الفصل الثامن

مشكلة النقل

يهتم هذا الفصل بموضوع حيوي ألا وهو مشكلة التوزيع باعتبارها حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية التي يمكن حلها بواسطة طريقة السمبلكس. ويركز الفصل على طريقة فوجل التقريبية كتقنية مستخدمة في هذا المجال. بالإضافة إلى أن الفصل يسلط الضوء على الطرق المساعدة الأخرى في حل مشاكل التوزيع.

الفصل الثامن

8

مشكلة النقل
Transportation Problem

8.1 مقدمة:

تُعد مشكلة النقل والتوزيع من بين المشاكل الخاصة بمسائل البرمجة الخطية وكانت محاولة (Cooper) سنة 1953م لوضع نموذج مشكلة التوزيع في صورة مبسطة أولى المحاولات المثمرة في هذا المجال حيث توصلاً إلى ما يسمى بطريقة الحجر المتنقل (Stepping stone) المشهورة.

ثم قام (Ferguson) بتهذيب طريقة الحجر المتنقل سنة 1955 لتصبح ما يسمى بطريقة التوزيع المعدلة، وفي أواخر السنة نفسها ظهر ما يسمى بطريقة فوجل التقريبية (Vogel's approximation).

التي تعتبر في واقع الأمر طريقة مساعدة لإحدى الطريقتين السابقتين في حل مشاكل التوزيع، وتعتبر مشكلة التوزيع حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية ويمكن حلها بواسطة طريقة السمبلكس.

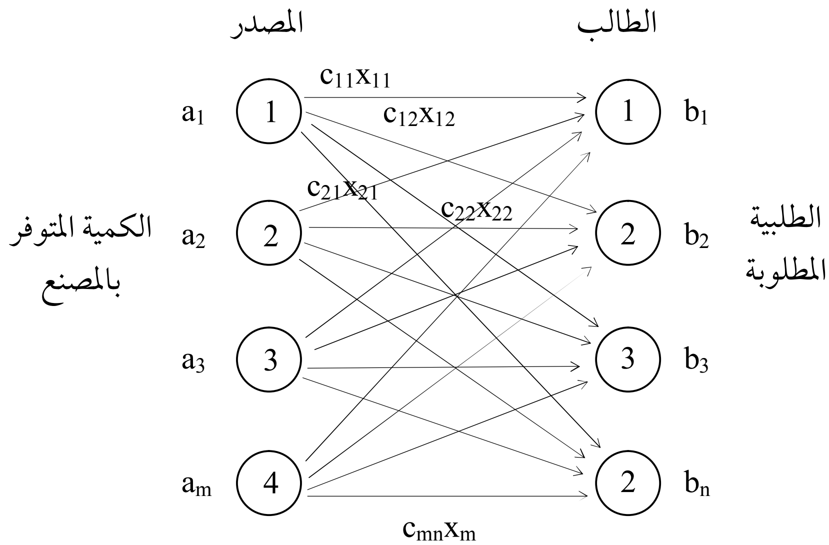
وتوجد طريقة رياضية أخرى لحل مسائل البرمجة الخطية لسهولتها وقلة عملياتها الحسابية والتي تستخدم ي حل هذا النوع من المسائل ويرجع السبب في تسمية هذه المشكلة بالنقل إلى تعدد مراكز الإنتاج وتعدد المناطق التي تصل إليها المنتجات، ويزداد تعقد مراكز الإنتاج وتعدد المناطق التي تصل إليها المنتجات، ويزداد تعقد هذه المشكلة مع تعدد مراكز الاستلام فبزيادة هذه المراكز تزداد البدائل المتاحة مما يعني صعوبة تقييمها للوصول إلى أدنى التكاليف وهو الهدف المطلوب الوصول إليه في مثل هذه

المشكلات، والشكل (8.1) يمثل توضيح مباشر لنموذج مشكلة النقل حيث يظهر فيه الهدف الأساسي لمشكلة النقل أي نقل وحدات من منتج من المخازن أو خطوة الإنتاج إلى عدة مواقع يمكن الاستفادة منها (أماكن استلام).

وذلك في ضوء توفر المعلومات التالية:

1- مستوى توفر المنتج في المصنع ومستوى طلب المواقع المستلمة لهذا المنتج.

2- تكلفة الوحدة الواحدة من المنتج من مراكز وجودها إلى مراكز أو مواقع استلامها أو استعمالها.



شكل (8.1)

من / إلى	المصدر 1	2	3	4	المتاح
1	2	4	3	7	10
2	5	1	7	3	15
3	2	2	6	6	15
المطلوب	8	12	10	10	40 / 40

نلاحظ أن كل مربع يمكن توضيحه على النحو التالي:

d_{ij}	C_{ij}
x_{2j}	

C_{ij} تعني تكلفة النقل للوحدة من المصنع i إلى المخزن j.

d_{ij} تعني مقدار التغير لصالح الحصول على الحل الأمثل.

x_{2j} تعني عدد الوحدات التي نقلت من المصنع i إلى المخزن j.

