

الفصل السادس

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

يأتي هذا الفصل مكماً وداعماً للفصل الخامس، حيث يكون التركيز منصفاً على الجداول كما كان مناسباً لتخزين المعلومات بواسطة طريقة السمبلكس. ومن الطرق المتبعة في هذا المجال والتي يناقشها هذا الفصل طريقة القيمة الكبرى M لحل مسائل البرمجة الخطية. كما يتناول الفصل بعض الظواهر الشاذة لحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس.

الفصل السادس

6

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول The Simplex Method Tableau and Computation

6.1 مقدمة:

تعتبر الجداول المعدة لاستخدامها في حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس كمكان مناسب لتخزين المعلومات بطريقة مناسبة بغض النظر عن نوع المعلومات. وهذه المعلومات تشمل:

$$z = C_B X_B \quad \text{-1 دالة الهدف}$$

$$X_B = B^{-1} b \quad \text{-2 الحل الابتدائي الأساسي}$$

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_m) \quad \text{-3 مصفوفة الإتاحة}$$

$$y_1 = B^{-1} \theta_j \quad \text{-4 معامل المتغير}$$

$$\text{حيث } z_j - C_B y_j$$

فرق التغير في $z_j - C_j$ الذي بناء عليه يمكن اتخاذ القرار على أن الحل أمثل أو ذو مساحة غير محدودة أو لا يوجد إمكانية حل.

وبناء على هذه المعلومات يمكن تلخيص الجدول على النحو التالي:

(6-1) الجدول العام لحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة السمبلكس

معامل المتغيرات التي تدخله في الحل	المتغيرات الأساسية في حكم الحل	المتغيرات				قيمة الحل الابتدائي للمتغيرات
		X ₁	X ₂	X _n	
C _{B1}	X _{B1}	y _{1,1}	Y _{1,2}	Y _{1,n}	X _{B1}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C _{Bm}	X _{Bm}	Y _{m,1}	Y _{m,2}	Y _{m,n}	X _{Bm}
		Z _{1-c1}	Z _{2-c2}	Z _{n-cn}	z

(6-2) الجدول العام بالرموز

	Basic Value	C ₁	C ₂	C _B	
C _{B1}	X _{B1}	y ₁₁	Y ₁₂	Y _{1n}	X _{B1}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C _{Bm}	X _{Bm}	Y _{m1}	Y _{m2}	Y _{mn}	X _{Bm}
		Z _{1-c1}	Z _{2-c2}	Z _{n-cn}	z

مثال 6.1:

إذا أعطيت المعلومات التالية أوجد الحل الابتدائي للمسألة:

Maximize $z = 6x_1 + 4x_2$

S.T

$$4x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

S.T

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 20$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

C	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z =	-6	-8	0	0	0
x_3	4	1	1	0	20
x_4	1	4	0	1	4

$$\left(\frac{20}{1}, \frac{4}{4}\right)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| = I$$

$$y_1 = B^{-1} a_j = I^{-1} a_j = I a_j = a_j \quad \forall s$$

$$x_1 = B^{-1} b = I^{-1} b = I b = b$$

$$z = C_B x_B = (0 \ . \ 0) \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} = 0$$

$$Z_j = C_B y_j - C_j$$

$$z_1 = C_1 = 0 - 6 = -6$$

$$z_2 = C_2 = 0 - 8 = -8$$

$$z_3 = C_3 = 0 - 0 = 0$$

$$z_4 = C_4 = 0 - 0 = -0$$

6.2 حل مسألة البرمجة الخطية بطريقة جداول السمبلكس:

عند كل محاولة تقوم بعملية حل المعادلات الخطية الآتية بطريقة السمبلكس

$$B x_B = b$$

$$W B = C_B$$

$$B y = a$$

التي تكون مكونة لنظام البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Min } z$$

$$\text{Subject to: } z - C_B x_B - C_N x_n = 0 \quad (6.1)$$

$$B x_B + N x_n = b \quad (6.2)$$

$$x_B, x_n \geq 0$$

من المعادلة 6.1

$$x_B + B^{-1} N x_n = B^{-1} b$$

بضرب المعادلة (6.3) في C_B وإضافتها إلى المعادلة (6.1)

$$z + 0 x_B + (C_B B^{-1} N - C_N) x_n = C_B B^{-1} b$$

إذا كانت حالياً $x_n = 0$

وفق المعادلتين (6.3)، (6.4)

نحصل على

$$x_B = B^{-1} b$$

$$z = C_B B^{-1} b$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات في صورة جدول على النحو الآتي:

	z	x_B	x_N	الطرف الأيمن	
Z	1	0	$C_B B^{-1} N - C_N$	$C_B B^{-1} b$	صف 0
x_B	0	1	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$	صف 1 إلى m

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

من الصف صفر نلاحظ هل الحل هو الحل الأمثل بشرط أن $(z_j - C_j \leq 0)$ وغير ذلك أن المتغيرات غير الأساسية في الحل تدخل الحل إلى حين الوصول للحل الأمثل.

وفي حالة أن $(z_j - C_j) \geq 0$ و $y_k \geq 0$ فإن الحل يكون غير محدود المساحة (Unbounded area)

ويمكن تحديد المتغير الذي يخرج من المتغيرات الأساسية (التي لها حل) وتحديد المتغير الذي يدخل في الحل وبالتالي يسمى متغير أساسي (تم شرحه مسبقاً).

6.3 الخطوات الأساسية لطريقة السمبلكس:

أ- الخطوة الابتدائية: وذلك بإيجاد الحل الابتدائي على النحو التالي:

	Z	X_B	X_B	الطرف الأيمن
Z	1	0	$C_B B^{-1} N - C_N$	$C_B b'$
X_B	0	1	$B^{-1} N$	b'

ب- الخطوة الأساسية: إذا افترضنا أن

$$z_k - C_k = \text{Max} \{ z - c_j, j \in R \} \quad z_k - C_k \leq 0$$

توقف ويعتبر الحل وهو الحل الأمثل (تصغير) إذا لم يتوفر الشرط المذكور أعلاه اختر y_k توقف، فإن الحل هو الأمثل لمساحة غير محدودة خلال الاتجاه.

$$\left\{ \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} : x_k \geq 0 \right\}$$

حيث c_k مصفوفة الصف الواحد وتحتوي على كل صفر ما عدا عند موقع محدد \underline{K} . إذا $y_k > 0$ أحسب الموقع γ

$$\frac{b_r}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{rk} \geq 0 \right\}$$

واستمر إلى الخطوات التكرارية حتى الحل الأمثل أو غيره.

مثال 6.2

$$\text{Min } z = x_1 + x_2 - 4 x_3$$

S.T

$$x_1 + x_2 + 2 x_3 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

بإضافة (Slack) المتغيرات التي تحصل على إشارة التساوي

$$\text{Min } z = x_1 + x_2 + 4 x_3 + 0 x_4 + 0 x_5 = 0 x_6$$

S.T

$$x_1 + x_2 + 2 x_3 + x_4 = 9$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4$$

وبما أن كل $b \geq 0$ إذاً يمكن اختيار المتغيرات الأساسية التي نبدأ بها الحل

$$B = [x_4, x_5, x_6]$$

محاولة رقم 1

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
x_4	1	1	1	1	1	0	0	9
x_5	1	1	1	-1	0	1	0	2
x_6	-1	1	1	1	0	0	1	4

إذا نظرنا إلى الصف صفر (0) نلاحظ وجود قيمة موجبة واحدة مناظرة إلى x_3 وبالتالي بقيمة $z_3 - C_1 \geq$ وهذا يحدد دخول x_3 إلى الحل وتصبح من المتغيرات الأساسية لتحسين الوصول إلى الحل الأمثل.

ويمكن تحديد (x) التي تخرج من الحل الأساسي من ضمن (x_4, x_5, x_6) وذلك باستخدام القاعدة بقسمة العمود (الطرق اليمين) على العمود الذي تم اختياره ونختار أقل قيمة موجبة.

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{2}{-1}, \frac{4}{1}\right)$$

$$= (4.5, -2, 4)$$

∴ أقل قيمة موجبة هي 4 المقابلة لـ x_6

عليه يجب أن تخرج x_6 وتدخل x_3 وتصبح المحاولة الثانية على الشكل الآتي:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16
x_4	0	3	-1	0	1	0	-2	1
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_6	0	-1	1	1	0	0	1	4

بالنظر إلى الصف 0 مازالت توجد قيمة موجبة $(Z_j - C_j)$ مقابلة إلى x_j (3) وتطبق نفس الخطوات للمحاولة الثالثة.

المحاولة الثالثة:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	1	0	-4	-	-1	0	-2	17
x_1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$

وبما أن كل $z_j - C_j \leq 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية.

∴ الحل هو الأمثل وقيم الحل هي:

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad x_3 = \frac{13}{3} \quad x_5 = 0$$

$$x_2 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_6 = 0$$

$$z = -17$$

6.4 طريقة القيمة الكبرى M لحل مسائل البرمجة الخطية (Big M)

لقد شرحنا سابقاً أسباب إضافة المتغير الصناعي (Artificial variable) وذلك لإنشاء الحل الابتدائي لمسائل البرمجة الخطية بالإضافة إلى أن وجود هذا المتغير بقيمة موجبة تعني أن الحل الحالي ليس حلاً ملموساً لأي مسألة ويمكن التخلص من المتغير الصناعي وذلك بإضافة إلى دالة الهدف بموافق ذو قيمة كبيرة جداً وغير مشجعة، كمتغير في القيود وتصبح بذلك إمكانية التخلص منه سريعة جداً.

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

ولتوضيح هذه الظاهرة مع شرط أن $b \geq 0$

$$\text{Min } z = C_x$$

S.T

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

بإضافة المتغير الصناعي في حالة التساوي

$$Ax + x_a = b$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

إن بداية المتغيرات الأساسية للحل يمكن أن تعطي على هيئة:

$$x_a = b$$

ودالة الهدف طورت بطريقة الطرد المتغير الصناعي وذلك بإضافة قيمة كبيرة خيالية لمعاقبة وجود المتغير الصناعي في الحل وبالتحديد يسمى (M) وعليه يعاد صياغة المسألة على النحو التالي:

$$\text{Min } z = C_x + \text{mix}_a$$

S.T

$$Ax + x_a = b$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حيث M قيمة موجبة كبيرة جداً، والصفير Mixa يمكن تعليقه كعقوبة يدفعها الحل الذي يحتوي على $x_a \neq 0$ بالرغم من أن $x = 0$ ، $x_a = b$ كبداية للحل فقط وبإضافة M الكبيرة تسعى طريقة السمبلكس وحدها لإزالة x_a (المتغير أو المتغيرات الصناعية).

