الفصل الخامس

5

القوى الإستاتيكية Static forces

خصائص القوة :
(مقدار ـ اتجاه ـ إشارة ـ خط عمل ـ نقطة تطبيق)

1-5 القوى القسرية والقوى المطبقة Applied and constraint forces

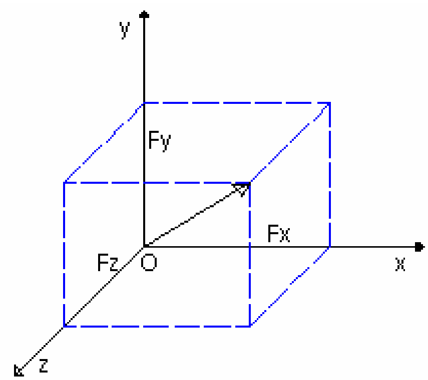
عند اتصال مجموعة أجسام مع بعضها لتكون نطاقاً، فإن القوى بين هذه الأجسام يطلق عليها القوى القسرية، وتجبر هذه القوى الأجسام على القيام بحركات معينة، وتشمل قوى الفعل ورد الفعل بين جسمين متصلين ببعضهما البعض.

أما القوى المطبقة فهي القوى الخارجية المؤثرة من خارج هذه المجموعة، وقد تكون بدون تماس فعلى مثل قوى الجاذبية الأرضية أو قوى مغناطيسية أو كهربية.

إن إشارة القوة قد تكون موجبة أو سالبة على امتداد خط عملها.

يوضح الشكل (5-1) قوة F تؤثر عند نقطة الأصل في ثلاثة أبعاد، ويمكن كتابة معادلتها كالتالي:

$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{J} + F_z\,\vec{k}$$

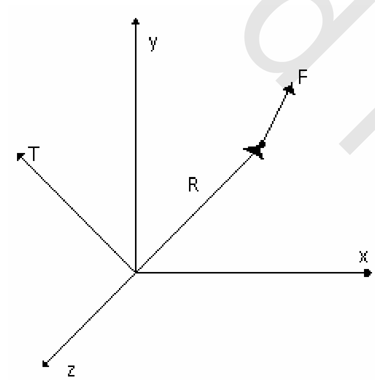


شكل (5-1)

يوضح الشكل (5-2) قوة F ويمكن حساب قيمة العزم الناتج من العلاقة:

$$\vec{T} = \vec{R} \times \vec{F}$$

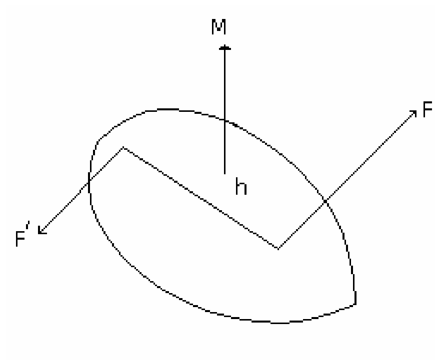
T عمودي على المستوى الذي يحتوي F,R.



شكل (5-2)

عند تأثير قوتين متساويتين في القيمة ومتضادتين في الاتجاه على امتداد خطين متوازيين ينتج عنهما الازدواج comple شكل (5-3).

$$\vec{M} = \vec{h} \times \vec{F}$$



شكل (3-5)

5-2- شروط الاتزان Conditions for equilibrium

إن شروط اتزان الجسم الجاسئ هي:

- المجموع الاتجاهي لجميع القوى المؤثرة يساوي صفراً.
- مجموع العزوم لجميع القوى المؤثرة حول محور معين يساوي صفراً.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad , \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum \vec{T} = 0 \quad \Rightarrow \sum T_x = 0 \quad , \quad \sum T_y = 0 \quad , \quad \sum T_z = 0$$

- **مخطط الجسم الحر Free body diagram**

إن رسم مخطط الجسم الحر يعني عزل حد ما أو مجموعة حدود في الآلية عن باقي الحدود ورسم كل القوى الخارجية المؤثرة فيه؛ ويساعد هذا في فهم المسألة وتعيين القوى المجهولة وبرمجة وإدراك جميع أوجه المسألة المطروحة.

