الفصل الرابع

استخدام الطريقة البيانية
في حل نموذج البرمجة الخطية

إن هذا الفصل مكرس لموضوع حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية، حيث جاء الفصل غنياً بالأمثلة التطبيقية على كيفية تمثيل القيود بواسطة الرسم البياني. كما يتضمن الفصل بعض التعريفات ذات العلاقة بطريقة الرسم البياني.

الفصل الرابع

4

استخدام الطريقة البيانية في حل نموذج البرمجة الخطية
Graphical Solution of Linear Programming

4.1 مقدمة:

من المتوقع جداً أن القارئ بعد معرفة كيفية صياغة مسائل البرمجة الخطية يكون متشوقاً لكيفية حل هذا النوع من النماذج الرياضية. ويجب علينا أن نشير أن الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية لا تصلح لحل المشكلات التي تحتوي على أكثر من ثلاثة متغيرات، ومن المعروف أيضاً أن التطبيقات العملية من النادر جداً أن تحتوي على هذا العدد القليل من المتغيرات والتي يمكن اتخاذ القرار فيها بدون هذه الخطوات الرياضية، وأنه من الضروري لفرض التوضيح والتحسس لكيفية حلول مسائل البرمجة الخطية استخدام طريقة الرسم البياني لإشعار القارئ بتقنية حل المسائل بالإضافة إلى التعرف على بعض المفردات المهمة في استخدام حلول المسائل بصفة عامة مهما كان عدد المتغيرات. ولتوضيح طريقة حل المسائل بواسطة الرسم والظواهر المتعلقة بها، نقدم الأمثلة الآتية:

4.2 أمثلة على كيفية تمثيل القيود بواسطة الرسم البياني:

إذا اعتبرنا القيود الآتية:

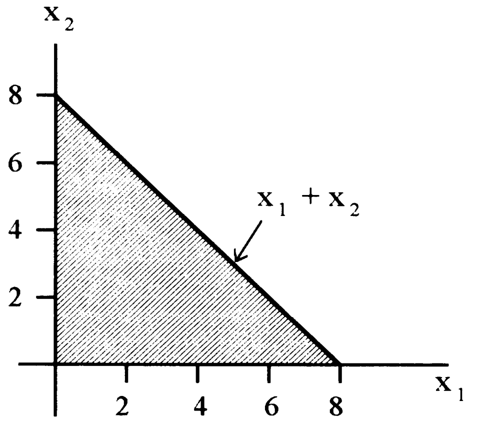
$$3\,x_1 + 2\,x_2 = 12 \qquad (4.1)$$

$$x_1 + x_2 \leq 18 \qquad (4.2)$$

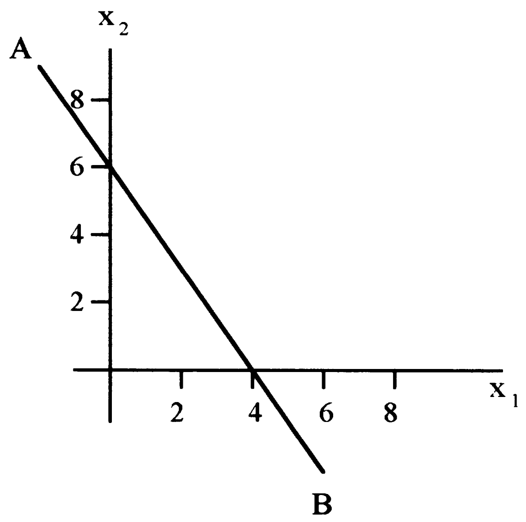
$$4\,x_1 + x_2 \geq 10 \qquad (4.3)$$

$$2\,x_1 - 3\,x_2 \leq 12 \qquad (4.4)$$

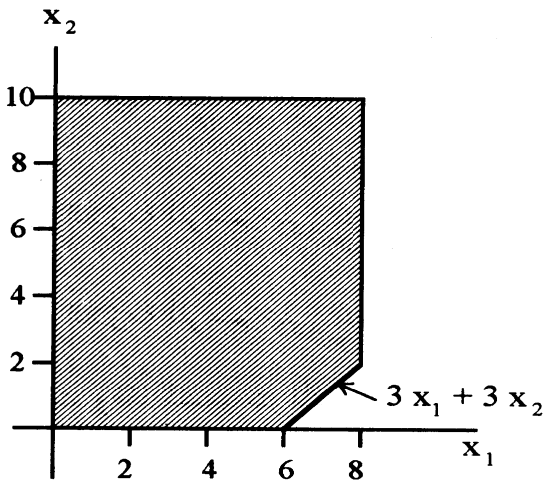
ومن خلال الرقم (4.1) نلاحظ أن القيد (4.1) يرسم على هيئة خط مستقيم كما هو موضح في الشكل (4.1.a) وأن أي نقطة على الخط AB يجب أن تحقق معادلة القيد، وبما أنه من المعروف في شروط مسائل البرمجة الخطة أن كل المتغيرات لها قيمة أكبر من أو تساوي (≤) صفر. عليه يجب اعتبار المساحة التي من $0 \geq x_1$ ، $0 \leq x_2$.



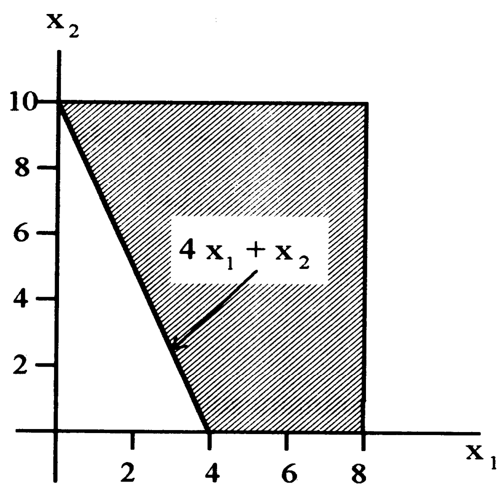
شكل (4.1.b)



شكل (4.1.a)



شكل (4.1.d)



شكل (4.1.c)

نلاحظ أن القيد (4.2) أقل من كما هو موضح بالشكل (4.1.b) والقيد (4.3) أكبر من كما هو موضح بالشكل (4.1.c) أقل من كما هو موضح بالشكل (4.1.d) وأن المساحة المظللة تعني أن أي نقطة على حدودها أو داخلها يجب أن تحقق المعادلة.

إن هذا المثال رسمت فيه كل معادلة على حدة، ولكن عندما يتم رسم المعادلات في شكل واحد سوف تحدد فيها المساحة المشتركة بين المعادلات التي تحقق كل المعادلات في آن واحد ونعرف المساحة المشتركة بـ (Feasible area) وهي المساحة التي يتاح فيها حل المسألة سواء كانت تعظيم أو تصغير.

ويمكن تلخيص الخطوات اللازمة للرسم على النحو الآتي:

1- نعرف محاور المتغيرات وفقاً لمسميات المتغيرات (مثل x_1 ، x_2).

2- ارسم معادلات القيود، حقق خط في حالة (=) أو مساحة في حالة (≤) أو (≥) المرافقة لكل قيد.

3- عرف أو حدد المنطقة الممكنة (Feasible area) بين القيود والتي تسمى مساحة الحل والتي أي نقطة فيها تحقق المعادلات وأن أي نقطة خارج هذه المساحة لا تحقق المعادلات تسمى خارج الحل أو (infeasible) بمعنى غير منظورة من وجهة نظر الحل.

4- عرف النقاط الركنية والتي مرشحة أن تكون نقطة الحل الأمثل (optimum).