ولتوضيح هذه الطريقة نقدم المثال التالي:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{S.T} \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

أولاً: يجب إضافة slacks x_3, x_4, x_5 ومتغيرات صناعية x_6, x_7 وتصبح المسألة على الصيغة التالية:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = x_1 - 2x_2 - 0x_3 - 0x_4 + 2x_5 + Mx_6 + Mx_7 \\ \text{S.T} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 2 \\ & -x_1 + 4x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

ويمكن كتابتها في جداول السمبلكس على النحو التالي:

↓

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الطرف الأيمن
Z	1	-1	2	0	0	0	-M	-M	0
لا يوجد	0	1	1	-1	0	0	0	0	2
	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
	0	0	1	0	0	1	1	0	3

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

بضرب الصف رقم (1) والصف رقم (2) وجمعها على الصف صفر

	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	الطرف الأيمن
Z	1	-1	2+2M	-M	-M	0	0	0	2
X ₆	0	1	1	-1	0	0	1	0	1
X ₇	0	-1	1	0	-1	0	0	1	3
X ₅	0	0	1	0	0	1	0	0	

بالنظر في صف $0 \leq Z_j - C_j$ بالنسبة X_2 وعليه نختار X_2 للدخول في الحل الأساسي وتخرج X_7 وفق القاعدة:

$$\left(\frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1} \right)$$

	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	
Z	1	1+2M	0	-M	2+M	0	0	2-2M	-2+M
X ₆	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
X ₇	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
X ₅	0	1	0	0	1	1	0	-1	2

	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	الطرف الأيمن
Z	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}-M$	$-\frac{2}{3}-M$	$-\frac{2}{5}$
X ₆	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
X ₇	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
X ₅	0	0	0	1	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

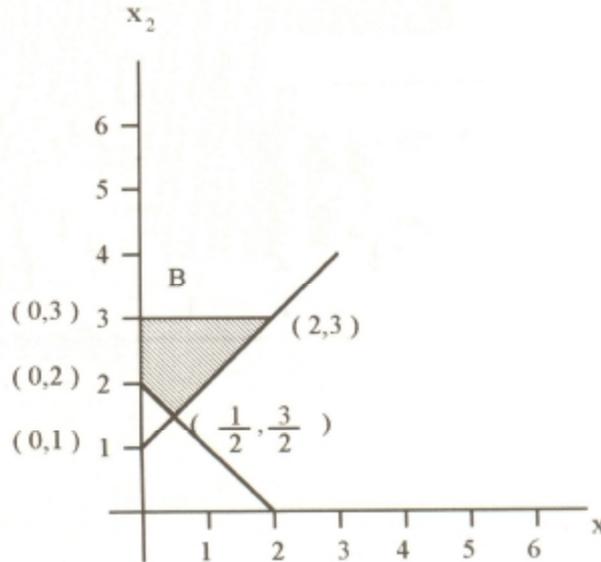
	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	الطرف الأيمن
Z	1	-3	0	2	0	0	-2-M	M	-4
X ₄	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
X ₂	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
X ₅	0	-1	0	1	0	1	-1	0	1

	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	الطرف الأيمن
Z	1	-1	0	0	0	-2	-M	-M	-6
X ₄	0	1	0	0	1	1	0	-1	2
X ₂	0	0	1	0	0	1	0	0	3
X ₁	0	-1	0	1	0	1	-1	0	1

بما أن كل $z_j - C_j \geq 0$ كل متغير لا يوجد في الحل الأساسي

∴ آخر جدول تعتبر الحل الأمثل (Optimum)

ويوضح الرسم الحل البياني للمسألة.



مثال 6.3:

(في حالة عدم وجود حل متاح للمسألة (Infeasible solution))

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = -x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{S.T} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & -x_1 + x_3 \geq 4 \\ & x_3 \geq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	الطرف الأيمن
1	1	3	-1	0	0	0	-M	-M	0
0	1	1	2	1	0	0	0	0	4
0	-1	0	1	-1	-1	0	1	0	4
0	0	0	1	0	0	-1	0	1	3

بضرب الصف 2 و 3 في M وإضافتهما إلى الصف 0

Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	الطرف الأيمن
z	1	1-M	3	-1+2M	0	-M	-M	0	7M
← x ₄	0	1	1	2	1	0	0	0	4
x ₇	0	-1	0	1	0	-1	0	1	4
x ₈	0	0	0	1	0	0	-1	0	3

بالنظر في الصف 0 نلاحظ وجود قيم لغير المتغيرات الأساسية.

مثال $x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$ أن $(z_j - C_j \geq 0)$ وبالتالي باختيار أكبر قيمة موجبة لتقرير المتغير الذي يدخل الحل وباستخدام القاعدة بقسمة $\frac{b}{x_r}$ حيث r العمود المختار.

$$\left(\frac{4}{2}, \frac{4}{1}, \frac{3}{1}\right) \Rightarrow (2, 4, 3)$$

وباعتبار 2 أُل قيمة موجبة عليه تدخل x_3 ونخرج x_4 .

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	الطرف الأيمن
Z	1	$\frac{3}{2}-2M$	$\frac{7}{2}-M$	0	$\frac{1}{2}-M$	-M	-M	0	0	2+3M
x_6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	2
x_7	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1	0	2
x_5	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	1

بما أن M قيمة موجبة وكبيرة جداً وأن $z_j - C_j \leq 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية في الحل، عليه فإن شروط الحصول على الحل الأمثل قد تحققت؛ ولكن بما أن المتغيرات الصناعية x_8, x_7 موجودة بالحل وعند قيم موجبة عالية وفقاً للقاعدة فإن الحل خيالي وغير موجود.

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

مثال 6.4 الحل موجود ولكن غير محدود المساحة:

(Unbounded optimal solution)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = -x_1 - 3x_2 \\ \text{S.T} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

بإضافة متغيرات صناعية للتساوي حسب القاعدة هما x_5 ، x_6 وبالتالي يعاد كتابة المسألة على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = -x_1 - x_2 + Mx_5 + Mx_6 \\ \text{S.T} \quad & x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

ويمكن نقل المسألة على هيئة الجداول على النحو الآتي:

Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
1	1	1	0	0	-M	-M	0
0	1	-1	-1	0	1	0	1
0	-1	1	2	-1	0	1	1

يضرب الصف الأول والثاني في صفر وإضافتها إلى الصف صفر

↓

	Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	الطرف الأيمن
Z	1	1	1	M	-M	0	0	2M
x ₅	0	-1	-1	-1	0	1	0	1
x ₆	0	1	2	2	-1	0	1	1

↓

	Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	الطرف الأيمن
Z	1	$1 + \frac{1}{2}M$	$1 - \frac{1}{2}M$	0	$\frac{1}{2}M$	0	$\frac{1}{2}M$	$-\frac{2}{5}$
x ₅	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x ₃	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

	Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	الطرف الأيمن
Z	1	0	2	0	1	-M-2	-M-1	-3
x ₁	0	1	0	0	-1	2	1	3
x ₅	0	0	1	1	-1	1	1	2

ونلاحظ أن $z_j - C_j \geq 0$ المقابلة لـ x_2 قيمة موجبة لكم $x_2 \leq 0$ عليه فإن المسألة ذات حل محدود ولأن المتغيرات الصناعية x_5, x_6 آلت إلى الصفر.

مثال 6.5:

$$\text{Min } Z = -x_1 - 3x_2$$

S.T

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

$$\text{Min } Z = x_1 - x_2 + M x_5 + 0 x_6 + 0 x_4$$

S.T

$$x_1 + x_2 + 2 x_3 - x_4 + x_5 = 4$$

$$x_1 - 2 x_2 + x_3 + x_6 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

عليه يمكن كتابة المسألة على هيئة الجداول على النحو الآتي:

↓

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	-1	1	-1	0	M	0	0
x_5	1	1	2	-1	1	0	4
x_6	1	-2	1	0	0	0	2

يضرب الصف الأول والثاني في صفر وإضافتها إلى الصف (0)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	-1-M	1-m	-2M-1	-M	0	0	4-M
x_5	1	1	2	-1	1	0	4
x_6	1	-2	1	0	0	1	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	M	-6M-1	0	M	0	2M+1	2
x_5	-1	5	0	-1	1	-2	0
x_3	1	-2	0	0	0	1	2

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	الطرف الأيمن
z	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$M+\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	2
x ₅	$-\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
x ₃	$\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	2

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	الطرف الأيمن
z	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$M+\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{3}$
x ₂	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x ₁	1	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

بما أن $y_{12} \leq 0$ والمتغيرات الصناعية كلها آلات إلى الصفر، فإن الحل ذو مساحة غير محدودة. وتوجد قيمة موجبة $0 \leq z_j - C_j$ مقابلة x_4 .

مثال 6.6

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = -x_1 - x_2 \\ \text{S.T} \quad & \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & -x_1 + x_2 \geq \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

بإضافة Slack x_3, x_4 وإضافة المتغيرات الصناعية x_5, x_6 للوصول إلى حالة التساوي وبالتالي يمكن كتابة المسألة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = -x_1 - x_2 - 0x_3 + Mx_5 + Mx_6 \\ \text{S.T} \quad & \end{aligned}$$

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

↓

Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	الطرف الأيمن
1	1	1	0	0	-M	-M	0
0	1	-1	-1	0	1	0	1
0	-1	1	0	-1	0	0	1

يضرب الصف الأول والصف الثاني في M وإضافتها إلى الصف صفر.

Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	الطرف الأيمن
Z	1	1	-M	-M	0	0	2M
x ₅	0	1	-1	0	1	0	1
x ₆	0	-1	1	0	0	1	2

Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	الطرف الأيمن
Z	0	2	1-M	-M	-1	0	2M-1
x ₁	0	1	-1	0	1	0	1
x ₆	0	0	0	-1	1	1	2

نلاحظ أن الصف صفر الذي يحتوي على $C_j - z_j$ توجد قيم المتغيرات الغير داخلية في أكبر من الصفر (≥ 0) ولا يمكن إدخال أي متغير آخر لتحسين الحل نظراً لعدم إمكانية تحسين الحل وفق القاعدة $(\frac{1}{-1}, \frac{2}{5})$ لا يجوز اختيار أحد العناصر وبدل على عدم توفر حل يحقق هذه المسألة.

6.5 بعض الظواهر الشاذة لحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمباكس:

1- المتغيرات الغير محددة المدى ($-\infty < x < +\infty$) (Unrestricted variables)

من خلال فصول هذا الكتاب نلاحظ أن المتغيرات التي تم التعامل معها كلها ذات خاصية أن $x \geq 0$.

وبالرغم من ذلك نواجه أحياناً بعض المتغيرات التي حدودها من $-\infty$ إلى $+\infty$.

مثال أن:

$$-\infty < x_3 < +\infty$$

ويمكن تحويلها إلى الشكل التالي:

$$x_3 = x_3^+ - x_3^- \text{ وتستبدل}$$

$$x_3^+ \geq 0$$

$$x_3^- \geq 0$$

ونعامل x_3^+ إذا كانت من ضمن المتغيرات في الحل الأساسي $x_3^+ \geq 0$ وتعامل x_3^-

إذا كانت من ضمن المتغيرات في الحل الأساسي على النمو $x_3^- \leq 0$

2- تكرار القيد (Redundant constraint)

يقصد بتكرار القيد الذي نادراً ما يحصل في صياغة المسائل وجود القيد الذي لا

يؤثر في طبيعة الحل.

3- الانحراف (Degeneracy)

يقصد بالانحراف عندما يوجد متغيراً أساسياً واحد أو أكثر يكون له قيمة صفر،

وتشكل هذه الظاهرة ما يلي:

- أ - عدم التحسن في دالة الهدف عندما يتحرك الحل من نقطة إلى أخرى كما هو الحال بواسطة الرسم أو الجداول.
- ب- من الممكن أن تنتقل من نقطة إلى أخرى في دائرة لا يمكن التحسن فيها أبداً في دالة الهدف للوصول إلى الحل الأمثل.

6.6 دراسة حالة Case study

تم اختيار مصنع الورق المقوى بالزهران كحالة للدراسة وتطبيق الأسلوب الرياضي لما يميز هذا المصنع عن المصانع الأخرى لكونه يعتمد على الإنتاج حسب الطلب ولا يوجد لديه إنتاج مصمم مسبقاً وبالتالي كان تطبيق الأسلوب الرياضي عليه ممكناً ويمكن الاستفادة من نتائجه بغرض تطبيقه في تصميم عمليات الإنتاج.

مقدمة عن المصنع:

يعتبر مصنع الورق المقوى (الكرتون) من إحدى القلاع الصناعية بالجماهيرية العظمى.

يقع هذا المصنع بمنطقة الزهران وقد أقيم على مساحة إجمالية وقدرها (15.000) متر مربع منها (17.000) متر مربع مباني إنتاجية وخدمية.

تبلغ الطاقة الإنتاجية للمصنع (15.000) طن في السنة أي ما يعادل (27) مليون متر مربع من (الكرتون) المسطح على أساس وردية واحدة في اليوم وقد تم إضافة وردية ثانية لزيادة القدرة الإنتاجية.

ويهدف هذا المشروع لتغطية احتياجات المصانع والشركات والمشاريع الزراعية والتشاريكات والأفراد بصناديق الكرتون لتغليف وتعبئة مختلف المنتجات المحلية.

وبقدر العدد الإجمالي للعاملين في المصنع بالورديتين 186 منتج، يوجد بالمصنع تسعة خطوط إنتاجية يمر المنتج بثلاث مراحل حتى ظهوره بالشكل النهائي؛ والمراحل هي:

1- مرحلة التقوية حيث يتم في هذه المرحلة تقويم الورق وذلك بلصق ثلاثة طبقات من الورق مع بعضها تكون الطبقة الوسطى بشكل متعرج وهي التي تجعل الورق ذو متانة وقوة عالية.

2- مرحلة التفصيل وهي المرحلة التي تلي مرحلة التقوية حيث يتم في هذه المرحلة إجراء عمليات شق (Slit) للورق بهدف الحصول على المقاسات المطلوبة وتتم عملية الشق باستخدام آلات شق خاصة بالورق وتتميز هذه الآلات بالدقة وإمكانية شق أي مقاس مطلوب.

يظهر الفاقد الناتج عن التوزيع (Layout) في هذه المرحلة حيث يتم استخلاصه وسحبه بواسطة الآلات خاصة يتم بعد ذلك تجميعه والتصرف فيه أيضاً يتم في نفس المرحلة قص المنتج وتفصيله ليكون جاهزاً للعملية التالية.

3- مرحلة اللصق والطباعة في هذه المرحلة يتم طباعة البيانات المطلوبة على الورق وبعدها يتم لصقه ليكون في شكله النهائي.

يعتمد المصنع في إنتاجه على الطلب الوارد من الشركات والمصانع والتشاريكات والأفراد ويختلف الطلب الوارد من شركة إلى أخرى أو من مصنع إلى آخر من حيث الكمية والنوع. يعتبر طلب المصنع الواحد أو الشركة الواحدة شبه ثابت من حيث النوع وتختلف الكمية المطلوبة من فترة إلى أخرى، وتعتبر هذه ميزة تستفيد منها إدارة الإنتاج في تخطيط عملياتها الإنتاجية حيث يتم تخزين كمية من الإنتاج الفائض لطلب معين (أي لا يمكن اعتباره فاقد) ويتم استخدامه عند وصول طلب آخر لنفس النوع ويترتب عن تخزين الفائض تكاليف تخزين ولكنها عموماً أقل من تكاليف اعتبار الفائض الفاقد.

وبخبرة إدارة الإنتاج نستطيع أن نتوقع أن المصانع والشركات تكون في حاجة إلى منتجات، وبالتالي تقوم إدارة الإنتاج بتصميم العمليات الإنتاجية للطلبات المتوقعة،

وبذلك يستمر الإنتاج ولا يتحمل المصنع تكاليف إضافية نتيجة لتوقف العمليات الإنتاجية.

يستخدم المصنع أربعة أبعاد قياسية للمواد الخام والتي هي عبارة عن لفائف ورقية وهذه الأبعاد هي (210 ، 220 ، 230 ، 240) سنتيمتر ويعتبر توفر هذه الأبعاد القياسية ميزة أخرى تستفيد منها إدارة الإنتاج في تقليل الفاقد عند التصميم لتوزيع المنتجات (Layout) على اللفائف حيث يتم استخدام البعد القياسي الأمثل أي الذي يحقق أقل كمية مفقودة.

دراسة تحليل طلب معين:

يختلف الطلب الوارد إلى المصنع ويتفاوت من يوم إلى آخر، لذلك سوف تختار عينة عشوائية لطلبية واردة في يوم 8-5-1994م وكانت الطلبية واردة من شركة الصابون ومواد التنظيف وتحتوي على ثلاثة أصناف كالتالي:

- الصنف الأول عدد الطلبية 52088 وحدة.
- الصنف الثاني عدد الطلبية 1245 وحدة.
- الصنف الثالث عدد الطلبية 28490 وحدة.

وكانت أبعاد الطلبيات محدودة لكل وحدة على النحو التالي:

العرض (mm)	الطول (mm)	
508	931	الصنف الأول
328	1017	الصنف الثاني
60	1397	الصنف الثالث

أما عرض اللفائف القياسية المتوفرة بالمصنع هي (210 ، 220 ، 230 ، 240) وجميع هذه اللفائف كانت بطول قياسي (260 متر) وبمعلومية الطول القياسي للفاثق والطول الإجمالي للوحدات يمكن تحديد عدد اللفائف المطلوبة من كل صنف.

1- الصنف الأول كانت الكمية (52088) وحدة وطول الوحدة (0.931) متر.

$$\text{الطول الكلي المطلوب الأول} = (0.931) (52088) = 48493.92 \text{ متر}$$

$$\text{عدد اللفائف المطلوبة من الصنف الأول} = (48493.92) \div (260) = 186.51 = 187$$

2- الصنف الثاني كانت الكمية (1245) وحدة وطول الوحدة (1.017) متر.

$$\text{الطول الكلي للصنف الثاني} = (1.017) (1245) = 1266.16 \text{ متر}$$

$$\text{عدد اللفائف المطلوبة من الصنف الثاني} = (1266.16) \div (260) = 4.86$$

3- الصنف الثالث كانت الكمية (28490) وحدة وطول الوحدة (1.397) متر.

$$\text{الطول الكلي للصنف الثالث} = (1.397) (28490) = 39798.3 \text{ متر}$$

$$\text{عدد اللفائف المطلوبة من الصنف الثالث} = (3978.3) \div (260) = 153$$

طريقة الحل لدراسة الحالة بالأسلوب التقليدي:

بعد أن تم تحديد المعالم الرئيسية للحالة بصورة واضحة يتم إيجاد الحل المناسب لها وفق الخطوات المتبعة. وبذلك يمكن صياغة الطلب كالاتي:

عدد اللفائف	العرض (m)	الصنف
187	0.51 = 0.508	1
5	0.33 = 0.328	2
153	0.60	3

وبما أنه يوجد بالمصنع أربعة قياسات فإنه سوف يصاغ النموذج لكل بُعد قياسي على فرض أنه لا يوجد لدى الشركة إلا بُعد قياسي واحد، كذلك يمكن المفاضلة في اختيار البعد القياسي الأمثل لإنتاج الطلبية فيما لو توفرت الأبعاد القياسية الأربعة.

1- البعد القياسي الأول (عرض 2.100 متر) بطول (260 متر)

يتم أولاً تحديد عدد الطرق الممكنة للتقسيم وهي كالتالي:

وقد تم استخدام برنامج حاسب آلي لحساب عدد التقسيمات (Settings) المنطقية التي تحقق أقل كمية فاقد وهذا البرنامج موجود بالملحق (1) والجدول التالي يوضح تجميع البيانات للتقسيمات الممكنة.

