الفصل الثاني

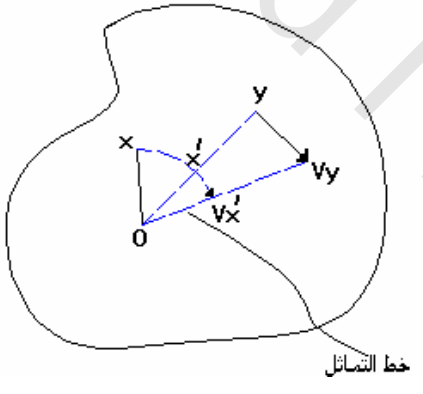
2

حساب السرعات في الآليات

توجد عدة طرق لإيجاد السرعات في الآليات، وسيتم تناول طريقتين لتوضيح وهما طريقة المراكز اللحظية، وطريقة السرعة النسبية.

1-2 مدخل

في الشكل (2-1)، الجسم A يدور حول النقطة O، فإذا كانت السرعة V_y معلومة، فيمكن إنشاء المثلث الموضح والذي يمثل ضلعه الأول السرعة V_y ، الثاني عمودي عليه ويمر بالنقطة O والثالث يمر بالنقطتين O ورأس المثلث V_y ، ويسمى خط التماثل.



شكل (2-1)

النقطة x تدار حول O حتى الخط oy ويتم إنشاء الخط الذي يمثل السرعة V'_x والذي يعطي قيمة V_x.

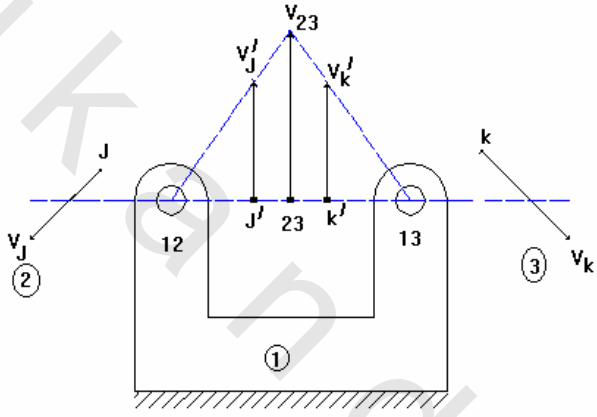
obeikandl.com

2-2 طريقة المراكز اللحظية

تقوم هذه الطريقة على الحقائق التالية:

- المركز المشترك بين وصلتين هو نقطة تقع على الوصلتين ولها نفس السرعة على الوصلتين.
- السرعة اللحظية لنقطة على جسم دوار تتناسب مع القطر.

يوضح الشكل (2-2) آلية ذات 3 وصلات.



شكل (2-2)

عند معرفة سرعة النقطة J يمكن تحديد سرعة أي نقطة على الوصلة 2 بإنشاء خط التماثل.

المركز 32 تقع على الوصلة 2 ويمكن تحديد سرعته كما موضح بالشكل، وبالتالي يمكن تحديد سرعة النقطة k والتي يقع على الوصلة 3.

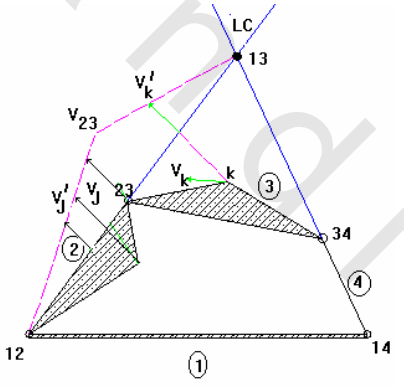
لحساب السرعة بهذه الطريقة يتم إتباع الخطوات التالية:

- عين الوصلات التي سيتم الحساب بالنسبة لها: الوصلة المحتوية للسرعة المعلومة، الوصلة المحتوية للسرعة المطلوبة، والقاعدة.
- حدد خط المراكز عن طريق إنشاء جدول المراكز للوصلات الثلاثة وعلّم هذا الخط بالرمز LC.

- وضح المراكز ذات السرعات الصفرية وضع عليها دائرة (وهي المراكز التي تحتوي على رقم القاعدة ضمن أرقامها).
- أدر السرعة المعلومة لخط المراكز وذلك حول المركز للوصلة الموجودة عليها هذه النقطة.
- ارسم خط التناسب للوصلة المحتوية على السرعة المعلومة.
- احسب خط التناسب للنقطة للوصلة (المركز اللحظي) المشتركة.
- ارسم خط التناسب للوصلة المحتوية على النقطة المراد حساب سرعتها.
- احسب السرعة لهذه النقطة، ثم قم بإدارتها.

مثال 2-1

احسب سرعة النقطة k للآلية الموضحة بالشكل (2-3) إذا كانت سرعة النقطة J معلومة.



