

## الفصل السابع

# النموذج الثنائي مسائل

## البرمجة الخطية

يناقش هذا الفصل بالأمثلة التوضيحية تقنية النموذج الثنائي وكيفية استخدامها في تحويل البرمجة الخطية الأولى إلى النموذج الثنائي. ويتناول الفصل العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج الثنائي، وأهمية هذه العلاقة، بالإضافة إلى مناقشة طرق حسابهما، وطريقة حل المسائل الثنائية بواسطة السمبلكس. كما يسلط الفصل الضوء على تحليل أحساسية من خلال الأمثلة والتمارين التطبيقية.



# 7

## الفصل السابع

### النموذج الثنائي لمسائل البرمجة الخطية Duality in Linear Programming

#### 7.1 مقدمة:

من الظواهر المهمة المصاحبة لمسائل البرمجة الخطية الثنائية (Duality) والتي تعرف بتحويل نموذج البرمجة الخطية الأولى إلى النموذج الثنائية. ويختص النموذج الثنائي بسهولة حله عند حصول أي تغير في معاملات وإتاحة المتغيرات في النموذج الأولي بعد صياغته وحله، وتستخدم هذه الخاصية في تسهيل ظاهرة الحساسية لنموذج البرمجة الخطية (Sensitivity Analysis).

ويُعرف النموذج الثنائي أيضاً بأنه النموذج المماثل للنموذج الأولي لصياغة مسائل البرمجة الخطية. ويرمز النموذج الثنائي الكثير من المعلومات التي يمكن أن تفيد إدارة العمليات الصناعية في سهولة اتخاذ القرارات، بالإضافة إلى تقليل العمليات الحسابية التي أصبحت سهلة بواسطة الحاسوب وتحتاج إلى وقت أقل في حالة توفر عدد كبير من القيود والمتغيرات عنها في النموذج الأول.

فمثلاً النموذج الأول يمكن أن يعرف على النحو الآتي:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{MAXIMIZE} \\ \text{أو} \\ \text{MINIMIZE} \end{array} \right]$$

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad L = 1, 2, \dots, m$$

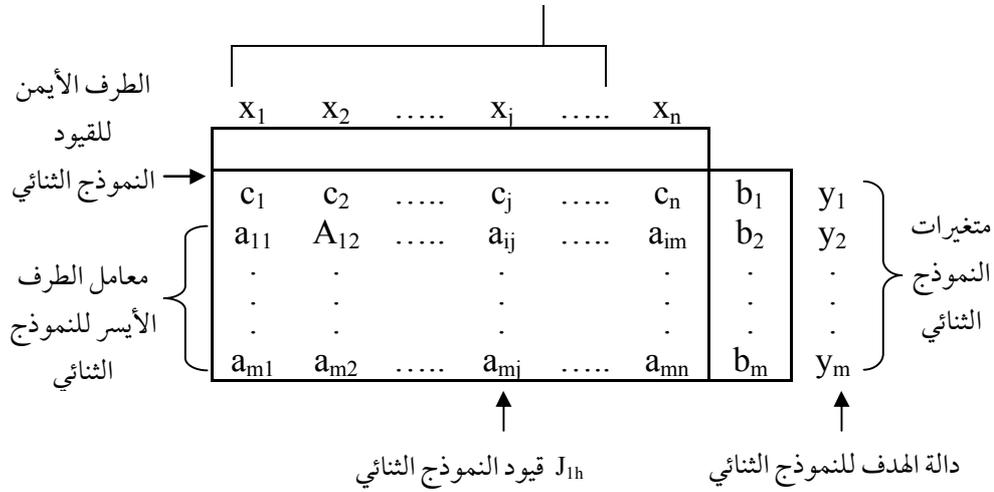
$$x_j \geq 0 \quad J = 1, 2, \dots, n$$

مع ملاحظة أن  $x_j$  تحتوي على المتغير الفائض والمتغير الصناعي.

ولتوضيح النموذج الثنائي بالنظر إلى الجدول (6.1)

جدول (6-1)

متغيرات النموذج الأول



والقاعدة تعني أن النموذج الثنائي له متغيرات  $m$  ( $y_1, y_2, \dots, y_m$ ) وله قيود  $n$  مقابلة ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ).

والجدول رقم (6-2) يوضح الانتظام في التغيرين النموذج الأول والنموذج الثنائي.

جدول (6-2)

النموذج الثنائي			دالة الهدف للنموذج الأول
المتغيرات	القيود	دالة الهدف	
غير محددة	$\geq$	تصغير	تعظيم (MAX)
غير محددة	$\leq$	تعظيم	تصغير (MIN)

والأمثلة التالية توضح فكرة تغيير النموذج الأول إلى النموذج الثنائي:

مثال 7.1:

النموذج الأول:

$$\text{Max } z = 5 x_1 + 12 x_2 + 4 x_3$$

S.T.

$$x_1 + 2 x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2 x_1 = x_2 + 3 x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 10$$

بإضافة المتغير الفائض والمتغير الصناعي:

$$\text{Max } z = 5 x_1 + 12 x_2 + 4 x_3 + 0 x_4$$

S.T.

$$x_1 + 2 x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$2 x_1 = x_2 + 3 x_3 + 0 x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

∴ النموذج الثنائي (Dual):

$$\text{Min } w = 10 y_1 + 8 y_2$$

S.T.

$$x_1 : y_1 + 2 y_2 \geq 5$$

$$x_2 : 2 y_1 - y_2 \geq 12$$

$$x_3 : y_1 + 3 y_2 \geq 4$$

$$x_4 : y_1 + 0 y_2 \geq 0$$

$y_1, y_2$  غير محددة.

مثال 7.2:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = 5x_1 - 2x_2 \\ \text{S.T.} \quad & -x_1 + x_2 \geq -3 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

بإضافة المتغير الفائض والمتغير الصناعي:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = 5x_1 - 2x_2 \\ \text{S.T.} \quad & x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

النموذج الثنائي:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & w = 3y_1 + 5y_2 \\ \text{S.T.} \quad & y_1 + 2y_2 \leq 5 \\ & -y_1 + 3y_2 \leq -2 \\ & y_1 \leq 0 \\ & y_2 \leq 0 \end{aligned}$$

غير محدد الإشارة  $y_1, y_2$ .