ويمكن صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل على النحو الآتي:

إذا فرضنا أن x_{ij} تمثل كمية المواد المنقولة من المصدر I إلى الطالب j .

$$\text{Minimize} \qquad z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$

S.T.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \qquad i = 1, 2, ..., m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le b_j \qquad j = 1, 2, ..., n$$

$x_{ij} \geq 0$ لكل j, i

إن مجموع القيود الأولى تمثل مجموع كمية المواد المنقولة من المصدر a بحيث لا تزيد عن المتوفر في المصدر، أما مجموعة القيود الثانية فهي تمثل أن مجموع المواد المنقولة إلى الطالب لا تزيد عن حاجته b وهذا يعني أن $\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ ويسمى هذا النوع من مسائل النقل بالمسائل المتعادلة.

علماً بأن المتوفر في الحياة التطبيقية يكون أحياناً أكثر من الطلبية والأمثلة عديدة. ولتوضيح هذه الفكرة نشرخ الأمثلة الآتية:

مثال 8.1:

الشركة الوطنية للأسمنت لها مواقع في المنطقة الغربية في الجماهيرية الليبية في كل من الخمس، سوق الخميس، زليكن.

وتوزيع كل من طرابلس - مصراته، فإذا فرضنا أن سعة المواقع الثلاثة هي: 1000، 1500، 1200 طن وأن الطلبية المواقع هي 2300، 2400 طن وأن تكلفة نقل الطن هي 1000 درهم/ كيلو متر.

وأن المسافات بين المدن موضحة في الجدول التالي بالكيلو متر.

	طرابلس	مصراته
الخمس	120	80
سوف الخميس	90	140
زليطن	160	40

ويمكن تحويل جدول الكيلومترات إلى جدول دينارات، على اعتبار أن تكلفة الكيلو متر 1000 درهم.

	طرابلس	مصراته
الخمس	120	80
سوف الخميس	90	140
زليتن	160	140

فإذا فرضنا أن x_{ij} كمية الأسمنت بالطن المنقولة من المصانع إلى الواقع فإن مجموع الإنتاج = (1000 + 1500 + 1200 = 3700 طن).

وأن مجموع الطلبية = (2300 + 1400 = 3700 طن)، وهذا يعني أن كمية الإنتاج تساوي كمية الطلبية ويكون نموذج البرمجة الخطية على النحو الآتي:

$$\text{Min} \quad z = 120\,x_{11} + 80\,x_{12} + 90\,x_{21} + 140\,x_{22} + 160\,x_{31} + 40\,x_{32}$$

S. T.

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} \quad &= 1000 \\
x_{1} + x_{22} \quad &= 1500 \\
x_{31} + x_{32} \quad &= 1200 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} \quad &= 2300 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1400
\end{aligned}$$

$xij \geq 0$ لكل J , i

ويمكن تمثيلها بواسطة الجداول

	طرابلس	مصراته	
الخمس	120 x_{11}	80 x_{12}	1000
سوق الخميس	90 x_{21}	140 x_{22}	1500
زليتن	60 x_{31}	40 x_{23}	1200
	1300	1400	

إذا فرضنا أن مصنع سوق الخميس للأسمنت أصبحت سعته الإنتاجية 1300 طن/ يومياً بدلاً من 1500 طن وبالتالي تتغير المسألة إلى حالة عدم التوازن، أي أصبح مجموع المصدر المنتج 3500 بدلاً من 3700 وبالتالي أصبح هناك نقص في الطلبية الإجمالية قدرة 1500 - 1300 = 200 طن/ يومياً وبالتالي يجب أن نشير إلى إضافة ما يسمي بالمصدر الوهمي أو المصدر الفارغ (Dummy) وبالتالي يمكن جدولة المسألة على النحو التالي:

	طرابلس	مصراته	
الخمس	120	80	1000
سوق الخميس	90	140	1500
زليتن	160	40	1200
المصنع الغير موجود	0	0	200
	2300	1400	

أما إذا كان المصدر يفوق الطلب أو الطلبية الواردة من جميع المصانع وبالتالي يضاف طالب غير موجود (وهمي) فعلى سبيل المثال إذا انخفضت طلبية طرابلس من 2300 إلى 1900 بالتالي يمكن صياغة الجدول على النحو التالي:

	مركز الطلبية غير موجود	مصراته	طرابلس	
1000	0	80	120	الخمس
1500	0	140	90	سوق الخميس
1200	0	40	160	زليتن
	400	1400	1900	

ويقصد بالصفر تكلفة النقل إلى الموقع الوهمي.

8.2 طرق حل مشكلة النقل:

خطوات الحل:

1- احسب الحل الابتدائي للمسألة.

2- احسب المتغير الذي يدخل في الحل من المتغيرات التي خارج نطاق الحل. إذا كانت كل المتغيرات التي خارج نطاق الحل لا يجوز لها الدخول في الحل حسب شروط الحل الأمثل (وفقاً للشروط المعروفة بطريقة السمبلكس) توقف ويعتبر هذا الحل (الحل الأمثل) غيره أذهب إلى الخطوة الثالثة.

3- أحسب المتغير الموجود بالحل الذي يحق له الخروج من الحل مع تحقق أنه مغير يحقق شروط الحل الابتدائي ومنه أذهب إلى الخطوة الثانية ولشرح هذه الخطوات نستعرض المثال الآتي:

	1	2	3	4	
1	10 x_{11}	0 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
المصدر 2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	25
3	0 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	5
الطالب	5	15	15	10	

8.2.1 طريقة حساب الحل الابتدائي:

من المعروف أن الشرط العام لحل مسائل النقل هو:

$$\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

وهذا أيضاً يقرر أن أي مسألة نقل لابد أن تشترط (m + n - 1) معادلات غير معتمدة على بعضها وعليه فإن أي حل ابتدائي بواسطة طريقة السمبلكس يستوجب عدد (m - n - 1) متغير أساسي في الحل.