شكل (2-3)

الحل:

بإتباع الخطوات الموضحة سابقاً، يمكن حساب السرعة كما موضح بالشكل؛ مع ملاحظة الآتي:

- المركزين 12، 13 هما مراكز السرعة الصفرية، 23 هو المركز المشترك.

obeikandl.com

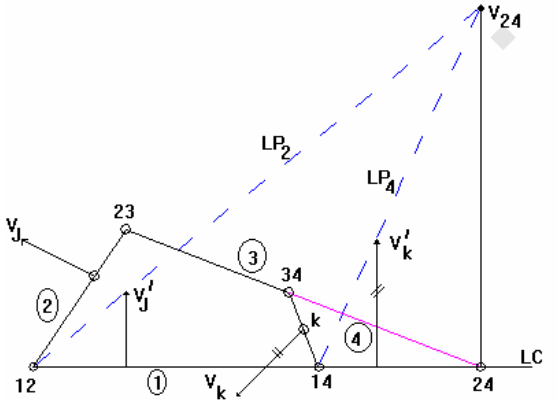
- خط المراكز LC هو امتداد المراكز 12، 23، 13 وتم إعطاؤه الرمز LC.

وبالتالي يمكن إيجاد سرعة النقطة k كالتالي:

- ابدأ بالسرعة V_J، قم بإدارة هذه السرعة حول المركز 12 أسقطها على الخط LC (عمودية على الخط LC) للحصول على V_J'.
- مرر خط تناسب السرعات للوصلة 2 مبتدأ من الصفر عند المركز 12 ويمر برأس المتجه الذي يمثل السرعة V_J'.
- يمكنك الآن الحصول على سرعة النقطة 23 والتي يقع على الوصلتين 2، 3 في نفس الوقت. ارسم خطاً عمودياً على الخط LC من النقطة 23 ليكون نهاية المتجه في الخط LP2 (خط تناسب السرعات للوصلة 2).
- من المركز 13 مرّر خط تناسب السرعات للوصلة 3، حيث يمر هذا الخط بنهاية المتجه الذي يمثل سرعة النقطة 23.
- انقل موضع السرعة k على الخط LC وقم بإنشاء متجه السرعة V_k' عمودياً على الخط LC.
- ارسم الآن متجه السرعة V_k عمودياً هاى الخط الواصل بين النقطتين 13 و k.

مثال 2-2

للشكل (2-4). إذا كانت سرعة النقطة J معلومة، احسب سرعة النقطة k.



شكل (2-4)

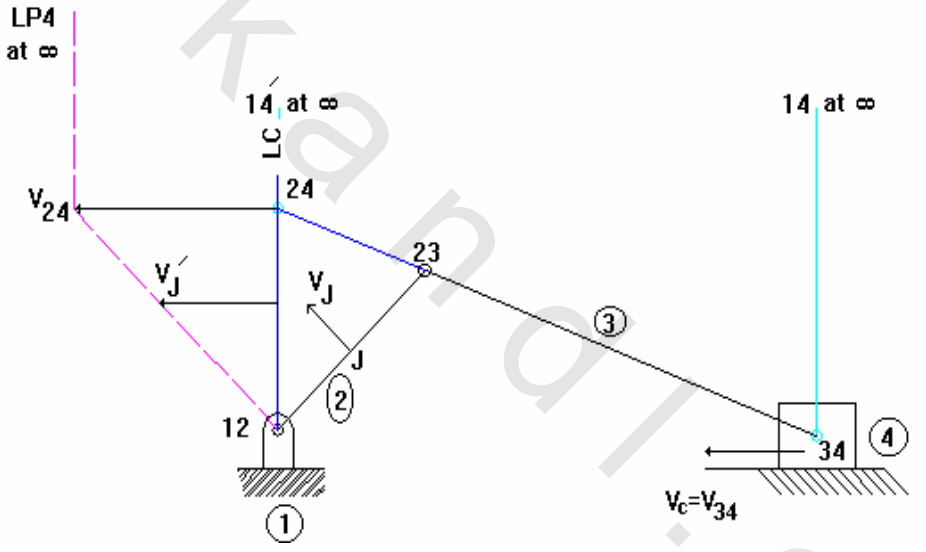
الحل:

بإتباع الخطوات الموضحة سابقاً يمكن حساب سرعة النقطة k.

مثال 2-3

للشكل (2-5). إذا كانت سرعة النقطة J معلومة.

المطلوب، حساب سرعة النقطة C الواقعة على المنزلق.



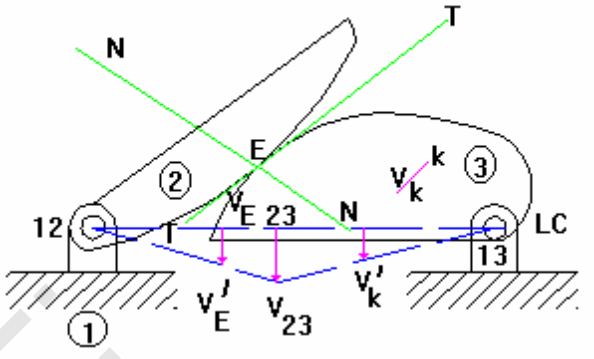
شكل (2-5)

الحل:

سرعة النقطة c تساوي سرعة المركز 34.