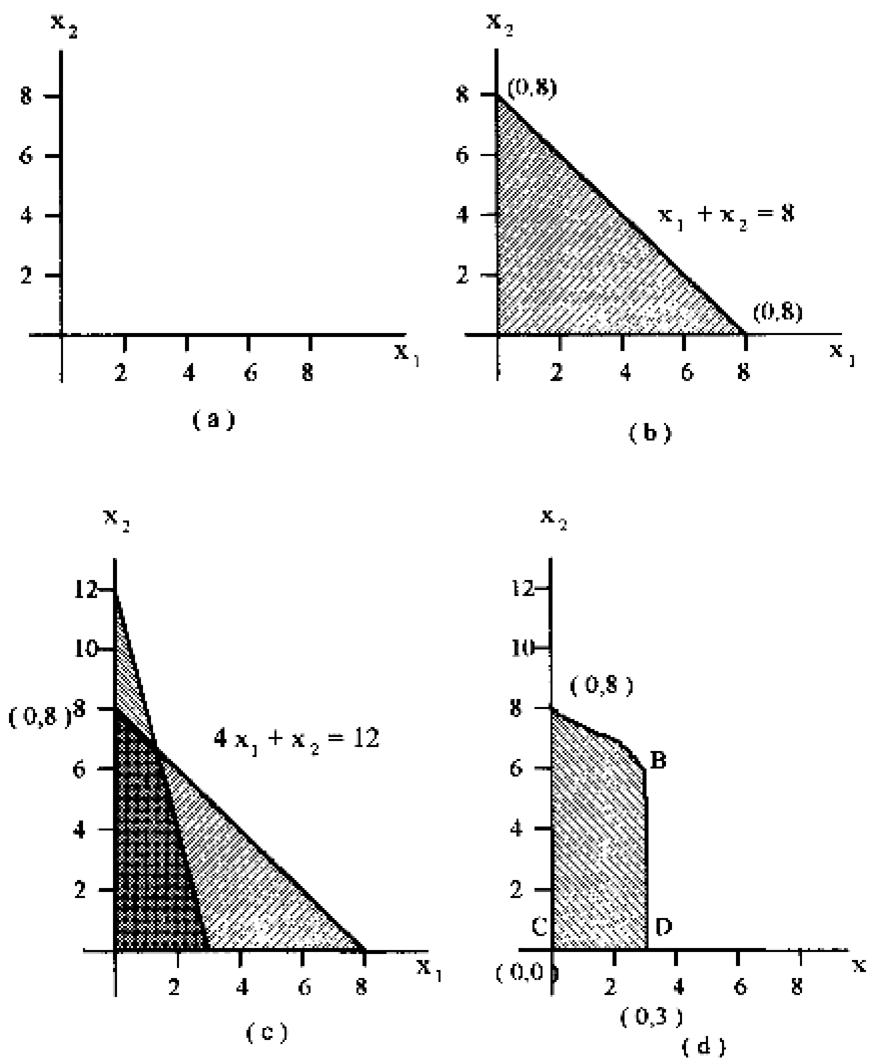
5- أحسب قيمة الحل الأمثل (optimum solution) وذلك بحساب قيمة دالة الهدف لكل نقطة مرشحة للحل في الخطوة الرابعة. وعليه فإن لنقطة التي تحقق أكبر قيمة ممكنة في حالة التعظيم أو أقل قيمة ممكنة لدالة الهدف في حالة التصغير تعتبر نقطة الحل وأن القيمة المصاحبة لها الدالة الهدف هي الحل الأمثل، وسوف نوضح هذه الخطوات في الأمثل القادمة.

مثال 2:

مسألة تعظيم (Maximization Problem).

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & z = 5\,x_1 + 2\,x_2 \\ & x_1 + x_2 \le 8 \\ & 4\,x_1 + x_2 \le 12 \\ & x_1\,,\,x_2 \ge 8 \end{aligned}$$

الحل:



∴ الواضح من الرسم (d) أن النقاط المشاركة في الحل هي النقاط a ، b ، c ، d

ولاختيار الحل الأمثل:

النقاط المساهمة في الحل	إحداثيات النقاط x_1 ، x_2	قيمة دالة الهدف $5\,x_1 + 2\,x_2$
A	(0.8)	16
B	$(4/3, 20/3)$	$\longrightarrow 20$
C	(0 , 0)	0
D	(3 , 0)	15

∴ الحل $x^* = (\frac{20}{3} ، \frac{4}{3})$ ، $z^* = 20$

مثال 3:

مسألة تصغير (Minimization problem)

يتشابه استخدام الطريقة البيانية في حالة مشكلة التصغير مثل تقليل التكاليف (Cost minimization) مع استخدامها في حالة مشكلة التعظيم والفارق الوحيد سوف يكون في خطوة اختيار الحل الأمثل.

