الفصل التاسع

برمجة الأعداد الصحيحة

تأتي الأمثلة التطبيقية المتضمنة في هذا الفصل لتوضح بأسلوب مبسط ومتعمق معاً أبرز الطرق والاجتهادات المختلفة التي قدمها الباحثون لحل مسائل البرمجة الخطية ذات الأعداد الصحيح للمسائل ذات الطبيعة الخاصة.

9

الفصل التاسع

برمجة الأعداد الصحيحة
Integer Programming

9.1 مقدمة:

تهتم البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة بحيث تصبح كل قيم المتغيرات عند الحل الأمثل أعداد صحيحة أو جزء منها أعداد صحيحة مع فرضية أن النتائج كلها موجبة وبالتالي يطلق عليه أحياناً البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة الصافية أو مخلوطة وهذا يعتمد على الشروط الأولية لحل المسألة.

إن مشكلة البرمجة العددية هي في الحقيقة مشكلة برمجة خطية فقدت صفة الخطية لوجوب التخلي عن شروط القابلية للتجزئة بضرورة اتخاذ المتغيرات أو بعضها لقيم غير كسرية وقد تكو مشكلة البرمجة العددية مشكلة مختلطة بمعنى أنه يلزم أن تتخذ بعض المتغيرات قيم غير عشرية بينما البعض الآخر يمكن أن يتخذ قيماً كسرية وأن تكون مشكلة برمجة عددية صرفة بمعنى أنه يلزم أن تتخذ كل المتغيرات قيماً كسرية.

وهناك طرق مختلفة واجتهادات عديدة قدمها الباحثون لحل مسائل البرمجة الخطية ذات الأعداد الصحيحة للمسائل ذات الطبيعة الخاصة.

فمثلاً عدد السيارات التي تنتج يومياً أو أجهزة الإذاعة المرئية ... الخ التي يمكن أن تنتج منها كسر عشري لأنه لا يوفي بالوظيفة الأساسية لإنتاجها، وتوجد حالات خاصة من استخدام البرمجة الخطية الصحيحة التي يتخذ فيها القرار (نعم) أو (لا) وتسمى هذه الحالات الخاصة (1،0) حيث تعني 0 (لا) ، 1 (نعم) وبمعنى آخر أنك تختار هذا المشروع أو لا تختاره، تختار هذا الطريق أو لا تختاره، نستخدم هذا النوع من

الآلات أو لا تختاره، ولتوضيح بعض المشاكل العملية التي يستخدم فيها نظام البرمجة الخطية الصحيحة يمكن التدليل ببعض الأمثلة فيما بعد.

مثال 1:

من المعروف أن أي تخطيط إنتاجي يحتوي على N منتوجات تكاليف الإنتاج للمنتج J والتي يمكن أن تحتوي على تكاليف ثابتة K_1 والتي لا تعتمد على كمية الإنتاج وتكاليف متغيرة C_j للوحدة المنتجة فإذا كان x_j مستوى الوحدات المنتجة للمنتج J فإن تكاليف المنتج من المعطيات السابقة.

$$C_1(x_j) = \begin{cases} k_j + c_i x_j & x_j > 0 \\ 0 & x_j = 0 \end{cases}$$

إن دالة الهدف يمكن أن تصاغ إلى النحو الآتي:

$$\text{Minimize} \qquad z = \sum_{j=1}^{N} c_j(x_j)$$

وأن الخاصية x_j الغير خطية تأتي من عدم استمرارية دالة الهدف من وجهة نظر التحليل الرياضي.

والمسألة يمكن أن تكون أكثر سهولة تحليلية وذلك باقتراح الحلول للمتغيرات على النحو التالي:

$$yi = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x_j > 0 \end{cases}$$

وهذه الشروط يمكن شرحها من نقطة قيود الخطية على النحو الآتي:

$$x_j \le My_i$$

حيث $M > 0$ وتكون كبيرة جداً بحيث تكون $x_j \le M$ عليه يمكن إعادة كتابة دالة الهدف على نمط أكثر وضوح.