مثال 2-4

سرعة النقطة E معلومة، والمطلوب إيجاد سرعة النقطة k.



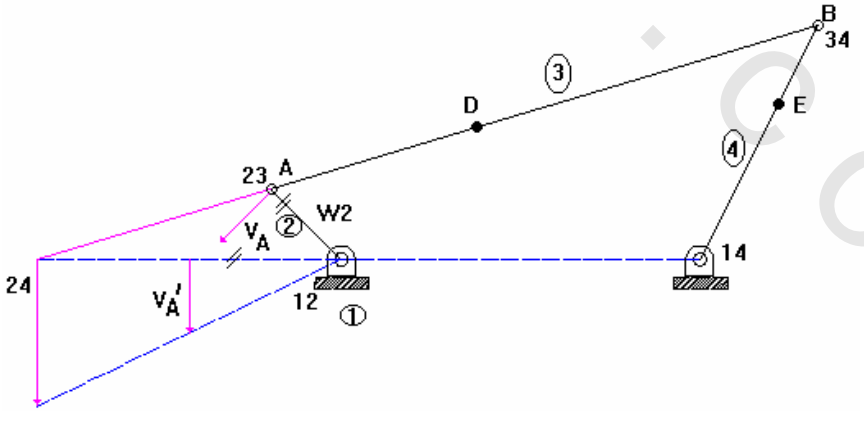
شكل (2-6)

الحل:

- أوجد خط تناسب السرعات للوصلة 2؛ ومنه أوجد سرعة النقطة 23.
- أوجد خط تناسب السرعات للوصلة 3؛ ومنه أوجد سرعة النقطة k.

مثال 2-5

للشكل (2-7). إذا كانت ω_2 معلومة (السرعة الزاوية للوصلة)، المطلوب هو سرعات النقاط E,D,B عند الموضع المحدد .



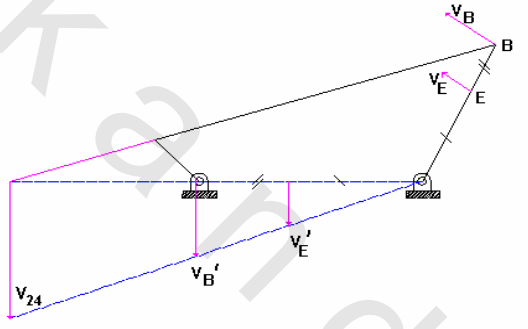
شكل (2-7)

الحل:

نوجد خط المراكز 12، 14، 24.

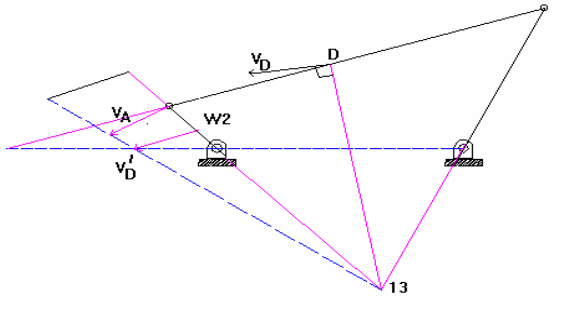
المركز 24 مشترك بين الوصلتين 2، 4.

بافتراض هذا المركز يقع على الوصلة 4، يتم إيجاد السرعة للنقطة A عن طريق العلاقة $V=\omega r$ وتمثل عمودياً على الوصلة 2، وبإسقاطها على خط المراكز وتوصيل خط التناسب يمكن إيجاد السرعة V_{24}، الشكل (2-8). يتم إسقاط النقطة B والنقطة E على الخط المراكز ورسم متجهي السرعة V'_E ، V'_B (الشكل (2-8)).



شكل (2-8)

لإيجاد سرعة النقطة D والواقعة على الوصلة المعلومة V_A تقع على الوصلة 2 والقاعدة 1؛ فيتم إنشاء خط جديد للمراكز 12، 13، 23. شكل (2–9).



شكل (2-9)

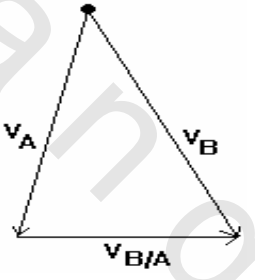
obeikandl.com

وعن طريق إنشاء خط التناسب بمعلومية السرعة V_A، وبإسقاط النقطة D على خط المراكز ورسم المتجه V'_D ليتقاطع مع خط التناسب، يمكن إيجاد السرعة V'_D؛ وإعادة إسقاطها على الوصلة 3.

3-2 طريقة السرعة النسبية The relative velocity method

تستخدم هذه الطريقة بشكل واسع في المسائل التي تتضمن السرعة المطلقة لنقاط في الآلية. عند دراسة التسارع، من المهم حساب السرع النسبية بين النقاط على الوصلات المختلفة. لهذه الأسباب تعتبر هذه الطريقة أهم الطرق المستخدمة.

