# الكميات القياسية والكميات المتجهة

## *Scalars & Vectors*

بعد أن يكمل القارئ هذا الفصل، ويستوعب المفاهيم والأفكار والمبادئ التي وردت خلاله، من المتوقع أن يكون قادراً على:

- أن يميِّز بين الكميات القياسية، والكميات المتجهة.
- أن يعدد بعض الأمثلة على كلا النوعين من الكميات القياسية والمتجهة من خلال دراسته المنهجية.
- أن يختار الطريقة الرياضية الصحيحة للتعامل مع كلٍ من الكميات القياسية والمتجهة.
- أن يتعلم كيفية تحليل الكميات المتجهة في المستوى الديكارتي وفي الفراغ ويحدد مقدار واتجاه المحصلة.
- أن يميِّز متجه الوحدة، أهميته واستعمالاته التطبيقية، ولاسيما في عمليتي الضرب القياسي والضرب الاتجاهي.

# الكميات القياسية والكميات المتجهة

# *Scalars & Vectors*

## 2-1 المقدمة *Introduction*:

تصنف الكميات المقاسة في الفيزياء بصورة عامة إلى صنفين رئيسيين هما الكميات القياسية *scalars* والكميات المتجهة *vectors*، وتعتبر المعرفة الصحيحة بكل منها أمراً أساسياً في علم الفيزياء، وأهميتهما تتجسد في التعرف على طبيعة كل منهما وسلوكها وتغيرها بالنسبة لبعضها البعض، وعلى وجه الخصوص تغيّرها بالنسبة للزمن، كما أن تحديد بداية الكمية المتجهة ونهايتها ومعرفة موقعها في المستوى الديكارتي *(x–y plane)* ومقادير مركباتها على المحور السيني *(x)* والمحور الصادي *(y)* وحساب ذلك بدلالة زاوية المتجه، بدءاً من نقطة الأصل عند المحور السيني الموجب *(x)* وباتجاه معاكس لحركة عقارب الساعة *counter clockwise*، كل ذلك يجعلنا نتعامل مع الكمية المتجهة بيسر وسهولة، وحرصاً على تبسيط الأمر سنتناول كلاً من هذين الصنفين من الكميات على انفراد.

## 2-2 الكميات القياسية *Scalars*:

تعريف الكمية القياسية *scalar*: هي تلك الكمية التي يمكننا أن نعيِّنها تعييناً كاملاً بمعرفة مقدارها *magnitude*. ويُمثَّل ذلك عادة بعدد متبوع بوحدة قياس مناسبة *unit*، فمثلاً عندما نقول: إن مقدار كتلة جسم ما تساوي *(5)* دون أن نذكر وحدة قياس الكتلة المستخدمة، فإن ذلك يجعلنا نتساءل هل وحدة القياس هي الكيلوغرام أم الباوند أم الغرام أم ماذا؟ ولكنَّنا عندما نقول: إنَّ الكتلة تساوي *(5 kg)*، نكون قد أوضحنا المسألة إيضاحاً تاماً، وفي واقعنا هناك أمثلة كثيرة جداً على الكميات القياسية، مثل الزمن والمساحة والحجم والكثافة والطاقة والشحنة ودرجة الحرارة، وما إلى هنالك من الكميات التي تُحدَّد بمجرد قياسها تحديداً تاماً. بعد أن عرفنا ذلك، يمكننا أن نتعامل مع الكميات القياسية باستخدام القواعد الرياضية البسيطة في الجبر كالجمع والطرح والقسمة والضرب.

## 2-3 الكميات المتجهة *Vectors*:

تعريف الكمية المتجهة *vector*: هي الكمية الفيزيائية التي يمكننا تعيينها تعييناً كاملاً بمعرفة كلٍ من:

1– مقدارها العددي *magnitude*.

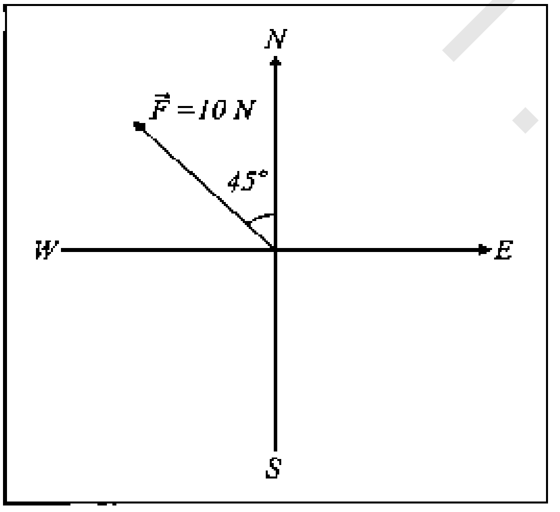
2– اتجاهها *direction*، سواء في المستوى *(xy)* أو في الفراغ *(xyz)*.