مثال 7.3:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{S.T.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 17 \\ & x_1, x_2, x_3 \end{aligned}$$

ويمكن إعادة كتابة المسألة على النحو التالي:

$$\text{Min } z = 2 x_1 + 3 x_2 + x_3$$

S.T.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq -40$$

$$2 x_1 - x_2 + x_3 \geq 17$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

أما النموذج الثنائي:

$$\text{Max } w = -40 y_1 + 17 y_2$$

S.T.

$$-y_1 + 2 y_2 \leq 2$$

$$-y_1 - y_2 \leq 3$$

$$-y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1, y_2 \leq 0$$

## 7.2 العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج الثنائي:

- 1- إن تحويل النموذج الثنائي إلى نموذج ثنائي يتحول إلى نموذج أول.
- 2- المصفوفة  $A$  ( $m \times n$ ) للنموذج الأول تعطي المصفوفة ( $n \times m$ ) للنموذج الثنائي.
- 3- لكل قيود النموذج الأولي توجد علاقة لمتغيرات النموذج الثنائي والعكس صحيح.
- 4- لكل متغير في النموذج الأول، توجد علاقة له بقيود النموذج الثنائي والعكس صحيح.
- 5- لكل حل ابتدائي للنموذج الأول.

أ-  $z \leq Z$

ب-  $z^* = Z^*$

ج- إذا كان  $C x_0 = w_0 b$  ومنها

$$x_0 = x^* \quad w_0 = w^*$$

6- إذا كان النموذج الأول يوجد له حل أمثل فإن النموذج الثنائي له حل أمثل.

7- إذا كان النموذج الأول له حل غير محدود فإن النموذج الثنائي لا يوجد له حل والعكس صحيح.

ويمكن شرح العلاقة بين النموذج الأول (Primal problem) والنموذج الثاني (Dual problem) بواسطة العلاقة الرياضية التالية:

### النموذج الثاني

$$\text{Min } z = 10 y_1 + 8 y_2$$

S.T.

$$y_1 + 2 y_2 \geq 5$$

$$2 y_1 - y_2 \geq 12$$

$$y_1 - 3 y_2 \geq 4$$

$$y_1 \geq 0 - \infty < y_2 < \infty$$

### النموذج الأول

$$\text{Max } z = 5 x_1 + 12 x_2 + 4 x_3$$

S.T.

$$x_1 + 2 x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2 x_1 - x_2 + 3 x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

وبحل المسألتين كل على حدة بواسطة طريقة السمبلكس تلاحظ الحل في الجداول (6.3) و (6.4).

المعلومات التالية يمكن استنتاجها.

[الحل الأمثل لـ معادلة z للمسألة الأولى] = [الفرق ما بين الشمال واليمين لقيود المسألة الثنائية المصاحبة للمتغيرات].

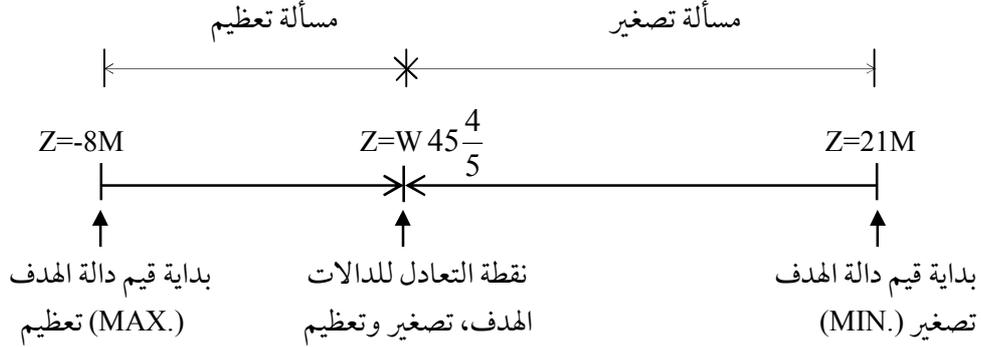
جدول (6-3)

المحاولة	أساس	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	R	الحل
0 (starting)	z	-5-2M	-12+M	-4-3M	0	0	-8M
x <sub>3</sub> enters	x <sub>4</sub>	1	2	1	1	0	10
R leaves	R	2	-1	3	0	1	8
1	z	-7/3	-40/3	0	0	$\frac{4}{3} + M$	32/3
x <sub>2</sub> enters	x <sub>4</sub>	1/3	7/3	0	1	-1/3	22/3
x <sub>4</sub> leaves	R	2/3	-1/3	1	0	1/3	8/3
2	z	-3/7	0	0	40/7	$-\frac{4}{3} + M$	368/7
x <sub>1</sub> enters	x <sub>2</sub>	1/7	1	0	3/7	-1/7	22/7
x <sub>3</sub> leaves	x <sub>3</sub>	5/7	0	1	1/7	2/7	26/7
3	Z	0	0	3/5	29/5	$-\frac{2}{5} + M$	$54\frac{4}{5}$
(optimal)	x <sub>2</sub>	0	1	-1/5	2/5	-1/5	12/5
	x <sub>1</sub>	1	0	7/5	1/5	2/5	26/5

جدول (6-4)

Iteration	Basic	$y_1$	$y'_2$	$y''_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	Solution
0 (starting)	W	$-10+4M$	$-8+4M$	$8-4M$	-M	-M	-M	0	0	0	$21M$
	$R_1$	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5
	$R_2$	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12
	$R_3$	1	3	-3	0	0	0	0	0	1	4
4 (optimal)	W	0	0	0	$-26/5$	$-12/5$	0	$26/5-M$	$12-5-M$	-M	$54\frac{4}{5}$
	$y_5$	0	0	0	$-7/5$	$1/5$	1	$7/5$	$-1/5$	-1	$3/5$
	$y''_2$	0	-1	1	$2/5$	$-1/5$	0	$-2/5$	$-1/5$	-1	$2/5$
	$y_1$	1	0	0	$-1/5$	$-2/5$	0	$1/5$	$2/5$	0	$29/5$

وباقى المعلومات التي يمكن تحديدها في الشكل 6.1.



وهذه النتائج يمكن تعميمها لزوج المسألة الأولى والثانية.