من الطبيعي أن أي مسألة نقل يمكن صياغتها على نموذج برمجة خطية ومن الممكن استخدام متغيرات فائضة للحصول على الحل الابتدائي.

وللحصول على الحل الابتدائي لمسألة النقل نستخدم طريقة تسمى طريقة زاوية الركن الشمالي الغربي (North west corner) مع العلم بوجود طريقتين هما البداية بأقل تكلفة ممكنة (minimum cost) وطريقة فوجل التقريبية (vogel's approximation method) وتهتم طريقة زاوية الركن الشمالي الغربي بوضع أكبر كمية ممكنة ويسمح بها المصدر والطالب إلى قيمة x_{11} وأن الصف العمود الذي يتم تحقيق سعته يشطب من جدول مسألة النقل وهذا يعني أن باقي المتغيرات التي في الصف أو العمود الذي تم شطبه قيمتها صفر.

أما إذا تم تحقيق سعة الصف فقط أو العمود فقط فيتم شطب الصف أو العمود فقط. ولتوضيح هذه الطريقة بالنظر إلى الجدول حسب الخطوات التالية:

1- $x_m = 5$ وبالتالي يتم شطب العمود الأول وبالتالي لا يمكن إضافة أي قيمة لهذا العمود ويتم شطبه.

2- $x_{12} = 10$ وبالتالي يتم شطب الصف الأول ونبقي خمس وحدات في العمود الثاني.

3- $x_{22} = 5$ ويتم شطب العمود الثاني ويبقى 20 في الصف الثاني.

4- $x_{23} = 15$ ويتم شطب العمود الثالث ويبقى 5 في الصف الثاني.

5- $x_{24} = 5$ ويشطب الصف الثاني ويبقى 5 في العمود الرابع.

6- $x_{34} = 5$ ويشطب الصف الثالث والعمود الرابع ويتم الإجراء لتوزيع الكميات في مواقعها.

وبالتالي يعتبر الحل الابتدائي للمسألة على النحو الآتي:

$x_{11} = 5$ $x_{23} = 15$

$x_{12} = 10$ $x_{24} = 5$

$x_{22} = 5$ $x_{34} = 15$

وباقي $x_{ij} = 0$

ويكون إجمالي التكلفة للنقل:

$5 \times 10 + 10 \times 0 + 5 \times 7 + 15 \times 9 + 5 \times 20 + 5 \times 18 = 410$ د.ل

وكما هو موضح بالجدول التالي:

	1	2	3	4	
1	5	10	0	0	15
2	0	5	15	5	25
3	0	0	0	5	5

نلاحظ أنه عندما يكون العمود والصف لها كميات مقنعة بالتناول، عليه فإن المتغير الذي يجب إضافته إلى المتغيرات الواقعة في نطاق الحل يجب أن يكون عند المستوى صفر. الجدول التالي يوضح هذه الفكرة.

مثال العمود (2) والصف (2) كمياتهم مقنعة بالتبادل.

فإذا كان العمود (2) تم شطبه فإن x_{23}تصبح في مستوى صفر.

وفي الخطو التي تليها باقي المورد أو المصدر في الصف (2) تكون صفر. أما إذا كان الصف (2) شطب فإن x_{23} تصبح صفر.

	1	2	3	4	
1	5	5			~~10~~ 5
2		5	0		~~5~~ 0
3			8	7	15
	5	~~10~~ 5	8	7	

نلاحظ أن الحل الابتدائي المتوفر الجدولين السابقين يحقق أن عدد المتغيرات الأساسية في دائرة الحل يساوي:

$$m + n - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$$

وهذه ميزة لاستخدام طريقة زاوية الركن الشمالي الغربي.

8.2.2 طريقة حساب تحديد المتغير الذي يدخل لتحسين الحل:

يمكن تحديد المتغير الذي لتحسين الحل بواسطة تطبيق شروط الحصول على الحل الأمثل بطريقة السمبلكس - حيث أن حساب قيمة دالة الهدف يعتمد على طريقة النموذج الأولي - والثنائي وعلاقتهما.

كما ورد في الفصل السابق.

ويمكن استخدام طريقة تسمى المضروبات المرافقة u_i , v_i لكل من الصف I والعمود j لجدول مسألة النقل لكل متغير أساسي x_{ij} للحل الحالي بحيث أن المضروبات u_i , v_i يجب أن تحقق المعادلات التالية لكل x_{ij} $u_i + v_i = c_{ij}$

وعدد هذه المعادلات يساوي $(m + n - 1)$ علماً بأن الغير معلوم هو عددهم $(m+n)$.

ويمكن حساب u_i , v_i بوضع قيمة اختيارية لأحد المضروبات على سبيل المثال لو فرضنا أن $(u_i = 0)$ وبالتالي يمكن حل معادلات عددها على سبيل المثال لو فرضنا أن $(u_i = 0)$ وبالتالي يمكن حل معادلات عددها $(m + n - 1)$ ومتغيرات عددها $(m + n - 1)$ وبالتالي يمكن اختيار أي متغير غير أساسي في الحل x_{pp} بواسطة المعادلة التالية:

$$c_{p9} = u_p - v_9 - c_{p9} \quad \text{لكل متغير } x_{p9}$$

فعلى سبيل التوضيح في الجدول السابق يمكن حساب قيم المتغيرات الأساسية وهي:

x_{11}: $u_1 + v_1 = c_{11} = 10$

x_{12}: $u_1 + v_2 = c_{13} = 0$

x_{22}: $u_2 + v_2 = c_{22} = 7$

x_{23}: $u_2 + v_3 = c_{23} = 9$

x_{24}: $u_2 + v_4 = c_{24} = 20$

x_{34}: $u_3 + v_4 = c_{34} = 18$

بفرض أن $u_1 = 0$ يمكن حساب باقي المضروبات.