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	العدد المطلوب
33	3	1	0	3	6	1	4	1	2	4	0	5
60	1	2	0	0	0	1	1	0	2	0	3	153
51	1	1	4	2	0	2	0	3	0	1	0	187
فاقد	0	6	6	9	12	15	18	24	24	27	30	

ثم يتم بعد ذلك تحدد عدد التوليفات الممكنة لإنتاج الطلبية، إن عدد التوليفات الممكنة لإنتاج الطلبية كبير إذا أخذنا في الاعتبار الاحتمالات الممكنة لتكوين التوليفات، لذلك سيتم أخذ عينة من التوليفات وإجراء عملية المقارنة عليها، وهذه التوليفات كالتالي:

التوليفة الأولى:

يتم قطع 77 لفة بالطريقة الثانية وقطع 28 لفة بالطريقة الثالثة.

$$\text{الفاقد نتيجة التوزيع} = (6 \times 77) + (28 \times 6) = 5.10 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد من اللفات الفائضة} = (33 \times 72) + (60 \times 1) + (15 \times 2) = 25.38 \text{ متر}$$

$$\begin{aligned} \text{الفاقد الكلي} &= 5.10 + 25.38 = 30.48 \text{ متر} \\ &= (260 \times 30.48) = 7924.8 \text{ متر مربع} \end{aligned}$$

التوليفة الثانية:

يتم قطع 50 لفة بالطريقة الثانية و قطع 53 لفة بالطريقة السادسة و قطع 8 لفات بالطريقة الثالثة.

$$\begin{aligned} \text{الفاقد نتيجة التوزيع} &= (6 \times 50) + (15 \times 53) + (6 \times 8) = 11.13 \text{ متر} \\ \text{الفاقد نتيجة الفائض} &= (33 \times 98) + (51 \times 1) = 32.85 \text{ متر} \\ \text{الفاقد الكلي} &= 11.13 + 32.85 = 93.98 \text{ متر} \\ &= (260 \times 43.98) = 1434.8 \text{ متر مربع} \end{aligned}$$

التوليفة الثالثة:

$$\begin{aligned} \text{تم قطع 77 لفة بالطريقة الأولى وتم قطع 55 لفة بالطريقة الرابعة.} \\ \text{الفاقد نتيجة التوزيع} &= (6 \times 77) + (9 \times 55) = 9.66 \text{ متر} \\ \text{الفاقد نتيجة الفائض} &= (33 \times 237) + (60 \times 1) = 78.21 \text{ متر} \\ \text{الفاقد الكلي} &= 9.66 + 78.21 = 87.87 \text{ متر.} \\ &= (260 \times 87.87) = 22846.2 \text{ متر مربع.} \end{aligned}$$

تم اختيار التوليفة الأولى لإنتاج الطليبة بفرض توفر البعد (210) فقط.

2- البعد القياسي الثاني (بعرض 2.20 متر وطول 260 متر).

يتم تحديد عدد الطرق الممكنة للتقسيم بواسطة برنامج الحاسوب وهي (140) توزيع قد وجد 11 توزيع منطقي وهي التي تحمل أقل قيمة للفاقد وكانت كالتالي:

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	العدد المطلوب
33	2	3	5	1	0	3	1	0	3	6	1	4	5
60	0	2	0	3	1	1	1	0	0	0	1	1	153
51	3	0	1	0	3	1	1	4	2	0	2	0	187
فاقد	1	1	4	7	7	10	16	16	19	22	25	28	

بعد أن تم تحديد التوزيعات الأفضل نقوم بإجراء المفاضلة بين التوليفات لتوضيح المشكلة وهي كالتالي:

التوليفة الأولى:

تم قطع 30 لفة بطريقة التقسيم الرابعة و قطع 63 لفة بطريقة التقسيم الخامسة.

$$\text{الفاقد نتيجة التوزيع} = (7 \times 30) + (7 \times 63) = 6.51 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد نتيجة الفائض} = (33 \times 25) + (51 \times 2) = 9.27 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الكلي} = (9.27 + 6.5) = 15.78 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الكلي (m}^2\text{)} = (260 \times 15.78) = 4102.8 \text{ متر مربع}$$

التوليفة الثانية:

تم قطع 51 لفة بطريقة التقسيم الرابعة و قطع 63 لفة بطريقة التقسيم الأولى.

$$\text{الفاقد نتيجة التوزيع} = (63 \times 1) + (51 \times 7) = 4.20 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد نتيجة الفائض} = (33 \times 132) + (51 \times 2) = 60.54 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الكلي} = 60.54 + 4.20 = 64.74 \text{ متر}$$

$$= (260 \times 64.74) = 16832.4 \text{ متر مربع}$$

التوليفة الثالثة:

تم قطع 50 لفة بالطريقة الرابعة و 60 لفة بالطريقة الخامسة، و 7 لفات بالطريقة السابعة.

$$\text{الفاقد نتيجة التوزيع} = (7 \times 50) + (60 \times 7) + (7 \times 16) = 8.82 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الناتج عن اللفائف الزائدة} = (33 \times 52) + (64 \times 60) = 55.56 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الكلي} = 55.56 + 8.82 = 64.38 \text{ متر مربع}$$

وبالمقارنة تم اختيار التوليفة الأولى في حالة توفر البعد القياسي 2.20 متر.

3- البعد القياسي الثالث (بعرض 2.30 متر وطول 260 متر):

باستخدام برنامج الحاسوب وجد أن عدد التوزيعات الممكنة هي (140) وبتحديد أفضل توزيعات وهي التي تحمل أقل كمية من الفاقد وكان بيانها كالتالي:

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	العدد المطلوب
33	2	5	0	3	2	5	1	0	3	1	0	3	6	5
60	1	1	2	2	0	0	3	1	1	2	0	0	0	153
51	2	0	2	0	3	1	0	3	1	1	4	2	0	187
فاقد	2	5	8	11	11	14	17	17	20	26	26	29	32	

وبطريقة طرق التقسيم السابقة يمكن تحديد عدد من التوليفات وكانت:

التوليفة الأولى:

هي عبارة عن قطع 77 لفة بالطريقة الثالث و قطع 33 لفة بالطريقة السادسة.

وبالتالي يكون الفاقد نتيجة التوزيع =

$$10.78 \text{ متر} = 6.16 + 4.6 = (8 \times 77) \div (14 \times 33)$$

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

$$\text{والفاقد نتيجة الفائض من اللفائف} = (60) \div (160 \times 33) = 53.40 \text{ متر}$$

$$\text{وبالتالي يكون الفاقد الكلي} = (53.40 \times 10.78) = 64.18 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الكلي (متر)} = 260 \times 64.18 = 6686.8 \text{ متر مربع}$$

التوليفة الثانية:

وتمت بقطع 51 لفة بالطريقة السابعة وقطع 63 لفة بالطريقة الخامسة.

$$\text{وكانت الفاقد نتيجة التوزيع} = (17 \times 51) + (11 \times 63) = 8.67 \text{ متر}$$

$$\text{والفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف} = (2 \times 51) \div (174 \times 33) = 55.52 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الكلي} = 8.67 \div 55.52 = 64.19 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الكلي} = 64.19 \times 260 = 16689.4 \text{ متر مربع}$$

التوليفة الثالثة:

وتمت بقطع 94 لفة بالطريقة الثالثة وقطع لفة واحدة بالطريقة الثانية.

$$\text{وكان الفاقد نتيجة التوزيع} = (8 \times 94) \div 5 = 7.57 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف} = (36 \times 60) \div (5 \times 33) = 23.25 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الكلي} = 260 \times 30.82 = 8013.2 \text{ متر مربع}$$

التوليفة الرابعة:

وتمت بقطع 94 لفة بالطريقة الثالثة وقطع 5 لفائف بالطريقة السابعة.

$$\text{وكان الفاقد نتيجة التوزيع} = (8 \times 94) \div (17 \times 5) = 8.37 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف} = (1 \times 51) \div (50 \times 60) = 30.51 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الكلي} = 30.51 + 8.37 = 38.88 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الكلي} = 260 \times 38.88 = 10108.8 \text{ متر مربع}$$

وبالمقارنة بين الفاقد في التوليفات الرابعة نجد أن أفضل توليفة لإنتاج الطلبية باستخدام البعد القياسي (2300) متر هي التوليفة الثالثة التي تحقق أقل فاقد.

4- البعد القياسي الرابع (بعرض 2.400 متر وطول 260 متر):

باستخدام برنامج الحاسوب وجد أن عدد التوليفات الممكنة هي (270) وقد تم اختيار أفضل 7 توزيعات وهي التي تحمل أقل كمية من الفاقد وكان بينها كالتالي:

العدد المطلوب	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	المقياس
5	3	1	0	5	2	3	0	5	2	7	0	4	2	1	0	33
153	1	3	1	0	0	2	2	1	1	0	3	0	2	0	4	60
187	1	0	3	1	3	0	2	0	2	0	1	2	1	4	0	51
	30	27	27	24	21	21	18	15	12	9	9	6	3	3	0	فاقد

وباستخدام طرق التقسيم أو التوزيعات المختارة يمكن تحديد التوليفات الممكنة لإنتاج الطلبية وكانت كالتالي:

التوليفة الأولى:

تمت بقطع 39 لفة بالطريقة الأولى وقطع 47 لفة بالطريقة الثانية.

$$\text{كان الفاقد نتيجة التوزيع} = 47 \times 3 = 1.41$$

والفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف =

$$15.17 \text{ متر} = (3 \times 60) + (1 \times 51) \div (42 \times 33)$$

$$\text{وكان الفاقد الكلي} = 15.17 + 1.14 = 16.58 \text{ متر}$$

$$\bullet\bullet \text{ الفاقد الكلي} = 260 \times 16.58 = 4310.8 \text{ متر مربع}$$

$$\text{الفاقد الكلي (متر)} = 260 \times 64.18 = 6686.8 \text{ متر مربع}$$

التوليفة الثانية:

وتمت بقطع 51 لفة بالطريقة الخامسة و قطع 34 لفة بالطريقة الثانية.

$$\text{وكان الفاقد نتيجة التوزيع} = (9 \times 51) \div (34 \times 3) = 5.61 \text{ متر}$$

$$\text{وكان الفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف} = 9.57$$

$$\text{الفاقد الكلي} = 5.61 + 9.57 = 15.18 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الكلي} = 15.18 \times 260 = 3946.8 \text{ متر}$$

التوليفة الثالثة:

وتمت بقطع 20 لفة بالطريقة الخامسة و قطع 41 لفة بالطريقة الثانية و قطع 25 لفة

بالطريقة

$$\text{وكان الفاقد نتيجة التوزيع} = (3 \times 41) + (25 \times 9) = 3.48 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف} = (2 \times 51) + (2 \times 60) + (36 \times 33) = 1410$$

متر

$$\text{الفاقد الكلي} = 5.61 + 9.57 = 15.18 \text{ متر}$$

$$\text{الفاقد الكلي} = 15.18 \times 260 = 3946.8 \text{ متر}$$

بإجراء المقارنات بين الفاقد في التوليفات الثلاثة نجد أن التوليفة الثانية هي التي

تحمل أقل فاقد وبالتالي تكون هي أفضل توليفة لإنتاج الطليبة.

