الفصل السادس

6

القوى الديناميكية Dynamic forces

تؤدي الكتل المتسارعة إلى ظهور القوى الديناميكية، وحيث أن كل الآلات تحتوي على أجسام متسارعة فإن القوى الديناميكية تظهر في كل الآلات.

إن أبسط مثال على هذه القوى هو كتلة تدور حول مفصل بسرعة زاوية ثابتة، حيث تتعرض هذه الكتلة بسبب التسارع إلى القوى الطاردة المركزية وهي قوة ديناميكية. أحياناً تكون القوى الديناميكية صغيرة مقارنة مع القوى الخارجية المؤثرة على الآلية بحيث يمكن إهمالها إلا أنه في أحيان أخرى تكون هي القوة الأكبر المؤثرة على الآلية.

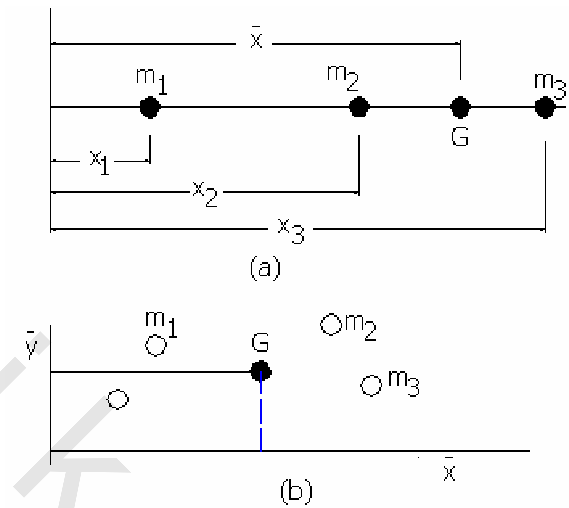
1-6 مركز الكتلة Center of mass

عند حل المسائل المختلفة تكون القوى موزعة بطريقة ما على امتداد خط، أو مساحة، أو حجم؛ ومن الممكن إيجاد محصلة هذه القوى. ويمكن إيجاد تأثير هذه القوة المحصلة عند نقطة ما والتي تعطي تأثير نفس القوى.

ويعبر مصطلح مركز الكتلة عن النقطة التي يمكن اعتبار الكتلة مركزة عندها لتعطي نفس تأثير الكتلة الموزعة.

يوضح الشكل (6-1) أ مجموعة كتل موزعة على خط. مركز الكتلة G يمكن إيجاده بالعلاقة:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$



شكل (6-1)

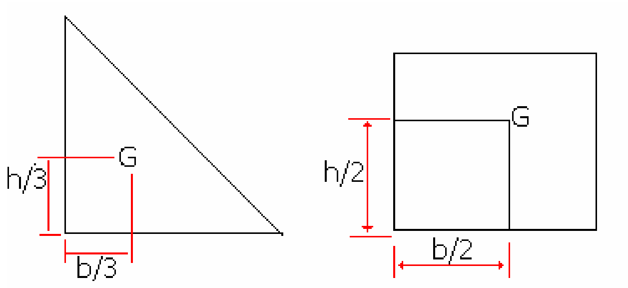
وعندما تكون هذه الكتلة موزعة على مساحة (شكل (6-1)ب) فإن الإحداثي الصادي يمكن إيجاده بالعلاقة:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

ويمكن إيجاد $\bar{z}$ بنفس الطريقة.

ويوضح الشكل (6-2) مركز الكتلة لأشكال مختلفة، وعند وجود مزيج من هذه الأشكال يمكن إيجاد المركز من العلاقة:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$



شكل (2-6)

وبشكل عام يمكن إيجاد المراكز عن طريق التكامل باستخدام العلاقة:

$$\bar{X} = \frac{1}{A}\int \bar{x}\, dA$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{A}\int \bar{y}\, dA$$

حيث $\bar{x}, \bar{y}$ هي المسافات إلى المراكز للمساحة dA مقاسة موازية للمحاور y,x.

2-6 عزم القصور Moment of inertia

يمكن حساب عزم القصور من العلاقة :

$$I_x = \int y^2\, dA \quad , \quad I_y = \int x^2\, dA$$

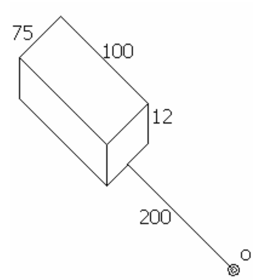
ولحساب عزم القصور حول أي محور على بعد d من محور المركز يمكن استخدام العلاقات:

$$I_x = \bar{I}_x + A d^2 x$$

$$I_y = \bar{I}_y + A d^2 y$$

مثال 1-6

يوضح الشكل (6-3) متوازي مستطيلات متصل بحبل مهمل الوزن. احسب عزم القصور حول o. أفرض ρ = 7.8 مجم/ م^3.



