الفصل الثاني

البرمجة الخطية

في هذا الفصل يتضح بجلاء مفهوم البرمجة الخطية كتقنية رياضية راقية لاستغلال الموارد المحدودة والوفاء بالهدف المنشود ، وذلك من خلال مناقشة مستفيضة لمفردات البرمجة وخطوات صياغة مسائلها ، والنموذج العام لأنماطها وتحقيق هذه الأنماط.

الفصل الثاني

2

البرمجة الخطية (Linear Programming)

2.1 مقدمة

البرمجة الخطية هي تكتيك رياضي يهتم بحل مشاكل الصناعة على وجه العموم فيما يتعلق بتصغير وتعظيم الدوال الخطية بوجود قيود أطرافها متساوية وأقل من وأكبر من، ويرجع حل هذه المعادلات للعالم (George B. Dantzig, 1947) ويستخدم تكتيك البرمجة الخطية لحل المشاكل العسكرية والمدنية والصناعية بالإضافة إلى تخطيط المدن ومجالات أخرى.

ومنذ عام 1947ف حيث نشر (Dantzig) لأول مرة طريقة حل البرمجة الخطية وسماها (Simplex) طريقة السمبلكس قام الكثيرون بتطوير هذه الطريقة لتحسين كفاءة مخرجاتها.

وأولى هذه المحاولات خرجت (1953ف) بواسطة المكتب الوطني للقياسات النمطية (National bureau of Standards) بالولايات المتحدة الأمريكية. وفي عام (1953ف) أصبح علم الحاسوب متاحاً وأصبح استخدام المحل الرياضي بواسطة الحاسوب.

وفي (1958ف) طور (R. E. Gomory) طريق السمبلكس بما يسمى بطريقة (Cutting plane algorithm) وذلك بحل البرمجة الخطية بإجابة الأعداد الصحيحة في (1690ف) (A. H. Land and A. G. Doig) نشر بحثاً لتطوير طريقة حل البرمجة الخطية بما يسمى (Branch-and-bound).

وحتى 1979ف طورت طريقة السمبلكس بواسطة بحاث من الاتحاد السوفيتي وسميت (L. G. Khachian). (Polynomial tire algorithm).

البرمجة الخطية إذن هي طريقة رياضية حديثة لتخصيص الموارد النادرة والمحددة من أجل تحقيق أهداف معنية حيث يكون من المستطاع التعبير عن الأهداف والقيود التي تحد من القدرة على تحقيقها في صورة معادلات أو متباينات رياضية.

2.2 تعريف مفردات البرمجة الخطية:

1- المتغيرات (Variables)

يقصد بالمتغير الذي يرمز له بقيمة مثل xi (j= 1,2,3, ...n)

2- المتغير المتحكم فيه (Continuous variable)

هو متغير تحت تصرف من يتخذ القرار.

3- المتغير المستمر (Continuous variable)

هو متغير ذو قيمة محصورة بين حدود عظمى ودنيا.

4- المتغير المتقطع (Discrete variable)

هو المتغير الذي يأخذ قيم موصوفة بدرجات معلومات

مثال X يمكن أن تأخذ القيم $1,0,\frac{5}{2},10.32$

5- المتغير المتقطع (Linear Function)

هي الدوال أو المعادلات التي لا تأخذ في أُسها إلا واحد فقط.

مثال $x_1 + x_2$ وليس $x_1 \log x_2$.

وتعتبر هذه الدوال من ذات المتغير المستمر

6- الدوال غير الخطية (Non liner Function):

هي عكس الدوال الخطية ويمكن أن يكون أُسها أقل و أكثر من (1).

$$x^{\frac{1}{2}}, x^{3}e^{-3}, e^{-\frac{1}{2}}, \frac{1^{x}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

وتعتبر هذه الدوال من الدوال ذات المتغير المتقطع.

7- النمط الرياضي (Mathematical model)

هو نمط يحدد العلاقة بين متغيرات وثابت تحاكي واقع أي نظام، والنمط الرياضي الخطي هو الذي يحوي على معادلات خطية فقط.