يوضح الشكل (2-10) متجه السرعة V_B والذي يمكن إيجاده من العلاقة :



شكل (2-10)

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

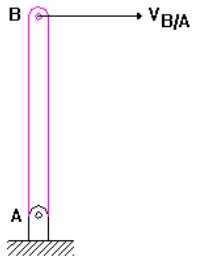
وبالتالي، ولإيجاد سرعة النقطة B، يجب أولاً معرفة السرعة A وكذلك السرعة النسبية $V_{B/A}$.

فرضية :

السرعة النسبية الوحيدة الممكنة بين نقطتين على وصلة جاسئة تكون في اتجاه عمودي على الخط الواصل بين هاتين النقطتين.

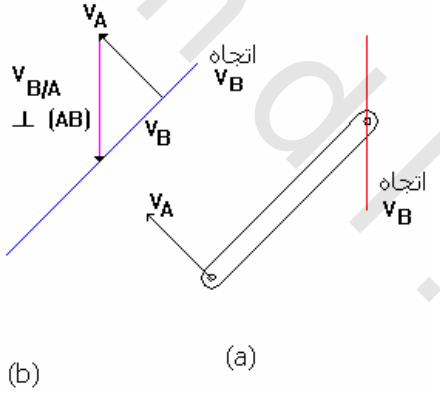
فمثلاً، عند وجود أي سرعة نسبية في اتجاه آخر بين نقطتين على وصلة جاسئة فيحدث إما انحناء أو تكسر أو تهشم لهذه الوصلة.

في الشكل (2-11) يتضح أن السرعة النسبية الوحيدة الممكنة للنقطة B نسبة إلى A ستكون عمودية على الخط الواصل بينهما؛ وتساوي في هذه الحالة السرعة المطلقة للنقطة B.



شكل (2-11)

بناء على هذه الفرضية سيتم إيضاح أنه بمعرفة سرعة ما على وصلة واتجاه السرعة لنقطة أخرى فإنه يمكن حساب سرعة هذه النقطة؛ كما موضح بالشكل (2-12)



شكل (2-12)

يوضح الشكل (2-12أ) وصلة ذات سرعة A معلومة قيمة واتجاها، وكذلك اتجاه السرعة B معلوم. ويمكن إيجاد مخطط السرعة على النحو التالي (كما بالشكل (2-12) ب):

- حدد موضع النقطة O، وتكون جميع المتجهات التي تنشأ من O هي لسرع مطلقة.
- ابدأ من النقطة O وارسم خطاً يمثل السرعة V_A.

obeikandl.com

- ارسم خطاً يمثل اتجاه V_B من O.
- ارسم خط اتجاه السرعة $V_{B/A}$ ($\perp AB$) ويمر برؤوس المثلثين V_A،V_B.
- يحدد الخط المنشأ قيم $V_{B/A}$ ،V_B .

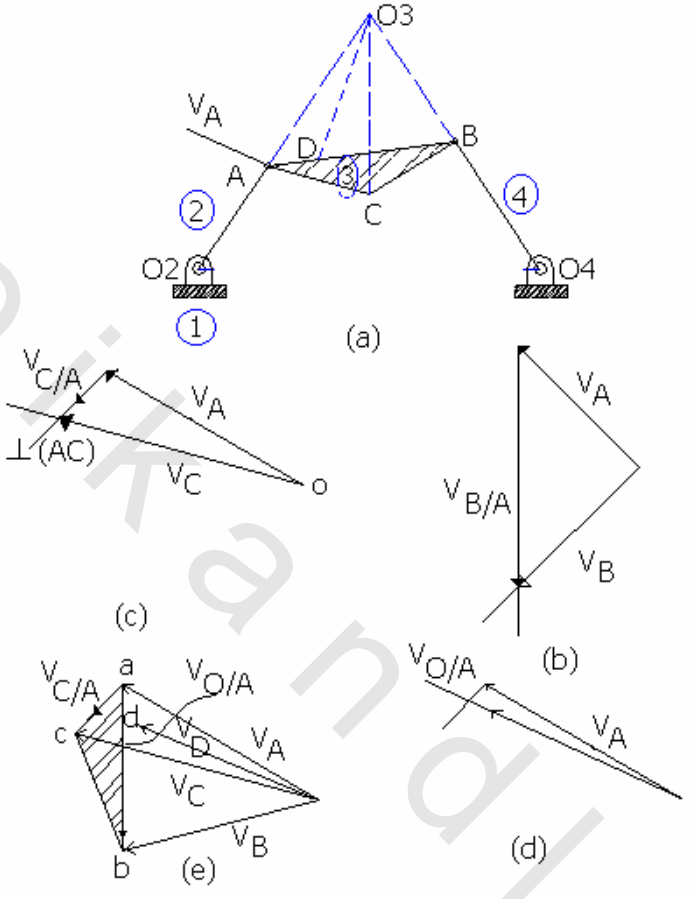
مثال 2-6

إذا علمت قيمة واتجاه سرعة النقطة A، أوجد قيمة واتجاه سرعة النقاط D,C,B. شكل (13-2).