إجراء الحل بطريقة البرمجة الخطية:

مد أن تم إيجاد الحل للمشكلة المدروسة بالطريقة التقليدية والتي تحتاج إلى زمن لإجراء خطوات الحل ولإجراء الحل بالصورة الرياضية تم استخدام طريقة (Big-M) بالاستعانة ببرنامج حاسب آلي موجود بملحق (2) وكان ذلك على النحو التالي:

صياغة نموذج رياضي لكل الحالة:

1- النموذج الأول باستخدام البعد القياسي (2.100) متر والجدول الآتي يوضح البيانات المتعلقة بالمشكلة.

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	العدد المطلوب
33	3	1	0	3	6	1	4	1	2	4	0	5
60	1	2	0	0	0	1	1	0	2	0	3	135
51	1	1	4	2	0	2	0	3	0	1	0	187
فاقد	0	6	6	9	12	14	18	24	24	27	30	

بعد ذلك يتم تحديد المعادلات والتي تمثل قيود النموذج الرياضي.

$$\text{عدد اللفائف المنتجة} = 3x_1 + x_2 + 3x_4 + x_6 + x_8 + 2x_9 + x_{10} + 4x_{11} = 33 \quad (33).$$

$$\text{عدد اللفائف المنتجة} = 1 + 2x_2 + x_6 + x_7 + 2x_9 + 3x_{10} = 60 \quad (60).$$

$$\text{عدد اللفائف المنتجة} = 1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_6 + x_3 + x_7 = 51 \quad (51).$$

يكون العدد الفائض من اللفائف عند الحد المطلوب

$$Y_1 = 1x_1 + x_2 + 3x_4 + 6x_5 + x_6 + 4x_7 + x_8 + 2x_9 + 4x_{10} = 5$$

$$Y_2 = 1 = 1x_2 + x_6 + x_7 + 2x_9 + 3x_{11} = 151$$

$$Y_3 = x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_6 + 3x_7 + x_9 + x_{11} = 187$$

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

وبهذا تكون كمية الفاقد الكلي الناتج عن عملية التقسيم

$$L (6x_2+6x_3+94+12x_5+15x_6+18x_7+24x_8+24x_9+27x_{10}+30x_{11})$$

حيث L طول اللفة القياسية ويمكن إهماله لأنه عامل مشترك. كذلك يتم إهمال الفاقد Y1، Y2، Y3 وبهذا يمكن صيغة النموذج الرياضي على الصورة:

$$Z_{min} = 6 x_2 + 6 x_3 + 6 x_4 + 12 x_5 + 15 x_6 + 24 x_8 + 24 x_9 + 27 x_{10} + 30 x_{11}$$

Subject To:

$$3 x_1 - x_2 + 3 x_4 + 6 x_5 + x_6 + 4 x_7 + x_8 + 2 x_9 + 4 x_{10} = 5$$

$$x_1 + 2 x_2 + x_6 + x_7 + 2 x_9 + 3 x_{11} = 154$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 2 x_4 + 2 x_6 + 2 x_8 + x_{10} = 187$$

$$x_L \dots\dots\dots x_{11} \geq 0$$

ولإجراء الحل على النموذج لابد من وضعه على الصورة القياسية كالتالي:

$$Z_{min} = 6 x_2 + 6 x_3 + 9 x_4 + 12 x_5 + 15 x_6 + x_7 + 24 x_8 + 24 x_9 + 27 x_{10} + 30 x_{11} + MR1 \quad MR2 + MR2$$

Subject To:

$$3 x_1 + x_2 + 3 x_4 + 6 x_5 + x_6 + 4 x_7 + x_8 + 2 x_9 + 4 x_{10} + R1 = 5$$

$$x_1 + 2 x_2 + x_6 + x_7 + 2 x_9 + 3 x_{11} + R2 = 154$$

$$x_1 + x_2 + 4 x_3 + 2 x_4 + 2 x_6 + 3 x_8 + x_{10} + R3 = 187$$

$$x_1 \quad x_2 \dots\dots\dots x_{11} \geq 0$$

$$R1 , R2 , R3 \geq 0$$

بعد وضع النموذج الرياضي على الصورة القياسية صار بالإمكان إجراء خطوات

الحل بالطريق المبسط (BIG - M) وذلك بإدخاله في برامج: Linear Programming

Analysis

$$Z_{\min} = 5M x_1 + (4M-6) x_2 + (4M-6) x_3 + (9M-9) x_4 + (6M-12) x_5 + \\ (4M-5) x_6 + (5M-18) x_7 + (4M-24) x_8 + (4M-24) x_9 + (5M-27) x_{10} \\ + (3M-30) x_{11}$$

Subject To:

$$3 x_1 + x_2 + 3 x_4 + 6 x_5 + x_6 + 4 x_7 + x_8 + 2 x_9 + 4 x_{10} + R1 = 5 \\ x_1 + 2 x_2 + x_6 + x_7 + 2 x_9 + 3 x_{11} + R2 = 154 \\ x_1 + x_2 + 4 x_3 + 2 x_4 + 2 x_6 + 3 x_8 + x_{10} + R3 = 187 \\ x_1 x_2 \dots \dots \dots x_{11} \geq 0 \\ R1 , R2 , R3 \geq 0$$

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

```

*****
*
*   LINEAR PROGRAMMING   *
*   ANALYSIS             *
*
*****

```

** INFORMATION ENTERED **

```

NUMBER OF CONSTRAINTS      3
NUMBER OF VARIABLES        11
NUMBER OF <= CONSTRAINTS  0
NUMBER OF = CONSTRAINTS    3
NUMBER OF >= CONSTRAINTS  0

```

ITERATION 0

X 12 = 5

X 13 = 154

X 14 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.50E+13	3.000	1.000	1.000
X 2	0.40E+13	1.000	2.000	1.000
X 3	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 4	0.50E+13	3.000	0.000	2.000
X 5	0.60E+13	6.000	0.000	0.000
X 6	0.40E+13	1.000	1.000	2.000
X 7	0.50E+13	4.000	1.000	0.000
X 8	0.40E+13	1.000	0.000	3.000
X 9	0.40E+13	2.000	2.000	0.000
X 10	0.50E+13	4.000	0.000	1.000
X 11	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	0.00E+13	1.000	0.000	0.000
R 2	0.00E+13	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.35E+13	5.000	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 1
 BASIS
 X 5 = .8333334
 X 13 = 154
 X 14 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	X5	R2	R3
X 1	0.20E+13	0.500	1.000	1.000
X 2	0.30E+13	0.160	2.000	1.000
X 3	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 4	0.20E+13	0.500	0.000	2.000
X 5	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
X 6	0.30E+13	0.160	1.000	2.000
X 7	0.10E+13	0.660	1.000	0.000
X 8	0.30E+13	0.160	0.000	3.000
X 9	0.20E+13	0.330	2.000	0.000
X 10	0.10E+13	0.660	0.000	1.000
X 11	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	-.10E+13	0.160	0.000	0.000
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.34E+15	0.830	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.41E+14

ITERATION 2
 BASIS
 X 3 = 46.75
 X 5 = 0.8333334
 X 14 = 154

Basis	C(j) - Z(J)	X5	R2	X3
X 1	0.10E+13	0.500	1.000	0.250
X 2	0.20E+13	0.160	2.000	0.250
X 3	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
X 4	0.00E+13	0.500	0.000	0.500
X 5	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
X 6	0.10E+13	0.160	1.000	0.500
X 7	0.10E+13	0.660	1.000	0.000
X 8	-.18E+13	0.160	0.000	0.750
X 9	0.20E+13	0.330	2.000	0.000
X 10	-.18E+02	0.660	0.000	0.250
X 11	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	-.10E+13	0.160	0.000	0.000
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	-.10E+13	0.000	0.000	0.250
SOLU	0.15E+15	0.830	154.0	46.75

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1.54E+14

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

ITERATION 3

BASIS

X 3 = 46.75

X 5 = .8333334

X 14 = 51.33334

Basis	C(j) - Z(J)	X5	R2	R3
X 1	0.18E+02	0.500	0.300	0.2
X 2	0.18E+02	0.160	0.600	0.2
X 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.0
X 4	0.00E+00	0.500	0.000	0.5
X 5	0.00E+12	1.000	0.000	0.0
X 6	0.00E+00	0.160	0.330	0.5
X 7	0.00E+00	0.660	0.330	0.0
X 8	-.18E+02	0.160	0.000	0.7
X 9	0.00E+00	0.330	0.660	0.0
X 10	-.18E+02	0.660	0.000	0.2
X 11	0.00E+13	0.000	1.000	0.0
R 1	-.10E+13	0.160	0.000	0.0
R 2	-.10E+13	0.000	0.330	0.0
R 3	-.00E+13	0.000	0.000	0.2
SOLU	0.18E+04	0.830	51.33	46