1- لكل من الحل الابتدائي للمسألة الأولى والثانية

$$\begin{pmatrix} \text{دالة الهدف لمسألة} \\ \text{تصغير} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \text{دالة الهدف لمسألة} \\ \text{تعظيم} \end{pmatrix}$$

2- الحل الأمثل للمسألة الأولى والثانية

$$(\text{دالة الهدف لمسألة تعظيم}) = (\text{دالة الهدف لمسألة تصغير})$$

### 7.3 أهمية العلاقة ما بين النموذج الأولي والنموذج الثنائي وحساباتها:

لغرض دراسة عملية تحليل الحساسية (Sensitivity analysis) يأتي اهتمامنا بالنتيجة التي يمكن تغييرها بواسطة تغيير المعاملات والتي يمكن تؤثر على مسار الحل المحقق سواء كان الحل الابتدائي أو الحل الأمثل المعهود. ونلاحظ عند تغيير الطرق الأيمن أو معاملات المتغيرات سوف نحتاج إلى إعادة حساب المسألة من جديد للتأكد من وجود حل ابتدائي أو حل أمثل للمسألة من خلال المعلومات المتوفرة بجداول

السمبلكس. ويمكن تحقيق وجود حل سريع بدون إعادة حل المسألة من جديد بواسطة العلاقة ما بين النموذج الخطي الابتدائي الثنائي. ويمكن تطوير طريقة حسابية تسمى بالسمبلكس الثنائي (Dual simplex).

وقبل شرح هذه الطريقة يستوجب النظر على بعض التعريفات الجبرية المهمة.

### تعريف:

تعرف المصفوفة  $(m \times n)$  بأنها مصفوفة مستطيلة ولها صفوف  $m$  وأعمدة  $n$ ، وحجم صفوف  $n$   $(1 \times n)$  وحجم الأعمدة  $(m)$  هي  $(m \times 1)$  وأن المصفوفة  $(m \times n)$  تحتوي على  $m$  صفوف و  $n$  أعمدة وعلى سبيل المثال:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة ذات حجم  $(3 \times 2)$  لها عمودين هما  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

وكل عمود له ثلاثة صفوف على النحو الآتي:

$$(0, 1) \quad (4, -1) \quad (3, 2)$$

### طريقة ضرب المصفوفات:

لو فرضنا مصفوفة الصف  $V$

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_m)$$

والمصفوفة المستطيلة  $A$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن:

$$V.A = (v_1, v_2, \dots, v_m) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{L=1}^m v_L a_{L1} \sum_{L=1}^m v_L a_{L2} \dots \sum_{L=1}^m v_L a_{Ln}$$

ولو مثلنا هذه الأرقام فإن:

$$= (11, 22, 33) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= (3 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33, -1 \times 11 + 8 \times 22 + 9 \times 33)$$

$$= (319, 462)$$

أما مضروب مصفوفة  $A \times P$  حيث

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$A \times P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ M & & K & \\ a_{m1} & a_{m2} & K & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} P_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} P_j \\ M \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} P_j \end{bmatrix}$$

ولو مثلنا هذه القاعدة بالأرقام فإن:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \times 1 + 22 \times 5 + 33 \times 7 \\ 11 \times 2 + 22 \times 0 + 33 \times 8 \\ 11 \times 3 + 22 \times 6 + 33 \times 9 \\ 11 \times -1 + 22 \times 4 + 33 \times -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & 352 \\ & 386 \\ & = 462 \\ & 11 \end{aligned}$$

#### 7.4 طرق حساب النموذج الأولي والثانوي:

يمكن شرح طريقة حساب النموذج الأولي، الثانوي باستخدام أزواج من مسائل النموذج الأول والثانوي والتي يعطي طريقة حلها بالسيمبلكس في الجداول (7.1)، (7.2) حيث:

النموذج الأولي:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = 5 x_1 + 12 x_2 + 4 x_3 - MR \\ \text{S.T.} \quad & (y_1) x_1 + 2 x_2 + x_3 + 4 x_3 = 10 \\ & (y_2) 2 x_1 - x_2 + 3 x_3 + R = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, R \geq R \end{aligned}$$

النموذج الثانوي (Dual):

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & z = 10 y_1 + 8 y_2 \\ \text{S.T.} \quad & y_1 + 2 y_2 \geq 5 \quad (x_1) \\ & 2y_2 - y_2 \geq 5 \quad (x_2) \\ & y_1 + 3 y_2 \geq 4 \quad (x_3) \\ & y_1 + 2 y_2 \geq 5 \quad (x_1) \\ & y_1 \geq 0 \quad (x_1) \\ & y_2 \geq -M \quad (R) \\ & y_2 \text{ غير محدودة الإشارة (Unrestricted)} \end{aligned}$$

#### 7.4.1 طرق حساب قيود الأعمدة:

عند أي محاولة لإحدى محاولات طريقة السمبلكس (أولي، أو ثنائي) فإن عناصر العمود الشمالية أو اليمنى لأي قيد من مصفوفات الجدول ويمكن حسابها على النحو الآتي:

$$(\text{العمود الأصلي}) \times \begin{pmatrix} \text{معكوس المحاولة} \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{العمود في محاولة} \\ i \end{pmatrix}$$

ولتوضيح هذه المعادلة باعتبار المسألة الأولية أعلاه فإن بداية الحل الأساسي لـ  $x_3$ ، R في الجدول (7.1)، فإن المصفوفة المعكوسة في كل محاولة (Iteration)، فلو اعتبرنا المحاولة رقم (1) وقيد  $x_1$ .

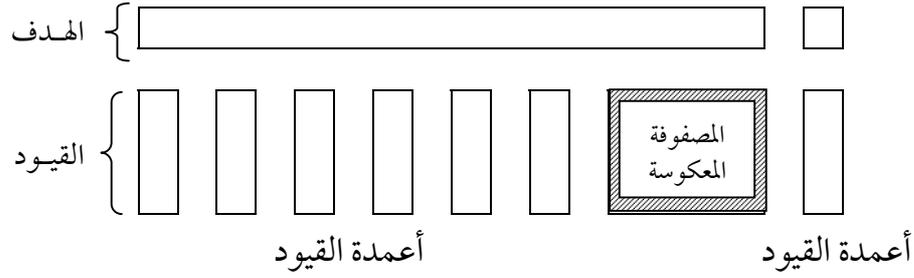
$$\begin{pmatrix} \text{العمود } x_1 \\ \text{الأصلي} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{معكوس} \\ \text{المحاولة الأولى} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{العمود } x_1 \\ \text{في الأصلي} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1) \\ (2) \end{pmatrix}$$

في محاولة رقم (2)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{1} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (10) \\ (8) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{7} \\ \frac{26}{7} \end{bmatrix}$$

لتوضيح الطريقة بالرسم كما هو في الشكل (7.2).