الحل:

- **لإيجاد سرعة V_B.**
  - ارسم متجه سرعة V_A المعطاة من النقطة O . (شكل (2-14) أ).
  - ارسم اتجاه السرعة V_B ($\perp$ على الوصلة 4) بأي طول.
  - ارسم اتجاه السرعة $V_{B/A}$ ($\perp$ على AB) ويمر بنهاية المتجه V_A.
  - نقاط التقاطع تحدد سرعة V_B , $V_{B/A}$.
- **لإيجاد سرعة V_C.**
  - ارسم متجه سرعة V_A؛ (شكل (2-14) ب).
  - ارسم اتجاه السرعة V_C ($\perp O_3C$).
  - ارسم اتجاه السرعة $V_{C/A}$ ($\perp CA$).
  - نقاط التقاطع هي المحددة لقيمة V_C , $V_{C/A}$.
- **لإيجاد سرعة V_D.**
  - ارسم السرعة V_A. (شكل (2-14) ج).
  - ارسم اتجاه السرعة D ($\perp O_3C$).
  - ارسم اتجاه السرعة $V_{D/A}$ ($\perp AD$).
  - نقاط التقاطع هي المحددة للسرعتين V_D , $V_{D/A}$.

obeikandl.com



شكل (2-14)

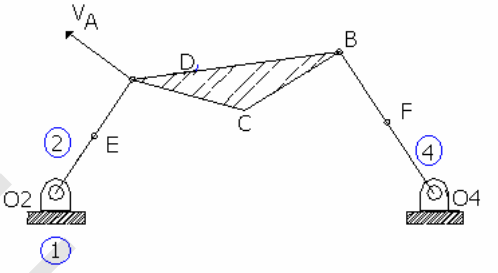
- **مفهوم صورة – السرعة Velocity - image concept**

من السهل نخيل أن المنطقة المظللة بالشكل (2-14)d تمثل أو تعطي صـورة عن الوصلة 3 (ABC). الحقيقة المثبتة على أن الصورة تكونت بواسطة رسم خطوط عمودية على أضلع الوصلة 3 تثبت أن الشكلين متماثلين.

في الشكل (2-14) د المتجه oa هو صورة السرعة للوصلة 2. المتجه cb هو صورة الوصلة 4، الأصل o هو متجه السرعة للقاعدة.

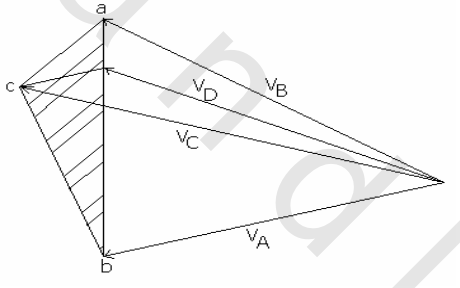
مثال 2-7

في الشكل (2-15)a ، السرعة V_Aمعلومة. أحسب سرعة النقاط F,E,D,C,B



شكل (2-15)

الحل:



شكل (2-16)

- V_B يمكن إيجادها كما في المثال السابق (شكل 2-16).
- **لإيجاد السرعة V_C.**
  - ارسم خطا عمودياً على CA (اتجاه السرعة $V_{C/A}$).
  - ارسم خط ⊥ على CB (اتجاه السرعة $V_{C/B}$).
  - تقاطع الخطين السابقتين هو النقطة C.
  - ارسم متجه السرعة V_C.

obeikandl.com

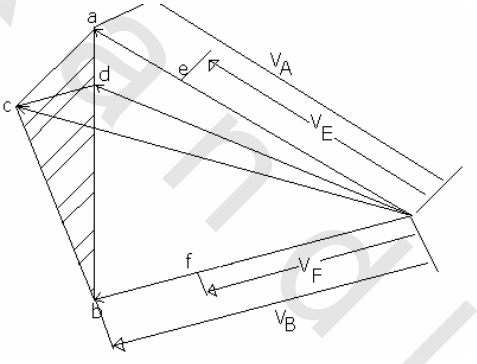
- **لإيجاد السرعة V_D.**

لا يمكن استخدام المتجهين $V_{D/A}$ =$V_{D/B}$ لإيجاد سرعة V_D لوقوع على نفس الوصلة.

- ارسم خطاً من نهاية المتجه V_C في اتجاه السرعة $V_{D/C}$ ($\perp$ DC).
- ارسم خطاً من نهاية المتجه V_A في اتجاه السرعة $V_{D/A}$ ($\perp$ DA).
- تقاطع الخطين السابقين يعطي السرعة V_D.