أوجد قيمة x_1 ، x_2 إذا كان

$$\text{Maximize} \quad z = 2\,x_1 + 8\,x_2$$

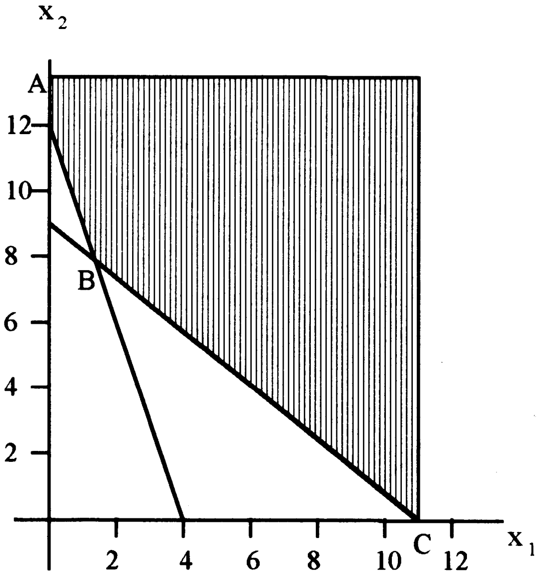
S.T

$$x_1 + x_2 \geq 9$$

$$3\,x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

يمكن رسم القيود على النحو التالي:



وبمعايرة دالة الهدف عند النقاط C, B, A في المساحة غير المغلقة (Unbounded) أو غير محصورة.

A ($x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $z = 96$

B ($x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{15}{2}$, $z = 63$)

C ($x_1 = 9$, $x_2 = 0$, $z = 18$)

$\therefore\ x^* = (9\ ,\ 0)\ \ z^* = 18$

* يعني النقطة التي يوجد عندها الحل الأمثل.

مثال 4:

مسألة تعظيم ومساحة الحل غير محصورة.

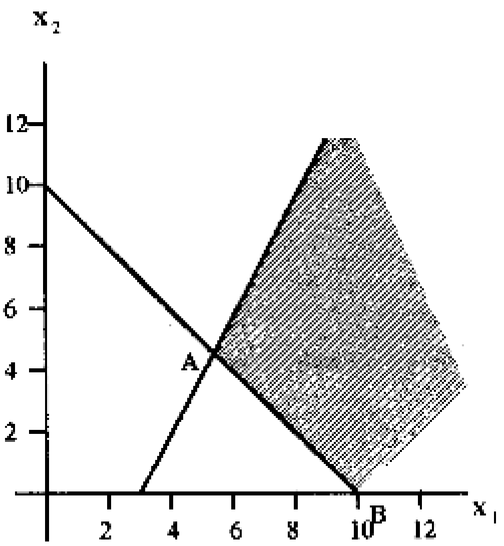
$$\text{Maximize} \quad z = 3x_1 + 7x_2$$

S.T

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

$$4x_1 + x_2 \geq 12$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$



$A\ (x_1 = \frac{22}{3}\ ,\ x_2 = \frac{28}{5})$

$B\ (x_1 = 10\ ,\ x_2 = 0)$

$C\ (x_1 = \infty\ ,\ x_2 = \infty)$

من الواضح أن الحل الأمثل هو أعظم قيمة ممكنة وبالتالي فإن نقطة الحل هي:

$c^*\ (x_1^* = \infty\ ,\ x_2^* = \infty\ ,\ z^* = \infty)$

مثال 5:

في حالة وجود أكثر من حل مثالي للمسألة (Alternative optimum solution).

أوجد قيمة x_1 ، x_2 إذا كان

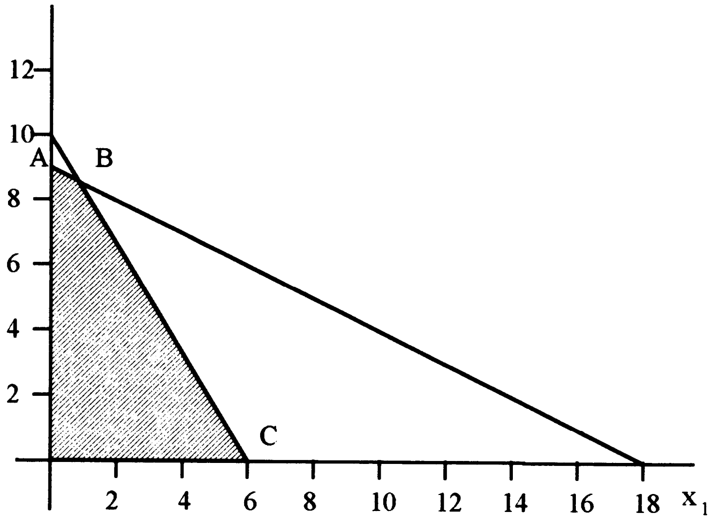
Maximize $z = 10x_1 + 6x_2$

S.T

$5x_1 + 3x_2 \leq 30$

$x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$



قيمة دالة الهدف	الإحداثيات	
54	(0 , 9)	A
→ 60	$(\frac{6}{7} ، \frac{60}{7})$	B
→ 60	(6 , 0)	C
0	(0 , 0)	D

