988.
- 18 T. Au and P. Christiano, *Structural Analysis*, Prince-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1987.
- 19 F. P. Beer and E. R. Johnston, Jr., *Vector Mechanics for Engineers*, McGraw-Hill, Book Company, 1984.
- 20 J. H. Jackson and H. G. Wirtz, *Statics and Stability of Materials*, McGraw-Hill Professional, 1983.
- 21 C. K. Wang, *Intermediate Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1983.
- 20 جوزيف ف. شيللي، ترجمة سعد كامل أحمد مسعود، *الميكانيكا الهندسية - استاتيكا*، دار ماكروهيل للنشر، 1983.
- 22 F. P. Beer and E. R. Johnston, Jr., *Mechanics of Materials*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- 23 B. B. Muvdi and McNabb, *Engineering Mechanics of materials*, Macmillan Publishing Co. Inc., 1980.
- 24 W. T. Marshall and H. M. Nelson, *Structures*, 2d ed., Pitman Publishing Limited, 1977.
- 25 C. H. Norris, J. B. Wilbur, and S. Utku, *Elementary Structural Analysis*, 3d ed., McGraw-Hill, New York, 1976.
- 26 S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3d ed., McGraw-Hill Book Company, 1970.
- 27 فاروق أحمد البرقي، *الميكانيكا للمهندسين الاستاتيكا*، دار الراتب الجامعية، بيروت لبنان، د. ت.

## قائمة الرموز

- $a$  مضاعف عددي ، نقطة ، أطوال ، عجلة
- $A$  كمية متجهة
- $A$  كمية قياسية للكمية المتجهة  $A$  ، مساحة ، نقطة
- $A_x$  و  $A_y$  و  $A_z$  مركبات المتجهة  $A$  في اتجاهات  $x$  و  $y$  و  $z$
- $a$  و  $b$  و  $c$  و ..... نقط ، أطوال
- $B$  و  $C$  و ..... كميات متجهة عامة
- $d_x$  ،  $d_y$  المسافتان الفاصلتان بين محوري  $x$  ،  $y$  وبين المحورين  $\bar{x}$  ،  $\bar{y}$  الذين يمران بمركز الثقل
- $d_x$  ،  $d_y$  ،  $d_z$  أطوال
- $F$  ،  $F_1$  ،  $F_2$  و ..... متجهات ، قوى
- $F$  ،  $F_1$  ،  $F_2$  و ..... مقادير المتجهات أو القوى
- $F_x$  و  $F_y$  و  $F_z$  مركبات المتجه  $F$  في اتجاهات  $x$  و  $y$  و  $z$
- $g$  عجلة الجاذبية
- $i$  ،  $j$  ،  $k$  وحدات متجه في اتجاهات  $x$  و  $y$  و  $z$  على الترتيب
- $I_x$  ،  $I_y$  ،  $I_{xy}$  عزم القصور الذاتي لمساحة مستوية حول محوري  $x$  ،  $y$
- $J_o$  عزم القصور الذاتي القطبي لمساحة مستوية
- $l$  طول خط مستقيم أو منحن
- $m$  كتلة
- $M$  ،  $M_o$  و ..... عزوم أو ازدواجات
- $M$  ،  $M_o$  و ..... مقادير العزوم أو الازدواجات  $M$  ،  $M_o$  و .....
- $M_x$  و  $M_y$  و  $M_z$  مركبات المتجه أو العزم  $M$  في اتجاهات  $x$  و  $y$  و  $z$
- $n$  عدد في مجموعة
- $N$  ،  $N_a$  ، ..... قوى رد الفعل العمودية التضاغية
- $p$  ضغط
- $P$  ،  $P_1$  و ..... قوى
- $Q_x$  ،  $Q_y$  العزم الأول لمساحة مستوية حول المحورين  $x$  ،  $y$  على الترتيب
- $r$  متجه موضع
- $t$  سمك لوح

$T$  عزم لي أو عزم  
 $T_1, T_2, \dots$  قوى شد في حبل أو سير  
 $V$  قوة قص  
 $w$  قوة وزن عن وحدة طول  
 $W$  وزن  
 $x, y, z$  محاور احداثيات  
 $\bar{x}, \bar{y}$  محاور احداثيات مارة بمركز ثقل مساحة مستوية  
 $\alpha, \beta, \theta, \gamma$  زوايا  
 $\lambda$  وحدة متجهات  
 $\rho$  كثافة كتلة  
 $\mu_s$  معامل الاحتكاك الاستاتيكي  
 $\mu_k$  معامل الاحتكاك الكيناتيكي  
 $\varphi$  زاوية الاحتكاك  
 $\varphi_s$  زاوية الاحتكاك الاستاتيكي  
 $\varphi_k$  زاوية الاحتكاك الكيناتيكي