يمكن إيجاد V_D كذلك من العلاقة التالية:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{ad}{ab}$$



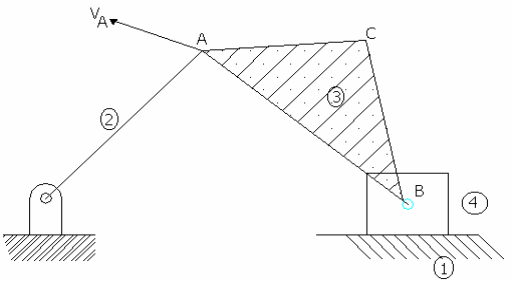
شكل (2-17)

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد السرعتين F,E

$$\frac{O_2E}{O_2A}=\frac{oe}{oa} \quad , \quad \frac{O_4F}{O_4B}=\frac{of}{ab}$$

مثال 2-8

في الشكل (2-18) السرعة V_A معلومة، والمطلوب هو تعيين سرعة كل من النقطتين C,B.

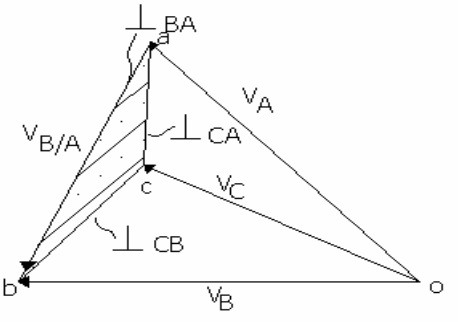


شكل (2-18)

الحل:

يوضح الشكل (2-19) خطوات الحل.

- **لإيجاد V_B.**
  - ارسم المتجه V_A.
  - ارسم اتجاه السرعة V_B.
  - ارسم اتجاه السرعة $V_{B/A}$. $\perp$ BA
  - تقاطع النقطتين يعطي السرعة.
- **لإيجاد السرعة V_C.**
  - ارسم خط من نهاية المتجه V_A في اتجاه $V_{C/A}$.
  - ارسم خط من نهاية المتجه V_B في اتجاه $V_{C/B}$.
  - نقطة التقاطع المتجه V_C.



شكل (2-19)

obeikandl.com

مثال 2-9

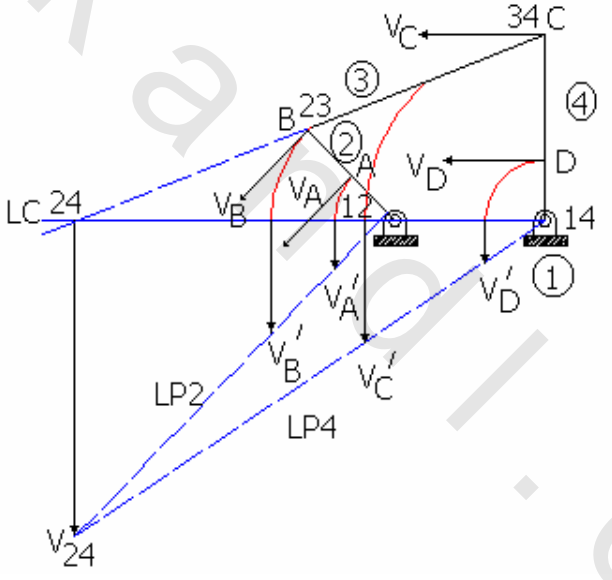
سرعة النقطة A في الشكل (2-20) 20م/ ث في اتجاه عقارب الساعة. أوجد سرع النقاط D,C,B باستخدام طريقتي المراكز اللحظية والسرعة النسبية.

الحل:

(i) باستخدام طريقة المراكز اللحظية

السرعة المعلومة تقع على الوصلة 2، المجهولة على الوصلة 4.

∴ خط المراكز يقع على امتداد المراكز 12، 24، 14



شكل (2-20)

من الشكل (2-20)

$$V_B = 40 \ m/s$$

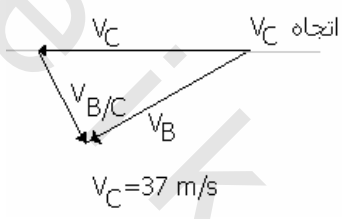
$$V_C = 35 \ m/s$$

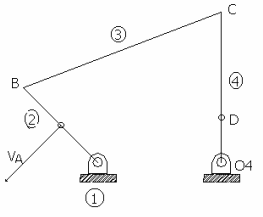
$$V_D = 20 \ m/s$$

(ii) باستخدام طريقة السرعة النسبية (شكل 2-21)

$$\frac{CO_4}{DO_4} = \frac{V_C}{V_D}$$

$$\frac{35}{20} = \frac{37}{V_D} \quad \Rightarrow V_D = 21 \ m/s$$





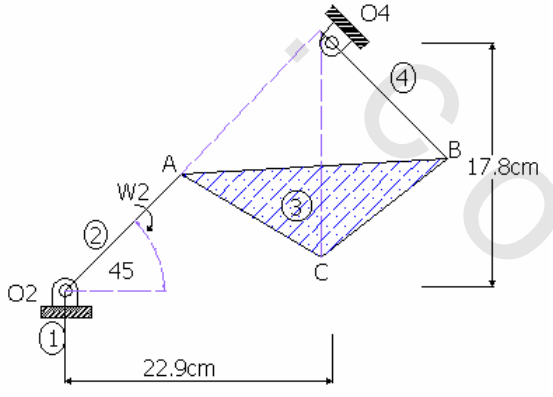
شكل (2-21)