∴ الحل هو $C^* = (6 ، 0)$ ، $\mathbf{B}^*(\frac{6}{7} ، \frac{60}{7})$

$Z^* = 60$

مثال 6:

القيد المتكرر (Redundant Constraints).

Maximize $z = 6x_1 + 12x_2$

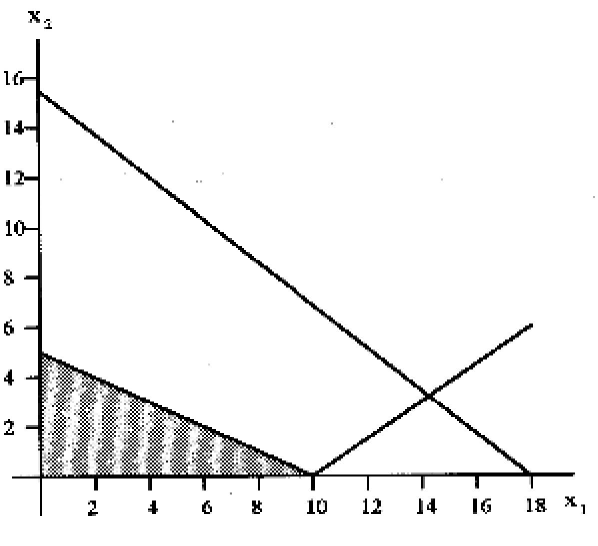
S.T

$x_1 + 2x_2 \leq 10$

$2x_1 + 5x_2 \leq 20$

$x_1 + x_2 \leq 15$

$x_1, x_2 \geq 0$



نلاحظ أن القيد الوحيد الذي يمكن أن يعتمد عليه في الحل هو القيد $(x_1 = 2x_2 \leq 10)$

وكذلك قيود عدم السلبية

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

أما القيد الثاني والثالث فلا تأثير لها على مساحة الحل.

مثال 7:

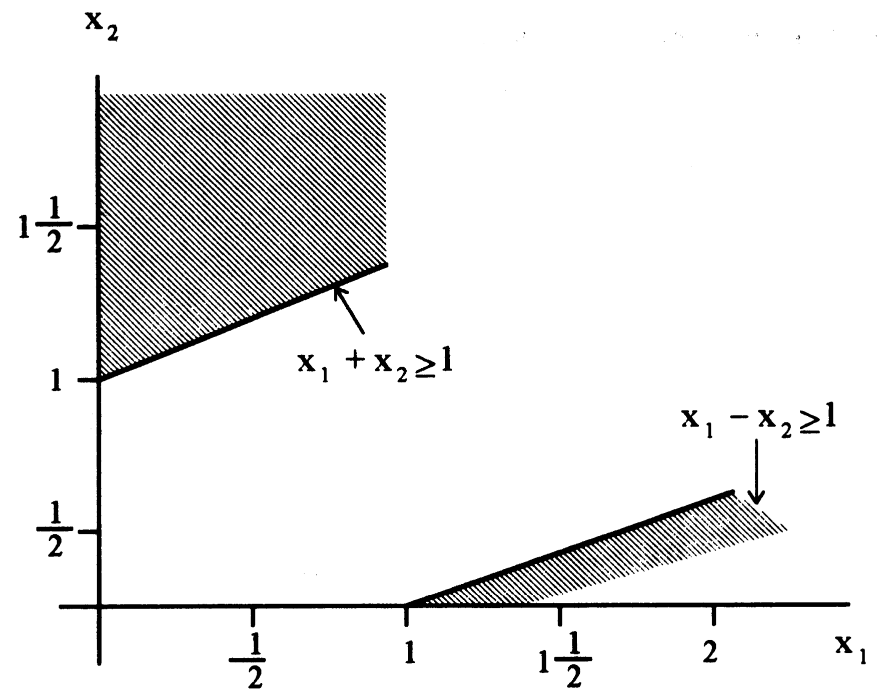
المسألة التي يوجد لها أكثر من حل (Alternative optimum solution).