شكل (3-6)

الحل:

$$m = abc\ \rho = (75)(100)(12)(78)\frac{1000\ {}^{kg}\!/\!{}_{mg}}{\left(1000\ {}^{mm}\!/\!{}_{m}\right)^3} = 0.702\ kg.$$

$$I_G = \frac{m}{12}\left(a^2 + c^2\right) = \frac{0.702}{12}\left[(75)^2 + (100)^2\right] = 914\ kg.mm$$

$$I_o = I_G + md^2 = 914 + (0.702)(250)^2 = 44800\ kg.mm^2$$

$$I_o = 0.0448\ kg.m^2$$

3-6 قوى القصور ومبدأ دالمبرت Inertia forces and D'alembert's principle

افرض جسم جاسئ متحرك كتلته m يتم التأثير عليه بمجموعة قوى F_3,F_2,F_1 شكل (4-6)أ. بتحديد مركز كتلة الجسم G وبإيجاد محصلة هذه القوى $\vec{F}$.

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

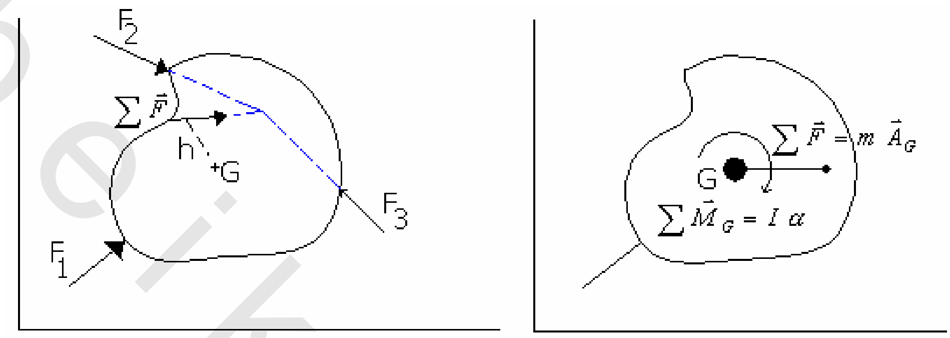
بشكل عام لن تؤثر هذه المحصلة عند G ولكنها ستكون مزاحة عنه بمسافة h.

إن نتيجة هذه القوى هو عجلة خطية ودورانية يمكن إيجادهما بالعلاقتين:

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{A}_G$$

$$\sum \vec{M}_G = I\,\alpha$$

حيث A_G هي عجلة المركز G ، α هي العجلة الزاوية للجسم.



(أ) (ب)

شكل (6-4)

وبالتالي عند معرفة قيم القوى والعزوم يمكن تحديد قيمة العجلة للجسم. عند تحديد حركة أجزاء الآلة المختلفة المطلوبة بواسطة المصممين، فمن المهم معرفة القوى التي ستعطى هذه الحركة. المسألة تتطلب إتباع الخطوتين التاليتين:

1- التحليل الكينماتيكي لتحديد العجلات الخطية والزاوية للأجزاء المختلفة.

2- تعريف شكل وأبعاد ومادة الأجزاء وذلك لحساب عزم القصور.

يسمى الحد $m\ A_G$ بقوى العطالة أو قوى القصور، وله نفس خط عمل A_G ولكن إشارة مختلفة (عكسية)؛ بينما يسمى الحد $I\alpha$ بعزم القصور. وتسمى المعادلات المبينة أعلاه بمفهوم دالمبرت .

ويمكن صياغة هذا المبدأ كالتالي «المجموع الاتجاهي لجميع القوى الخارجية المطبقة وقوى القصور المطبقة على الجسم الجاسئ تساوي صفراً». أو «المجموع الاتجاهي لجميع العزوم الخارجية وعزوم القصور المؤثرة على الجسم الجاسئ تساوي صفراً».