مثال 2-10

في الآلية رباعية القضبان بالشكل (2-22)، الوصلة 2 هي القائد ولها سرعة زاوية ثابتة مقدارها 30rad/sec. للموضع الموضح بالشكل، احسب سرعة النقطة B والسرعة الزاوية للوصلتين 3، 4. استخدام طريقة السرعة النسبية.

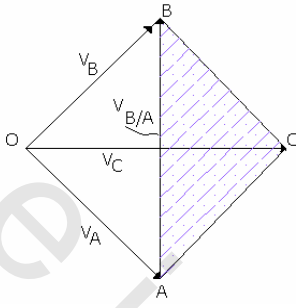
الحل :

$O_2 A = 10.2 \quad cm$
$AB = 20.3 \quad cm$
$O_4 B = 7.62 \quad cm$
$AC = 10.2 \quad cm$
$BC = 15.2 \quad cm$



شكل (2-22)

$$V_A = (O_2 A)\,\omega_2 = (10.2)\,30 = 306 \quad cm/\sec \qquad \perp O_2 A$$



$$V_B = 180 \quad m/\sec$$

$$V_{B/A} = 318 \quad m/\sec$$

$$\omega_4 = \frac{V_B}{O_4 B} = \frac{180}{7.62} = 23.6 \quad rad/\sec(ccw)$$

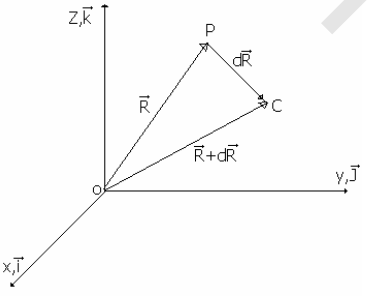
$$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{BA} = \frac{318}{20.3} = 15.7 \quad rad/\sec(ccw)$$

4-2 الطرق التحليلية لحساب السرعة

يمكن وصف موضع نقطة معينة باستخدام متجه $\vec{R}$. يوضح (2-23) موضح النقطة P. النقطة P تتحرك على امتداد المنحنى o خلال المسافة $d\vec{R}$ في الفترة الزمنية dt. الموضع الجديد هو $\vec{R} + d\vec{R}$. بافتراض الفترة الزمنية dt متناهية في الصغر، فإن السرعة اللحظية يمكن إيجادها من العلاقة :

$$\vec{\vartheta} = d\vec{R}/dt$$

$$\vec{\vartheta} = \dot{\vec{R}} = \vec{i}\ \dot{R}_x + \vec{j}\ \dot{R}_y + \vec{k}\ \dot{R}_z$$

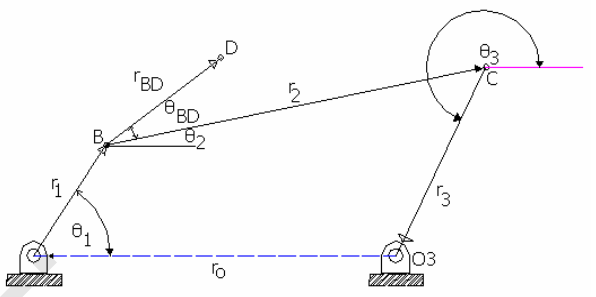


شكل (2-23)

وعند دوران جسم بسرعة زاوية مقدارها ω فإن:

$$\vec{\vartheta} = \vec{\omega} \times \vec{R}_z$$

بافتراض الآلية رباعية القضبان الموضحة بالشكل (2-24)



شكل (2-24)

$$\vec{r}_0 + \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 0$$

بتفاضل المعادلة السابقة :

$$\dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 + \dot{\vec{r}}_3 = 0$$

ولكن القاعدة $\dot{\vec{r}}_0 = 0$

وبالتالي:

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{R}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{R}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{R}_3 = 0$$

وفي هذه الآلية سيتم افتراض أن مركبات الحركة ستكون في المستويين x,y، وبالتالي فإن ω ستكون في اتجاه z.