أوجد قيمة x_1 ، x_2 إذا كان

$$\text{Maximize} \quad z = -x_1 - x_2$$

S.T

$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$



يتضح من الشكل السابق أنه لا توجد مساحة مشتركة بين القيود، وبالتالي لا يوجد حل للمسألة.

مثال 8: (المسألة التي لا يوجد لها حل)

$$\text{Max} \quad z = 3x_1 + 5x_2$$

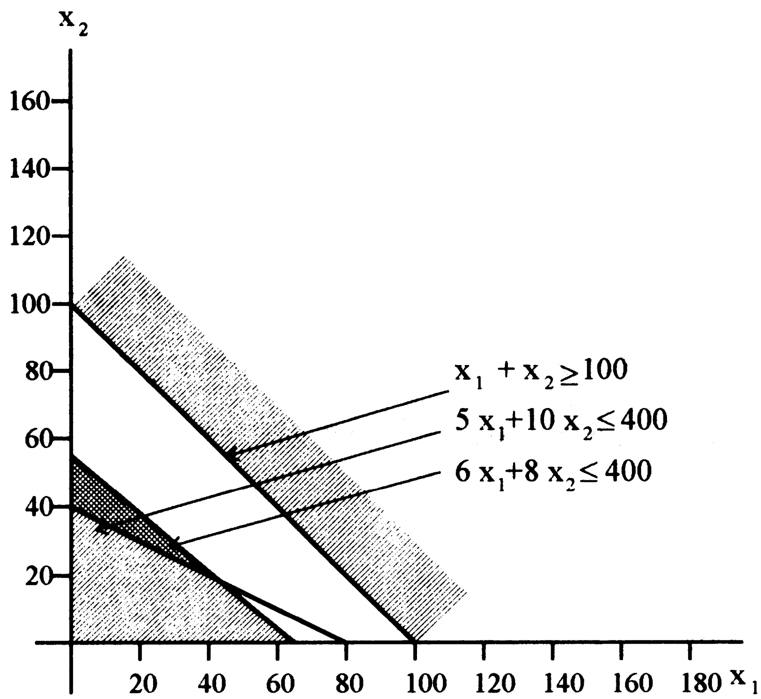
S.T

$$x_1 + x_2 \geq 100$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 400$$

$$6x_1 + 8x_2 \leq 440$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



نلاحظ من الرسم أن الثلاثة قيود الموضحة أعلاه لا توجد بينها مساحة مشتركة، بمعنى آخر لا توجد قيمة للمتغير x_1 ، x_2 تحقق كل المعادلات وعليه تسمى هذه المسألة بالمسألة التي ليس لها حل (Infusible problem)

4.3 بعض التعريفات المتعلقة بطريقة الرسم البياني:

1- الحل المنظور (Feasible solution)

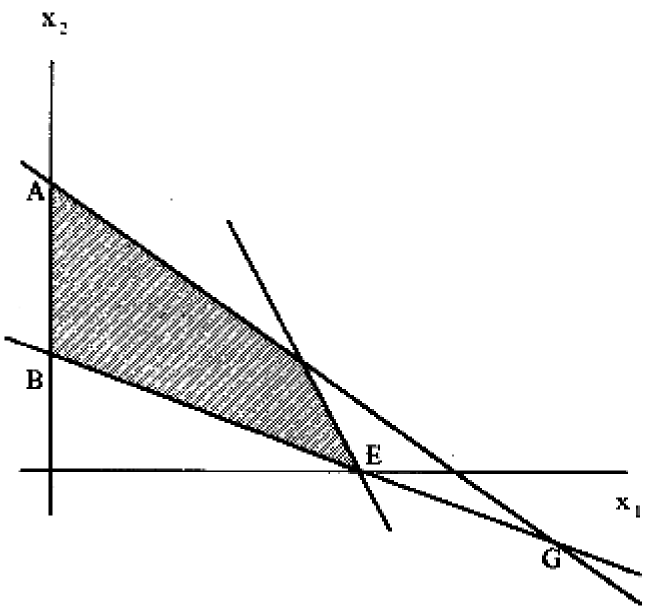
هو الحل للمتغيرات التي تحقق كل المعادلات التي تحضر منطقة العمل وكذلك شروط عدم السلبية.