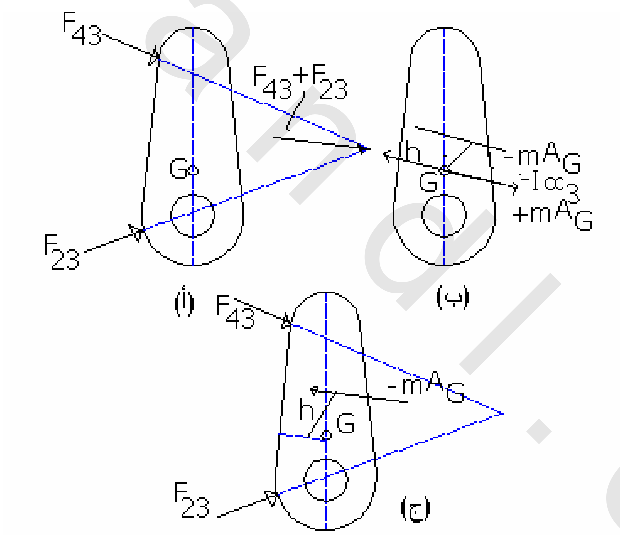
وباستخدام هذا المفهوم يمكن حل المسائل المختلفة باستخدام مضلع القوى.

يوضح الشكل (5-6)أ وصلة يتم التأثير عليها بقوتين خارجيتين؛ F_{23}, F_{43}. المحصلة ينتج عنها تسارع المركز بمعدل A_G وعجلة زاوية مقدارها α_3 لأن محصلة القوى لا تمر بالمركز G.

بالتعويض عن عزوم القصور $I\alpha_3$ كازدواج، كما موضح بالشكل (5-6)ب، والمسافة بين القوتين يمكن تحديدها. يتم اختيار القوتين لتساوي $\pm mA_G$.

$$h = \frac{I\alpha_3}{mA_G}$$

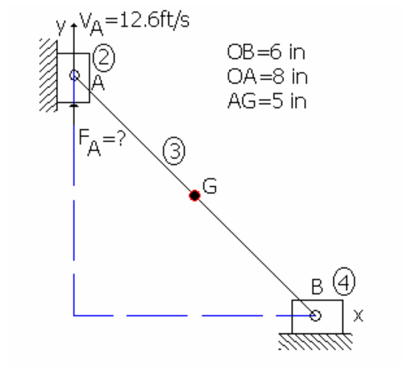
وبسبب هذا الاختيار المحدد للازدواج فإن أحد القوتين ستلغي قوى القصور، كما موضح بالشكل (5-6)، وتتبقى قوة واحدة تتضمن تأثير قوى وعزم القصور.



شكل (5-6)

مثال 2-6

أحسب القوة F_A المطلوبة لإنتاج سرعة V_A للآلية الموضحة في الشكل (6-6). أهمل الاحتكاك وافرض الحركة في مستوى أفقي. ω_3=2.2 lb , I_3=0.0479 lb.s^2



شكل (6-6)

الحل:

يتم إيجاد العجلة الخطية كما موضح بالشكل (6-7)أ، وبالتالي نحسب العجلة الزاوية للوصلة 3 من العلاقة:

$$\alpha_3 = \frac{A^t_{B/A}}{R_{B/A}}$$

$$\alpha_3 = \frac{713}{10/12} = 856 \quad \text{rad}/\text{s} \quad (\text{cw})$$

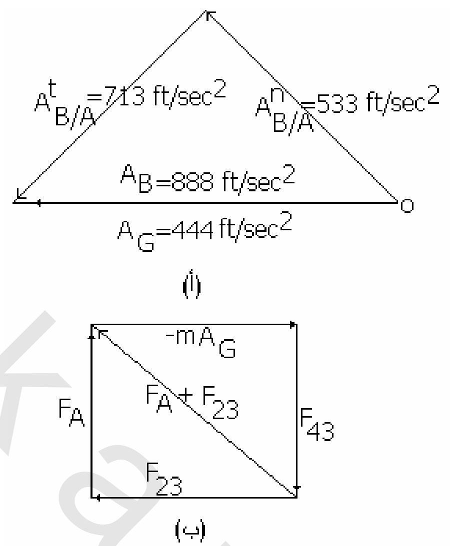
$$m_3 = \frac{w}{g} = \frac{2.20}{386} = 0.0057 \quad \text{lb.s}^2/\text{in}$$

$$h = \frac{I_{G3}\alpha_3}{m\,A_G}$$

$$\therefore h = \frac{(0.0479)(856)}{(0.0057)(444)(12)} = 1.35 \text{ in}$$

مخطط الجسم الحر ومضلع القوى بالشكل (6-7)ب، مع ملاحظة أن قوة العزوم ($-mA_G$) أزيحت عن المركز G بمقدار h؛ لإنتاج عزم مقداره $-I\alpha_3$ حول G، والقوة $-m\,A_G$ عكس اتجاه A_G. رد الفعل عند B يساوي F_{43} ويتجه رأسياً لأسفل بسبب إهمال قوى الاحتكاك. القوى عند A هي F_A,F_{23}. وبالتالي يمكن حساب قيمة القوة F_A من مضلع القوى:

$$\vec{F}_A = 27\vec{J} \quad \ell b$$



شكل (6-7) أ،ب

6-4 مبدأ التراكب The principle of super position

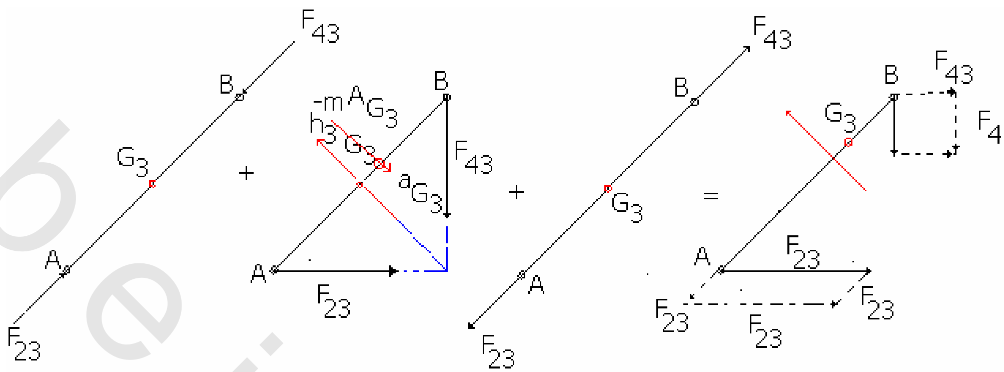
الخطوة الأولى هي بإجراء التحليل الكينماتيكي للآلية. ويوضح الشكل (6-7) مخطط العجلة للآلية.

وبالتالي يمكن حساب العجلة الزاوية للوصلتين 3، 4 على الشكل التالي:

$$\alpha_3 = 148 \quad {}^{rad}\!/_{s^2} \quad (ccw)$$

$$\alpha_4 = 604 \quad {}^{rad}\!/_{s^2} \quad (cw)$$

المخطط الحر للوصلتين 3، 4 تم توضيحه في الشكلين (6-8)، (6-9).



شكل (6-9)

قبل البداية في التحليل من المهم الإشارة إلى أن الشكلين قيمتين لبعضهما، فعلى سبيل المثال F'_{34} في الشكل (6-8) تساوي القوة $-F'_{43}$ في الشكل (6-9).

الخطوة الأولى من الوصلة 4، شكل (6-8)أ ، يمكن إيجاد القيم :

$$I_{G4}\alpha_4 = 0.037\,(604) = 22.3 \quad lb.in$$

$$m_4 a_{G4} = \frac{3.42}{32.2}(349) = 37.1 \quad lb$$

وبالتالي يمكن حساب القيمة h_4 من العلاقة :

$$h_4 = \frac{I_{G4}\alpha_4}{m_4 \; a_{G4}} = \frac{22.3}{37.1} = 0.602 \;\; in$$

ويتم الآن توضيح القوة $m_4 a_{G4}$ على مخطط الجسم الحر عكس اتجاه العجلة a_{G4} ومزاحة عن المركز G_4 بمقدار h_4. اتجاه الإزاحة هو المطلوب لإنتاج عزم حول G_4 عكس $I_{G4}\alpha_4$. اتجاه F'_{34} على امتداد الوصلة 3. وبالتالي يمكن إيجاد F'_{34} ، F'_{14} .

باستخدام مخطط الجسم الحر الموضح في الشكل (6-9)ب.

$$I_{G3}\alpha_3 = 0.625\,(148) = 92.5 \quad lb.in$$

$$m_3 a_{G3} = \frac{7.13}{32.2}(758) = 168 \quad lb$$

$$h_3 = \frac{I_{G3}\alpha_3}{m_3\ a_{G3}} = \frac{92.5}{168} = 0.550\ in$$

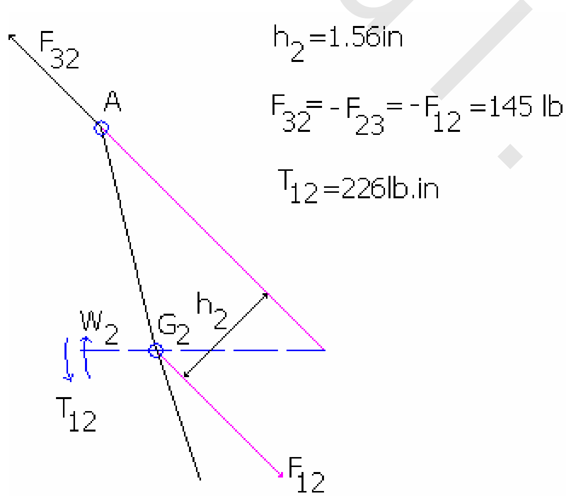
بوضع القوة $-m_3\ a_{G3}$ $[168\ lb]$ على مخطط الجسم الحر عكس اتجاه حركة a_{G3} ومزاحة بمسافة h_3 من G_3 عكس اتجاه α_3. اتجاه F''_{43} على امتداد B_{O4}. وبالتالي يمكن حساب F''_{14} ، F''_{43}.