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1830

ITERATION 4

BASIS

X 1 = 1.666667

X 3 = 46.333333

X 11 = 50.77778

Basis	C(j) - Z(J)	X5	R2	X3
X 1	0.00E+12	0.500	1.000	0.250
X 2	0.12E+02	0.160	2.000	0.250
X 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
X 4	-.15E+02	0.500	0.000	0.500
X 5	-.035E+02	1.000	0.000	0.000
X 6	-.58E+01	0.160	1.000	0.500
X 7	-.23E+02	0.660	1.000	0.000
X 8	-.23E+02	0.160	0.000	0.750
X 9	-.12E+02	0.330	2.000	0.000
X 10	-.41E+02	0.660	0.000	0.250
X 11	0.00E+12	0.000	3.000	0.000
R 1	-.10E+13	0.160	0.000	0.000
R 2	-.10E+13	0.000	1.000	0.000
R 3	-.10E+13	0.000	0.000	0.250
SOLU	0.18E+04	0.830	154.0	46.75

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1801.33

ITERATION 5

BASIS

X 2 = 5

X 3 = 45.5

X 11 = 48

Basis	C (j) - Z (J)	X5	R2	R3
X 1	-.35E+02	3.000	-1.67	-.50
X 2	0.00E+12	1.000	0.000	0.00
X 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.00
X 4	-.53E+02	3.000	-2.00	-.25
X 5	-.11E+03	6.000	-4.00	-1.5
X 6	-.18E+02	1.000	-3.00	0.25
X 7	-.70E+02	4.000	-2.34	-1.0
X 8	-.35E+02	1.000	-.670	0.5
X 9	-.35E+02	2.000	-.670	-.50
X 10	-.88E+02	4.000	-2.67	-.70
X 11	0.00E+12	0.000	1.000	0.0
R 1	-.10E+13	1.000	-.670	-.2
R 2	-.10E+13	0.000	.300	0.0
R 3	-.10E+13	0.000	0.000	0.2
SOLU	0.17E+04	5.000	48.00	45

THE VARIABLES WHICH FORM THE SOLUTION SPACE

X 2 = 5

X3 = 45.5

X 11 = 48

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1743

TOTAL SCRAP = 260 * 1743 = 4531

2- صياغة النموذج الرياضي باستخدام البعد القياسي (2.200) والجدول التالي يوضح المتغيرات المتعلقة بالمشكلة:

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	العدد المطلوب
33	2	3	5	1	0	3	1	0	3	6	1	4	5
60	0	2	0	3	1	1	2	0	0	0	1	1	153
51	3	0	1	0	3	1	1	4	2	0	2	0	187
فاقد	1	1	4	7	7	10	16	16	19	22	25	28	

وبذلك يكون النموذج الرياضي على الصورة:

$$Z_{\max} = (5M-1) x_1 + (5M-1) x_2 + (6M-4) x_3 + (4M-7) x_4 + (4M-7) x_5 + (5M-10) x_6 + (4M-16) x_7 + (4M-18) x_8 + (5M-19) x_9 + (6M-22) x_{10} + (4M-25) x_{11} + (5M-25) x_{12} + MR1 + MR2 + MR3$$

Subject To:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 3x_6 + x_7 + 3x_9 + 6x_{10} + x_{11} + 9x_{12} + R1 = 5$$

$$2x_2 + 3x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_{11} + x_{12} + R2 = 154$$

$$3x_1 + x_3 + 3x_5 + x_6 + x_7 + 4x_8 + 2x_9 + 2x_{11} + R3 = 187$$

$$x_1, x_2, \dots, x_{12} \geq 0$$

$$R1, R2, R3 \geq 0$$

بعد أن تم وضع النموذج في الصورة القياسية يمكن البدء في إجراءات الحل:

المتغير الداخل x_{10} والمتغير الخارج R_1 .

```

*****
*
*   LINEAR PROGRAMMING   *
*   ANALYSIS             *
*
*****
    
```

** INFORMATION ENTERED **

```

NUMBER OF CONSTRAINTS      3
NUMBER OF VARIABLES       12
NUMBER OF <= CONSTRAINTS  0
NUMBER OF = CONSTRAINTS   3
NUMBER OF >= CONSTRAINTS  0
    
```

ITERATION 0

```

X 12 = 5
X 13 = 154
X 14 = 187
    
```

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.50E+13	2.000	0.000	3.000
X 2	0.50E+13	3.000	2.000	0.000
X 3	0.60E+13	5.000	0.000	1.000
X 4	0.40E+13	1.000	3.000	0.000
X 5	0.40E+13	0.000	1.000	3.000
X 6	0.50E+13	3.000	1.000	1.000
X 7	0.40E+13	1.000	2.000	1.000
X 8	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 9	0.50E+13	3.000	0.000	2.000
X 10	0.60E+13	6.000	0.000	0.000
X 11	0.40E+13	1.000	1.000	2.000
X 12	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.35E+13	5.000	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

ITERATION 1

BASIS

X 3 = 1

X 14 = 154

X 15 = 186

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.26E+13	0.400	0.000	2.000
X 2	0.14E+13	0.660	2.000	-.100
X 3	0.00E+12	0.000	0.000	0.000
X 4	0.28E+13	1.000	3.000	-1.00
X 5	0.40E+12	0.200	1.000	3.000
X 6	0.14E+13	0.600	1.000	0.000
X 7	0.28E+13	0.200	2.000	0.000
X 8	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 9	0.14E+13	0.600	0.000	1.000
X 10	-.12E+13	0.200	0.000	-1.00
X 11	0.28E+13	0.200	0.000	-.100
X 12	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	-.12E+13	0.200	0.000	-.100
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.34E+15	1.000	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 2

BASIS

X 3 = 1

X 5 = 62

X 14 = 92

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	-.87E+13	0.400	-870	0.860
X 2	-.22E+13	0.600	2.200	0.000
X 3	0.00E+13	1.000	0.000	-.070
X 4	0.31E+13	0.200	3.060	1.000
X 5	0.00E+13	0.000	0.000	0.130
X 6	0.87E+13	0.600	0.860	0.260
X 7	0.17E+13	0.200	1.730	1.330
X 8	-.13E+13	0.000	-1.34	1.330
X 9	-.47E+13	0.600	-.470	0.460
X 10	0.40E+13	1.200	0.400	-.410
X 11	0.40E+13	0.200	0.390	0.600
X 12	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	-.93E+13	0.200	0.060	-.070
R 2	0.00E+13	0.000	1.000	0.000
R 3	-.13E+13	0.000	-.340	0.330
SOLU	0.92E+14	1.000	92.66	62.00

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 9.2E+13

ITERATION 3

BASIS

X 3 = 5

X 5 = 62.33333

X 14 = 76.66666

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	-.70E+13	2.000	-7.00	1.000
X 2	-.70E+13	3.000	-7.00	0.000
X 3	-.15E+13	5.000	-15.3	0.300
X 4	0.00E+13	1.000	0.000	0.000
X 5	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
X 6	-.83E+13	3.000	-8.34	0.300
X 7	-.13E+13	1.000	-1.34	0.300
X 8	-.13E+13	0.000	-1.34	1.300
X 9	-.97E+13	3.000	-9.67	0.000
X 10	-.18E+13	6.000	-18.0	0.000
X 11	-.27E+13	1.000	-2.67	0.000
X 12	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	0.40E+13	1.000	-3.00	0.000
R 2	0.00E+13	0.000	1.000	0.000
R 3	-.13E+13	0.000	-.340	0.000
SOLU	0.77E+14	5.000	76.66	62.00

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 7.67E+

2- صياغة النموذج الرياضي باستخدام البعد القياسي (2.300) والجداول التالي يوضح المتغيرات المتعلقة بالمشكلة:

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	العدد المطلوب
33	2	5	0	3	2	5	1	0	3	1	0	3	6	5
60	1	1	2	2	0	0	3	1	1	2	0	0	0	153
51	2	0	2	0	3	1	0	3	1	1	4	2	0	187
فاقد	2	5	8	11	11	14	17	17	20	26	26	29	32	

وبذلك يكون النموذج الرياضي على الصورة:

$$Z_{max} = (5M-2) x_1 + (6M-5) x_2 + (4M-8) x_3 + (5M-11) x_4 + (5M-11) x_5 + (6M-14) x_6 + (4M-17) x_7 + (4M-17) x_8 + (5M-20) x_9 + (4M-26) x_{10} + (4M-26) x_{11} + (5M-29) x_{12} + (6M-32) x_{13} + MR1 + MR2 + MR3$$

Subject To:

$$2 x_1 + 5 x_2 + 3 x_4 + 2 x_5 + 5 x_6 + x_7 + 3 x_9 + x_{10} + 3 x_{11} + 6x_{12} + R1 = 5$$

$$x_1 + x_2 + 2 x_3 + 2 x_4 + 3 x_7 + x_8 + 1 x_9 + 2 x_{10} + x_{13} + R2 = 154$$

$$2x_1 + 2 x_3 + 3 x_5 + x_6 + 3 x_8 + x_9 + x_{10} + 4 x_{11} + R3 = 187$$

$$x_1 x_2 \dots \dots \dots x_{13} \geq 0$$

$$R1 , R2 , R3 \geq 0$$

بعد صياغة النموذج في صورته القياسية يتم البدء في إجراء الحل بوضع النموذج في الجداول الخاصة بالطريقة.

```

*****
*
*   LINEAR PROGRAMMING   *
*   ANALYSIS             *
*
*****

```

** INFORMATION ENTERED **

```

NUMBER OF CONSTRAINTS      3
NUMBER OF VARIABELS       13
NUMBER OF <= CONSTRAINTS  0
NUMBER FO = CONSTRAINTS   3
NUMBER OF >= CONSTRAINTS  0

```

ITERATION 0

```

X 12 = 5
X 13 = 154
X 14 = 187

```

Basis	C(j) - Z(J)	R5	R2	R3
X 1	0.50E+13	2.000	1.000	2.000
X 2	0.60E+13	5.000	1.000	0.000
X 3	0.40E+13	0.000	2.000	2.000
X 4	0.50E+13	3.000	2.000	0.000
X 5	0.50E+13	2.000	0.000	3.000
X 6	0.60E+13	5.000	0.000	1.000
X 7	0.40E+13	1.000	3.000	0.000
X 8	0.40E+13	0.000	1.000	3.000
X 9	0.50E+13	3.000	1.000	1.000
X 10	0.40E+13	1.000	2.000	1.000
X 11	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 12	0.50E+13	3.000	0.000	2.000
X 13	0.60E+13	6.000	0.000	0.000
R 1	0.00E+13	1.000	1.000	0.000
R 2	0.00E+13	0.000	0.000	0.000
R 3	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.35E+15	5.000	154.0	187.0