3– نقطة تأثيرها *action point*.

4– محور عملها *action axis*.

ومن الأمثلة المألوفة على الكميات المتجهة، القوة *force*، الإزاحة *displacement*، شدة المجال المغناطيسي *magnetic field*، السرعة *velocity*، التسارع *acceleration*، كمية الحركة *momentum*. ومن الممكن تمثيل الكمية المتجهة بسهم *arrow* مرسوم على محور عمله، ونستخدم عادة المحاور الديكارتية لتحديد كلٍ من المقدار والاتجاه وفق مقياس رسم محدد ومعلوم؛ حيث يكون طول السهم متناسباً مع مقدار الكمية المتجهة واتجاه السهم يعبِّر عن اتجاه تلك الكمية، فعلى سبيل المثال، إذا أثرت قوة مقدارها *(10 N)* على جسم باتجاه الشمال الغربي *(N–W direction)*، فإن هذه القوة يمكن تمثيلها بسهم طوله عشر وحدات طول كل منها تساوي *(1 N)* ويكون السهم مرسوماً بالاتجاه الذي يطابق اتجاه تأثير القوة على الجسم، انظر الشكل *(1-2)*.

ومن الجدير بالذكر أنّ الكمية المتجهة يجري تمثيلها برمز، وهو عبارة عن حرف لاتيني أو إنكليزي فوقه سهم مثل $(\vec{A})$، أما مقدارها فيكتفى بكتابة الحرف *(A)* دون تحديد الاتجاه، وعلى سبيل المثال في الشكل *(1-2)* المتجه $(\vec{F})$ يمثل القوة ككمية متجهة، أما مقدارها فهو *(F = 10 N)* والسؤال الآن هو: هل يمكننا استخدام القوانين الجبرية البسيطة كالجمع والطرح والضرب مع الكميات المتجهة؟ إن الإجابة الأولية هي: لا يمكن إطلاقاً؛ ذلك أن للكميات المتجهة قوانينها المناسبة الخاصة بها، وسنتناول هذه القوانين بشكل موجز في الفقرات التالية.

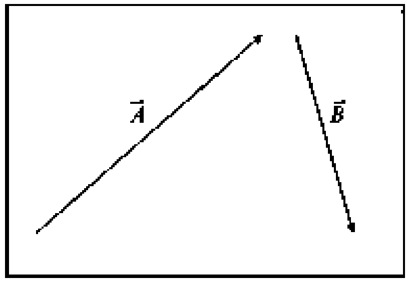



الشكل *(1-2)* يمثل القوة $(\vec{F})$ مقدارها *(10 N)* واتجاهها الشمالي الغربي*

* من المتعارف عليه، إذا لم يتم تحديد الزاوية فإن المقصود بالشمال الغربي هو منتصف الربع الثاني، أي أن الزاوية تساوي *(45°)* مع الشمال، وتساوي *(135°)* بدءاً من المحور السيني الموجب.

## 2-2 جمع المتجهات بطريقة الرسم البياني Adding of vectors, graphical method:

إن طريقة الرسم البياني لجمع المتجهات تعتمد على الدقة العالية في استخدام وسائل الرسم البياني المتعرف عليها، ولتوضيح ذلك، افرض أن لديك المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ الموضحان في الشكل (2-2 أ).



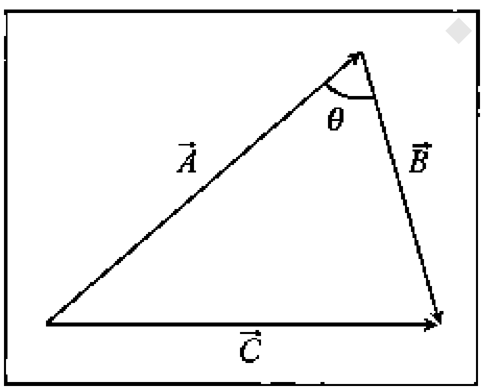

الشكل (2-2 أ) ويمثل المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$

لإيجاد محصلة هذين المتجهين بطريقة الرسم البياني، نبدأ أولاً برسم المتجه الأول* $(\vec{A})$ رسماً صحيحاً صحيحاً بجميع مواصفاته الهندسية (مقدار الطول، والزاوية التي يصنعها مع المحور السيني)، ثم نبدأ بعد ذلك برسم المتجه $(\vec{B})$ حيث تكون بدايته عند نهاية المتجه الأول $(\vec{A})$، ثم نصل بين بداية المتجه $(\vec{A})$ ونهاية ا لمتجه $(\vec{B})$ مراعين دقة الرسم الهندسي، إنّ المتجه الجديد $(\vec{C})$ والذي بدايته عند بداية المتجه $(\vec{A})$ ونهايته عند نهاية المتجه $(\vec{B})$ هو حاصل جمع المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ بطريقة الرسم البياني، أي أن:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad (2\text{-}1)$$