وفي المخطط (6-8)ب، أصبحت القوتان F''_{14} ، F''_{43}.

الشكلين (6-8)ج ، (6-9)ج يبينان محصلة القوة F_C، وبالتالي يمكن حساب القوى F'''_{14} ، F'''_{43}.

ويتم الآن حساب محصلة هذه القوى والناتجة بالشكل (6-8)ج.

يوضح الشكل (6-10) مخطط الجسم الحر للوصلة 2.



شكل (6-10)

بأخذ محصلة القوة F23 الناتجة من التحليل السابق ، وبقياس المساحة h2 يمكن حساب العزم:

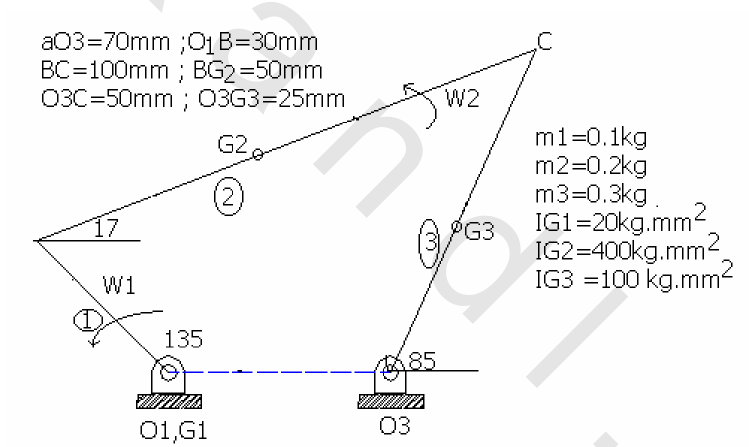
$$T_{12} = h_2 F_{32} = 1.56(145) = 226 \quad ib.in \quad cw$$

مثال 4-6

للآلية رباعية القضبان الموضحة في الشكل (6-11)، احسب قيمة العزم T عند الموضع المبين للحصول على الحركة المطلوبة، إذا علمت أن

$$\omega_1 = 95\ {rad}/{s} \quad (ccw), \alpha_1 = 0$$

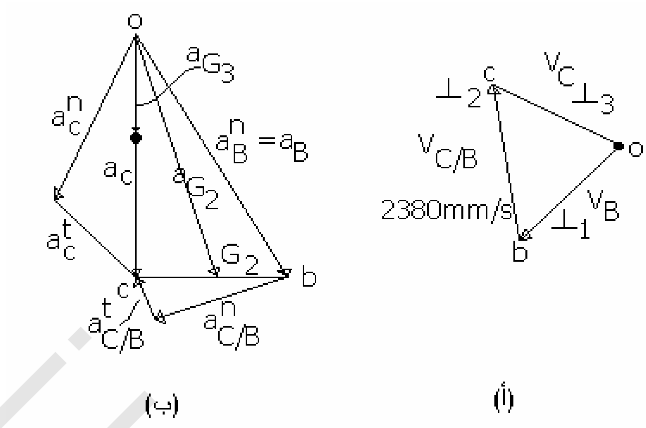
أهمل قوى الاحتكاك وتأثير عجلة الجاذبية الأرضية.



شكل (6-11)

الحل :

- في هذه المسألة المعطى هو الحركة والمطلوب هو القوى المفصلية والعزم المحرك اللازم. يجب أولاً تعيين قوى القصور وعزم القصور وإضافتها إلى الآلية كقوى خارجية، بعدها يتم متابعة الحل بنفس الخطوات المتبعة في التحليل السكوني. لأجل تعيين قوى القصور يجب القيام أولاً بالتحليل الحركي للآلية (الحل التخطيطي) عن طريق إنشاء مخططات السرعة والعجلة شكل (6-12).



