الفصل الثالث

صياغة مسائل البرمجة الخطية

إن هذا الفصل معزز بالأمثلة التطبيقية التي تتعقل بكيفية صياغة مسائل البرمجة الخطية، مع التركيز على شروط عدم السلبية من خلال المزيد من الأمثلة التوضيحية.

الفصل الثالث

3

صياغة مسائل البرمجة الخطية
Problem Formulation

3.1 مقدمة:

يهتم هذا الفصل بصياغة مسائل البرمجة الخطية والتي تعني تحويل المشاكل الحقيقية إلى مسائل رياضية من خلال خطوات يحسب فيها شكل النموذج الرياضي ومستوى المتغيرات، نوع المتغيرات، وحدود المشكلة ومركباتها وذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال 1:

تنتج شركة إنتاجية ثلاثة منتجات. وكل منتج يحتاج إلى ثلاثة أنواع من المدخلات هي: المادة الخام، الطاقة البشرية، والطاقة الميكانيكية، ويوضح الجدول رقم (1-3) احتياجات وحدة المنتج من مدخلات الإنتاج والإنتاجية لكل مدخل والربح المتوقع لكل منها:

جدول (1-3)

البيـــان	احتياجات المنتج من مدخلات الإنتاج			كمية المدخلات المتاحة
	منتج 1	منتج 2	منتج 3	
المادة الخام كجم	2	3	4	1200 كجم
طاقة بشرية	1	2	3	400 ساعة
الطاقة الميكانيكية	3	1	6	1500 ساعة
الربح د.ل. للوحدة	10	7	5	

المطلوب:

صياغة نموذج البرمجة الخطية لتحديد الكمية الواجب إنتاجها من كل منتج لتعظيم الربح إلى أقصى حد ممكن.

الحل:

1- تحديد متغيرات النموذج (Determination of the decision variables):

باعتبار أن المطلوب كمية كل منتج يسعى إلى تعظيم الربح، عليه فإن المتغيرات هي:

x_1 كمية الإنتاج من المنتج 1

x_2 كمية الإنتاج من المنتج 2

x_3 كمية الإنتاج من المنتج 3

2- تحديد دالة الهدف (Formulation of the objective function):

باعتبار أن الهدف من تحديد كمية الإنتاج من كل منتج هو تعظيم الربح الإجمالي من كل المنتوجات التي تنتجها الشركة، عليه فإن دالة الهدف وفقاً للمعلومات الموضحة في الجدول (1-3):

$$\text{تعظيم} \quad \text{Maximize} \quad Z = 10x_1 + 7x_2 + 5x_3$$

3- تحديد القيود (Determination of the constraints):

تتمثل القيود المفروضة على الإنتاج في التحكم في كمية المواد الخام والطاقة البشرية والطاقة الميكانيكية، ولتحقيق هذه القيود يجب أن لا تحدث أي زيادة في الطلب على هذه المدخلات لتعظيم كمية الإنتاج من المنتوجات الثلاثة وبالتالي يمكن صياغة القيود على النحو الآتي:

المواد الخام	$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1200$
الطاقة البشرية	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 900$
الطاقة الميكانيكية	$2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 1500$

3.2 شروط عدم السلبية Non-Negativity:

باعتبار أن كمية الإنتاج يجب أن تكون حقيقية وليست خالية، أي يجب أن تكون موجبة في حالة إنتاج المنتج وصفر في حالة عدم إنتاج المنتج، ويكون قيد عدم السلبية على النحو التالي:

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

ويمكن تلخيص ما سبق ثم بناءه كنموذج برمجة خطية لحل مشكلة تعظيم الأرباح على النحو التالي:

تعظيم Maximize $Z= 10x_1 + 7x_2 + 5x_3$

تحت القيود Subject to:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1200$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 900$$
$$3x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 1500$$
$$x_1 , x_2 + x_3 \leq 0$$

مثال 2:

مجمع الدواجن بالمنطقة الوسطى يقوم بتغذية 20000 فراخ لمدة 8 أسابيع قبل نقلها إلى السوق. علماً بأن تغذية هذه الفراخ يختلف وفقاً للعمر والاستهلاك الأسبوعي الذي يبلغ تقريباً 455 غرام.

ولكي يتحقق الوزن المستهدف في الأسبوع الثامن. يجب أن تكون تركيبة الغذاء محتوية على نسبة معينة من البروتين.