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

ITERATION 1

BASIS

X 1 = 1

X 14 = 153

X 15 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.26E+13	0.400	0.000	0.60
X 2	0.00E+13	1.000	2.000	0.00
X 3	0.40E+12	0.000	0.000	2.00
X 4	0.14E+13	0.600	3.000	1.40
X 5	0.26E+12	0.400	1.000	-0.40
X 6	0.00E+13	1.000	1.000	-1.00
X 7	0.28E+13	0.200	2.000	2.00
X 8	0.40E+13	0.000	0.000	1.00
X 9	0.14E+13	0.600	0.000	0.39
X 10	0.28E+13	0.200	0.000	1.80
X 11	0.40E+13	0.000	1.000	0.00
X 12	0.14E+13	0.600	3.000	-0.61
X 13	-.12E+13	1.200	3.000	-1.21
R 1	-.12E+13	0.200	0.000	-.20
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	1.00
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	0.00
SOLU	0.34E+15	1.000	154.0	153.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 2

BASIS

X 2 = 1

X 3 = 76.5

R 3 = 34

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.14E+13	0.400	0.300	1.400
X 2	0.00 E+12	1.000	0.000	0.000
X 3	0.00E+13	0.000	1.000	0.000
X 4	-.14E+13	0.600	0.700	-1.400
X 5	0.34E+13	0.400	-0.200	3.400
X 6	0.20E+13	1.000	-0.500	2.000
X 7	-.28E+13	0.200	1.400	-2.800
X 8	0.20E+13	0.000	0.500	2.000
X 9	0.60E+12	0.600	0.190	0.600
X 10	-.80E+13	0.200	0.900	-0.800
X 11	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 12	0.26E+13	0.600	-0.310	2.600
X 13	0.12E+13	1.200	0.610	1.200
R 1	-.80E+12	0.000	-0.100	0.200
R 2	-.20E+13	0.000	0.500	-1.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.92E+14	1.000	76.50	34.00

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

ITERATION 3

BASIS

X 2 = 5

R 3 = 76.5

R 11 = 8.5

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.12E+02	0.400	0.300	0.60
X 2	0.00E+12	1.000	0.000	0.00
X 3	0.00E+12	0.000	1.000	2.00
X 4	-.12E+02	0.600	0.700	1.40
X 5	0.12E+02	0.400	-0.200	-0.40
X 6	0.00E+00	1.000	-0.500	-1.00
X 7	-.28E+02	0.200	1.400	2.00
X 8	0.00E+00	0.000	0.500	1.00
X 9	-.12E+02	0.600	0.190	0.39
X 10	-.28E+02	0.200	0.900	1.80
X 11	0.00E+12	0.000	0.000	0.00
X 12	-.12E+02	0.600	-0.310	-0.61
X 13	-.23E+02	1.200	-0.610	-1.21
R 1	-.10E+13	0.200	-0.100	-.20
R 2	-.10E+13	0.000	0.500	1.00
R 3	-.10E+13	0.000	0.000	0.00
SOLU	0.84E+03	1.000	76.50	153.0

ITERATION 4
 BASIS
 X 2 = 2.5
 X 3 = 76.75
 X 11 = 7.625

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.00E+12	0.000	0.300	0.000
X 2	-.29E+02	2.500	-0.750	-0.880
X 3	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
X 4	-.29E+02	1.500	0.240	0.880
X 5	0.00E+00	1.000	-0.500	0.500
X 6	0.29E+02	2.500	-1.250	-0.380
X 7	-.29E+02	0.500	1.250	-0.880
X 8	0.00E+00	0.000	0.500	0.500
X 9	-.29E+02	1.500	-0.380	-0.380
X 10	-.29E+02	0.500	-0.380	-0.380
X 11	0.00E+12	0.000	1.000	1.000
X 12	-.29E+02	1.500	0.120	0.120
X 13	-.58E+02	3.000	-0.750	-0.75
R 1	-.10E+13	0.500	-0.130	-0.130
R 2	-.10E+13	0.000	0.250	-0.250
R 3	-.10E+13	0.000	0.250	0.250
SOLU	0.81E+03	2.500	7.620	7.620

The variables which form the solution space:

X 1 = 2.5
 X 3 = 75.75
 X 11 = 7.625

Objective function value: 809.25

total scrap = $809 * 260 = 2104.2104.05 \text{ m}^2$

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

4- صياغة النموذج الرياضي باستخدام البعد القياسي (2.400) والجداول التالي يوضح المتغيرات المتعلقة بالمشكلة:

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	العدد المطلوب
33	0	1	2	4	0	7	2	5	0	3	2	5	0	1	3	5
60	4	0	2	0	3	0	1	1	2	2	0	0	1	3	1	153
51	0	4	1	2	1	0	2	0	2	0	3	1	3	0	1	187
فاقد	0	3	3	6	9	9	12	15	18	21	21	24	27	27	30	

وبذلك يمكن وضع النموذج القياسي على الصورة:

$$Z_{min} = 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 9x_6 + 12x_7 + 15x_8 + 18x_9 + 21x_{10} + 2x_{11} + 24x_{12} + 27x_{13} + 27x_{14} + 30x_{15} + MR1 \quad MR2 + MR2$$

Subject To:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_4 + 7x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_{10} + 2x_{11} + 5x_{12} + x_{14} + 3x_{15} + R1 = 5$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_5 + x_6 + x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + R2 = 154$$

$$4x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_7 + 2x_9 + 3x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + x_{15} + R3 = 187$$

$$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{15} \geq 0$$

$$R1, R2, R3 \geq 0$$

```

*****
*                                     *
*   LINEAR PROGRAMMING               *
*   ANALYSIS                          *
*                                     *
*****
    
```

** INFORMATION ENTERED **

```

NUMBER OF CONSTRAINTS      3
NUMBER OF VARIABLES        15
NUMBER OF <= CONSTRAINTS   0
NUMBER FO = CONSTRAINTS    3
NUMBER OF >= CONSTRAINTS   0
    
```

```

ITERATION    0
X 12 = 5
X 13 = 154
X 14 = 187
    
```

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.40E+13	0.000	4.000	0.000
X 2	0.50E+13	1.000	0.000	4.000
X 3	0.50E+13	2.000	2.000	1.000
X 4	0.60E+13	4.000	0.000	2.000
X 5	0.40E+13	0.000	3.000	1.000
X 6	0.70E+13	7.000	0.000	0.000
X 7	0.50E+13	2.000	1.000	2.000
X 8	0.60E+13	5.000	1.000	0.000
X 9	0.40E+13	0.000	2.000	2.000
X 10	0.50E+13	3.000	2.000	0.000
X 11	0.50E+13	2.000	0.000	3.000
X 12	0.60E+13	5.000	0.000	1.000
X 13	0.40E+13	0.000	1.000	3.000
X 14	0.40E+13	1.000	3.000	0.000
X 15	0.50E+13	3.000	1.000	1.000
R 1	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.35E+15	5.000	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

ITERATION 1

BASIS

X 6 = .7142858

X 17 = 154

X 18 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	X6	R2	R3
X 1	0.40E+13	0.000	4.000	0.60
X 2	0.40E+13	0.140	0.000	0.00
X 3	0.30E+13	0.280	2.000	2.00
X 4	0.20E+13	0.570	0.000	1.40
X 5	0.40E+12	0.000	3.000	-0.40
X 6	0.00E+12	1.000	0.000	-1.00
X 7	0.30E+13	0.280	1.000	2.00
X 8	0.10E+13	0.710	1.000	1.00
X 9	0.40E+13	0.000	2.000	0.39
X 10	0.20E+13	0.420	2.000	1.80
X 11	0.30E+13	0.280	0.000	0.00
X 12	0.10E+13	0.710	0.000	-0.61
X 13	0.40E+13	0.000	1.000	-1.21
X 14	0.30E+13	0.140	3.000	0.00
X 15	0.20E+13	0.420	1.000	0.00
R 1	-.10E+13	0.140	0.000	-.20
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	1.00
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	0.00
SOLU	0.34E+15	0.710	154	153

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 2

BASIS

X 2 = 1

X 3 = 76.5

R 3 = 34

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
X 2	0.40E+12	0.140	0.000	4.000
X 3	0.10E+13	0.280	0.500	1.000
X 4	0.20E+13	0.570	0.000	2.000
X 5	0.10E+13	0.000	0.570	1.000
X 6	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
X 7	0.20E+13	0.280	0.250	2.000
X 8	-.86E+01	0.710	0.250	0.000
X 9	0.20E+13	0.000	0.500	2.000
X 10	-.17E+02	0.420	0.500	0.000
X 11	0.30E+13	0.280	0.000	3.000
X 12	0.10E+13	0.710	0.010	1.000
X 13	0.30E+13	0.000	0.250	3.000
X 14	-.26E+02	0.140	0.750	0.000
X 15	0.10E+13	0.420	0.250	1.000
R 1	-.10E+13	0.140	0.000	0.000
R 2	-.10E+13	0.000	0.250	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.19E+14	1.710	38.50	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1.87E+14

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

ITERATION 3

BASIS

X 1 = 38.5

X 2 = 5

X 18 = 167

Basis	C(j) - Z(J)	X2	X1	R3
X 1	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
X 2	0.00E+12	1.000	0.000	4.000
X 3	-.70E+13	2.000	0.500	1.000
X 4	-.14E+14	4.000	0.000	2.000
X 5	0.10E+13	0.000	0.570	1.000
X 6	-.28E+14	6.000	0.000	0.000
X 7	-.60E+13	2.000	0.250	2.000
X 8	-.20E+14	5.000	0.250	0.000
X 9	0.20E+13	0.000	0.500	2.000
X 10	-.12E+14	3.000	0.500	0.000
X 11	0.50E+13	2.000	0.000	3.000
X 12	0.19E+14	5.000	0.000	1.000
X 13	-.30E+13	0.000	0.250	3.000
X 14	-.40E+14	1.000	0.750	0.000
X 15	-.11E+14	3.000	0.250	1.000
R 1	-.50E+13	1.000	0.000	0.000
R 2	-.10E+13	0.000	0.250	0.000
R 3	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.84E+03	5.000	38.50	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1.78E+14