5-3 تحليل القوى تخطيطياً Graphical force analysis

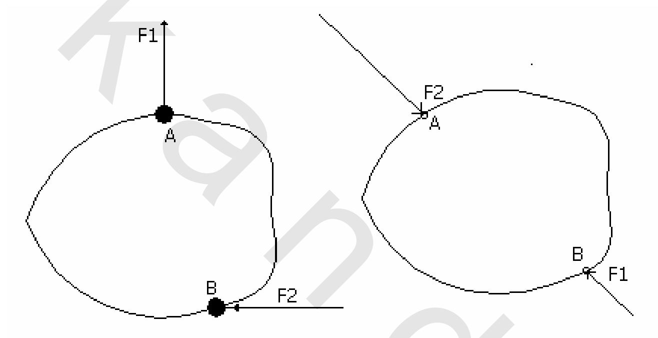
يعتمد هذا التحليل على رسم مخطط الجسم الحر لأجزاء الآلية ومخططات القوى من أجل تعيين القوى المجهولة. ومن عيوب هذه الطريقة حاجتها إلى الدقة العالية في الرسم والقياس.

1-3-5 تحليل الأجزاء ثنائية القوى Analysis of two force members

تكون شروط التوازن كالتالي:

- القوتان لهما نفس المقدار.
- تؤثران على نفس خط العمل.
- لهما اتجاهان متعاكسان.

وفي هذه الحالة يتعرض الجسم لإجهاد شد أو ضغط؛ $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ ويوضح الشكل (4-5) حالتي الاتزان عند تطبيق قوتين على جسم معين.



شكل (4-5)

2-3-5 تحليل الأجزاء ثلاثية القوى Analysis of three force members

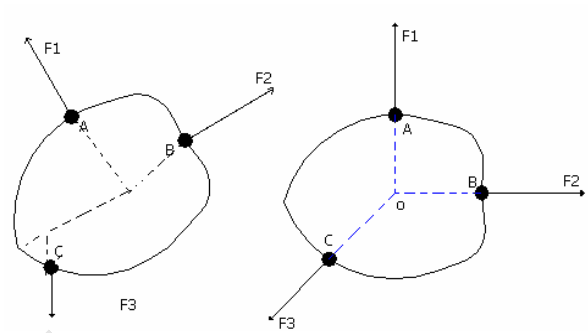
شروط الاتزان:

- محصلة القوى الثلاثة تساوي صفراً.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

- تقاطع خط عمل القوى الثلاثة في نقطة واحدة.

ويوضح الشكل (5-5) حالتي الاتزان وعدم الاتزان عند تطبيق ثلاث قوى على جسم معين.



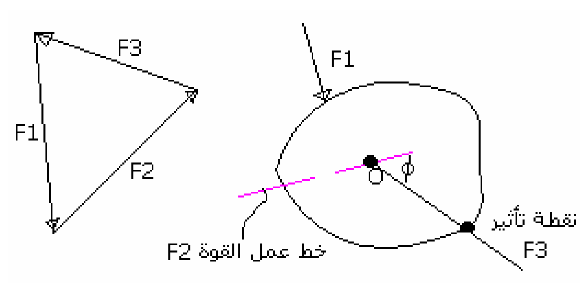
شكل (5-5)

غالباً ما يتم مصادفة المسألة العملية التالية:

- القوة الأولى F_1 معلومة مقداراً واتجاها.
- القوة الثانية F_2 معلومة اتجاها فقط.
- القوة الثالثة F_3 مجهولة مقداراً واتجاها.
- نقاط تأثير القوى الثلاثة معلوم.

لإيجاد قيم واتجاه القوى المجهولة:

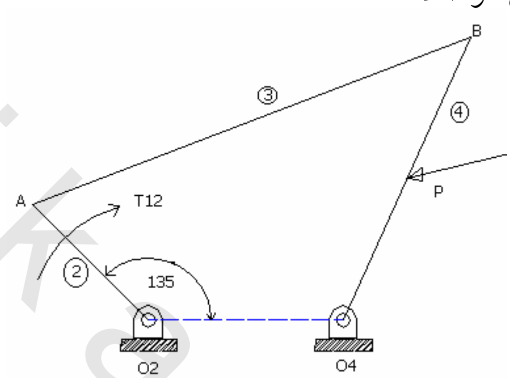
- عين نقطة التلاقي (o)؛ باستخدام اتجاهي القوتين المعلومتين.
- صل نقطة تأثير القوة الثالثة مع (o) وبالتالي يتم تحديد خط عمل القوة الثالثة.
- ارسم مضلع القوى لإيجاد القوة المجهولة مع مراعاة أن يكون لكل القوى الاتجاه على التوالي (شكل (5-6).