المطلوب:

إيجاد الكمية المثالية من خلطة المواد الغذائية المستخدمة لتحقيق الوزن المطلوب وبأقل تكلفة ممكنة، والجدول رقم (2-3) يوضح تركيبة المواد وتكاليفها.

جدول (2-3)

التركيبة	كلسيوم	بروتين	أنسجة	التكلفة L.D / رطل
صخور	0.38	-	-	0.04
فول سوداني	0.001	0.09	0.02	0.015
حبوب	0.002	0.50	0.08	0.40

علماً بأن خلطة التركيبة الغذائية يشترك فيها الآتي:

1- نسبة الكالسيوم 0.8٪ على الأقل ولا تزيد عن 1.2٪

2- البروتين 22٪ على الأقل.

3- البروتين 5٪ على الأكثر.

الحل:

x_1 = كمية الصخور في الخلطة رطل.

x_2 = كمية الفول السوداني في الخلطة رطل.

x_3 = كمية الحبوب في الخلطة رطل.

باعتبار أن عد الفراخ 20.000، وكل فراخ يحتاج إلى رطل.

رطل $20.000 \times 1 = 20.000$

رطل $x_1 + x_2 + x_3 = 20.000$

∴ الشرط الأول:

$0.38\ x_1 + 0.001\ x_2 + 0.002\ x_3 \geq\ 0.008\ )x_1 + x_2 + x_3)$

$0.38\ x_1 + 0.001\ x_2 + 0.002\ x_3 \leq\ 0.012\ )x_1 + x_2 + x_3)$

والتي يمكن كتابتها بصورة أبسط على النحو الآتي:

$0.372\ x_1 - 0.007\ x_2 - 006\ x_3 \geq 0$

$0.368\ x_1 - 0.011\ x_2 - 010\ x_3 \leq 0$

والدالة الهدف:

$$\text{Minimize} \quad z = 0.04\,x_1 + 0.15\,x_2 + 0.40\,x_3$$

S.T

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 20.000$$

كالسيوم:

$$0.372\,x_1 - 0.007\,x_2 - 0.006\,x_3 \geq 0$$
$$0.368\,x_1 - 0.011\,x_2 - 0.010\,x_3 \geq 0$$

بروتين:

$$0.230\,x_1 - 0.130\,x_2 - 0.280\,x_3 \geq 0$$

أنسجة:

$$0.050\,x_1 - 0.030\,x_2 - 0.030\,x_3 \geq 0$$

$$x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \geq 0$$

مثال 3:

قررت إحدى شركات الاستثمارات الداخلية استثمار مبلغ 50,000 د.ل في ثلاثة مشاريع هي بناء عقارات وإدارة مشروع زراعي وتجارة سلع.

وقد قدّر عائد أرباحها السنوي بنسبة هي 7٪، 9٪، 14٪ على التوالي ومن ضمن مخططات الشركة الاستثمارية:

1- الحصول على العائد السوي بما لا يقل عن 5000 د.ل.
2- توفير 10,000 على الأقل.
3- التفوير من تجارة السلع الداخلية لا يزيد عن التوفير في باقي الاستثمارات.
4- التوفير في بناء العقارات لا يقل عن 5000 د.ل ولا يزيد عن 15,000د.ل.

المطلوب:

كيفية توزيع المبلغ المستثمر 50,000 د.ل في المشاريع الثلاثة بحيث يحقق أكبر استثمار ممكن.

الحل:

نفرض أن:

x_1 = الاستثمار في العقارات د.ل.

x_2 = الاستثمار في إدارة المشروع الزراعي د.ل.

x_3 = الاستثمار في تجارة السلع د.ل

أولاً: لتحقيق العائد السنوي من المشاريع الاستثمارية الثلاثة:

$$0.07\ x_1 + 0.09\ _{x2} + 0.14\ x_3 \geq 5000$$

ثانياً: لتحقيق الاستثمار في العقارات

$$x_2 \leq 10{,}000$$

ثالثاً: التوفير في تجارة السلع الداخلية لا يزيد عن التوفير في بناء العقارات

$$x_3 \leq x_1 + x_3$$

رابعاً: قيود التوفير في العقارات

$$5000 \leq x_1 \leq 15000$$

خامساً: مجموع الاستثمارات لا يزيد عن 50,000 د.ل

$$X_1 + x_2 + x_3 \leq 50{,}000$$

سادساً: شروط الاستثمارات لا تكون سالبة

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$
$$X_3 \geq 0$$

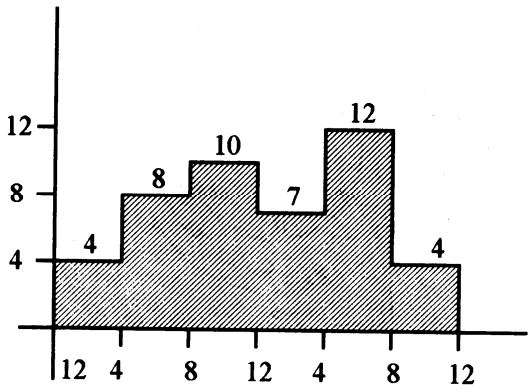
تعظيم Max $z = x_1 + x_2 + x_3$

S.T

$$0.07\,x_1 + 0.09\,_{x2} + 0.14\,x_3 \geq 5000$$
$$x_2 \geq 10{,}000$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq 0$$
$$x_1 \geq 5000$$
$$x_1 \geq 15000$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5000$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \leq 0$$

مثال 4:

قامت شركة النقل الريفي داخل أحدى مدن الجماهيرية الليبية بدراسة لغرض توفير المواصلات داخل المدينة مع مراعاة تقليل وتصغير عدد الحافلات التي تقوم بنقل المواطنين على أن تكون وسيلة النقل متوفرة خلال الأربع وعشرين ساعة. ومن خلال الدراسة الإحصائية التي قامت بها مجموعة من المهندسين أفادت الدراسة بعدد الحافلات اللازمة خلال فترات مختلفة خلال اليوم وقسمت هذه الفترات إلى ست فترات كما موضح بالشكل (1-3).



شكل (1-3)

المطلوب:

احسب عدد الحافلات اللازمة للتشغيل خلال الفترات الست المختلفة والتي تستوعب الطلبية المناسبة وبأقل عدد ممكن من الحافلات.

إذا افترضنا أن:

x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 ، x_5 ، x_6 هو عدد الحافلات اللازمة للتشغيل في بداية كل فترة، أي أن:

x_1 = عدد الحافلات التي تبدأ العمل الساعة 12:01

x_2 = عدد الحافلات التي تبدأ العمل الساعة 4:01 صباحاً

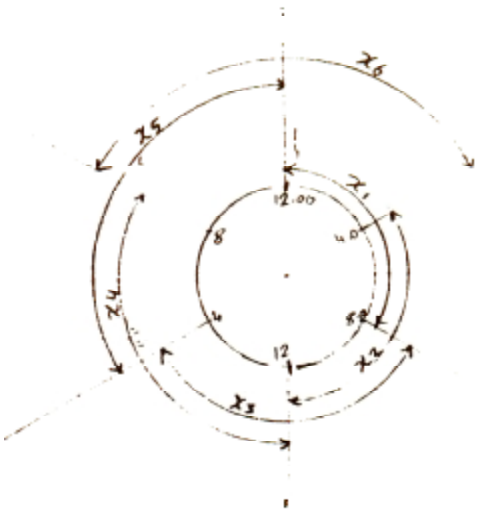
x_3 = عدد الحافلات التي تبدأ العمل الساعة 8:01

X_4 = عدد الحافلات التي تبدأ العمل الساعة 12:01

X_5 = عدد الحافلات التي تبدأ العمل الساعة 4:01

X_6 = عدد الحافلات التي تبدأ العمل الساعة 8:01

ويوضح الشكل رقم (2-3) التداخل الذي يحصل بين الفترات.



شكل (2-3)

∴ عدد الحافلات التي تشتغل خلال كل الفترات وبأقل عدد ممكن هو الهدف

تعظيم Minmize $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

S.T

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_6 &\geq 4 \ (12 \leftarrow 4 \text{ صباحاً}) \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad &\geq 8 \ (4 \leftarrow 8 \text{ صباحاً}) \\
x_2 + x_3 \qquad\qquad &\geq 10 \ (8.01 \leftarrow 12 \text{ صباحاً}) \\
x_3 + x_4 \qquad\qquad &\geq 7 \ (12 \leftarrow 4 \text{ مساءً}) \\
x_4 + x_5 \qquad\qquad &\geq 12 \ (4 \leftarrow 8) \\
x_5 + x_6 \qquad\qquad &\geq 4 \ (8 \leftarrow 12) \\
xj \qquad\qquad\qquad &\geq 0 \quad J = 1,2,\ldots,6
\end{aligned}
$$

مثال 5:

تقوم الشركة العربية الليبية للأسمنت بإنتاج كميات كبيرة من الأسمنت من مصانع مختلفة موزعة في كل من سوق الخميس، الخمس، درنة، بنغازي.