شكل (7-2)

#### 7.4.2 طريقة حساب صف دالة الهدف:

عند أي محاولة أثناء إجراء عملية السمبلكس للمسألة الأولية، فإن عناصر معادلة دالة الهدف لكل متغير  $x_j$  يمكن حسابها بالطريقة التالية:

(الجانب الأيمن من القيد الثنائي المقابل) - (الجانب الأيسر من القيد الثنائي المقابل) = (عنصر  $x_1$  × معادلة الهدف).

وبتطبيق هذه المعادلة على النموذجين الأول والثاني السابقين سنحصل على المعادلات الآتية:

بتطبيق المعادلة أعلاه فإن:

$$\text{معامل } z \text{ لـ } x_1 = 5 - 2y_2 + y_1$$

$$\text{معامل } z \text{ لـ } x_2 = 12 - 2y_2 + 2y_1$$

$$\text{معامل } z \text{ لـ } x_3 = 4 - 3y_2 + y_1$$

$$\text{معامل } z \text{ لـ } x_4 = 0 - y_1$$

$$\text{معامل } R = M + y_2 = (-M) - y_2$$

ولحساب هذه المعاملات عددياً نحتاج إلى قيم عددية للمتغيرات  $y_1$ ،  $y_2$  لأن معاملات دالة الهدف تتغير عند أي محاولة، ونتوقع أن قيم  $y_1$ ،  $y_2$  تتغير من محاولة إلى التي بعدها، والصياغة التالية يمكن استخدامها لحل إيجاد قيم المتغيرات الثنائية عند أي محاولة.

$$\begin{pmatrix} \text{معكوس المصفوفات} \\ \text{عند أي محاولة } i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{معامل دالة الهدف} \\ \text{الأصلية عند أي محاولة } i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{قيم المتغيرات الثنائية} \\ \text{عند أي محاولة } i \end{pmatrix}$$

وبالنظر إلى الجدول (7.1)

محاولة 0 : (معامل  $x_4$  ، R) = (-M ، 0)

محاولة 1 : (معامل  $x_3$  ،  $x_4$ ) = (4 ، 0)

محاولة 2 : (معامل  $x_3$  ،  $x_2$ ) = (12 ، 4)

محاولة 3 : (معامل  $x_1$  ،  $x_2$ ) = (5 ، 12)

#### 7.4.3 ملخص طريقة حساب النموذج الأولي الثنائي:

- 1- احسب كل عنصر في كل عمود في كل قيد باستخدام الطريقة (7.4.1).
- 2- احسب القيم الثنائية وذلك بضرب المسألة الأصلية (معاملات دالة الهدف الأصلية) في الحل الحالي في معكوس الصف.
- 3- احسب الطرف الشمالي للعناصر دالة الهدف لمعرفة الفرق بين الطرف الشمالي والطرف اليميني.

#### 7.4.4 التفسير الاقتصادي لمعنى النموذج الثنائي:

##### Economic Interpretation of Duality

- 1- عند الوصول إلى الحل الأمثل (at optimum):

$$\begin{pmatrix} \text{قيمة دالة الهدف} \\ \text{الثنائية} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{قيمة دالة الهدف} \\ \text{الأولية} \end{pmatrix}$$

2- عند أي محاولة أثناء الحل وقبل الوصول إلى الحل الأمثل في المسألة الأولية:

$$\left( \begin{array}{c} \text{الطرف الأيمن} \\ \text{المقابل للقيود الشائية} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{الطرف الشمال} \\ \text{المقابل للقيود الشائية} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{معامل دالة الهدف} \\ \text{للمغيرات } x_j \end{array} \right)$$

وإن هاتين التيجتين تؤديان إلى ملاحظة اقتصادية مهمة للنماذج الشائية والمتغيرات الشائية - ويمكن تمثيل العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج الشائية على الصورة التالية.

النموذج الأولي:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = \sum_{j=1}^n L_j x_j \\ \text{Subject to:} & \\ & \sum_{j=1}^n L_j x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

النموذج الشائية:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = \sum_{L=1}^m b_i y_i \\ \text{Subject to:} & \\ & \sum_{L=1}^m a_j C_j \quad j = 1, 2, \dots, m \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{array}$$

حيث إن المعاملات  $C_j$  تمثل الربح لكل وحدة منتجة من النشاط  $J$ . وإن كمية الموارد المتاحة  $I$ ،  $b_i$  والتي خصصت بمعدل  $a_{ij}$  وحدة من الموارد  $I$  لكل وحدة من المخرجات للنشاط  $J$ .

## 7.5 طريقة حل المسائل الثنائية بواسطة السمبلكس (Dual Simplex Method)

من خلال الفصول السابقة التي تناولت طريقة السمبلكس للمسألة الأولى تبين إذا كان  $z_j - C_j < 0$  في حالة التعظيم لأي متغير أو أكثر فإن المسألة ليس له الحل الأمثل - وأن الشرط الأساسي لتحقيق الحل الأمثل أن جميع  $z_j - C_j \geq 0$  لكل (J).

فإذا نظرنا إلى هذا الشرط من ناحية أو جهة المسائل الثنائية، فإن:

$$z_j - C_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - C_j$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i < C_j \quad \text{فإن} \quad z_i - C_j < 0$$

والذي يعني أن المسألة الثنائية لها حل غير موجود وهذا الشرط يتحقق عندما تكون المسألة الأولية ليس حل أمثل. ومن جهة أخرى عندما يكون:

$$z_i - C_j < 0$$

فإن

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i < C_j$$

وهذا يعني أن المسألة الثنائية في دائرة الحل أو طريقها للحل عندما تكون المسألة الأولى لها حل مثالي.

وبناء على النتائج المدونة أعلاه فإنه يقترح حل مسألة البرمجة الخطية من جديد أو من بدايتها مرة ثانية، حيث تكون بداية المسألة ليس حل واضح ولكن في النهاية لها حل مثالي (ويمكن مقارنتها بطريقة السمبلكس الاعتيادية والتي تبدأ لهما في أن لها الحل واضح وفي الأخير لا يوجد لها حل، أما الطريقة التي تختصر الحل تسمى السمبلكس الثنائي (Dual Simplex). والتي تبدأ من عدم وجود حل واضح (Infeasibility)

وتنتهي عندما يتوفر وضوح وجود للمسألة (Feasibility) وعند توفر (Feasibility) وعندما يكون الحل الأمثل (Optimality). وهذا النوع من المسائل متوفر جداً في مسائل البرمجة الخطية وله أهمية كبرى، ويمكن أن يكون له عامل مساعد ومباشر في تحليل حساسية متغيرات مسائل LP.