شكل (5-6)

مثال 5-1

للآلية رباعية القضبان الموضحة في الشكل (5-7)، المرفق 2 يقاد بعزم T_{12}، ويتم تطبيق قوة خارجية $P = 120\ \angle 220^o\ Lb$ عند النقطة Q على الوصلة 4. للوضعية الموضحة أوجد جميع القوى المؤثرة على الوصلات.



شكل (5-7)

الحل:

- اختر مقياس رسم للآلية والقوى المؤثرة عليها.
- اختر الوصلة التي يمكن بدأ الحل بها. ارسم مخطط الجسم الحر. ابدأ بالوصلة 4 لأن قيمة P معلومة. الوصلة 3 ثنائية القوى وتتعرض لإجهاد شد أو ضغط، وبالتالي القوة F_{34} تقع على امتداد الوصلة 3، القوة F_{14} مجهولة القيمة والاتجاه. يمكن حساب قيم القوى المجهولة كالتالي: ارسم وقيس ذراع العزوم للقوى P، F_{34} حول O_4 واستخدم معادلة العزوم المشار إليها سابقاً

$$\sum M_{O4} = 2.38(120) + 8.63\, F_{34} = 0 \Rightarrow F_{34} = -33.1\ Lb$$

الإشارة السالبة تعني أن اتجاه القوة F_{34} في اتجاه عقارب الساعة كما موضح بالشكل (5-8)أ.

- الوصلة 4 ثلاثية القوى ويمكن إيجاد اتجاه القوة F_{14} باستخدام نقطة التوازن c؛ شكل (5-8) ب.
- برسم مضلع القوى، شكل (5-8)ج يمكن إيجاد القوة F_{14}

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_{43} + \vec{F}_{14} = 0$$

مع ملاحظة أنه يمكن الاستغناء عن حساب معادلة العزوم ورسم المضلع بعد تحديد اتجاهات القوى مباشرة.

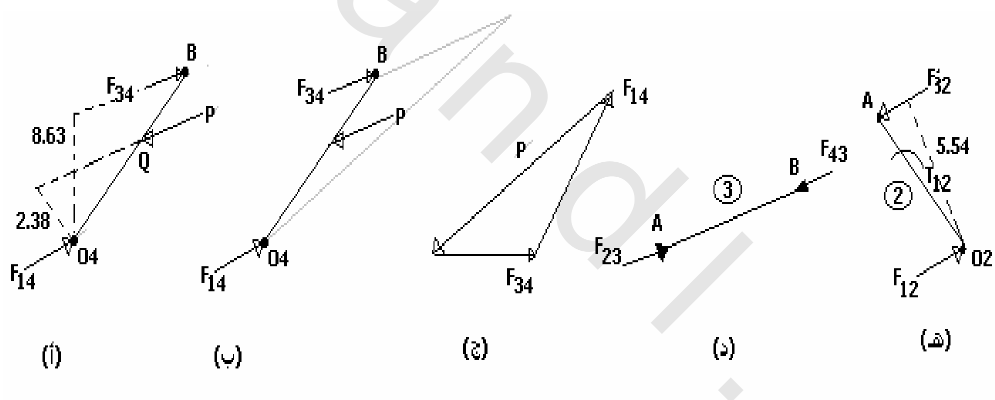
- في الشكل (5-8) د تم رسم مخطط الجسم الحر للوصلة 3.

$$\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{43} = \vec{F}_{14}$$

- ارسم مخطط الجسم الحر للوصلة 2، شكل (5-8) هـ، وأوجد طول ذراع العزوم حول O_2.

T_{12}=-33.1 (5.54)

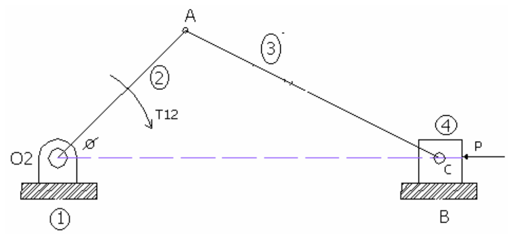
T_{12}=-183 Lb.in (الإشارة السالبة تعني مع عقارب الساعة)



شكل (5-8) أ، ب، ج، د، هـ

مثال 5-2

في آلية المرفق – المنزلق الموضحة في الشكل (5-9) ، أوجد العزم T_{12} والقوى المؤثرة على الوصلات إذا علمت أن القوة P=40N، والزاوية $\phi = 45^{O}$ أفرض أنه لا يوجد احتكاك.