شكل (12-6)

$$\omega_2 = \frac{\vartheta_{C/B}}{BC} = 23.8 \quad rad/s$$

اتجاه ω_2 عكس عقارب الساعة (مع اتجاه السرعة $\vartheta_{C/B}$).

$$\omega_2 = \frac{\vartheta_C}{O_3C} = 54 \quad rad/s \quad (ccw)$$

$$a_B = 271{,}000 \quad mm/s^2 \quad , \quad a_C^n = 146{,}000 \quad mm/s^2$$

$$a_C^t = 137{,}000 \quad mm/s^2 \quad , \quad a_{C/B}^n = 52{,}000 \quad mm/s^2$$

$$a_{C/B}^n = 557{,}000 \quad mm/s^2 \quad , \quad a_{G2} = 235{,}000 \quad \angle 312^o \ mm/s^2$$

$$\alpha_2 = 520 \quad rad/s^2 \quad (ccw)$$

$$a_{G3} = 100{,}000 \quad \angle 308^o \ mm/s^2$$

$$\alpha_3 = 520 \quad rad/s^2 \quad (cw)$$

- الخطوة الثانية هي حساب قوى القصور

$$\vec{F}_{i1} = -m_1 \vec{a}_{G1} = -m_1(0) = 0$$

$$\vec{C}_{i1} = -I_{G1}\vec{\alpha}_1 = -I_{G1}(0) = 0$$

للحد الثاني:

$$\vec{F}_{i2} = -m_2\vec{a}_{G2} = 47{,}000 \angle 132^o \quad kg.mm/_{s^2}$$

$$\vec{F}_{i2} = 47 \angle 132^o \quad N$$

$$\vec{C}_{i2} = -I_{G2}\vec{\alpha}_2 = 208 \quad N.m \quad cw$$

للحد الثالث:

$$\vec{F}_{i3} = -m_3\vec{a}_{G3} = 30 \quad \angle 132^o \quad N$$

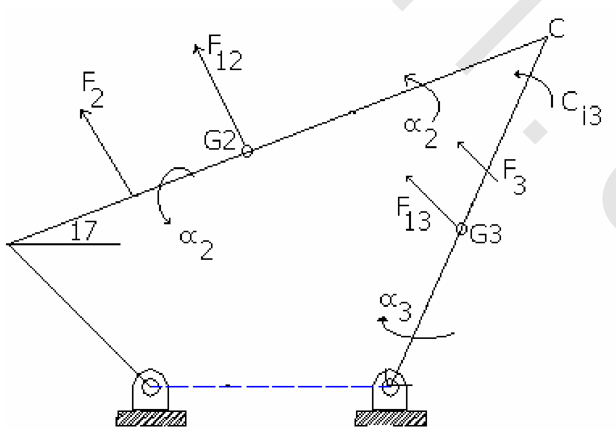
$$\vec{C}_{i3} = -I_{G3}\vec{\alpha}_3 = 274 \quad N.mm \quad cw$$

- يتم رسم القوى والعزوم على الآلية (شكل (6-13)).
- يتم تحويل القوى ومزدوجاتها إلى قوة وحيدة.

$$d = \frac{|\vec{C}_i|}{|F_i|}$$

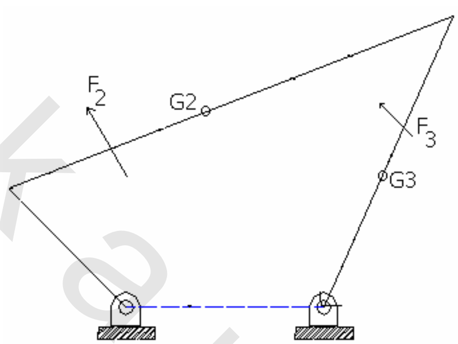
$$d_2 = 4.43 \; mm$$

$$d_3 = 9.13 \; mm$$



شكل (6-13)

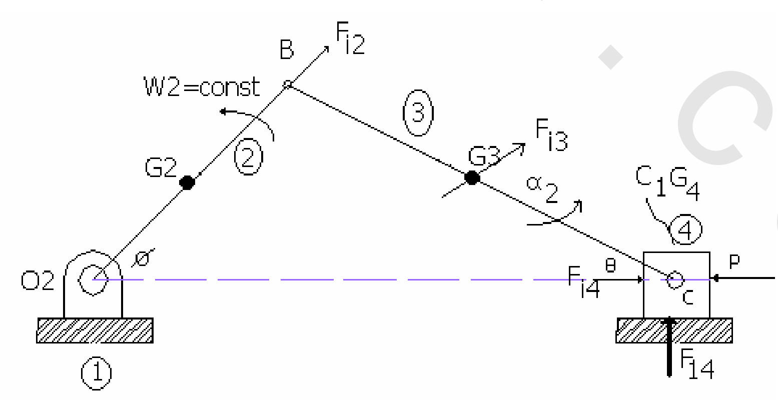
- تزاح القوة F_3 بحيث تولد عزماً حول G_3 يعاكس α_3 (أي تزاح نحو اليمين بمقدار d_3) ، وكذلك القوة F_2.
- يتم رسم الآلية وعليها القوى F_3،F_2 كقوى خارجية، وباستخدام مبدأ التراكب تحليل الآلية ويتم إيجاد العزم T. (شكل (6-14)).