Minimize $$z = \sum_{j=1}^{N} (c_j x_j + k_i y_i)$$

S. T.

$0 \le x_i \le M\, y_i$ لكل (J)

$y_1 = \underline{0}$ أو $\underline{1}$ لكل (J)

ولتوضيح أن $x_i \le M\, y_i$ نلاحظ أن:

$x_j > 0$

$y_i = 1$

و k_j تكلفة ثابتة تضاف إلى دالة الهدف.

فإذا كان $x_j = 0$ و y_j تساوي صفر أو 1

ولكن بما أن $k_j > 0$ و z تصغير

$\therefore$ y_1 يجب أن تساوي صفر.

مثال 2:

في خطوط الإنتاج المحدد نلاحظ أن n من العمليات الإنتاجية يمكن أن تعمل على آلة واحدة في أقل زمن ممكن. وفي نهاية كل عملية إنتاجية ينتقل المنتج من عملية إنتاجية إلى أخرى حتى آخر عملية إنتاجية ليحقق الزمن اللازم للإنتاجي.

وعليه فإن القيود التي تحدد مسار هذه العملية الإنتاجية لها الاشتراطات الآتية:

1- التسلسل.

2- عدد اختلاط العمليات.

3- تحقيق الزمن اللازم للإنتاج.

والشروط الأخرى أنه من الممكن أن تقام عمليتين إنتاجيتين على الآلة الواحدة (بالتناوب).

فمثلاً لو فرضنا أن النوع الأول x_j الزمن المحدد لبداية العملية الإنتاجية الأولى J. وأن a_j هو الزمن اللازم للعملية الإنتاجية J.

فإذا كانت العملية I تسبق العملية J فإن نتيجة التسلسل تعني الآتي:

$$x_i + a_i \leq x_j$$

أما إذا اعتبرنا الشرط الثاني فإن:

$$x_i - x_j \geq a_j \quad \text{أو} \quad x_j - x_i \geq a_i$$

وهذا يعتمد على أن i أو x أو J ثابتاً في الحل الأمثل للمسألة.

أما القيد الثالث

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان العملة j تسبق i} \\ 1 & \text{إذا كان العملة i تسبق j} \end{cases}$$

للتعرف بأن M قيمة عالية جداً

$$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq a_j$$

$$M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq a_i$$

أما عن زمن إتمام العملية الإنتاجية فيمكن تعريفه بالمعادلة التالية:

$$x_j + a_i \leq d_j$$

حيث d_j الزمن اللازم لتكميل المنتج.

فإذا عرفنا t بأنها الزمن الإجمال لإنهاء جميع العمليات الإنتاجية فإن المسألة تصاغ على النحو الآتي:

Minimize $\quad z = t$

S.T.

$$x_j + a_j \leq t \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

9.2 طرق حل البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة:

1- طريقة قطع مستوى:

تهتم هذه الطريقة بحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة حل المسائل بواسطة الرسم.

مثال:

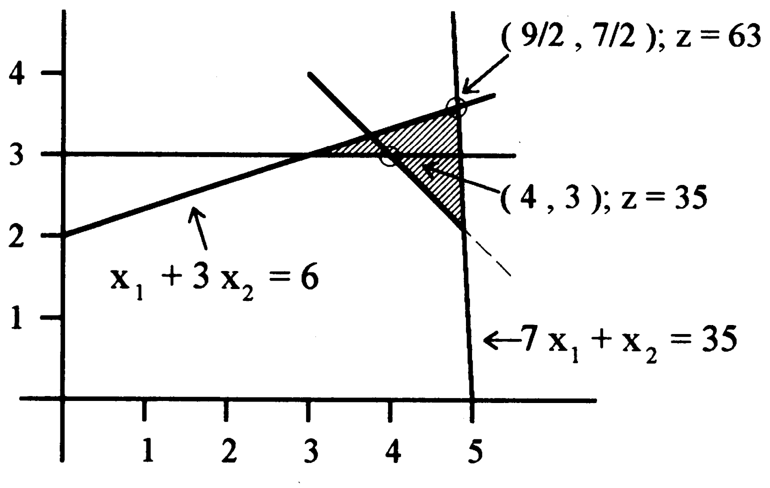
Max. $Z = 7x_1 + 9x_2$

S.T.