8- المعادلات (Equations)

ويمكن تمثيلها بواسطة الآتي:

$$F(x) = b$$

ويعني هذا أن بعض الدوال تحتوي على متغيرات في الطرف الشمالي.

$$X = x_1 , x_2 , x_3 \ldots\ldots x_n$$

وعلى طرف يمين يساوي (b)

9- الغير متعادلات (Inequalities)

ويقصد بها المعادلات التي طرفها الشمالي لا يساوي الطرف الأيمن فقط، بل يزيد أو يقل عنه. ويمكن التعبير عنها رياضياً على النحو التالي:

$$f(x) \leq b$$

$$f(x) \geq b$$

10- الأهداف (Objectives)

ويمكن تمثيلها رياضياً بواسطة المعادلة التالية:

$$\text{Minimize } f(x) \text{ or maximize } f(x)$$

وهو تعبير عن تصغير التكاليف أو المسافات أو تعظيم الربح أو الإنتاج.

11- القيود (Constraints)

هي عبارة عن معادلات يجب أن تحقق رياضياً في ظل الهدف، ويمكن أن يعبر عنها رياضياً.

$$t(x) \leq b$$

$$t(x) \geq b$$

$$t(x) = b$$

ويعتمد على حالة الإنتاجية.

2.3 خطوات صياغة مسائل البرمجة الخطية:

تُعبر صياغة مسائل البرمجة الخطية من الخطوات الأولى الأساسية لبناء نمط يسهل حله بواسطة البرمجة الخطية. وتبدأ أولاً بتحديد المتغيرات التي يمكن التحكم فيها (Controllable variables) ومنها إلى تحديد الهدف.

ويمكن حساب المتغيرات التي يمكن التحكم فيها من خلال معطيات المسألة المطروحة للحل مثل عملية عزل مسكن لتصغير تكاليف التكييف والكهرباء، ففي هذه الحالة تعتبر Controllable variables على النحو التالي:

1- كمية المواد اللازمة للعزل.

2- مساحة الجدران التي يتطلب عزلها.

3- عدد العواصف المتوقعة.
4- عدد الستائر المستخدمة بالمنزل.
5- كمية المواد المستخدمة لعزل خزان المياه.
6- التغير في درجات الحرارة.
7- سرعة الرياح واتجاهاتها.
8- كمية أشعة الشمس التي يتعرف لها المنزل.
9- عدد أفراد الأسرة.
10- عدد مرات فتح الأبواب والنوافذ بالمنزل.
11- تكلفة مواد العزل.

نلاحظ أن المتغيرات الإحدى عشر التي ذكرت أعلاه لا يمكن التحكم فيها، ما عدا الستة متغيرات الأولى فإنه يمكن التحكم فيها وتسمى (Controllable variables) أما باقي المتغيرات فتعتمد على تكلفة التكييف والكهرباء وتعتبر غير متحكم فيها (Uncontrollable variables)

وتعرف في النمط الرياضي بالشكل الأتي:

x_1 = كمية المواد اللازمة للعزل الطولية.
x_2 = كمية المواد التي تعزل الحافظ بالوزن.
x_3 = كمية المواسير اللازمة.
x_4 = كمية العواصف التي تمر مع النوافذ.
x_5 = كمية المواد المستخدمة.
x_6 = كمية المواد اللازمة لعزل خزان المياه.

ولصياغة دالة الهدف تتطلب عادة بعض الأمثلة الآتية:

- تعظيم الربح (Max. prefit)
- تصغير التكلفة (Min. cost)
- تصغير الوقت الضائع (Min. overtime)
- تعظيم استخدام الموارد المتاحة (آلات، مواد، الخ) (Max. resources)
- تصغير زمن غياب العاملين (Min. absenteeism)
- تصغير زمن عطل الآلات (Mix. tool breakdown
- تصغير المخاطرة في الشغل (Min. risk of work)
- تعظيم احتمال أن العمليات تقع ضمن المواصفات (Max. prob. Process. Spes)

ويصعب هذه الأهداف معادلات القيود والتي غالباً ما تخضع إلى الأسباب الآتية:

- المواد الخام المتاحة (Limited raw material)
- الميزانية المخصصة (Limited budget)
- الزمن المخصص (Limited time)
- القوى العاملة المتاحة (Limited personnel)
- القدرة والمهارة المتاحة (Limited ability or skill)

ويبقى العامل الثالث والأخير في صياغة المسائل وأنماط البرمجة الخطية وهو أن لا يسمح للمتغيرات بأن تأخذ قيم خيالية (سالبة) (No negativity).