ويوزع إنتاج هذه المصانع على مراكز مختلفة للتسويق داخل الجماهيرية الليبية مثال بنغازي – سرت – مصراته – طرابلس – سبها.

فإذا فرضنا مصان الأسمنت M ومراكز التوزيع N

حيث: $i = 1 , 2, 3 , \ldots . m$

$j = 1 , 2 , 3 , \ldots . n$

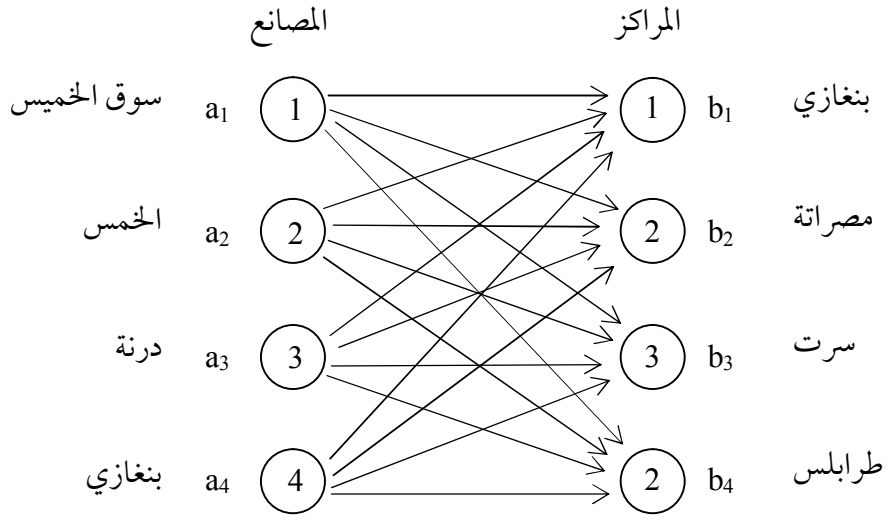
وأن تكلفة وحدة النقل من المصنع إلى المركز التوزيع هي cij

وأن سعر الإنتاج في المصنع i هي ai.

وأن سعر الطلبية في المـركز j هي bj.

المطلوب:

كيفية نقل كميات الأسمنت من المصنع i إلى مركز j بأقل تكلفة ممكنة وتعرف هذه المشكلة باسم مشكلة النقل.



ويمكن صياغة المسألة على نموذج برمجة خطية وذلك على النحو الآتي:

(تصغير) Minimize $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4}$ cij xil

Subject to:

$$\sum_{i=1}^{4} \text{xij} \leq \text{ai} \qquad \text{I} = 1, 2, \ldots 4$$

$$\sum_{j=1}^{4} \text{xij} = \text{bij} = 1,2,\ldots 4$$

$$\text{Xij} \geq \qquad \begin{matrix} \text{j} = 1 - ,4 \\ \text{I} = 1 - ,4 \end{matrix}$$

مثال 6:

شركة قطاع الورق والطباعة تنتج لفائف من الورق بعرض قدره 50 متر وتختلف طلبيات المطابع لموزعي الأفراد من يوم إلى آخر، ومن هذه الطلبيات المثال الآتي:

العرض (متر)	عدد الطلبيات
10	100
15	200
25	150
30	150

ونظراً لأن الشركة ترغب في وضع خطة لعملية عرض القطع وفقاً للطلبيات المدرجة أعلاه باستخدام العرض المتاح لها وهو 50 متر وفي نفس الوقت تهدف الشركة إلى تصغير الفاقد من الورق.

المطلوب:

استخدام طريقة البرمجة الخطة لحل هذه المشكلة.

الحل:

يتم اختيار المتغيرات التي يمكن اتخاذ القرار بشأنها وذلك بمعرفة عدد المرات التي يجب فيها اختيار نموذج القطع.