شكل (5-9)

الحل:

- يمكن البدء بالوصلة رقم (4) حيث القوة P معلومة القيمة والاتجاه، اتجاه القوة F_{14} معلوم (حيث أن لا يوجد احتكاك فرد الفعل عمودي على مستوى الحركة) وكذلك اتجاه القوة F_{34} (على امتداد الوصلة 3).
- برسم مخطط الجسم الحر للوصلة 4.
- ارسم مخطط الجسم الحر للوصلة 3 والتي تؤثر عليها قوتين F_{23},F_{34}.
- اختر مقياس رسم مناسب وارسم مضلع القوى المؤثر على الوصلة 4.

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{34} = 0$$

$$\vec{F}_{43} = -\vec{F}_{23}$$

- ارسم مخطط الجسم الحر للوصلة 2.

$$\vec{T} = \vec{F}_{23} \times \vec{h}$$

بحل المعادلات السابقة:

$$F_{14} = 12.7\ N \quad \angle 90^{O}$$

في اتجاه الوصلة 3

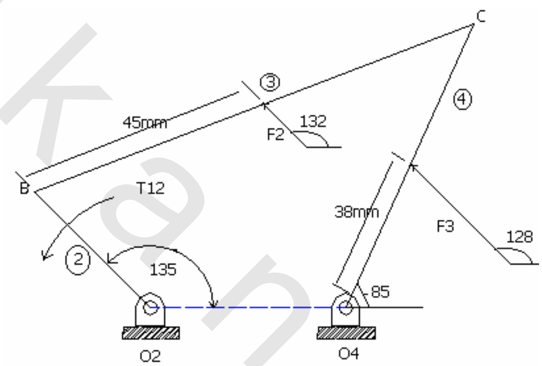
$$F_{34} = 42\ N$$
$$h = 26.6 \quad mm$$
$$T = 1.12\ N.m \quad CW$$

مثال 5-3

للآلية رباعية القضبان الموضحة في الشكل (5-11) ، احسب العزم T_{12}، المؤثر على الوصلة 2، واحسب كذلك القوى المفصلية. استخدام مبدأ التراكب.

المعطيات:

$$F_2 = 77\ N, F_3 = 30\ N, O_4C = 50\ mm, O_2O_4 = 70\ mm$$
$$O_2B = 30\ mm, BC = 100\ mm$$



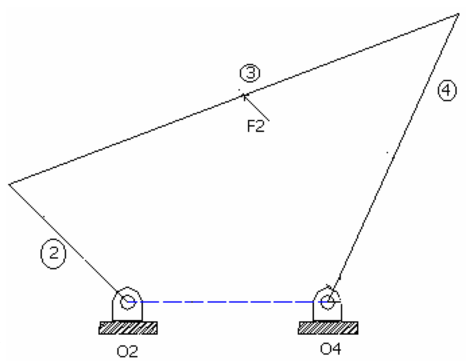
شكل (5-11)

الحل:

باستخدام مبدأ التراكب super position يتم تقسيم المسألة إلى مسألتين فرعيتين تهمل في كل واحدة تأثير أحد القوى ويتم تحليل تأثير القوة الثانية ومن ثم جمع محصلة المسألتين الفرعيتين يعطي الحل الكلي للمسألة.

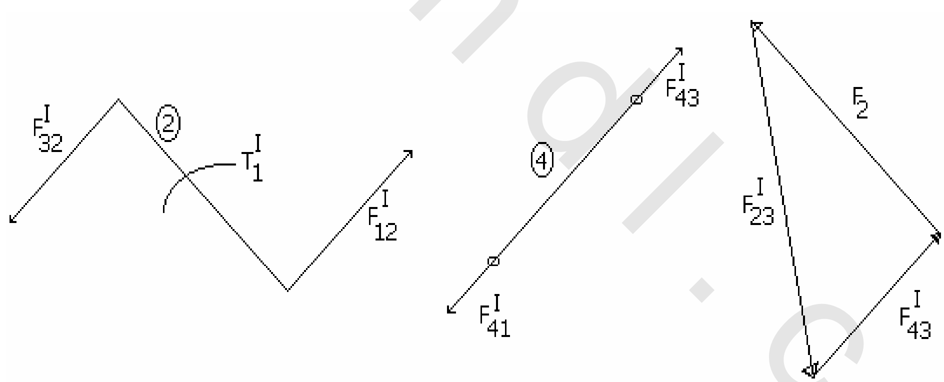
أولاً: بافتراض إهمال القوة F_3.