انظر الشكل (2–2 ب). أما القيمة القياسية للمتجه $(\vec{C})$ فتحسب باستخدام ما يسمى بقانون جيب التمام *cosine law*، وهذا يتطلب معرفة مقدار كل من المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ وكذلك الزاوية المحصورة بين المتجه الأول $(\vec{A})$ والمتجه الثاني $(\vec{B})$، أما الصيغة الرياضية لقانون "جيب التمام" فهي:

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\theta)}$$




الشكل (2-2 ب) إيجاد محصلة متجهين باستخدام طريقة الرسم البياني

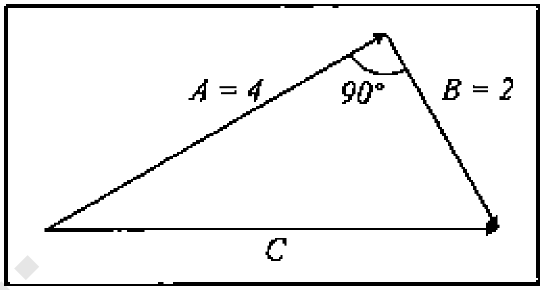
لبيان الطريقة التطبيقية لاستخدام هذا القانون سنعرض المثالين الآتيين.

---

* نلاحظ أننا بدأنا بالمتجه $(A)$ لأن المتجه المطلوب هو $(\vec{C} = \vec{A} + \vec{B})$، علماً بأنّ $(\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A})$.

**مثال (2-1) Example:**

باستخدام قانون جيب التمام أوجد محصلة المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ المبينتين بالشكل (2-3)، علماً أنّ الزاوية بينهما $(\theta=90°)$.




الشكل (2-3)

**الحل Solution:**

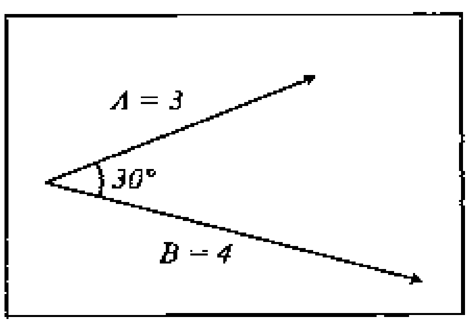
من الواضح أن الزاوية بين المتجهين تساوي $(\theta=90°)$، إذاً:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\theta)$$
$$= (4)^2 + (2)^2 + 2(4)(2)\cos(90) = 16 + 4 = 20$$
$$C^2 = 20$$
$$|C| = 4.47$$

ملاحظة: لقد تمّ تحديد متجه المحصلة $(\vec{C})$، حيث تكون بدايته هي بداية المتجه الأول ونهايته عند نهاية المتجه الثاني.

**مثال (2-2) Example:**

باستخدام قانون جيب التمام cosine law، أوجد محصلة المتجهين $(A = 3, B = 4)$ المبيّنين بالشكل (2-4)، حيث أنّ مقدار الزاوية بينهما $(\theta = 30°)$.




الشكل (2-4)

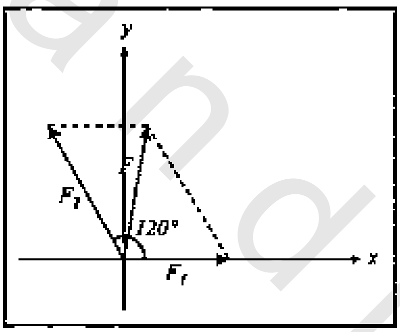
**الحل Solution:**

من المعلوم لدينا أن محصلة متجهين باستخدام قانون جيب التمام يعبر عنها رياضياً على النحو الآتي:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(0)$$
$$C^2 = (3)^2 + (4)^2 + 2(3\times 4)\cos(30)$$
$$C^2 = 9 + 16 + 24(0.8660) = 45.78$$
$$|C| = 6.76$$

**مثال (2-3, Example:**

قوتان، مقدار الأولى $(\vec{F}_1 = 6N)$، ومقدار الثانية $(\vec{F}_2 = 9N)$ تؤثران في نقطة مادية $(P)$، انظر الشكل $(2-5)$، باستخدام قانون جيب التمام أوجد حسابياً محصلة هاتين القوتين إذا كانت الزاوية بينهما $(\theta = 120^\circ)$.