∴ النموذج الذي يجب أن يقطع به العرض المطلوب وهو 10، 15، 25، 30 متر. ومن النماذج التي يجب أن تختار مدونة في الجدول (3-3).

جدول (3-3) بعض احتمالات القطع الممكنة

المطلوب	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	5	3	2	2	2	1	0	0	0
15	0	1	2	0	0	1	1	1	0
25	0	0	0	1	0	1	0		2
30	0	0	0	0	1	0	1	1	0
الفاقـد	0	5	0	5	0	0	5	5	0

نعرف الآن أن:

x_j = عدد مرات استخدام النموذج j لمقابلة الطلبية المطلوبة.

حيث $j = 1, 2, \ldots, 9$

ومن المعروف أنه لا يمكن استخدام رقم غير صحيح من اللغة الواحدة لعملية القطع وبالتالي لابد من الحصول على قيم للمتغيرات بأعداد صحيحة.

فمثلاً: بالنظر إلى قطع نموذج عرض 10 متر.

$$5\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 + 2\,x_5 + x_6 + 0\,x_8 + 0\,x_9 - x_{10} = 100$$

المتغير x_{10} يعني عدد اللفات ذات النموذج 10 متر وتزيد عن 100 يمكن قطعها وبالتشابه بالنسبة إلى 15 متر، 25 متر، 30 متر.

$$x_2 + 2\,x_3 + x_6 + 3\,x_7 + x_8 - x_{11} = 200$$

$$x_4 + x_6 + 2\,x_9 - x_{12} = 150$$

$$x_5 + x_8 - x_{13} = 50$$

وتعتبر الزيادة للفائق ذات عرض 15، 25، 30 متر ممثلة بالمتغيرات:
x_{11} ، x_{12} ، x_{13} على التوالي.

ولتصغير الفاقد يمكن تمثل دالة الهدف بالتالي:

Minimize $z = 5\ x_1 + 5\ x_4 + 5\ x_8 + 10\ x_{10} + 15\ x_{11} + 25\ x_{12} + 30\ x_{13}$

ويعتبر دخول x_{10} ، x_{11} ، x_{12} ، x_{13} يمثل زيادة لفائق عن الطلبية المستخدمة في عملية القطع.

3.3 مسائل:

1- تنتج شركة س أربعة منتوجات مختلفة على نوعين من الآلات الإنتاجية.
زمن الإنتاج لكل منتج موضحاً بالساعة حسب الجدول التالي:

الزمن اللازم للمنتج بالساعة				
الآلة	**منتج 1**	**منتج 2**	**منتج 3**	**منتج 4**
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

علما بأن تكلفة المنتج تعتمد على زمن الإنتاج التي يستغرقه على الآلة.

حيث تكلفة المنتج الواحد على الآلة (1) د.ل و 20 د.ل على الآلة رقم (2). وإن الزمن المتاح لتشغيل آلة (1) هو 500 ساعة، 380 ساعة على الآلة (2)، وثمن بيع المنتوجات على التوالي 56.5 ، 70.0، 55.0 ، 45.0 د.ل. المطلوب صياغة المسألة لتحقيق أكبر ربح ممكن..

2- ينتج مصنع ثلاثة نماذج من منتج ما (I ، II، III) ويستخدم المصنع نوعان من المواد الخام (A، B) علماً بأن المتاح من المادة الخام A = 4000 وحدة، ومن المادة الخام B هو 600 وحدة، وتستهلك المواد الخام في كل نموذج على النحو الآتي:

المادة الخام	استهلاك النموذج من وحدات المادة الخام		
	I	II	III
A	2	3	5
B	4	2	7

يحتاج النموذج الثاني II مرتين من النموذج الأول I والنموذج الثالث III ثلاث مرات من النموذج I بالنسبة لزمن المنتجين.

ينتج المصنع من النموذج I عدد 1500 وحدة، وطلب السوق من النماذج I، II، III على التوالي 200، 200، 150 علماً بأن النسبة لعدد المنتوجات I، 11، III تساوي 3 : 2 : 5 وأن الربح لمنتج واحد من المنتوجات I ، II ، III على التوالي 30 ، 20 ، 50 د.ل.

المطلوب: صياغة المسألة لحلها بالبرمجة الخطية بحيث تحسب عدد المنتوجات المطلوب من I ، II ، III لتحقيق أكبر ربح ممكن.