- الحد الرابع معرض لقوتين فقط لأن F_3 مهملة (شكل 5-12) وبالتالي فالقوتين تؤثران على امتداد الحد الرابع ولهما نفس المقدار ومتعاكستان في الاتجاه؛ ولكن مجهولتا القيمة.



شكل (5-12)

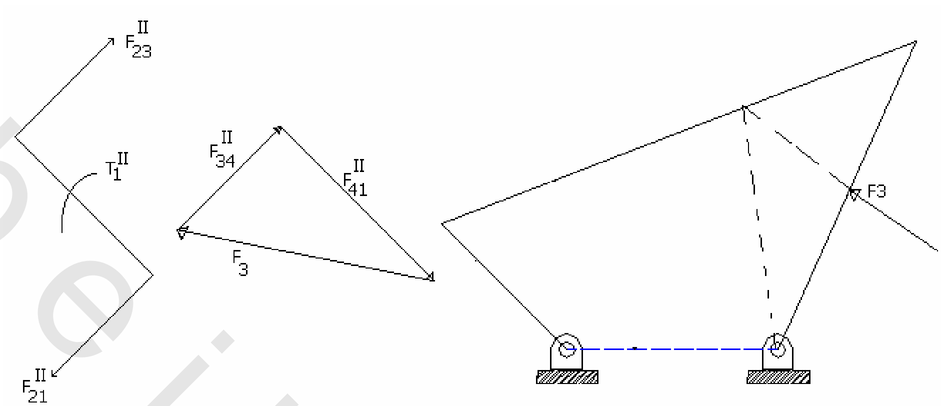
- الوصلة 3 تتأثر بثلاث قوى، القوة F_2 معلومة وقوة معلومة اتجاهاً فقط F_{43}؛ وبالتالي يمكن إيجاد F_{32} (شكل (5-13)).



شكل (5-13)

يتم الآن إهمال قيمة القوة F_2 وتحليل تأثير القوة F_3.

ويلخص الشكل (5-14) هذا التحليل.



شكل (5-14)

لاحظ أنه:

$$F_{23}^{II} = -F_{32}^{II}$$
$$F_{34}^{II} = F_{23}^{II}$$

بإيجاد قيمة العزم في الحالة الثانية $T_1^{II} = \vec{F}_{21} \times \vec{h}$

ومن ثم يمكن إيجاد قيمة العزم الكلي $T_1 = T_1^{I} + T_1^{II}$

وكذلك بالنسبة للقوى المختلفة

$$\vec{F}_{23} = \vec{F}_{23}^{I} + \vec{F}_{23}^{II}$$
$$\vec{F}_{41} = \vec{F}_{41}^{I} + \vec{F}_{41}^{II}$$

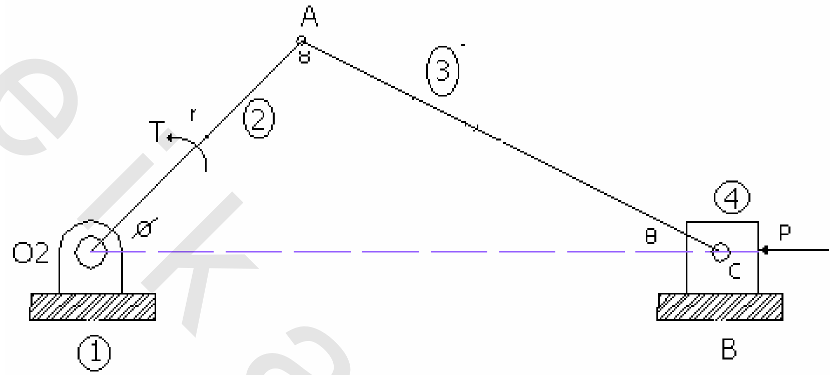
4-5 التحليل الرياضي للقوى Analytical static's in mechanisms

يمكن إيجاد القوى المؤثرة على الوصلات المختلفة باستخدام التحليل الرياضي. فعلى سبيل المثال عند معرفة حركة الآلية يمكن تعيين القوى المسببة في هذه الحركة، كما أنه عند معرفة القوى يمكن إيجاد الحركة المتولدة عن هذه القوة.