#### مثال 7.4:

$$\text{Minimize } z = 2x_1 + x_2$$

Subject to:

$$3x_1 + x_2 \geq 3$$

$$4x_1 - 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الخطوة الابتدائية تحول كل القيود من  $\leq$  وإضافة المتغير الاحتياطي (Stack variable) للحصول على إشارة التساوي (=).

$$\text{Minimize } z = 2x_1 + x_2 \text{ تصغير}$$

Subject to: بشرط

$$-3x_1 - x_2 + x_3 = -3$$

$$-4x_1 - 3x_2 + x_4 = -6$$

$$x_1 - 2x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

البداية بطريقة السمبلكس الاعتيادية والتي توضح أن المتغيرات الاحتياطية ( $x_3, x_4, x_5$ ) لا توفر حل واضح مادام المسألة تصغر وكل معاملات دالة الهدف تكون  $\geq 0$  وهذا يعني أن الحل الأساسي للمسألة هو:

$$x_3 = -3$$

$$x_4 = -6$$

$$x_5 = 3$$

فهو حل مثالي (Optimal) لكن غير منظور أو حل خيالي لأنه لا يحقق شرط  $x \geq 0$  للجميع.

∴ المسألة يمكن معالجتها حلها بطريقة السمبلكس الثنائي:

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الحل
$z$	-2	-1	0	0	0	0
$x_3$	-3	-1	1	0	0	-3
$x_4$	-4	-3	0	1	0	-6
$x_5$	1	2	0	0	1	3

وكما هو معروف في طريقة السمبلكس - أن الطريقة تعتمد على توفر الحل المثالي - وشرط عدم الخيالية في الأرقام - حيث شرط توفر الحل المثالي تضمن توفر الحل المثالي - وعدم الخيالية تضغط على قيم المتغيرات نحو نقاط الحل ومساحته المعروفة بطرق استخدام الرسم (أنظر الفصل الثالث).

#### شرط عدم الخيالية في قيم الأرقام (Feasibility Condition):

إن المتغير الذي يخرج من المتغيرات الأساسية يعتبر له أكبر قيمة سالبة.

أما إذا كان المتغير الأساسي غير سالم فإن عمليات التغيير يجب أن تتوقف ويعتبر الحل المنظور (الغير خيالي) مثالي.

### شرط وجود الحل المثالي (Optimality):

إن المتغير الذي يدخل من ضمن متغيرات الحل يتم اختياره من ضمن المتغيرات الغير أساسية في الحل (Nonbasic). تأخر النسبة بالنسبة للطرف الشمال أو معاملات الطرف الشمال لـ المعادلة Z إلى المعاملات المقابلة للمتغير المقترح أو المختار خروجه من المتغيرات الأساسية. إهمال أي نسبة مقامها + أو صفر - ويقرر دخول المتغير وفقاً للأقل نسبة موجبة، أما إذا كانت كل المقامات صفر أو قيمة موجبة فإن المسألة لها حل خيالي. (unfeasible)

ويعد اختيار المتغير الذي يدخل متغيرات الحل واختيار المتغير الذي يخرج يلي ذلك الحصول على تغيير الصفوف للحصول على المصفوفة الأحادية المعهودة ومنها إلى محاولة أخرى حتى الوصول إلى الحل الأمثل أو التوقف عن وجود حل.

فبالإشارة إلى الجدول السابق نلاحظ أن المتغير المختار إلى الخروج ( $x_4 = -6$ ) لأنه يتحصل أكبر قيمة سالبة. أما المتغير التي دخل الحل فيعطي وفقاً للجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
معادلة z	-2	-1	0	0	0
معادلة $x_3$	-4	-2	0	1	0
النسب	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-	-	-

∴ المتغير المرشح للدخول  $x_2$  لأنه مقابل إلى أقل قيمة موجبة ( $\frac{1}{3}$ ) وبتطبيق قواعد المصفوفات للحصول على المصفوفة الأحادية التالية للمتغيرات نحصل على الجدول التالي:

النموذج الثنائي لمسائل البرمجة الخطية

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الحل
$z$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
$x_3$	$-\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1
$x_4$	$-\frac{4}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
$x_5$	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	1	-1

الحل المدرج أعلاه مثالي ولكن خيالي حيث  $x_3 = -1$  ،  $x_5 = -1$

فإذا اخترنا  $x_3$  لمغادرة المتغيرات الأساسية، فإن  $x_1$  تنطبق عليه الشروط للدخول إلى قائمة المتغيرات الأساسية والتي تعطي بالجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الحل
$z$	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	2
$x_1$	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	-1
$x_2$	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	2
$x_3$	0	0	-1	1	1	-1

ومن الجدول الأخير يتضح أن الحل مثالي وغير خيالي.

يعتبر تطبيق طريقة السمبلكس الثنائية ذات استخدام مفيد في تحليل الحساسية. وتظهر هذه الأهمية عندما يضاف قيد جديد للمسألة بعد الحصول على الحل للمسألة بكل الإضافة. فإذا كان القيد (المضاف) لا يحقق شرط الحل الأمثل والغير خيالي فإن المسألة سيقتى لها حل مثالي ولكن خيالي. وبالتالي طريقة السمبلكس الثنائية يمكن استخدامها بدون إعادة الحل من البداية حتى تحقق شروط الحل الأمثل والغير خيالي في عدد قليل من الخطوات الحسابية.

## 7.6 تحليل الحساسية (Sensitivity Analysis):

من المعروف بأنه في معظم التطبيقات العملية أن بعض المعلومات لا تكون دقيقة إنما هي مقربة أو محاكاة للواقع الفعلي إلى حد حقيقي جداً، وعليه فإن من المهم أن تجد الحل الأمثل مرة أخرى عند إتاحة المعلومات (Information Availability) الأكثر دقة حتى يعد حل المسائل، وهذا ممكن أن يحصل بدون إعادة حل المسألة الأصلية من البداية. وفي بعض الأحيان أن بعض المتغيرات يحصل عليه تغير أثناء عملية صياغة المسألة وقبيل بدأ الحل أو في إحدى مراحل الحل.