الشكل (2-5)

**الحل Solution:**

هذا المثال مشابه في فكرته للمثال السابق (2-2)، وباستخدام المعادلة الرياضية لقانون جيب التمام نجد أن:

$$|F| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\ Cos(\theta)}$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (9)^2 + 2(6)(9)\ Cos(120)}$$
$$= 7.9\,N$$

وهذا مثالٌ مباشرٌ يوضح كيف يمكننا إيجاد محصلة قوتين، وذلك إذا عرفنا مقدار كل منهما ومقدار الزاوية المحصورة بينهما، وهذا القانون لا يستخدم إلا مع الكميات المتجهة، وسنناقش في الفقرات القادمة كيف يمكننا تحديد اتجاه هذه القوة المحصلة $(F)$ استكمالاً

لتعريفها؛ حيث اكتفينا بإيجاد مقدارها حسابياً، وبتعيين موقعها وذلك بعد إكمال الشكل إلى متوازي أضلاع، قطره يمثل القوة المحصلة $(F)$.

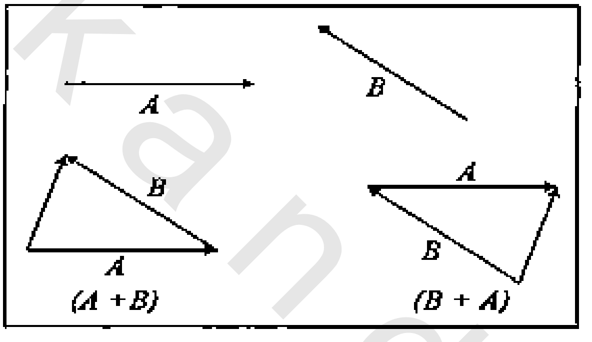
**2-4-1 خصائص جمع المتجهات *Vectors Addition Properties*:**

سنبين فيما يلي الخصائص الرياضية لعملية جمع المتجهات:

1– قانون الخاصية التبادلية *commutative law*: ومفاد هذه الخاصية أنّ عملية البدء بترتيب المتجهات التي نريد جمعها ليست مهمة، فلو كان لدينا المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ فإننا نستطيع اعتماداً على هذه الخاصية أن نُعبّر عن محصلتهما على النحو التالي:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A} \qquad (2\text{-}2)$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل (2-6).




الشكل (2-6) يوضح الخاصية التبادلية لجمع كميتين اتجاهيتين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$

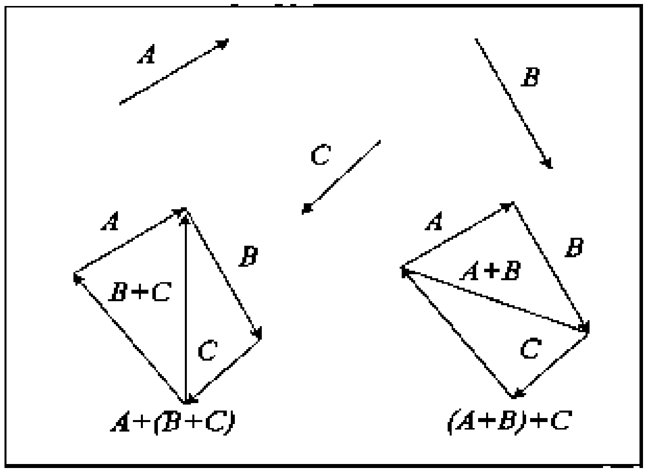
2– قانون الخاصية الترافقية *association law*: إن معنى هذه الخاصية يُمكن توضيحه في حالة الجمع الاتجاهي لثلاث كميات $\vec{A}$ و $\vec{B}$ $\vec{C}$، وذلك بالتعبير رياضياً عنها على النحو الآتي:

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) \qquad (2\text{-}3)$$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل (2-7).

ومن الجدير بالذكر هنا أن المتجه $(\vec{A})$ لا يساوي المتجه $(-\vec{A})$ أي أن:

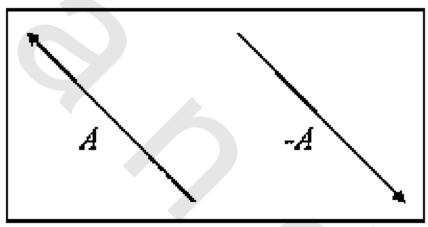
$$\vec{A}+(-\vec{A})=0 \qquad (2\text{-}4)$$




الشكل (2-7) يوضح الطريقة الترافقية للجمع الاتجاهي؛

حيث $(\bar{A})$ و $(\bar{B})$ و $(\bar{C})$ ثلاث كميات اتجاهية، ويلاحظ أن: $(\bar{A}+\bar{B})+\bar{C}=\bar{A}+(\bar{B}+\bar{C})$