$v_1 = 10$ $u_2 = 7$

$v_2 = 0$ $u_3 = 5$

$v_3 = 2$

$v_4 = 13$

ويمكن حساب المتغيرات غير الأساسية على النحو الآتي:

x_{13}: $\bar{c}_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 2 - 20 = -18$

x_{14}: $\bar{c}_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 13 - 11 = 2$

x_{21}: $\bar{c}_{21} = u_1 + v_1 - c_{21} = 7 + 10 - 12 = 5$

x_{31}: $\bar{c}_{31} = u_2 + v_1 - c_{31} = 5 + 10 - 0 = 15$

x_{32}: $\bar{c}_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 5 + 10 - 14 = -9$

x_{33}: $\bar{c}_{33} = u_4 + v_3 - c_{33} = 5 + 2 - 16 = -9$

وبما أن x_{31} لها أكبر قيمة موجبة $\bar{c}_{p9}$.

∴ تختار x_{31} للدخول في المتغيرات الأساسية وفقاً لهذه القاعدة.

8.2.3 طريقة حساب تحديد المتغير الذي يخرج من الحل الأساسي:

وفقاً لقواعد السمبلكس لاختيار المتغير الذي يخرج وذلك باستخدام أقل نسبة موجبة يمكن تصميم شبكة مغلقة للمتغير المطلوب دخوله في الحل (x_{31}) في هذه المحاولة كما هو موضح في الجدول التالي:

	1	2	3	4	
1	10 (−) 5	0 10 (+)	20	11	15
2	12	7 5	9 15	20 5 (+)	25
3	0 x_{31}	14	16	18 (−) 5	5
الطالب	5	15	15	10	

$$x_{31} \longrightarrow x_{11} \longrightarrow x_{21} \longrightarrow x_{22} \longrightarrow x_{24} \longrightarrow x_{33} \longrightarrow x_{31}$$

نلاحظ في الجدول السابق أنه إذا كان x^{31} المتغير إلى يدخل يزداد مقدار وحده هذا يعني أن x_{11} ينقص 1 و x_{24} يزيد 1 وأخيرا x_{34} ينقص 1، ويمكن تلخيص الإجراء بوضع (+) ، (−) في كل زاوية مناسبة بحيث أن هذه الإضافة تحفظ شروط المورد والطالب ثابتة حسب المسألة الأولى.

∴ يمكن اختيار المتغير الذي يخرج من الحل من خلال المتغيرات الواقعة في الزوايا بحيث ينقص عندما يدخل x_{31} ويزداد بمقدار أكثر من الصفر.

ومن الجدول السابق نلاحظ أن المربعات التي تحتوي – هي x_{11} ، x_{23} ، x_{34} هي متغيرات أساسية في الحل وسوف تنقص عندما x_{31} يزيد.

ويمكن اختيار المتغير الذي يخرج وهو المتغير الذي يحتوي على أقل قيمة حتى يصل إلى الصفر ومنها إلى الناقص. وفي هذا المثال المتغيرات الثلاثة التي تنقص – هي x_{11} ، x_{23} ، x_{34} ولها نفس القيمة (=5) وفي هذه الحالة يمكن اختيار أي واحد منهم.

فمثلاً لو اخترنا x_{34} فبالتالي تصبح قيمة $x_{31} = 5$ وأن كل المتغيرات التي لها إشارة + تزيد 5 والتي لها إشارة - تنقص 5 كما في الجدول التالي

1	10 0	0 15	20	11	15
2 المصدر	12	7 0	9 15	20	25
3	0 5	14	16	18	5
	5	15	15	10	

ومن خلال الجدول الموضح أعلاه فإن إجمالي التكاليف يساوي:

$$0 \times 10 + 15 \times 0 + 0 \times 7 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 0 = 355 \text{ L.D}$$

حيث أن التكاليف هذه تختلف عن التكاليف السابقة بالآتي:

$$410 - 335 = 75 \text{ L.D}$$

وبما أن الحل في المحاولة الثانية موضح في الجدول السابق ويمكن اختيار هذا الحل هو الحل الأمثل باختيار الحصول على المضروبات الجديدة بإجراء العمليات الحسابية لـ $\bar{C}_{pg}$ كما هو موضح x_{21} سوف يدخل الحل والذي يحتوي على أكبر قيمة موجبة بالجدول التالي:

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1=0$	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{0}$ 15 +	$\boxed{20}$ $\boxed{18}$	$\boxed{11}$ $\boxed{+2}$	15
$u_2=7$	$\boxed{12}$ x_{31} $\boxed{+5}$ +	$\boxed{7}$ 0 –	$\boxed{9}$ 15	$\boxed{20}$ 10	25
$u_3=10$	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{14}$ $\boxed{-24}$	$\boxed{16}$ $\boxed{-24}$	$\boxed{18}$ $\boxed{-15}$	5
	5	15	15	10	