$-x_1 + 3x_2 \le 6$

$7x_1 + x_2 \le 35$

$x_1 , x_2 \ge 0$ وأعداد صحيحة



وإذا بحثنا عن الحل في الزوايا للمساحة المحصورة مع إهمال شرط الحصول على الأعداد الصحيحة فإنه سوف يعطي

$$x_1 = \frac{9}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{7}{2} \quad , \quad z = 63$$

ومن الواضح أن هذا الحل يعطي أعداد غير صحيحة.

إن فكرة قطع المستويات تعتمد على تغير الدالة المقعرة للحل إلى حل يعطي أعداد صحيحة والذي سوف يؤثر على المساحة المحدودة لإعطاء الحل بأعداد صحيحة ويعني هذا الاستغناء عن الكسور العشرية ويصبح الحل كما هو موضح بالرسم ويصبح الحل.

$$x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad z = 55$$

أما عن التعبير عن هذه الطريقة بواسطة السمبلكس فسوف نوضحها في المثال التالي:

مثال:

بالإشارة إلى المثال السابق الذي تم حلّه بواسطة الرسم نلاحظ أن الجدول النهائي (الحل الأمثل) سوف يكون على الصورة التالية:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	0	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	63
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{2}$
x_1	1	0	$\frac{-1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{2}$

بما أن الحل ذو أعداد غير صحيحة.

$$0x_1 + x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{7}{22}x_4 = 3\frac{1}{2}$$

$$\left(0+\frac{7}{22}\right)x_3 + \left(0+\frac{1}{22}\right)x_4 = \left(3+\frac{1}{2}\right)$$

$$S_1 = \frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x4 = -\frac{1}{2}$$

بإضافة هذه المعادلة إلى الجدول السابق وفق قواعد قطع المستويات.

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	الطرف الأيمن
z	0	0	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	0	63
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	$3\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$\frac{-1}{22}$	$\frac{3}{22}$	1	$4\frac{1}{2}$
S_1	1	0	$\frac{-7}{22}$	$\frac{-1}{22}$	1	$\frac{-1}{2}$

السمبلكس الثنائي يعطي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	الحل
z	0	0	0	1	0	63
x_2	0	1	0	0	0	0
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$4\frac{4}{7}$
x_3	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-22}{7}$	$1\frac{4}{7}$

مادام الحل مازال غير ذي أعداد صحيحة.

$\therefore$ يمكن كتابة المعادلة x_1 على النحو الآتي:

$$x_1 + \left(1 + \frac{1}{7}\right)x_4 + \left(-1 + \frac{6}{7}\right)S_1 = \left(4 + \frac{4}{7}\right)$$

$$S_2 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}S_1 = -\frac{4}{7}$$

بإضافة هذا القيد إلى آخر جدول تحصل على الآتي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
z	0	0	0	1	8	0	59
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	$4\frac{4}{7}$
x_3	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-22}{7}$	0	$1\frac{4}{7}$
S_2	1	0	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-6}{7}$	1	$\frac{-4}{7}$

إن استخدام طريقة السمبلكس الثنائي يؤدي إلى الآتي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
z	0	0	0	1	2	7	35
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	-1	1	4
x_3	0	0	1	0	-4	1	1
x_4	0	0	0	1	6	-7	4

وهذا الجدول يعطي الحل الأمثل للأعداد الصحيحة حيث

$$x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad z = 55$$

9.3 طرقة حل البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة بواسطة التوزيع والنظم (Branch - and - bound Method)

يهتم هذا التكتيك بحل مسائل البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة وذلك باعتبار المسألة أولاً ذات حالة البرمجة العاجية ويمكن تلخيص المبدأ العام لهذا التكتيك على النحو الآتي:

أولاً: حل مسألة البرمجة الخطية حلاً عادياً.