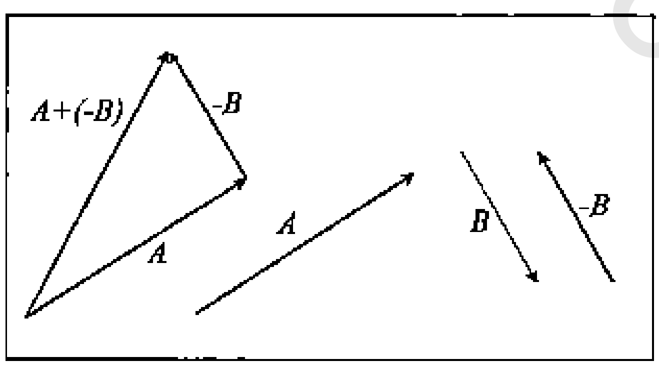
وهذا ما يفيد أن المتجه $(-\bar{A})$ له مقدار المتجه $(\bar{A})$ نفسه، ولكنه في اتجاه معاكس له تماماً، ولعل هذا ما يؤكد مجدداً المعنى الدقيق للكمية الاتجاهية ومضمونها الهندسي، انظر الشكل (2-8).




الشكل (2-8) يوضح أن المتجه $(\bar{A})$ لا يساوي $(-\bar{A})$

### 2-4-2 طرح المتجهات Vectors Subtraction :

وهي تستند أصلاً في معناها إلى ما سبق ذكره حول الجمع الاتجاهي مع مراعاة أن المتجه $(\bar{B})$ لا يساوي للمتجه $(-\bar{B})$ ولتوضيح ذلك انظر الشكل (2-9).




الشكل (2-9) يوضح عملية الطرح الاتجاهي

وهي عملية جمع لسالب المتجه $(\bar{B})$ مع المتجه $(\bar{A})$

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \qquad (2-5)$$

أي أن عملية الطرح الاتجاهي تمت بإضافة المتجه $(-\vec{B})$ إلى المتجه $(\vec{A})$.

أما عملية الضرب الاتجاهي فسوف نناقشها بعد أن نتعرف على متجهات الوحدة في الفقرات القادمة من هذه الوحدة.

## 2-5 المتجهات ومركباتها Vectors and their Components:

إن عملية تمثيل وتحديد الكمية المتجهة *vector* بطريقة الرسم التي قدمناها في الفقرة (2-4) من هذه الوحدة، تعتبر عملية مملة وشاقة لما تتطلبه من دقة في الرسم للكميات المتجهة، وكذلك إتمام العمليات الأخرى كالجمع والطرح. ولهذا تعد طريقة تمثيل وتحليل الكميات المتجهة باستخدام المحاور المتعامدة *(x, y)* أو ما يسمى بالمحاور الديكارتية *cartesian axes* ومعرفة اتجاه الكمية المتجهة ويعد ذلك سهولة تحويلها إلى مجرد مركبات سينية *x-components* وأخرى صادية *y-components*، من أفضل الطرق المعتمدة لهذا الغرض، مع ضرورة مراعاة ما يلي:

1- خصائص المحاور المتعامدة عند نقطة التقاطع ذات الإحداثيات *(0.0)* والاتجاهين لسالب والموجب للمحاور.

2- استخدام النظرية المعروفة والشهيرة في المثلثات المتعامدة -نظرية فيثاغورس- لإتمام العمليات الحسابية.

3- الاستفادة المباشرة من النسب المثلثية الثلاثة الجيب *(sin)* وجيب التمام *(cos)* والظل *(tan)* لمعرفة ما يتعلق بتحديد الكمية المتجهة، مقادير مركباتها وتحديد اتجاهها.

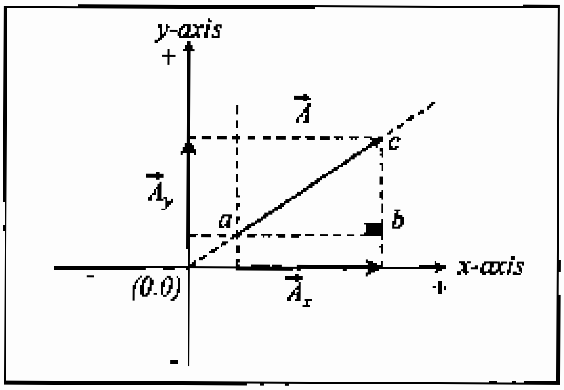
ولبيان ذلك انظر الشكل *(2-10)*، وتأمل موقع المتجه $(\vec{A})$، وكذلك المركبتين السينية $(A_x)$ والصادية $(A_y)$ والزاوية $(\theta)$ التي تحدد اتجاه الكمية المتجهة $(\vec{A})$.

والآن تأمل الشكل *(10-2)* ولاحظ الآتي:

1- $(A_x)$ و$(A_y)$ هما عبارة عن المركبتين العموديتين للمتجه $(\vec{A})$.