سيتم إيضاح طريقة التحليل من خلال الأمثلة التالية:

مثال 5-4

في آلية المرفق المنزلق الموضحة في الشكل (5-15)، طول المرفق r وطول ذراع التوصيل L والقوة المطبقة على المكبس P. أوجد قيمة العزم T بدلالة الزاوية ϕ.

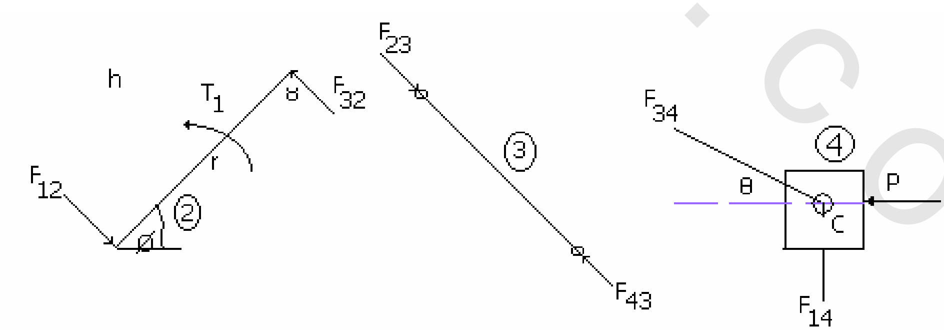


شكل (5-15)

الحل:

سيتم في البداية رسم مخطط الجسم الحر لكل حد من حدود الآلية على حدة، وتحديد القوى المؤثرة على هذه الحدود.

ويوضح الشكل (5-16) حدود الآلية والقوى المؤثرة عليها.



شكل (5-16)

$$F_{34}\cos\theta = P \quad \Rightarrow \quad F_{34} = \frac{P}{\cos\theta} \tag{1-5}$$

$$F_{32} = \frac{P}{\cos\theta} \tag{2-5}$$

نأخذ مجموع العزوم المؤثرة على المرفق

$$\begin{aligned} & T + F_{32}\cos(\gamma - 90)\, r = 0 \\ & \Rightarrow T = -F_{32}\, r \sin\gamma \end{aligned} \tag{3-5}$$

$$\begin{aligned} & \because \gamma = 180 - (\phi + \theta) \\ & \therefore T = -F_{32}\, r \sin(\phi + \theta) \\ & \Rightarrow T = -F_{32}\, r\,(\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta) \end{aligned} \tag{4-5}$$

نعوض في المعادلة (4-5) باستخدام (2-5)

$$T = \frac{\Pr}{\cos\theta}(\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta)$$

$$or \quad T = \Pr(\sin\phi + \cos\phi\tan\theta)$$

$$\because \frac{\sin\theta}{r} = \frac{\sin\phi}{L} \quad , \quad \therefore \sin\theta = \frac{r}{L}\sin\phi$$

$$\because \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}\,, \quad \therefore \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2}\sin^2\phi}$$

$$T = -\Pr\left(\sin\phi + \cos\phi\frac{{}^{r}\!/_{L}\,\sin\phi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2}\sin^2\phi}}\right)$$

$$or \quad T = -\Pr\sin\phi\left(1 + \frac{r\cos\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\phi}}\right)$$

تبين العلاقة الأخيرة. أنه عند ثبات قيمة القوة P فالعزم الدوراني سيكون متغير القيمة حسب قيمة زاوية المرفق ϕ، وعندها تكون قيمة الزاوية المرفق = صفراً أو 180°، أي

الوضعيات الميتة للآلية، فإن العزم T سيكون معدوماً والآلية تتوقف عن الحركة عندما تكون P هي القوة الوحيدة المؤثرة؛ ولكن هذا فعلياً لا يحدث بسبب تأثيرات قوى العطالة الناتجة عن تركيب الدولاب المعتدل أو بسبب تأثير العزم الدوراني الناتج من اسطوانة أخرى.