شكل (6-14)

مثال 6-5

لآلية المرفق – المزلق الموضحة في الشكل (6-15)، إذا كانت قيمة القوة P المسلطة معلومة، أوجد T.



شكل (6-15)

الحل:

يوضح الشكل (16-6) مخطط العجلات وتحليل القوى المختلفة لوصلات الآلية وصولاً لتحديد قيمة العزم.

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,t}_{C/B}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}^{\,n}_B$$

أوجد

$$\vec{F}_{i2}\ ,\ \vec{F}_{i3}\ ,\ \vec{F}_{i4}$$

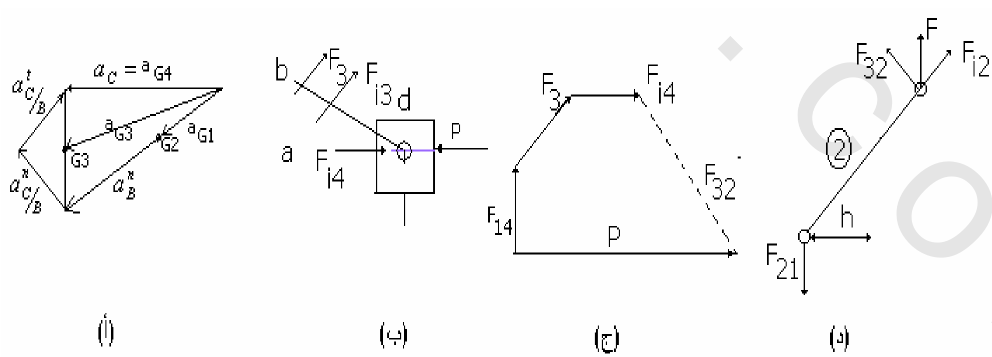
$$\vec{C}_{i2} = 0\ ,\ \vec{C}_{i3}\ ,\ \vec{C}_{i4} = 0$$

$$\alpha = \frac{a^{n}_{C/B}}{BC}$$

$$\vec{F}_{i2} = -m_2 \vec{a}_{G2}$$

$$\sum T_b = F_{3b} + F_{i4} d - Pd + F_{i4} a = 0$$

$$T_1 = F\ h \quad ccw$$



شكل (16-6)

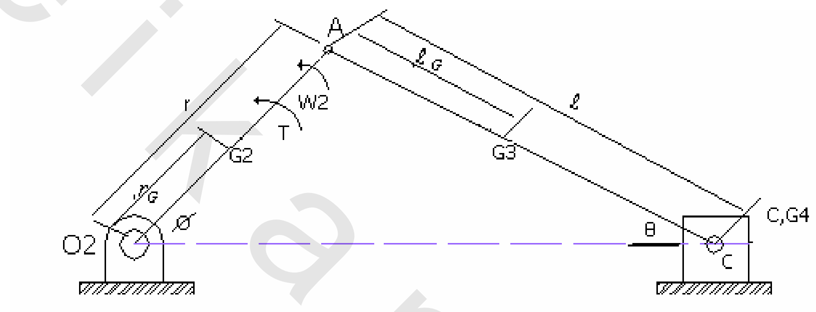
5-6 التحليل الرياضي للآلية المرفق ـ المزلق

Analytical analysis of slider-crank mechanism

مثال 6-6

المعطيات: آلية مرفق منزلق، شكل (6-17).

$$m_1, m_3, m_4, I_{G2}, I_{G3}, \alpha_2, \omega_2$$

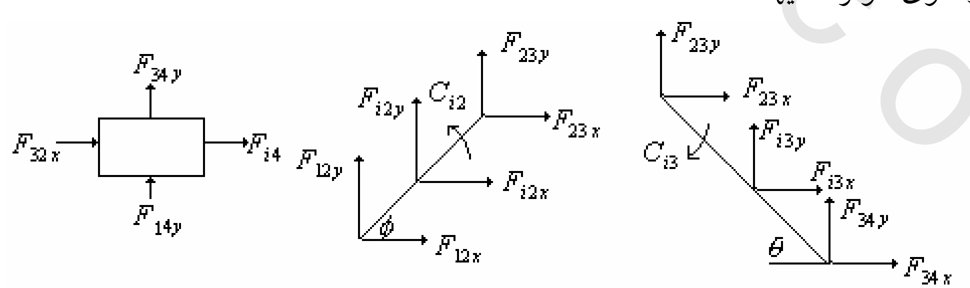


شكل (6-17)

المطلوب: القوى المفصلية، العزم T.