2- من الممكن عملياً نقل المتجه أو مركباته السينية والصادية* مادمنا نحافظ على مقداره واتجاهه، كما يمكننا التعامل مع الحالة الجديدة كما كنا نتعامل مع الحالة قبل النقل. ثم لاحظ المثلث القائم *(a b c)*، ضلعاه القائمان هما عبارة عن المتجهين $(A_x)$ و$(A_y)$ والمتجه $(\vec{A})$ يمثل على الخط المار من نقطة الأصل *(0.0)*؛ حيث يعتبر هذا الخط محور عمله.

* المقصود بنقل المتجه، تحريكه على خط تأثيره، وخط تأثير المتجه هو خط وهمي منطبق على المتجه نفسه.




الشكل (2-10) يمثل الكمية المتجهة ($\vec{A}$) على المحاور المتعامدة (x, y) ويوضح اتجاهها ومركباتها

3- بعد ذلك يمكننا استخدام خصائص المثلث القائم لكي نعبّر عن كلٍ من المركبتين ($A_x$) و($A_y$) من خلال النسب المثلثية للزاوية ($\theta$) التي تحدد اتجاه المتجه ($\vec{A}$).

$$\cos(\theta) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{A_x}{A}$$

$$\boxed{A_x = A\cos(\theta)} \qquad (2-6)$$

مرة أخرى:

$$\sin(\theta) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{A_y}{A}$$

$$\boxed{A_y = A\sin(\theta)} \qquad (2-7)$$

وبما أن المحورين (x, y) متعامدان، سنناقش الآن بعض الحالات الخاصة للزاوية ($\theta$).

1- عندما تكون الزاوية ($\theta = 90°$)، هذا يؤدي إلى:

$$A_x = A\cos(90) = 0$$

أي أن المركبة السينية للمتجه تساوي الصفر، بينما:

$$A_y = A\sin(90) = A$$

أي أن المركبة الصادية للمتجه تساوي المتجه نفسه، وهي أعلى قيمة للمركبة الصادية ($A_y$).

2- عندما تكون الزاوية ($\theta = 0°$)، وهذا يؤدي إلى:

$$A_x = A\cos(0) = A$$

أي أن المركبة السينية تساوي المتجه نفسه، وهي أعلى قيمة للمركبة السينية ($A_x$) بينما:

$$A_y = A\sin(0) = 0$$

أي أن المركبة الصادية تساوي الصفر.

ولكن على وجه العموم، قد تكون المركبتان السينية والصادية أو إحداهما موجبة أو سالبة، وذلك حسب اتجاه الكمية المتجهة الأساسية الذي لابد أن نحدده بدءاً من الزاوية $(\theta = 0)$ عند المحور السيني الموجب، ثم نكمل الحركة بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة، وذلك بقدر زاوية المتجه.

3– بقسمة المعادلتين (2-7) و(2-8) على بعضهما نحصل على:

$$\frac{A_y}{A_x} = \frac{A\sin(\theta)}{A\cos(\theta)}$$

$$\boxed{\tan(\theta) = \frac{A_y}{A_x}} \qquad (2\text{-}8)$$

وللمعادلة (2-8) أهمية بالغة حيث تُستخدم لتحديد اتجاه المحصلة، كما

يمكننا أن نستبدل فيها كلاً من $(A_y)$ و $(A_x)$، بمجموع المركبات الصادية والسينية لعدد من الكميات المتجهة $(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \dots)$، وذلك كما يلي:

نستبدل $(A_y)$ بالمجموع $\left(\sum A_y\right)$ حيث:

$$\sum A_y = A_{y1} + A_{y2} + A_{y3} + \dots$$

وكذلك نستبدل $(A_x)$ بالمجموع $\left(\sum A_x\right)$ حيث:

$$\sum A_x = A_{x1} + A_{x2} + A_{x3} + \dots$$

وذلك عندما نقوم بتحليل عدد من الكميات المتجهة $(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots)$.

وأخيراً، فإن اتجاه المحصلة يمكن تحديده بمعرفة مقدار الزاوية $(\theta)$، وذلك باستخدام المعادلة (2-8) على النحو الآتي:

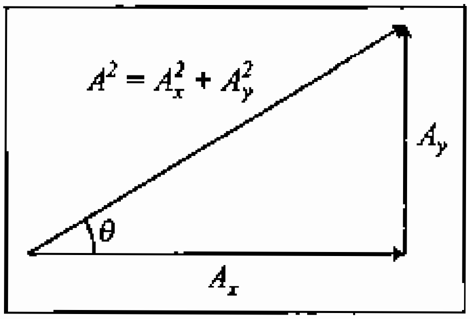
$$\tan(\theta) = \frac{\sum A_y}{\sum A_x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sum A_y}{\sum A_x}\right) \qquad (2\text{-}9)$$