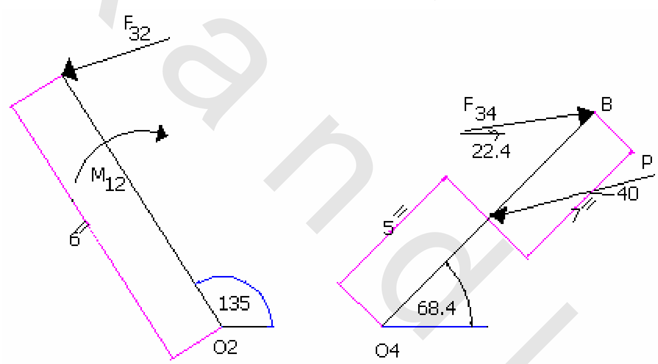
مثال 5-5

أعد حل المثال 5-1 رياضياً.

الحل:

يوضح الشكل (5-17) الوصلتين 2، 4 والقوى المؤثرة عليهما.

حيث تم أولاً تحديد الزاوية التي تميل بها كل وصلة على محور السينات.



شكل (5-17)

بأخذ العزوم حول O_4

$$\sum \vec{M}_{O4} = \vec{R}_Q \times \vec{P} + \vec{R}_B \times \vec{F}_{34} = 0$$

حيث :

$$\vec{R}_Q = 5\angle 68.4^O = 1.84\vec{i} + 4.65\vec{J}$$
$$\vec{P} = 120\angle 220^O = -91.9\vec{i} + 77.1\vec{J}$$
$$\vec{R}_B = 12\ \angle 68.4^O = 4.42\vec{i} + 11.165\vec{J}$$
$$\vec{F}_{34} = F_{34}\ \angle 22.4^O = \left(0.924\vec{i} + 0.381\vec{J}\right)F_{34}$$

بحل المعادلة :

$$\vec{F}_{34} = 33.1\angle 22.4^{O} = 30.64\vec{i} + 12.6\vec{J} \quad Lb$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{34} + \vec{P} + \vec{F}_{14} = \left(30.64\vec{i} + 12.6\vec{J}\right) + \left(-91.9\vec{i} + 77.1\vec{J}\right) + \vec{F}_{14} = 0$$

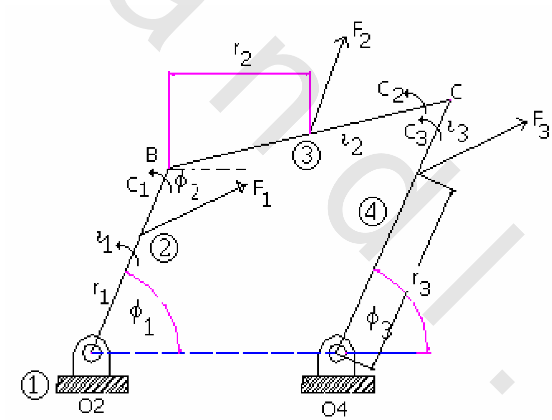
$$\therefore \vec{F}_{14} = 61.3\vec{i} + 64.5\vec{J} = 89.0\angle 46.5^{O}$$

$$\sum \vec{M}_{O2} = \vec{M}_{12} + \vec{R}_{A} \times \vec{F}_{32} = 0 \quad , \vec{R}_{A} = 6\angle 135^{O} \quad , \quad \vec{F}_{32} = \vec{F}_{34}$$

$$\therefore \vec{M}_{12} = -183.2\,\vec{k} \quad Lb.in$$

مثال 5-6

في الآلية رباعية القضبان الموضحة بالشكل (5-18):



شكل (5-18)

المعطيات:

ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 الزوايا الموضعية.

F_1,F_2,F_3 القوى المسلطة.

C_1,C_2,C_3 ازدواجات خارجية مطبقة.

المطلوب: عزم الدوران للمرفق T اللازم للحفاظ على الآلية في حالة الاتزان في الموضع المحدد وكذلك القوى المفصلية.

الحل:

تكون معادلات التوازن للوصلة رقم 4 بإسقاط القوى على محاور y, x وأخذ العزوم حول النقطة O_4.

$$F_{14x} + F_{34x} + F_{3x} = 0 \qquad (5\text{-}5)$$

$$F_{14y} + F_{34y} + F_{3y} = 0 \qquad (6\text{-}5)$$

$$F_{34y}\ell_3 \cos\phi_3 + F_{34x}\ell_3 \sin\phi_3 + F_{3y}r_3 \cos\phi_3 - F_{3x}r_3 \sin\phi_3 + C_3 = 0 \qquad (7\text{-}5)$$

تحتوى هذه المعادلات الثلاث على أربعة مجاهيل. يتم دراسة الوصلة 3 وتكوين معادلات مشابهة بأخذ العزوم حول المفصل B.