ثانياً: لو فرضنا أن x_1 عبارة عن متغير ذو عدد صحيح وأن حله الأمثل ( ) يحتوي على كسر عشري وبالتالي يمكن تحديد المدى الذي يوجد فيه الحل على النهج التالي:

$$[x_r^*] < x_r < [x_r^*] + 1$$

وبالتالي فإن الحل الأمثل للعدد الصحيح يجب أن يحقق الآتي:

$$xr \leq [x_r^*] \qquad \text{أو} \qquad x_r \geq [x_r^*] + 1$$

إن المسألة الأساسية هنا تكون في حالة تقسيم إلى مسألتين ولتوضيح الفكرة بصورة سريعة تلجأ إلى المثال العددي التالي:

Max. $\quad Z = 2\,x_1 + 3\,x_2$

S.T.

$5\,x_1 + 7\,x_2 \leq 35$

$4\,x_1 + 9\,x_2 \leq 36$

وأعداد صحيحة $x_1\,,\ x_2\,,\ \geq 0$

إن حل المسألة موضح في الشكل 8.1.

9.4 مسائل:

1- اوجد حل المسألة التالية:

Max. $\quad Z = 20\,x_1 + 10\,x_2 + 10\,x_3$

S.T.

$2\,x_1 + 20\,x_2 + 4\,x_3 \geq 15$

$6\,x_1 + 20\,x_2 + 4\,x_3 = 20$

وأعداد صحيحة $x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 \geq 0$

2- أوجد حل المسألة التالية بطريقة الرسم:

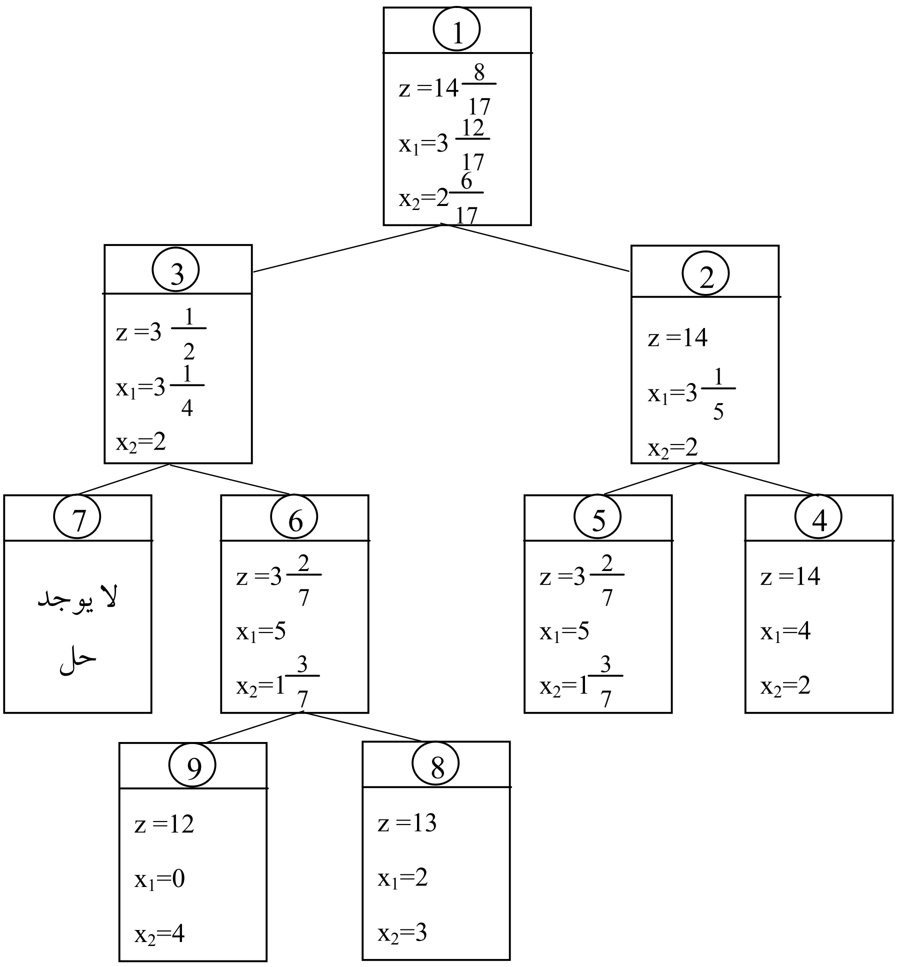
Max. $Z = 2\,x_1 + x_2$

S.T.

$10\,x_1 + 10\,x_2 \le 9$

$10\,x_1 + 2\,x_2 \le 1$

$x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ge 0$ وأعداد صحيحة



شكل (9.1)

4- أوجد حل المسألة التالية:

$$\text{Max.} \quad Z = x_1 + x_2$$

S.T.

$$2\,x_1 + 5\,x_2 \le 16$$

$$6\,x_1 + 5\,x_2 \le 30$$

وأعداد صحيحة $x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ge 0$

5- إذا فرضنا أن مصنع الجرارات بتاجوراء ينقل 750 جرار من طرابلس إلى بنغازي على شاحنات مع إعطاء المعلومات التالية:

	نوع 1	نوع 2
عدد الجرارات في الشحنة الواحدة	200	100
كمية الوقود المصروفة على الشحنة/ لتر	4800	2800
حجم الشحنة	25	10

وإذا علمت أن كمية الوقود المتاحة 22.000 لتر والربح المتوقع من الشحنة الواحدة للنوع الأول 2000 د.ل. لكل جرار وللنوع الثاني 1000 د.ل. لكل جرار.

أوجد عدد الشحنات المطلوبة لتعظيم الربح.

6- استخدم طريقة قطع المستويات لحل المسألة التالية:

$$\text{Max.} \quad Z = 15\,x_1 + 32\,x_2$$

S.T.

$$7\,x_1 + 16\,x_2 \le 35$$

$$3\,x_1 + 2\,x_2 \le 9$$

وأعداد صحيحة $x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ge 0$

7- شركة لحفر آبار النفط بمنطقة السرير حددت موقعين لحفر آبار نفط تضح هذا النفط إلى أربعة مواقع مختلفة على الشاطئ الليبي فإذا علمت بأن تكلفة تجهيز الحفر للآبار i والتي يرغب في ضخها إلى الموقع J.

$$(i = 1 , 2)$$

$$(J = 1 , 2 , 3 , 4)$$

معطاة حسب الجدول التالي:

الموقع	تكلفة النقل إلى مواقع استقبال النفط (د.ل)				
	1	2	3	4	تكلفة التجهيز
1	2	1	8	5	5
2	4	6	3	1	6

المطلوب: نقل النفط من الآبار إلى المواقع بأقل تكلفة ممكنة.

8- حل المسألة التالية:

$$\text{Max.} \quad Z = 3x_1 + 7x_2$$

S.T.

$$2x_1 + x_2 \le 2.5$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6$$

أعداد صحيحة $x_1 , x_2 , \ge 0$

9- حل المسألة التالية:

$$\text{Max.} \quad Z = x_1 + 2x_2$$

S.T.

$$5x_1 + 7x_2 \le 21$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 8$$

أعداد صحيحة $x_1 , x_2 , \ge 0$

10- حل المسألة التالية:

Max. $Z = 21\ x_1 + 11\ x_2$

S.T.

$7\ x_1 + 4\ x_2 \leq 13$

أعداد صحيحة $x_1\ ,\ x_2\ ,\ \geq 0$