بالإضافة إلى ذلك أن بعض القيود لا تكون مساوية تماماً عند الحصول على الحل الأمثل وبالتالي يجب النظر في هذه الإتاحة من خلال وجود الحل الأمثل، ويمكن أن يضاف قيد آخر بعد حل المسألة نظراً للتطورات التي تحصل في المسألة من البداية.

كل هذه التطورات التي تحصل على نموذج البرمجة الخطية وما شابه ذلك يمكن أن تسمى بتحليل الحساسية. فعلى سبيل المثال:

$$\text{Minimize } z = c x$$

S. T.

$$A x = b$$

$$x \geq 0$$

ولمعرفة أهمية قواعد الحساسية وذلك باعتبار مسألة تطبيقية وذلك على النحو

الآتي:

$$\text{Minimize } z = 3 x_1 + 2 x_2$$

S.T تحت شرط

$$x_1 + 2x_2 \leq 0 \quad (\text{مواد خام A})$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (\text{مواد خام B})$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad (\text{نهاية الطلبية})$$

$$x_2 \leq 2 \quad (\text{نهاية الطلبية})$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{شروط عدم السلبية})$$

بعد الحصول على الحل الأمثل ترغب إدارة الإنتاج لتحديد هذه الحالة وفقاً للتغيرات الآتية:

- 1- يرغب قسم تخطيط الإنتاج لزيادة 2 طن من المواد الخام B ويقابل هذا زيادة المواد الخام A إلى 3 طن.
- 2- إن الاحتياج إلى المنتج  $x_2$  يصبح 3.5 بدلاً من 2 كنهاية للطلب.
- 3- استخدام الماجة الخام A & B يتطلب دراسة لتقليصها في المادة. النتيجة من 1 & 2 إلى 0.8 و 1.7 (يقصد بهما معاملات المعادلة (القيد) الأولى المصاحبة  $(x_2, x_1)$ )
- 4- معاملات الربح في دالة الهدف وفقاً لقسم الحسابات بالمصنع تتغير إلى 2.5 ، 1.5 د.ل/ طن بدلاً من 3 ، 2 كما هو في المسألة الأصلية.
- 5- من خلال دراسات السوق وجد أنه لا يمكن استخدام كمية من المواد A ، B أكثر من 3 طن بدلاً من 6 & 8.

نلاحظ أن قائمة المطالب والتي تشمل تغيير المسألة الأصلية تحتاج إلى زمن كثير لحل المسألة 5 مرات على الأقل. وهذه الحالة يعبر عنها بتحليل الحساسية. والسؤال المطروح هل عندما تحصل هذه المتغيرات يبقى الحل الأمثل - هو الحل الأمثل. والجواب يقع في احتمالين لا غير.

1- الحل الحالي يمكن أن يصبح حل خيالي (Infeasible).

2- الحل الحالي يمكن أن يصبح غير مثالي (Nonoptimal).

وهذان الاحتمالات يعتمد على نتيجة حسابات النموذج الأولي - الثنائي.

وبناءً على المناقشة يمكن اتخاذ إجراءات تحليل الحساسية في الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: حل المسألة الأصلية للبرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل بواسطة طريقة السمبلكس.

الخطوة الثانية: وفقاً للتغيرات المطلوبة في معاملات المسألة تستخدم طريقة حساب النموذج الأولي - الثنائي.

الخطوة الثالثة: إذا كان جدول المصفوفات الجديد لا يطابق الحل الأمثل. أذهب إلى الخطوة الرابعة. إذا كان الحل الخيالي أذهب إلى الخطوة الخامسة. أما إذا كان الحل المثالي توقف.

الخطوة الرابعة: طبق طريقة السمبلكس الاعتيادية لإيجاد الحل الأمثل للمسألة (الجدول) الجديدة. أو أثبت أن الحل ذو مساحة غير معلومة (Unbounded).

الخطوة الخامسة: طبق طريقة الحل للنموذج الأولي - والثنائي لإيجاد الحل الأمثل الجديد، أو وضح أنه لا يوجد للمسألة حل.

وفقاً للخطوات السابقة نتجه الآن لشرح كيفية تطبيق تحليل الحساسية للمسألة المذكورة أعلاه.

المسألة الأولى:

Minimize  $z = 3x_1 + 2x_2$  تعظيم

S. T.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الخطوة الابتدائية تحول كل القيود من  $\leq$  وإضافة المتغير الاحتياطي (Stack variable) للحصول على إشارة التساوي (=).

Minimize  $z = 6y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4$

S. T

$$y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 3$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

إن الحل الأمثل للمسألة الأولية يعطي بالجدول التالي:

وكل هذه المعلومات تصلح لبداية تحليل الحساسية كما هو مشار إليه في الخطوة الأولى المذكورة أعلاه.

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الحل
$z$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$
$x_1$	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
$x_2$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
$x_3$	0	0	-1	1	1	0	3
$x_6$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

سوف نشير إلى الحل الأمثل بالحل الحالي (Current solution).

### 7.6.1 حالات الحساسية:

#### 1- التغير في الطرف الأيمن في القيود (bi)

إذا حصل تغير في القيد الأول للطرف الأيمن من 6 طن إلى 7 طن فما هو التغير الذي يحصل على الحل الأمثل. يمكن معالجته باستخدام طريقة الحل الأولي - الثنائي وذلك على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{الطرف} \\ \text{الأيمن} \\ \text{الجديد} \end{pmatrix}$$

وبما أن الطرف الأيمن الجديد مازال غير سالب. هذا يعني أن الحل الأمثل يبقى أمثل ويصبح التغير فقط في قيم  $x_5 = 2$ ،  $x_2 = 2$ ،  $x_1 = 3$ ، أما إذا فرضنا في الطرف الأيمن تغيرت قيم القيد الأول والثاني من 6 و 8 إلى 7، 4 فيمكن حساب الطرف الأيمن الجديد على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ \frac{1}{3} \\ -2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{الطرف} \\ \text{الأيمن} \\ \text{الجديد} \end{pmatrix}$$

ولهذا التغير أثر على قيم  $x_5$ ،  $x_6$  تحولن إلى قيم سالبة وأصبح الحل خيالي. والآن يجب أن نطبق طريقة النموذج الأولي - الثنائي لمعالجة مشكلة الخيالية وذلك يوضح القيم في الجدول التالي:

النموذج الثنائي لمسائل البرمجة الخطية

المتغيرات الأساسية	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	الحل
Z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{23}{3}$
X <sub>2</sub>	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
X <sub>1</sub>	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
X <sub>5</sub>	0	0	-1	1	1	0	-2
X <sub>6</sub>	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{4}{3}$