أي أن:

$$\vec{\omega}_1 = \omega_1 \times \vec{k}$$
$$\vec{r}_1 = r_1 \times \vec{i} + r_{1y}\vec{j}$$

وبالتالي:

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ r_{1x} & r_{1y} & 0 \end{vmatrix} = -\omega_1\ r_{1y} \times \vec{i} + \omega_1\ r_{1x}\vec{j}$$

obeikandl.com

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة الكلية على النحو التالي:

$$-\left(\omega_1\ r_{1y}+\omega_2\ r_{2y}+\omega_3\ r_{3y}\right)\times\vec{i}+\left(\omega_1\ r_{1x}+\omega_2\ r_{2x}+\omega_3\ r_{3x}\right)\vec{j}=0$$

مركبات كل من i,j في المعادلتين السابقتين تساويان الصفر، أي:

$$\omega_1\ r_{1y}+\omega_2\ r_{2y}+\omega_3\ r_{3y}=0$$
$$\omega_1\ r_{1x}+\omega_2\ r_{2x}+\omega_3\ r_{3x}=0$$

توجد العديد من الطرق لحل المعادلتين. بافتراض ω_1 معلومة وهناك رغبة في حساب باقي السرعات الزاوية، فإنه يمكن كتابة:

$$\begin{bmatrix} r_{2y} & r_{3y} \\ r_{2x} & r_{3x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}=-\omega_1\begin{bmatrix} r_{1y} \\ r_{1x} \end{bmatrix}$$

$$\omega_2=\frac{-\omega_1}{D}\begin{vmatrix} r_{1y} & r_{3y} \\ r_{1x} & r_{3x} \end{vmatrix}$$

حيث:

$$D=\begin{vmatrix} r_{2y} & r_{3y} \\ r_{2x} & r_{3x} \end{vmatrix}$$

$$\omega_3=\frac{-\omega_1}{D}\begin{vmatrix} r_{2y} & r_{1y} \\ r_{2x} & r_{1x} \end{vmatrix}$$

وبالتالي:

$$\omega_2=\frac{-\omega_1\left(r_{1y}\,r_{3x}-r_{3y}\ \ r_{1x}\right)}{r_{2y}\,r_{3x}-r_{3y}\,r_{2x}}$$

$$\omega_3=\frac{-\omega_1\left(r_{2y}\,r_{1x}-r_{1y}\ \ r_{2x}\right)}{r_{2y}\,r_{3x}-r_{3y}\,r_{2x}}$$

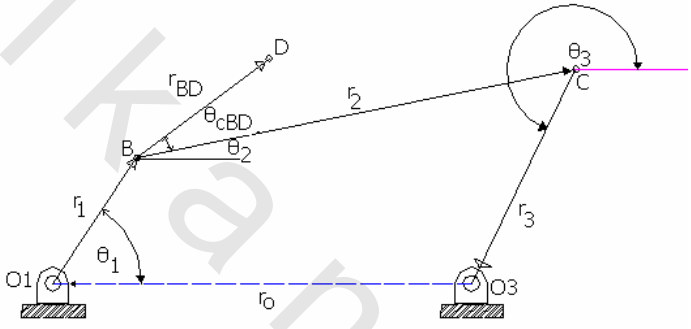
وحيث أن الوصلة 1 تدور حول نقطة ثابتة O_1، فإن سرعة أي نقطة موجودة على الوصلة 1 تعطي بالعلاقة $\vec{\omega}\times\vec{r}$، حيث $\vec{r}$ متجه مقاس من النقطة O_1 إلى النقطة المطلوب حساب سرعتها.

obeikandl.com

مثال 2-11

للآلية الموضحة بالشكل (2-25)، أفرض:

$$\theta_1 = 45^o \quad , \quad \theta_{CBD} = 20^o (const)$$
$$r_o = 30\,mm\,, \quad r_1 = 10\,mm$$
$$r_2 = 35\,mm\,, \quad r_3 = 20\,mm$$
$$r_{BD} = 15\,mm$$



شكل (2-25)

أوجد: ω_2 , ω_3 , ϑ_C

الحل:

يمكن حساب قيمة θ_3 , θ_2

$$\theta_2 = 16.35^o \quad , \quad \theta_3 = 237.79^o$$

مركبات الإزاحة حسابها من العلاقات:

$$r_x = r\cos\theta\,, \quad r_y = r\sin\theta$$

$$r_{1x} = 7.0711 \quad , \quad r_{1y} = 7.0711$$
$$r_{2x} = 33.590 \quad , \quad r_{2y} = 9.835$$
$$r_{3x} = -10.660 \quad , \quad r_{3y} = -16.922$$

obeikandl.com

$$\omega_2 = \frac{-100(-7.0711\times10.660+16.922\times7.0711)}{-9.835\times10.660+16.992\times33.590}$$
$$= -9.567\,\text{rad/s} \quad (9.567\,\text{rad/s cw})$$
$$\omega_3 = \frac{-100(9.835\times7.0711+7.0711\times33.590)}{-9.835\times10.660+16.992\times33.590}$$
$$= 36.208\,\text{rad/s} \quad \text{ccw}$$

$$\vartheta_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 100 \\ 7.0711 & 7.0711 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -9.567 \\ 33.590 & 9.835 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\vartheta}_c = -612.83\vec{i} + 385.80\vec{J} = 724.16\ mm/s \quad \angle 147.8^o$$

obeikandl.com