الحل:

يتم أولاً التحليل الحركي للآلية لأجل تعيين قوى ومزدوجات القصور في الحدود المتحركة للآلية، بعدها يتم التحليل الديناميكي للآلية. ويوضح الشكل (6-18) حدود الآلية والقوى المؤثرة عليها.



شكل (6-18)

$$\vec{C}_{i2} = -I_{G2}\vec{\alpha}_2$$
$$\vec{F}_{i2x} = -m_2\vec{a}_{G2x}$$
$$\vec{F}_{i2y} = -m_2\vec{a}_{G2y}$$

بإسقاط القوى المؤثرة على محوري x ، y

$$\vec{F}_{34x} + \vec{F}_{i4} = 0$$
$$\vec{F}_{34y} + \vec{F}_{i4} = 0$$

$$F_{43x}\ell\sin\theta + F_{43y}\ell\cos\theta + F_{i3x}\ell_G\sin\theta + F_{i3y}\ell_G\cos\theta + C_{i3} = 0$$
$$F_{12x} + F_{32x} + F_{i2x} = 0$$
$$F_{12y} + F_{32y} + F_{i2y} = 0$$
$$T - F_{32x}r\sin\phi + F_{32y}r\cos\phi - F_{i2x}r_G\sin\phi + F_{i2y}r_G\cos\phi + C_{i2} = 0$$

6-6 الأنظمة الميكانيكية المكافئة Equivalent Mechanical System

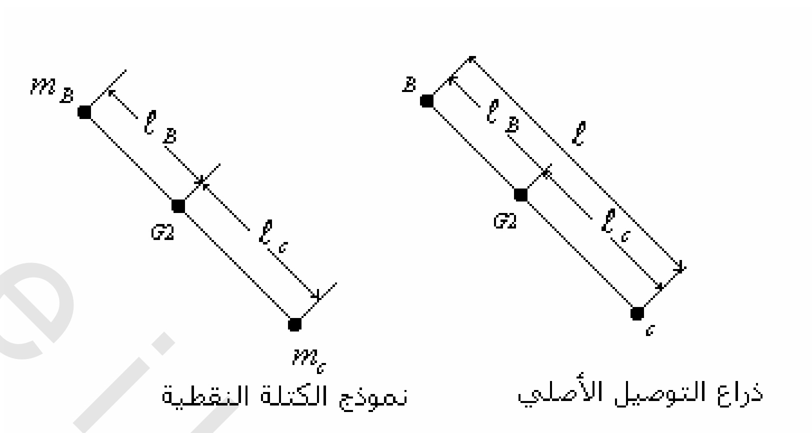
من خلال الدراسات الميكانيكية للأجسام الصلبة يمكن القول، و بشكل عام؛ أن تسارع الأجسام يتوقف على:

– كتلة الجسم – موضع مركز الكتلة – عزم القصور.

ومن أجل تبسيط عملية التحليل الديناميكي في الآليات يتم استبدال حد ما في الآلية بجملة من الكتل النقطية الموزعة على مسافات معينة و تتصل بعضها بشكل صلب، و تتحرك هذه الجملة بنفس تسارعات الجسم الأصلي إذا طبقت عليها نفس القوى.

ويسمى هذا النموذج «جملة مكافئة ديناميكية» وأبسط شكل ممكن تكوينه هو كتلتين يصل بينهما قضيب صلب مهمل الكتلة (شكل(6-19)) و يقال أن الجملتين متكافئتين ديناميكياً إذا تحققت الشروط التالية:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ m_B\ell_B = m_c\ell_c \\ \bullet\ m_B + m_c = m_2 \\ \bullet\ m_B\ell_B^{\,2} + m_c\ell_c^{\,2} = I_{G2} \end{array}\right\}$$



شكل (6-19)

أي أنه يجب أن تتحقق الشروط التالية :

- يجب أن تحافظ مراكز الكتلة على نفس الموضع G_2 .
- مجموع الكتل يبقى متساوياً في الحالتين.
- عزم القصور متساو في الحالتين.