ومن خلال تحديد القيمة القياسية للطرف الأيمن للمعادلتين (2-8) و(2-9) بحسب الحالة المطلوبة يمكننا تحديد الاتجاه، سواءً كان ذلك لمتجهٍ واحدٍ أو لمحصلة مجموعة من المتجهات، فعلى سبيل المثال عندما يكون الطرف الأيمن للمعادلة (2-9) $(\Sigma A_y / \Sigma A_x)$ مساوياً إلى الواحد، فإننا بعد التعويض نحصل على ما يلي:

$$\tan(\theta) = 1$$
$$\theta = \tan^{-1}(1)$$
$$= 45$$

وبالرجوع مرة أخرى إلى الشكل *(2-11)* نجد أن أضلاع المثلث القائم *(a b c)* تمثل الآتي:




**الشكل *(2-11)* وفيه تظهر المركبتان $(A_x)$ و $(A_y)$ ضلعين قائمين للمثلث *(a b c)***

$(A_x)$، و $(A_y)$ المركبتان السينية والصادية وهما عبارة عن الضلعين القائمين في المثلث *(a b c)*، بينما المتجه $(\vec{A})$ هو عبارة عن وتر المثلث، وباستخدام نظرية فيثاغورس نجد أنّ:

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2$$

$$\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \qquad (2\text{-}10)$$

وبشكل عام، ومثلما استخدمنا العلاقة (2–8) وتوصلنا إلى العلاقة (2–9)، فإننا نستخدم العلاقة (2–10) لنتوصل إلى العلاقة *(2-11)*.

$$A = \sqrt{\left(\sum A_x\right)^2 + \left(\sum A_y\right)^2} \qquad (2\text{-}11)$$

كما يمكننا الاستفادة من هذه المعادلة لمعرفة مقدار المتجه $(\vec{A})$ في حال معرفة كل من المركبتين $(A_x)$ و $(A_y)$ لمتجه واحد، أو المركبات $(\Sigma A_y)$ و $(\Sigma A_x)$ لمجموعة من المتجهات.

**مثال *(4-2)* :Example**

غادرت أرض المطار طائرة صغيرة، وبعد فترة من الزمن أعطت إشارة إلى برج المراقبة أنها على بعد *(215km)* وباتجاه يصنع زاوية *(22°)* من الشرق إلى الشمال، فكم تبعد الطائرة عن برج مراقبة المطار في الاتجاهين شرقاً وشمالاً؟ انظر الشكل *(2-12)*.

**الحل :Solution**

المتجه $(\vec{A})$ يمثل بعد الطائرة عن نقطة الأصل *(0.0)*، كما أن اتجاه الطائرة يصنع زاوية مقدارها *(90°-22°)* مع المحور السيني الموجب، أي أن:

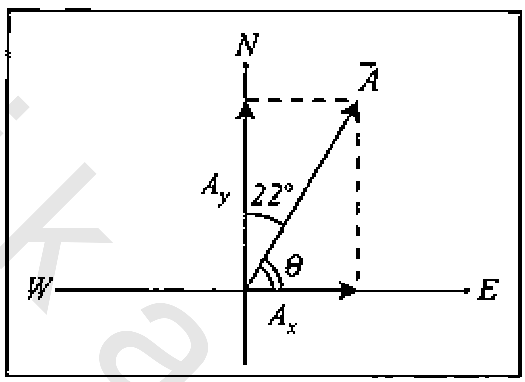
$$A = 215\ km$$

بعد الطائرة شرقاً هو عبارة عن مسقط المتجه $(\vec{A})$ على المحور السيني.

$$A_x = A\cos(\theta)$$
$$= 215\cos(68) = 80.5\,km$$

بعد الطائرة غرباً هو عبارة عن مسقط المتجه $(\vec{A})$ على المحور الصادي.

$$A_y = A\sin(\theta)$$
$$= 215\sin(68) = 199.34\,km$$




الشكل (12-2): المثال (4-2)

وسوف نتأكد من صحة الحل بطريقة معاكسة، مستفيدين من العلاقات (9-2) و(10-2):

$$|A| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$
$$= \sqrt{(80.5)^2 + (199.34)^2}$$
$$= 215\,km$$

$$\tan(\theta) = \frac{A_y}{A_x}$$
$$= \frac{199.34}{80.5} = 2.476$$
$$\theta = \tan^{-1}(2.476) = 68°$$