ونلاحظ أن الشبكة المغلقة للمتغير x_{21} تعطي بأن x_{11} أو x_{22} يمكن أن تخرج من أساسيات الحل وباختيار عشوائي نفترض أن تخرج x_{11} وبناء الجدول التالي يوضح أن الحل الذي يعين المتغيرات الأساسية من الجدول السابق (x_{21}) تدخل الحل و (x_{11}) تغادر الحل وأن قيم المضروبات u_1 ، v_i، $\bar{C}_{pg}$ تحسب من جديد كما هو موضح بالجدول التالي:

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1=0$	$\boxed{10}$	$\boxed{0}$ 15 +	$\boxed{20}$ $\boxed{-18}$	$\boxed{11}$ x_{14} $\boxed{+2}$	15
$u_2=7$	$\boxed{12}$ 0 $\boxed{+5}$	$\boxed{7}$ 0 +	$\boxed{9}$ 15	$\boxed{20}$ 10	25
$u_3=10$	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{14}$ $\boxed{-19}$	$\boxed{16}$ $\boxed{-19}$	$\boxed{18}$ $\boxed{-10}$	5
	5	15	15	10	

ويمكن من الجدول السابق استخراج الحل الجديد على الجدول التالي وبما أن كل $\bar{C}_{pq}$ غير موجبة.

∴ فإن الحل يتحقق في الجدول التالي:

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 11$	
$u_1=0$	$\boxed{10}$ $\boxed{-5}$	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{20}$	$\boxed{11}$ 10	15
$u_2=7$	$\boxed{12}$ 0	$\boxed{7}$ 10	$\boxed{9}$ 15	$\boxed{20}$	25
$u_3=-5$	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{14}$ $\boxed{-19}$	$\boxed{16}$ $\boxed{-19}$	$\boxed{18}$ $\boxed{-12}$	5
	5	15	15	10	

∴ يمكن صياغة الحل النهائي وذلك:

بإرسال 5 وحدات من 1 إلى 2 بكلفة 5 x 0 = 0

بإرسال 10 وحدات من 1 إلى 24 بكلفة 10 x 11 = 110

بإرسال 10 وحدات من 2 إلى 2 بكلفة 10 x 7 = 70

بإرسال 15 وحدات من 2 إلى 3 بكلفة 15 x 9 = 135

بإرسال 5 وحدات من 3 إلى 1 بكلفة 5 x 0 = 0

وبالتالي يكون التكلفة الإجمالية = 315 د.ل.

8.2.4 طرق تحسين الحل الابتدائي:

أ- طريقة أقل تكلفة ممكنة (Least cost method):

تعتمد خطوات هذه الطريقة على وضع أكبر كمية ممكنة لأقل تكلفة ممكنة في جميع مربعات الجدول أي يتم أولاً نقل كمية من مركز إنتاجي إلى مركز توزيعي تكون فيه تكاليف النقل أقل مستوى مقارنة بتكاليف نقل أي كمية من أي مركز إنتاجي لأي مركز تسويقي ثم يتم النقل للمخازن ذات الكلف الأعلى تدريجياً.

	1		2		3		4		
1		10		0		20		11	15
	0		15				0		
2		12		7		9		20	25
					15		10		
3		0		14		16		18	5
	5								

وتكون التكلفة الإجمالية

د.ل $15 \times 9 + 20 \times 10 + 11 \times 0 + 0 \times 15 + 10 \times 0 + 0 \times 5 = 335$

ب- طريقة فوجل التقريبية (Vogel's approximation):

ويطلق عليها طريقة (VAM) أو طريقة الجزاء (Penalty) أو طريقة كلفة الفرصة البديلة (Alternative cost method).

وتعتبر هذه الطريقة أفضل الطرق لتحقيق الحل الابتدائي لمسائل النقل وأحياناً تؤدي هذه الطريقة إلى تحقيق الحل الأمثل.

وتتخذ هذه الطريقة الخطوات التالية:

1- حساب التكلفة الفرضية (Opportunity cost) لكل صف أو عمود وذلك بطرح أقل تكلفة نقل الكلفة التي تليها في كل صف أو عمود.

2- تعريف الصف أو العمود الذي يصاحب أكبر عقوبة، اختيار أحدهما إذا تساوى (أي اختيار أعلى كلفة فرضية في أي صف أفقي، أو عمودي حيث أن عدم اختيار هذه الفرصة يعني تحمل الشركة لكلف أكثر منها وتحمل الخسارة).

3- أ - إذا لم يوجد صف أو عمود غير مشطوب توقف.

ب- إذا تبقى صف أو عمود موجب ولم يشطب بالطريقة السابقة احسب الحل بواسطة طريقة أُل تكلفة ممكنة.

ج- إذا كانت جميع الصفوف والأعمدة الغير مشطوبة لها مورد صفر أو طالب صفر - أكمل الحل بواسطة أقل تكلفة ممكنة.

د- إذا حصل خلاف ما ذكر أعلاه - احسب العقوبة وارجع الخطوة رقم (2) والمثال التالي يوضح طريقة الحل بالطريقة المذكورة أعلاه.