2- الحل الغير معروف (Infeasible solution):

هو الحل الذي لا يوفر قيم للمتغيرات التي تحقق كل المعادلات (القيود) ولا يحصر مساحة محددة يمكن من خلالها تحديد نقاط الحدود (Boundaries).

3- الحل الابتدائي (Basic solution)

هو أي نقطة تقاطع بين أي معادلتين أو قيدين كما هو موضح بالرسم للنقاط من A إلى G. وتسمى أيضاً بـ (الحل الأساسي) في بعض الأدبيات البريطانية الحديثة.



4- نقاط التقاطع:

يُقصد بنقطة التقاطع الحل الابتدائي أو الأساسي.

5- الحل الأمثل (Optimum solution)

هي القيم المثلى للمتغيرات $x_1 , x_2 , ... x_n$ التي تحقق أكبر قيمة لـ z في حالة التعظيم وأقل قيمة لـ z في حالة التصغير أو التدنية.

4.4 مسائل:

1- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

$$\text{Max} \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

S.T

$$2x_1 + x_2 \le 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

2- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

$$\text{Max} \quad z = 5x_1 + 2x_2$$

S.T

$$x_1 + x_2 \le 10$$
$$x_1 \le 5$$
$$x_1 , x_2 \ge 0$$

3- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Max $z = 5x_1 + 6x_2$

S.T

$x_1 - 2x_2 \geq 2$

$-2x_1 + 3x_2 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

4- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Max $z = 4x_1 + 4x_2$

S.T

$2x_1 + 7x_2 \leq 21$

$7x_1 + 2x_2 \leq 49$

$x_1, x_2 \geq 0$

5- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Max $z = 5x_1 + x_2$

S.T

$x_1 + x_2 \leq 12$

$4x_1 + x_2 \leq 20$

$x_1, x_2 \geq 0$

6- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Max $z = x_1 + x_2$

S.T

$x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

7- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

$$\text{Min} \quad z = 3x_1 + 4x_2$$

S.T

$$-3x_1 + x_2 \leq 9$$
$$-9x_1 + 12x_2 \leq 21$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

8- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

$$\text{Min} \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

S.T

$$5x_1 + x_2 \leq 10$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

9- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

$$\text{Min} \quad z = 30x_1 + 50x_2$$

S.T

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 11$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 15$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

10- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

$$\text{Min} \quad z = 3x_1 + x_2$$

S.T

$$5x_1 + 4x_2 \le 40$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$5x_1 + 12x_2 \le 60$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

11- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

$$\text{Max} \quad z = x_1 + x_2$$

S.T

$$-x_1 + x_2 \le -1$$
$$x_1 - x_2 \le -1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

12- أجب عن الفقرات التالية:

أ - أذكر عيوب الحل بطريقة الرسم البياني لحل نموذج البرمجة الخطية وشروط تطبيقها.

ب- ما المقصود بخط دالة الهدف لنموذج البرمجة الخطية؟

ج- هل يعتبر كل حل أمثل حل ممكن؟ وهل كل حل ممكن هو حل أمثل؟

د- يختلف الحل الأمثل للمشكلة إذا تغيرت قيود نموج البرمجة الخطية. ناقش ذلك.

هـ- ما الفرق بين المتباينة والمعادلة في قيود البرمجة الخطية؟

13- ضع علامة (✓) و (✗) أمام العبارات التالية:

1- تعتمد دالة الهدف على قيمة المتغيرات. ( )

2- في نموذج البرمجة الخطية إحلال علامة أو ب = في قيود المسألة يمكن تحسين قيمة دالة الهدف. ( )

3- في نموذج البرمجة الخطية بواسطة القيود يمكن أن يتأثر إذا صادفنا القيد المتكرر. ( )

4- التغير في توفر الطرق الأيمن يؤثر على قيمة دالة الهدف. ( )

5- التغير في معاملات دالة الهدف (الثوابت) يؤثر في قيمة دالة الهدف. ( )

14- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم البياني

Max $z = 6\,x_1 + 2\,x_2$

S.T

$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$4\,x_1 + 3\,x_2 \le 12$$
$$-\,x_1 + x_2 \ge 1$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1\,,\,x_2 \ge 0$$