ITERATION 4
 BASIS
 X 1 = 24.58333
 X 2 = 5
 X 13 = 55.66667

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
X 2	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
X 3	-.60E+02	2.000	1.080	-2.34
X 4	-.12E+03	4.000	1.160	-4.67
X 5	0.00E+00	0.000	0.660	0.330
X 6	-.24E+03	6.000	2.330	-9.34
X 7	-.60E+02	2.000	0.750	-2.00
X 8	-.18E+03	5.000	1.910	-6.670
X 9	0.00E+00	0.000	0.330	0.660
X 10	-.12E+03	3.000	0.500	-4.00
X 11	0.60E+02	2.000	0.410	-1.67
X 12	0.18E+03	5.000	1.580	-6.34
X 13	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
X 14	-.60E+02	1.000	1.080	-1.34
X 15	-.12E+03	3.000	1.160	-3.670
R 1	-.10E+13	1.000	0.330	-1.340
R 2	-.10E+13	0.000	0.250	0.000
R 3	0.10E+13	0.000	-.090	0.330
SOLU	0.15E+03	2.500	24.58	55.66

The variables which form the solution space:

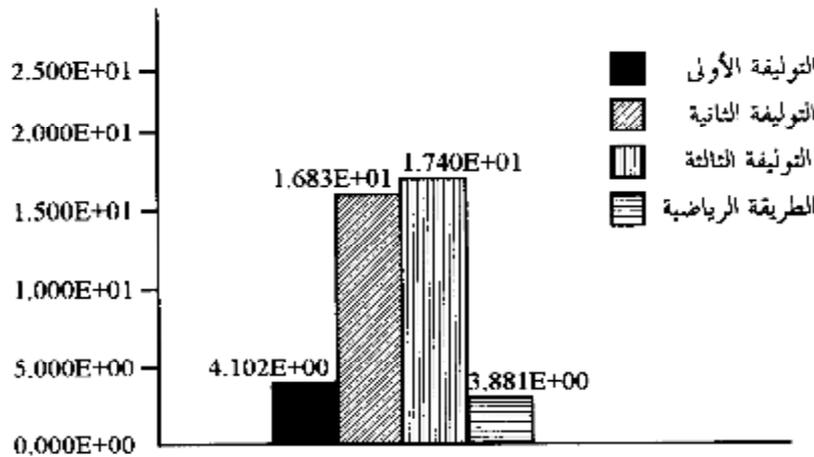
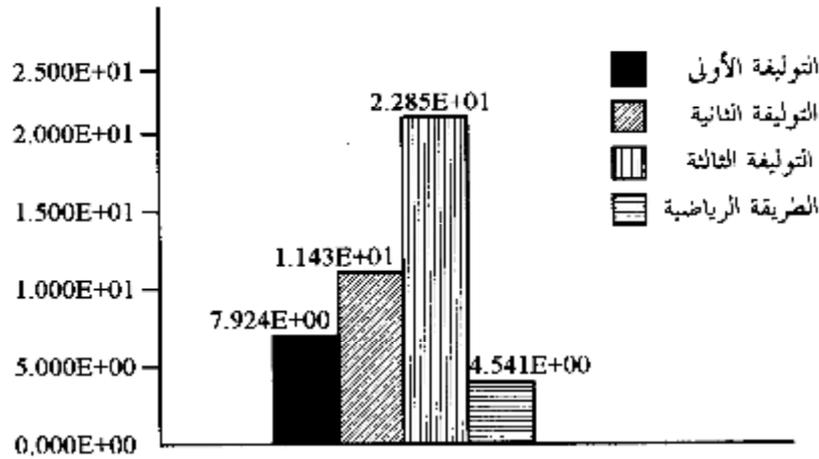
X 1 = 24.58333
 X 2 = 5
 X 13 = 55.66667

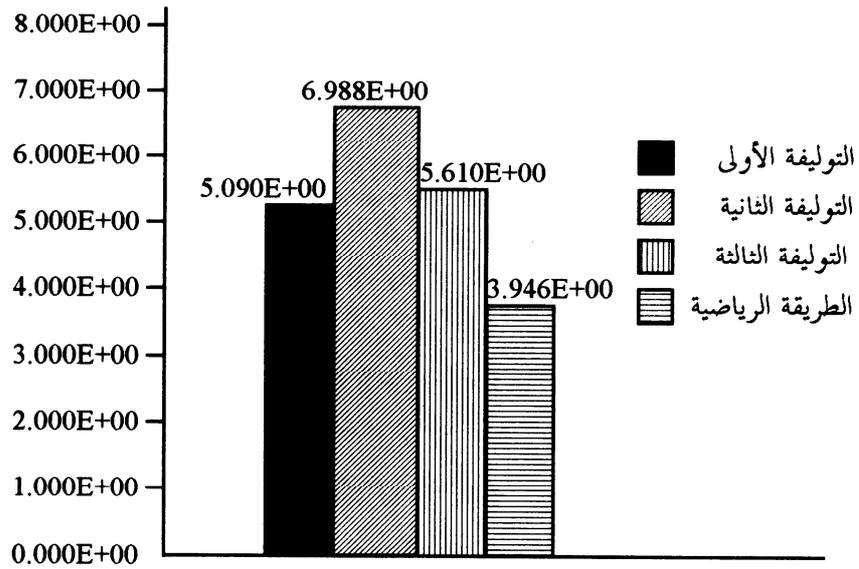
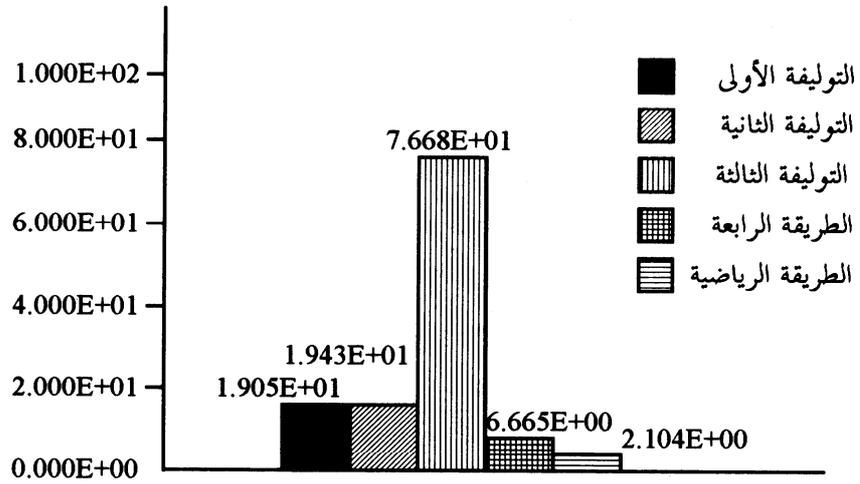
Objective function value: 1518

Total scrap = $15018 * 260 = 3946.8 \text{ m}^2$

6.7 الخلاصة:

بعد إجراء الحسابات اللازمة لإيجاد قيمة الفاقد بالطريقتين التقليدية الرياضية وكما هو موضح بالأشكال. وجد أن استخدام أسلوب البرمجة الخطية في تقليل الفاقد يحقق أقل قيمة للفاقد يعطي نتائج في زمن أقل باستخدام الحاسب الآلي.





6.8 مسائل:

أوجد حل المسائل الآتية بواسطة طريقة السمبلكس

$$\text{Max } z = 20 x_1 + 24 x_2 \quad -1$$

S.T.

$$2 x_1 + x_2 \leq 2$$

$$2 x_1 + 3 x_2 \leq 48$$

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 30 x_1 + 50 x_2 \quad -2$$

S.T.

$$2 x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + 2 x_2 \leq 11$$

$$x_1 + 3 x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 10 x_1 + 20 x_2 \quad -3$$

S.T.

$$5 x_1 + 8 x_2 \leq 40$$

$$5 x_1 + 3 x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 6 x_1 + 8 x_2 \quad -4$$

S.T.

$$4 x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 + 4 x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } z = -2x_1 + x_2 \quad -5$$

S.T.

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$-\infty < x_2 < +\infty$$

$$\text{Max } z = -x_1 - 2x_2 + x_5 \quad -6$$

S.T.

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$2x_2 - x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 2x_1 - 12x_2 + 7x_5 \quad -7$$

S.T.

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10.000$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 6x_1 + 8x_2 \quad -8$$

S.T.

$$x_1 - 3x_2 \geq -3$$

$$x_1 + 3x_2 \geq -6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$4x_1 - x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

$$\text{Max } z = -3x_1 - 2x_2 \quad -9$$

S.T.

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } z = 3x_1 - x_2 \quad -10$$

S.T.

$$x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 20$$

$$3x_1 + 6x_2 \geq 36$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 5x_1 + x_2 \quad -11$$

S.T.

$$x_1 + x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 6x_1 + 8x_2 \quad -12$$

S.T.

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 4x_1 + 7x_2 + x_3 \quad -13$$

S.T.

$$x_1 + 2x_2 = 12$$

$$3x_1 + x_2 = 18$$

$$x_3 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Max } z = x_1 + 4x_2 + x_5 \quad -14$$

S.T.

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10$$

$$-3x_2 + x_3 = -4$$

$$x_1 + x_3 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 4x_1 - 2x_2 + 6x_5 \quad -15$$

S.T.

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 36$$

$$5x_1 - x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_5 \quad -16$$

S.T.

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

$$4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

$$\text{Max } z = 4 x_1 + 3 x_2 + x_5 \quad -17$$

S.T.

$$2 x_1 + 3 x_2 + x_3 \geq 22$$

$$x_1 + 2 x_2 + 3 x_3 = 30$$

$$- x_1 + 5 x_2 + 2 x_3 = 42$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Max } z = 4 x_1 - 2 x_2 + 6 x_5 \quad -18$$

S.T.

$$2 x_1 + x_2 + 3 x_3 = 36$$

$$5 x_1 - x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$