	1	2	3	4	عقوبة الصفوف
1	$\boxed{10}$	$\boxed{0}$	$\boxed{20}$	$\boxed{11}$ 10	15
2	$\boxed{12}$	$\boxed{7}$	$\boxed{9}$	$\boxed{20}$	25
3	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{14}$	$\boxed{16}$	$\boxed{18}$	5
عقوبة	5	15	15	10	
الأعمدة	10	7	7	7	

	1	2	3	4	عقوبة الصفوف		
1	$\boxed{10}$	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{20}$	$\boxed{11}$ 10	15		11
2	$\boxed{12}$	$\boxed{7}$ 10	$\boxed{9}$ 15	$\boxed{20}$	~~25~~	10	2
3	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{14}$	$\boxed{16}$	$\boxed{18}$	5	0	-
عقوبة	~~5~~	15	~~15~~	10			
الأعمدة	-	7	11	9			

$x_{12} = 15 \qquad x_{23} = 15 \qquad x_{24} = 10 \qquad x_{31} = 5$

التكلفة الإجمالية = 335 د.ل.

8.3 نموذج التعيين (The Assignment Model)

وهو حالة خاصة في حالات أسلوب النقل الذي يستخدم في تخصيص أوامر إنتاج كل آلات وأوامر على عمل وهكذا..

يهتم نموذج التعيين بحالة أن عدد الوظائف m لبعض المنتجين يمكن تعيينهم لبعض الآلات n.

وظيفة I $(I = 1, 2, \ldots, m)$ تخصيص للآلة j

$(j = 1 , 2, \ldots , n)$ وتحتاج إلى تكلفة c_{ij}.

ويظل الهدف لتعيين وظائف i للآلات j بحيث يتحقق أقل تكلفة إجمالية ممكنة (تصغير التكلفة) وتسمى هذه المسألة بمسألة التعيين.

الآلات

		1	2	....	n	
	1	C_{11}	C_{12}	....	C_{2n}	1
	1	C_{11}	C_{12}		C_{2n}	1
الوظائف	⋮	⋮				`
	1	C_{m1}	C_{m2}	....	C_{mn}	1
	1	C_{m1}	C_{m2}		C_{mn}	1

يرجع صياغة هذه المسألة إلى حالة خاصة لمشكلة النقل حيث الوظائف تعبر عن المصدر والآلات المستقبل وأن كمية الصادرات من مصدر تساوى 1 وهذا يعني أن $a_i=1$ لكل I وبالمثل طلبية المستقبل أو الطالب $b_j = 1$ لكل J . وهذا يناصره أن تكلفة كل تخصص هو c_{ji}. وقبل أن نبدأ حل المسألة بواسطة طريقة مشكلة النقل أو نموذج النقل يجب أن نشير إلى أن

$m < n$ أو $m > n$

$m = n$

وعليه يمكن صيانة نموذج التعيين بصفة عامة رياضيا على النحو الآتي:

$$xij = \begin{cases} 0 & \text{إذا كانت الوظيفة j لم تخصص إلى الآلة i} \\ 1 & \text{إذا كانت الوظيفة j تخصصت إلى الآلة i} \end{cases}$$

يعني أن:

$$\text{Minimize} \quad z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} \; x_{ij}$$

S. T.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad I = 1, 2, ...n$$

$$\sum_{ji=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad J = 1, 2, ...m$$

$x_{ij} = 0$ أو $x_{ij} = 1$

ولتوضيح نموذج التعيين وذلك بالمثال العددي التالي:

	1	2	3	
1	0	20	9	1
الوظائف 2	14	10	12	1
3	15	13	16	1
	1	1	1	

في قاعدة الحل أن الحل الأمثل لمسألة التعيين يبدأ ثابت إذا أضيف ثابت أو طرح من أي صف أو عمود كقاعدة جبرية. فمثلاً إذا طرحت ثابت قيمة q_i ، p_i من كل صف I أو عمود J فإن المعامل الجديد تتكلفه c_{ij} يصبح

$$\overline{c}_{ij} = c_i j - p_i - q_i$$

وهذا التعديل سوف يؤدي إلى دالة هدف جديدة هي :

$$z' = \sum_j \sum_i c'_{ij} \times ij = \sum_i \sum_j (c_{ij} - p_i - q_i) \times x_{ij}$$
$$= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_j p_i \sum x_{ij} \sum_j q_i \sum x_{ij}$$

وبما أن

$$\sum x_{ij} = \sum x_{ij} = 1$$

وبالتالي:

z' = z - constant (ثابت)

وهذا يعطي أن تصغير z يساوي تصغير 'z

ومنه نستنتج أنه ممكن إنشاء مصفوفة c'_{ij} تدخلاتها كلها وأصفار وتعطي حل ابتدائي والحل الابتدائي يأخذنا إلى الحل الأمثل لأن كل التكاليف كلها 0 ≥.