2.4 النموذج العام لأنماط البرمجة الخطية:

يمكن كتابة النموذج العام لأنماط البرمجة الخطية رياضياً على النحو الآتي:

دالة الهدف Objective
$$\begin{cases} \text{Maximize } a_{r,1} + a_{r,2} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{rn}x_n \text{ لكل } r \\ \text{Maximize } a_{s,1} + a_{s,2} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{sn}x_n \text{ لكل } s \end{cases}$$

تحت شرط Subject to

$$A_{ti}\, x_1 + a_{t2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{tn}\, x_n \begin{matrix}\leq \\ = \\ \geq\end{matrix} b \text{ لكل } t$$

حيث

$$x_1 , x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots X_n \geq 0$$

2.5 تحقيق أنماط البرمجة الخطية (Model validity)

من المعروف أن أي نموذج رياضي على صورة برمجة خطية لا يمثل الواقع بالضبط ونحن لا نستطيع أن نقول أن هذا النموذج يمكن تحقيقه بنسبة ما في الحياة العملية وذاك بنسبة أخرى. ويمكن بالتالي تعريف النموذج وفقاً للمتوقع من الهدف المحدد مسبقاً. وتتخذ خطة تحقيق نماذج البرمجة الخطية وفقاً للمراحل الآتية:

1- معايرة تركيب النمط الرياضي.

2- معايرة منطق النمط الرياضي.

3- معايرة تصميم النمط ومستوى المعلومات ومصداقيتها.

4- معايرة ردود تأثير متغيرات النمط الرياضي.

ويقصد بمعايرة تركيب النمط الرياضي النظر إلى جميع المتغيرات التي يحتويها النمط وعلاقتها ببعضها وعلاقتها بالمنظمة التي تحتويها جميع المتغيرات ومدى انعكاساتها للحال الفعلية تحت الدراسة.

أما منطق النمط الرياضي فيقصد به الدقة في تمثيل المتغيرات للمعلومات التي يحتويها النظام الذي تحت الدراسة (System) بالإضافة إلى منطقية هذه المتغيرات ومحاكاتها وتسلسلها للواقع، على سبيل المثال؛ هل اتخاذ هذه السياسة المصاغة في النمط الرياضي تؤدي إلى زيادة في الربح أو تقليل في التكاليف .... الخ.

إن المعلومات المستخدمة في النمط الرياضي كمدخلات (Input) هي عصب تحقيق النمط الرياضي، فصحتها تعكس مصداقية النموذج ومحاكاته للنظام الذي تمت دراسته والمعايرة، وهذا يعتمد على طرق تجميعها سواء من التجارب المعملية أو من السوق التجاري أو الصناعي ومدى دقتها والابتعاد عن تقريبها وتنبؤها بواسطة الطرق الإحصائية.

إن استجابة النمط الرياضي للمعلومات تعكس مدى مصداقية النموذج الرياضي. فمثلاً العلاقة بين الاقتصاد القوي للدولة وتوفر وسائل المواصلات والطرق.. الوصول إلى تنبؤ معلومات بواسطة النمط الرياضي حسب المتوقع يعكس ذلك مصداقية النموذج الرياضي.

تأسيساً على ما تقدم يمكن استنتاج فرضيات البرمجة الخطية وهي:

1- أن يكون هناك هدف واضح ومحدد مثل تحقيق أعلى عائد (التعظيم) أو تقليل التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن. وبالطبع لا يوجد هدف واحد إذ تتغير درجة تحقيق الهدف بالتغيرات التي تحدث في البرنامج.

2- أن يكون هناك عدد من المتغيرات التي تتأثر في تغيرها بالقرارات والتي تؤثر في الهدف المنشود.

3- إن التغير الذي يحصل في المتغيرات يخضع لحدود أو قيود تفرضها المواد المتاحة والتي يمكن استخدامها في كل أو جزء من هذه المتغيرات.

4- وجود علاقة خطية معروفة ومحددة بين المتغيرات ودرجة تحقيق الأهداف المنشودة وكذلك بين الزيادة والنقصان في المتغيرات ودرجة استعمال الموارد. وهذا الشرط يعني بالتغير الرياضي أن تكون دالة الهدف والقيود المفروضة على المشكلة على هيئة معادلات أو متباينات من الدرجة الأولى.