$$F_{23x} + F_{43x} + F_{2x} = 0 \qquad (8\text{-}5)$$

$$F_{23y} + F_{43y} + F_{2y} = 0 \qquad (9\text{-}5)$$

$$F_{43y}\ell_2 \cos\phi_2 + F_{43x}\ell_2 \sin\phi_2 + F_{2y}r_2 \cos\phi_2 - F_{2x}r_2 \sin\phi_2 + C_2 = 0 \qquad (10\text{-}5)$$

$$F_{43x} = -F_{34x} \quad , \quad F_{43y} = -F_{34y}$$

$$F_{23x} - F_{34x} + F_{2x} = 0 \qquad (11\text{-}5)$$

$$F_{23y} - F_{34y} + F_{2y} = 0 \qquad (12\text{-}5)$$

$$-F_{34y}\ell_2 \cos\phi_2 + F_{34x}\ell_2 \sin\phi_2 + F_{2y}r_2 \cos\phi_2 - F_{2x}r_2 \sin\phi_2 + C_2 = 0 \qquad (13\text{-}5)$$

المعادلات (5-5) وحتى (13-5) تحتوي على ستة مجاهيل هي :

$$F_{23x} , F_{23y} , F_{34x} , F_{34y} , F_{14x} , F_{14y}$$

المعادلتان (5-7) و (5-13) تحتويان على مجهولين فقط هما F_{34y} , F_{34x} نعيد ترتيب المعادلتين على الصورة:

$$a_{11}F_{34x} + a_{12}F_{34y} = b_1 \tag{14-5}$$

$$a_{21}F_{34x} + a_{22}F_{34y} = b_2 \tag{15-5}$$

حيث:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \ell_3 \sin\phi_3 \\ a_{12} &= \ell_3 \cos\phi_3 \\ a_{21} &= \ell_2 \sin\phi_2 \\ a_{22} &= \ell_2 \cos\phi_2 \\ b_1 &= F_{3x}r_3 \sin\phi_3 - F_{3y}r_3 \cos\phi_3 \\ b_2 &= F_{2x}r_2 \sin\phi_2 - F_{2y}r_2 \cos\phi_2 \end{aligned}$$

بحل المعادلتين (5-14)، (5-15)

$$F_{34x} = \frac{|A_1|}{|A|} \quad , \quad F_{34y} = \frac{|A_2|}{|2|}$$

حيث:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad ; \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}F_{34x} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{16-5}$$

$$a_{11}F_{34y} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{17-5}$$

وبالتالي تم تعيين قيمة مركبات القوة F_{34x} .

بحل المعادلات (5-5)، (5-6)، (5-11)، (5-12) لتعيين مركبات القوى المفصلية المجهولة:

$$F_{14x} = -F_{34x} - F_{3x} \tag{18-5}$$

$$F_{14y} = -F_{34y} - F_{3y} \tag{19-5}$$

$$F_{23x} = F_{34x} - F_{2x} \tag{20-5}$$

$$F_{23y} = F_{34y} - F_{2y} \tag{21-5}$$

بدراسة توازن المرفق

$$F_{12x} + F_{32x} + F_{1x} = 0$$
$$F_{12y} + F_{32y} + F_{1y} = 0$$
$$T + F_{32y}\ell_1 \cos\phi_1 + F_{32x}\ell_1 \sin\phi_1 + F_{1y}r_1 \cos\phi_1 + F_{1x}r_1 \sin\phi_1$$

$$F_{32x} = -F_{23x} \quad , \quad F_{32y} = -F_{23y}$$

$$F_{12x} - F_{23x} + F_{1x} = 0 \tag{22-5}$$

$$F_{12y} - F_{23y} + F_{1y} = 0 \tag{23-5}$$

$$T - F_{23y}\ell_1 \cos\phi_1 + F_{23x}\ell_1 \sin\phi_1 + F_{1y}r_1 \cos\phi_1 + F_{1x}r_1 \sin\phi + C_1 = 0 \tag{24-5}$$

$$F_{12x} = F_{23x} - F_{1x}$$
$$F_{12y} = F_{23y} - F_{1y}$$

$$T = F_{23y}\ell_1 \cos\phi_1 - F_{23x}\ell_1 \sin\phi_1 - F_{1y}r_1 \cos\phi_1 + F_{1x}r_1 \sin\phi - C_1$$