3- تشاركية تقوم بأعمال الخدمات الهاتفية، قمت بمسح شامل للمواطنين في أحدى المدن الليبية والراغبين في وجود عمل حسب المقابلات الشخصية (بالهاتف أو مباشرة) وذلك على النحو الآتي:

أ- يجب أن يشمل المسح على الأقل 360 مقابلة مباشرة.

ب- يجب أن لا يقل عدد المقابلات عن 500 مقابلة (هاتفياً ومباشرة) في المساء.

ج- يجب أن لا يقل عن 60٪ من المقابلات بواسطة الهاتف أثناء الدوام الرسمي.

د- يجب أن يشمل مجموع المقابلات 1000 مقابلة (شخصياً أو بالهاتف) علما بأن تكلفة المقابلة الواحدة بالهاتف أو مباشرة أثناء الدوام أو مساءً تكون على النحو الآتي:

	مباشرة	بالهاتف
الدوام	2.0 د.ل	1.0 د.ل
مساءً	2.4 د.ل	1.20 د.ل

المطلوب: صياغة المسألة لتحقيق المقابلات وبأقل تكلفة ممكنة.

4- مهندس إنتاج يرغب في تخطيط ثلاثة منتوجات على أربع آلات. وكل المنتوجات تمر على جميع الآلات لغرض العمليات الإنتاجية.

تكلفة كل منتج على الآلة حسب المعلومات التالية:

	الآلات			
المنتوجات	1	2	3	4
1	4	4	5	7
2	6	7	5	6
3	12	10	8	11

والزمن اللازم بالساعات للإنتاج كل منتج على كل آلة موضح بالجدول التالي:

	الآلات			
المنتوجات	1	2	3	4
1	0.3	0.25	0.2	0.2
2	0.2	0.30	0.2	0.25
3	0.8	0.60	0.6	0.50

لو فرضنا أن طلبية السوق من المنتوجات 1، 2، 3 هي على التوالي 4000، 5000 ، 3000 وحدة. والزمن المتاح على كل آلة هو 1500، 1200، 1500، 2000 ساعة.

ضع المسألة لحلها بواسطة البرمجة الخطية.

5- تنتج شركة الشاحنات 3 أنواع من المواصلات: حافلة 24 راكب، شاحنة 12 طن، شاحنة 100 طن، والجدول الآتي يوضح بعض المعلومات عن كل نوع من المواصلات.

نوع المواصلات	الربح/ السيارة د.ل	كمية صرف الوقود بالجالون	المبيعات سنويا
حافلة 42 راكب	600	18	600.000
شاحنة 12 طن	400	24	800.000
شاحنة 100 طن	300	36	700.000

وأن تعليمات أمانة المواصلات تسمح بأن يكون استهلاك الوقود 30 ميل/ جالون أو أكثر. وأن كل ميل/ جالون يوفر أقل من 30 يجب أن تدفع الشركة عقوبة قدرها 200 د.ل لكل سيارة تنتجها الشركة. وترغب الشركة أن تعظم ربحاً وتقلل من نوع الصرف التي تحت 27 ميل/ الجالون. أكتب المسألة بالبرمجة الخطية.

6- أحدى محطات تقنية وصناعة زيت النفط تنتج ثلاثة أنواع من المستويات (A ، B ، C) من الوقود من ثلاثة منابع من مصادر النفط، أي مادة خام يمكن أن تستخدم للإنتاج أي نوع من المنتوجات وفقاً للمواصفات التالية؟

درجة الوقود	المواصفات الفنية	ثمن البيع للجالون د.ل.
A	لا يقل عن 50٪ من خام I ولا يزيد عن 40٪ من خام II	2.5
B	لا يقل عن 35٪ من خام I ولا يزيد عن 45٪ من خام II	2.20
C	لا يزيد عن 20٪ من خام III	1.80

وأن أكبر كمية متوفرة من النفط الخام في الفترة الواحدة وتكلفتها على النحو الآتي:

خام I 10.000 جالون بتكلفة 2.60/ جالون

خام II 9.000 جالون بتكلفة 2.00/ جالون

خام III 3.000 جالون بتكلفة 1.20/ جالون

يهدف مصنع تقطير النفط إلى تعظيم الربح. صغ المسألة بالبرمجة الخطية.