وأن قيمة (z) الجديدة  $\frac{23}{3}$  وأن الجدول أعلاه يعطي الحل المثالي حيث معادلة Z تمتاز بأن قيمتها كلها  $\geq 0$  لكن الحل خيالي لأن بعض القيم سالبة وبالتالي فإن تطبيق طريقة السمبلكس للنموذج الأولي - الثنائي تعتبر ضرورية لتحقيق المثالية والحقيقة. ووفقاً لقواعد الطريقة فإن X<sub>5</sub> تخرج من متغيرات الحل و X<sub>3</sub> تدخل لمتغيرات الحل والتي يعطي بالجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	الحل
Z	0	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	7
X <sub>2</sub>	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
X <sub>1</sub>	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1
X <sub>3</sub>	0	0	1	-1	-1	0	2
X <sub>6</sub>	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0

هذا الجدول يحقق شرط الحل الأمثل والأعداد الحقيقية والحل الأمثل هو:

$z = 7$  ،  $x_2 = 2$  ،  $x_1 = 1$  حيث أن الحل ذو أعداد حقيقية تحقق في محاولة واحدة

فقط.

## 2- إضافة قيد جديد للمسألة الأولى:

عند إضافة قيد جديد سوف ينتج عنه شرطين لا غيرهما:

1- تحقيق أن الحل الأمثل لا يتغير نتيجة كون القيد مكرر أو داخل منطقة الحل (Nonbinding or redundant).

2- إن القيد لا يحقق الحل الأمثل ولا الأعداد الحقيقية، وبالتالي نحتاج إلى تطبيق طريقة السمبلكس للنموذج الأولي - الثنائي ولتوضيح هذه الحالات نفرض إضافة القيد التالي:

$$x_1 \leq 4$$

وهذا القيد يجب أن يضاف إلى النموذج الأول.

وبما أن  $x_1 = \frac{10}{3}$  ،  $x_2 = \frac{4}{3}$  من الواضح أنه يحقق القيد المضاف ولا داعي لحصول أي تغيير يذكر.

أما إذا افترضنا أن القيد المضاف

$$x_1 \leq 3 \text{ من الواضح أنه لا يحقق الحل الحالي } x_1 = \frac{10}{3} ، x_2 = \frac{4}{3} . \text{ لأننا لم نعطي}$$

حقيقة الأرقام.

ولحل المسألة بعد إضافة القيد الجديد يجب أن نضيف له المتغير الفائض.

فيصبح القيد على النحو الآتي:

$$x_1 + x_7 = 3 \quad x_7 \geq 0$$

من المعروف أنه في الحل الحالي  $x_1$  في الحل الأمثل وبالتعويض في معادلة القيد الأول

$$x_1 - \left(\frac{1}{3}\right)x_3 + \left(\frac{2}{3}\right)x_4 = \frac{10}{3}$$

وبالتالي يصبح القيد الجديد

$$\frac{10}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)x_3 - \left(\frac{2}{3}\right)x_4 + x_7 = 3$$

أو

$$\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_7 = -\frac{1}{3}$$

وأن القيمة السالبة في الطرف الأيمن تعطي عدم توفر شرط الأرقام الحقيقي.

فإذا قلنا أن

$$x_3 = x_4 = 0$$

$$x_7 = -\frac{1}{3} \text{ والتي يعرض شرط أن}$$

$$x_7 \geq 0$$

فالجدول التالي يوضح المعلومات الملخصة أعلاه:

المتغيرات الأساسية	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	x <sub>7</sub>	الحل
Z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	$\frac{38}{3}$
x <sub>3</sub>	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{10}{3}$
x <sub>1</sub>	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{10}{3}$
x <sub>5</sub>	0	0	1	1	1	0	0	3
x <sub>6</sub>	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{3}$
x <sub>7</sub>	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$

بطريقة السمبلكس الأولى - الثنائي x<sub>4</sub> و x<sub>7</sub> تدخل والتي يعطي التالي الحل الأمثل.

المتغيرات الأساسية	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	الحل
z	0	0	1	0	0	0	2	12
x <sub>2</sub>	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x <sub>1</sub>	1	0	0	0	0	0	1	3
x <sub>5</sub>	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
X <sub>6</sub>	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x <sub>7</sub>	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

وهو الحل الأمثل الجديد في محاولة واحدة فقط.

### 3- التغيير في معاملات دالة الهدف:

يمكن شرح هذه الظاهرة مباشرة باستخدام المثال السابق حيث:

$$z = 3x_1 + 2x_3$$

وتغيرت هذه الدالة

$$z = 5x_1 + 2x_3$$

فيمكن حساب القيم الثنائية (y<sub>1</sub>) (Dual values)

$$y_1, y_2, y_3, y_4 = (4, 5, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 0, 0)$$

والخطوة الثانية بإعادة حساب معاملات المعادلة  $Z$  بواسطة أخذ الفرق ما بين الطرف الشمالي والطرف اليميني لقيود المسألة الثنائية.

وهذا يعمل على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} \text{معامل } x_1 &= y_1 + 2y_2 - y_3 - 5 \\ &= 1(1) + 2(2) - (0) - (5) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{معامل } x_2 &= 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 4 \\ &= 2(1) + 2 + 0 + 0 - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{معامل } x_3 = y_1 - 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\text{معامل } x_4 = y_2 - 0 = 2 - 0 = 2$$

$$\text{معامل } x_5 = y_3 - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$\text{معامل } x_6 = y_4 - 0 = 0 - 0 = 0$$

وبما أن كل معاملات المعادلة  $0 \leq 2$  (تعظيم) وهذا يعني أن دالة الهدف لا تغير من الحل الأمثل الحالي وقيمتها الجديدة.

$$5\left(\frac{10}{3}\right) + 4\left(\frac{4}{3}\right) = 22$$

فإذا فرضنا أن دالة الهدف تغيرت إلى الحالة التالية:

$$z = 4x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \therefore (y_1, y_2, y_3, y_4) &= (4, 5, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{-2}{3}, \frac{7}{3}, 0, 0\right) \end{aligned}$$

ويمكن التحقق من قيم Z الجديدة:

المتغيرات الأساسية	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	الحل
Z	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{44}{3}$

وبما أن  $x_3 \geq 0$  (قيمة سالبة) فيجب أن تدخل الحل وتحقق الحل الأمثل بتطبيق طريقة السمبلكس للنموذج الأول - الثنائي وكما هو موضح بالجدول التالية:

المحاولة	المتغير	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	الحل
1	Z	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{44}{3}$
x <sub>2</sub> تدخل	x <sub>2</sub>	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
	x <sub>1</sub> تخرج	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
	x <sub>5</sub>	0	0	-1	1	1	0	3
	x <sub>6</sub>	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
	Z	0	1	0	2	0	0	16
	x <sub>3</sub>	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
	x <sub>1</sub>	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4
	x <sub>5</sub>	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5
	x <sub>6</sub>	0	0	0	0	0	1	2

#### 4- إضافة نشاط جديد (New x)

يمكن المقصود بإضافة متغير جديد وفق المثال الآتي:

Maximize تعظيم

Subject to تحت شرط

$$x_1 + 2x_2 + \frac{3}{4}x_7 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 + \frac{3}{4}x_7 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 - x_7 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_7 \geq 0$$

ويعني إضافة متغير مستوي لعمل تغير دالة الهدف. ويمكن اعتبار  $x_7$  بأنها موجودة أصلا في المسألة مع توفر معاملات صفري.

وأول اختبار يجب التفكير فيه اختبار النموذج الثنائي المقابل.

$$\left(\frac{3}{4}\right)y_1 + \left(\frac{3}{4}\right)y_2 - y_3 \geq \frac{2}{3}$$

وبما أن نلاحظ أن  $x_7$  متغير غير أساسي (لا بدخل في الحل) في المسألة الأولية. النموذج الثنائي غير متغير.

∴ فإن معامل  $x_7$  في الحل الأول مثالي.

$$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) - (1)(0) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

وهذا يعني أن الحل سوف يتحسن إذا  $x_7$  أصبحت (+)

الحل المثالي الحالي يمكن تحسنه بخلق عمود ف الطرف الشمالي للمعادلة z

ومعاملها التي تساوي  $-\frac{1}{4}$ .

والقيد المصاحب مما يحسب على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{3}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

أنظر الجداول التالية:

المتغيرات الأساسية	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>7</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	x <sub>6</sub>	الحل
z	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$
x <sub>2</sub>	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x <sub>1</sub>	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
x <sub>5</sub>	0	0	1	-1	1	1	0	3
x <sub>6</sub>	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
z	0	1	0	1	1	0	0	14
x <sub>7</sub>	0	4	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
x <sub>1</sub>	1	-1	0	-1	1	0	0	2
x <sub>5</sub>	0	4	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{25}{3}$
x <sub>6</sub>	0		0	0	0	0	1	2

### 7.7 مسائل:

ضع علامة (✓) أو (✗) على العبارات التالية:

- 1- المسألة الأولية يجب دائماً أن تكون من نوع تعظيم ( )
- 2- النموذج الثنائي للنموذج الثنائي هو النموذج الأولي ( )
- 3- إذا كان حل المسألة الأولية غير محدود فإن حل النموذج الثنائي خيالي ( )
- 4- إذا كان النموذج الأولي حله غير مثالي، فإن النموذج الثنائي يكون خيالي ( )
- 5- التغيير في الطرف الأيمن من القيود يؤثر فقط على قيم الحل في الجدول الذي يعطي الحل الأمثل ( )
- 6- إضافة نشاط جديد يمكن أن يحسن قيمة دالة الهدف ( )
- 7- إضافة قيد جديد يحسن من قيمة دالة الهدف ( )
- 8- إذا تم تغيير الطرف الأيمن للقيود ومعاملات دالة الهدف يمكن أن يبطل توفر الحل الأمثل والوجود الحقيقي للقيم العددية ( )
- 9- في طريقة السمبلكس للنموذج الأولي - الثنائي. مسائل البرمجة الخطية تبدأ من وجود حل مثالي ولكن خيالي ( )
- 10- إذا كانت مسألة البرمجة الخطية الأولية أصلها مسألة تصغير فإن مسألة النموذج الثنائي تكون تعظيم وإشارة للقيود ≤. ( )
- 11- أكتب النموذج الثنائي للمسائل الآتية:

Maximize  $z = 10 x_1 + 20 x_2$  -أ  
 S. T.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq -3 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Maximize  $z = 6 x_1 - 3 x_2$  -ب  
 S. T.

$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &\geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Maximize  $z = 5 x_1 + 6 x_2$  -ج  
 S. T.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 3 \\ x_1 \text{ غير محدد الإشارة} \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Maximize  $z = 3 x_1 + 4 x_2 + 6 x_3$  -د  
 S. T.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_1, x_3 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Maximize  $z = x_1 + x_2$  -هـ  
 S. T.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 \text{ غير محدد الإشارة} \end{aligned}$$

12- إذا علمت أن

$$\text{Maximize } z = 5 x_1 + 2 x_2 + 3 x_3$$

S.T.

$$x_1 + 5 x_2 + 2 x_3 \leq b_1$$

$$x_1 + 5 x_2 - 6 x_3 \leq b_2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

حيث  $b_1, b_2$  ثوابت ولقيم خاصة لـ  $b_1, b_2$  يعطي الحل الأمثل بالجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	الحل
$z$	0	a	7	d	e	150
$x_1$	1	b	2	1	0	30
$s_1$	0	c	-8	-1	1	10

حيث  $a, b, c, d, e$  ثوابت، أحسب

أ- قيم  $b_1, b_2$  التي تحقق الحل الأمثل.

ب- الحل الأمثل للنموذج الثنائي.

ج- قيم  $a, b, c$  عند توفر الحل الأمثل.

13- حل المسألة التالية بطريقة السمبلكس للنموذج الثنائي:

$$\text{Maximize } z = 2 x_1 + 3 x_2$$

S. T.

$$2 x_1 + 3 x_2 \leq 30$$

$$x_1 + 2 x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

14- حل المسألة التالية بطريقة السمبلكس للنموذج الثنائي:

$$\text{Maximize } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

S. T.

$$5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 502$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 20$$

$$7x_1 + 6x_2 + 9x_3 \geq 30$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq 35$$

$$2x_1 + 4x_2 - 15x_3 \geq 10$$

$$12x_1 + 10x_2 \geq 90$$

$$x_1 - 10x_3 \geq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

قارن عدد القيود ما بين المسألة الأولية والثنائية.

15- حل المسألة (14) إذا أصبحت دالة الهدف

$$\text{Min } z = 6x_1 + 8x_2 + 3x_3$$