ولتوضيح هذا المبدأ نستدل بالمثالي العددي وذلك بطرح أقل قيمة c'_{ij} في كل صف أو عمود من الصف أو العمود الموجودة فيه ونتحصل على الجدول التالي كخطوة أولية c'_{ij}

(سوف يكون هناك في كل صف على الأقل صفراً واحداً. ونفس الشيء بالنسبة لكل عمود، وبذلك نضمن وجود صفر واحد في كل عمود على الأقل وتكون النتيجة كما يلي:)

$$\begin{array}{cc|ccc|l} & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 4 & P_1 = 5 \\ |c'_{ij}| & 2 & 4 & 0 & 2 & P_2 = 10 \\ & 3 & 2 & 0 & 3 & P_3 = 13 \\ \hline \end{array}$$

ويمكن الحصول على إحضار أكثر تطبيق القاعدة على العمود الثالث بطرفي

$$\begin{array}{cc|ccc|} & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & \boxed{0} & 2 & 2 \\ |c'_{ij}| & 2 & 4 & 0 & \boxed{0} \\ & 3 & 2 & \boxed{0} & 0 \\ \hline \end{array}$$

وتعني □ أن هذا الحل حل ابتدائي وبالتالي يتم التخصيص على النحو الآتي:

(3،2) ، (2،3) ، (1 ،1)

(الوظيفة الثالثة للآلة رقم 2)، (الوظيفة الثانية للآلة رقم 3)، (الوظيفة الأولى للآلة رقم 1).

والتكلفة الإجمالية 5 + 12 + 13 = 30 د.ل

في هذا المثال تحقق الحل الأمثل في خطوة واحدة ولا يحصل هذا في كل المسائل ولتوضيح نلاحظ في المثال التالي:

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 7 & 10 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 11 & 7 \\ 4 & 8 & 7 & 8 & 5 \\ \hline \end{array}$$

باتخاذ نفس الخطوات السابقة نحصل على الجدول التالي:

	1	2	3	4
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

لحل هذه المسألة يرسم خطوط بأقل عدد ممكن لتغطية كل العدد (صفر). فإذا تركت عناصر بدون خطوط – يعني أن هذا الحل ليس الحل الابتدائي أو الحل الأمثل كما هو موضح بالجدول التالي:

	1	2	3	4
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

	1	2	3	4
1	$\boxed{0}$	3	2	2
2	3	0	0	2
3	0	$\boxed{0}$	3	2
4	4	2	0	$\boxed{0}$

الخطوة هذه يطرح أقل عنصر غير مخطوط عليه (1=) في الجدول الذي به خطوط تحصل على الجدول الأخير، وبالتالي الحل يكون

.(1،1) (2،3) ، (3،2) (4،4).

ويكون التكلفة الإجمالية = 1 + 10 + 5 +5 = 21 د.ل

مثال 2:

		الزبائـن				
		A	B	C	D	E
موقع العمل	1	10	5	9	18	11
	2	13	19	6	12	14
	3	3	2	4	4	5
	4	18	9	12	17	15
	5	11	6	14	19	10

إن المصفوفة أعلاه توضح تخصيص الزبائن من A ⟵ E إلى المواقع 1 - 5 والمطلوب اتخاذ قرار تخصيص كل زبون واحد إلى موقع واحد بأقل تكلفة ممكنة حيث أن المعلومات داخل الجدول تعني تكليف التعيين.

الحل:

1- اختيار أُقل تكلفة في كل صف.

	A	B	C	D	E	أقل تكلفة
1	10	5	9	18	11	5
2	13	19	6	12	14	6
3	3	2	4	4	5	3
4	18	9	12	17	15	9
5	11	6	14	19	10	6

2- أطرح أقل قيمة في الصف من كل صف وذلك على النحو الآتي:

	A	B	C	D	E
1	5	0	4	13	6
2	7	13	0	6	8
3	1	0	2	2	3
4	9	0	3	8	6
5	5	0	8	13	4

3- اختيار أقل عدد من الخطوط الأفقية والرأسية لتغطية عدد صفر.

	A	B	C	D	E
1	5	0	4	13	6
2	7	13	0	6	8
3	1	0	2	2	3
4	9	0	3	8	6
5	5	0	8	13	4

N=2

4- إذا كان عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف والأعمدة أنتقل إلى الخطوة القادمة (N = 2 < 5).

4- اختار أقل قيم لكل عمود كما هو موضح بالجدول التالي:

	A	B	C	D	E
1	5	0	4	13	6
2	7	13	0	6	8
3	1	0	2	2	3
4	9	0	3	8	6
5	5	0	8	13	4
أقل قيم هي:	1	0	0	2	3

6- أطرح أقل قيم في أي عمود من الأعمدة. كما هو موضح بالجدول الآتي:

	A	B	C	D	E
1	4	0	4	11	3
2	6	13	0	4	5
3	0	0	2	0	0
4	3	0	3	6	3
5	4	0	8	11	1

7- اختار أقل عدد من الخطوط الرئيسية أو العمودية لتغطية عدد صفر كما هو موضح بالجدول الآتي:

	A	B	C	D	E
1	4	~~0~~	4	11	3
2	~~6~~	~~13~~	~~0~~	~~4~~	~~5~~
3	~~0~~	~~0~~	~~2~~	~~0~~	~~0~~
4	3	~~0~~	3	6	3
5	4	~~0~~	8	11	1

N=3

8- إذا كان عدد الخطوط أقل من عدد الأعمدة والصفوف أنتقل إلى الخطوة القادمة.

9- عرف العناصر غير المغطاة في المصفوفة السابقة واختار أقل قيمة لأي عنصر غير مغطي.

10- أ - اطرح أقل عنصر غير مغطى من كل عنصر غير مغطى.
ب- أطبق أقل عنصر غير مغطاة إلى كل عنصر مغطى بخطين.
ج- لا تغير العناصر المغطاة بخط واحد، كما هو موضح بالجدول التالي:

	A	B	C	D	E
1	3	0	3	10	2
2	6	4	0	4	5
3	0	1	2	0	0
4	7	0	2	5	2
5	3	0	7	10	0

11- اختار أقل عدد من الخطوات يغطي العنصر صفر في المصفوفة

	A	B	C	D	E
1	3	0	3	10	2
2	6	4	0	4	5
3	0	1	2	0	0
4	7	0	2	5	2
5	3	0	7	10	0

N=4 عدد الخطوط

12- إذا كان عدد الخطوط الرئيسية والأفقية أقل من عدد صفوف المصفوفة أو أعمدتها. كرر الخطوة 9 ، 10 ، 11 حتى يصبح عدد الخطوط الرئيسية والأفقية يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة كما هو موضح بالجدول الآتي:

	A	B	C	D	E
1	0	0	3	7	2
2	3	4	0	4	5
3	0	4	5	0	3
4	4	0	2	5	2
5	0	0	7	10	0

عدد الخطوط لتغطية الصفر N=5

13- الحل المثالي يتحقق عندما يصبح عدد الخطوط يساوي عدد الأعمدة

∴ الحل المثالي:

	A	B	C	D	E
1	$\boxed{0}$	0	3	7	2
2	3	4	$\boxed{0}$	4	5
3	0	4	5	0	3
4	4	$\boxed{0}$	2	5	2
5	0	0	7	10	$\boxed{0}$

14- تحسب التكاليف المصاحبة للتخصيص وفق الآتي:

التخصيص	التكاليف (وفق الجدول الأساسي)
A-1	10
C-2	6
D-3	4
B-4	9
E-5	10
المجموع	39

8.4 مسائل:

1- أوجد حل الجداول التالية باستخدام طريقة النقل بالطرق التالية:

أ – طريقة زاوية الشمال الغربية (North west corner).

ب– طريقة فوجل التقريبية (Vogel's Approximation).

	1	2	3	
1	0	2	1	5
2	2	1	5	10
3	5	4	3	5
	5	5	10	

	1	2	3	
1	0	4	2	8
2	2	3	4	5
3	1	2	0	6
	7	6	6	

2- حل المسألة الآتية الغير متعادلة بطريقة فوجل.

5	1	0	20
3	2	4	10
7	5	2	15
9	6	0	15
5	10	15	

4- حل المسألة التالية بواسطة طريقة النقل:

الفندق	A	B	C	D	E	سعة الفندق
			الزبائن			
1	23	27	32	30	43	115
2	15	15	20	16	35	65
3	14	19	25	21	37	100
4	35	44	47	45	60	35
احتياجات الزبائن	25	100	70	65	45	

4- يمكن تغذية خمسة زبائن بواسطة خمسة مواني مختلفة وتكلفة النقل من كل سيناء لكل زبون موضحة على النحو الآتي. والمطلوب حساب أقل تكلفة إجمالية ممكنة لتخصيص كل زبون لكل ميناء.

الموانئ	A	B	C	D	E
			الزبائن		
1	2	5	4	3	7
2	2	6	5	4	6
3	5	6	5	3	7
4	3	4	7	2	4
5	7	5	6	2	1

5- شركة النقل لشخصن البضائع يجب أن ترسل شاحنات إلى كل المدن. ومن المتوفر 6 شاحنات للنقل إلى مناطق مختلفة في البلد. والمصفوفة التالية توضح التكاليف المصاحب لكل شاحنة متوفرة لكل المدن الأربع المخصصة لاستقبال البضائع. وترغب الشركة في تقليل التكاليف لتخصيص كل شاحنة إلى مدينة معينة من المدن الأربع.

		المـــدن		
رموز الشاحنات	1	2	3	4
A	3	8	2	6
B́	7	1	4	5
C	3	8	5	8
D	6	4	3	6
E	5	2	5	3
F	5	7	6	2

6- إذا عرفنا أن 4 فنيين في تخصيصهم إلى أربعة آلات وأن التكلفة المصاحبة للتخصيص موضحة بالمصفوفة التالية. مع مراعاة أن الفني 1 لا يخصص إلى الآلة 3 وأن الفني 3 لا يخصص للآلة 4. أوجد الحل الأمثل للتخصيص.

		الآلات		
	1	2	3	4
1	5	5	-	2
الفنيين 2	7	4	2	3
3	9	3	5	-
4	7	2	6	7

7- حل مسألة النقل الآتية باستخدام الطرق التالية:

أ- زاوية الشمال الغربي.

ب- طريقة أقل تكلفة.

ج- فوجل.

ثم قارن بين حل الطرق الثلاث.

1	2	6	7
0	4	2	12
3	1	5	11
10	10	10	

5	1	8	12
2	4	0	14
3	6	7	4
9	10	11	

8- ثلاثة مصانع تصفية زيوت النفط سعتها على التوالي 5 ، 6 ، 8 مليون جالون من الوقود وتموّن ثلاثة مواقع طلبيتها اليومية 4 ، 8 ، 7 مليون جالون - وينقل النقل إلى هذه المواقع من خلال أنابيب - وتقدر تكاليف النقل اعتماداً على طول خطوط النقل بمبلغ قدرة 1 دينار/ 100 جالون في الكيلومتر الواحد. وتقدر المسافات بين مصانع التصفيد وأماكن استخدام الزيت وفقاً للمصفوفة التالية: صنع المسألة بواسطة طريقة النقل.

	أماكن استهلاك الزيت		
	1	2	3
1	120	180	-
مصفات الزيت 2	300	100	80
3	250	250	120