### 6-2 متجهات الوحدة Unit Vectors:

إنَّ تمثيل الكمية المتجهة، سواء في المستوي أو في الفراغ، يمكن أن يتمَّ باستخدام نظام المحاور الثلاثية المتعامدة $(x, y, z)$ مع متجهات الوحدة الخاصة بها، أي أننا نمثل المتجه بُعدياً. والمقصود بالتمثيل تعيين المتجه مقداراً واتجاهاً، وهذا ما يدعو إلى اعتماد متجهات الوحدة على المحاور الثلاثية المتعامدة للتعبير عن الكمية المتجهة. إنَّ مقدار كل واحدٍ منها يساوي الواحد تماماً، وهذا هو سبب تسميتها بمتجهات الوحدة *unit vectors* بينما تكون الزاوية قائمة بين كلٍ منها. وبهدف تمييزها من

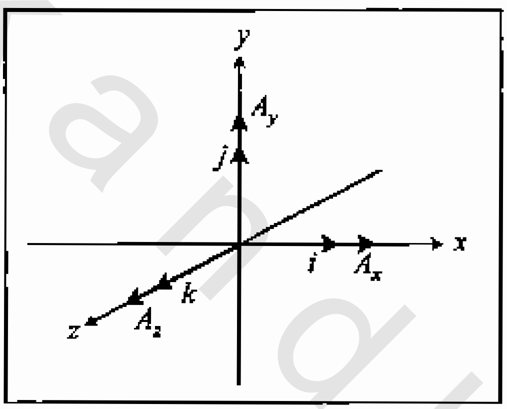
محور لآخر فقد تمّ الاتفاق على اعتماد الأحرف الإنكليزية الثلاثة المتعاقبة $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ على المحاور المتعامدة $(x, y, z)$ على التتالي للتعبير عن هذه المتجهات.

إن اعتماد متجهات الوحدة $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$، مفيدٌ للغاية ولاسيّما للتعبير عن مركبات الكميات المتجهة المتعددة. مثلما هو مفيد للتعبير عن الكمية المتجهة الواحدة، حيث $(\hat{i})$ و $(\hat{j})$ هما متجها الوحدة على المحورين $(x, y)$، بينما $(A_x)$ و $(A_y)$ هما المركبتان العدديتان للمتجه $(A)$.

إن نظام المحاور الثلاثية المتعامدة باستخدام متجهات الوحدة، يمكن تمثيله على النحو المبيّن في الشكل (2-13).

وباستخدام هذه الطريقة يمكن التعبير عن أي كمية متجهة سواء على المحاور الديكارتية أو على المحاور الثلاثية المتعامدة على الشكل الآتي:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + \hat{A}_z\hat{k} \qquad (2-12)$$




الشكل (2-13) يبين المحاور المتعامدة باستخدام متجهات الوحدة $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ ويلاحظ أن متجهات الوحدة متعامدة مع بعضها البعض أيضاً

فعلى سبيل المثال لو أردنا أن نعبِّر عن الشكل (2-10) السابق الذكر باستخدام متجهات الوحدة فإن المركبتين المتجهتين $(\vec{A}_x)$ و $(\vec{A}_y)$ يمكن إعادة كتابتهما على النحو الآتي:

$$A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \qquad (2-13)$$

أما على المحاور الثلاثية المتعامدة، فتأمل المثال التالي (2-5).

**مثال (2-5) Example:**

تأمل المتجه $(\vec{A})$ بمركباته الثلاثة في العلاقة الرياضية الآتية:

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

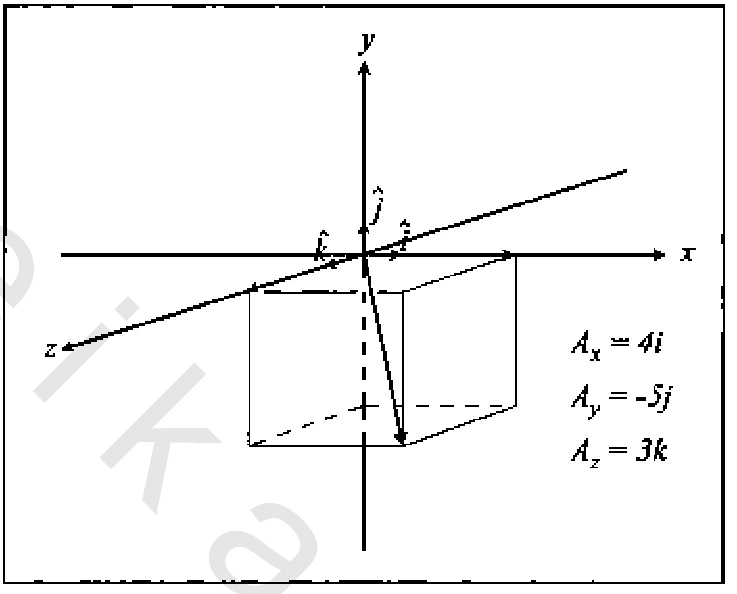
نلاحظ أن المركبات الاتجاهية الثلاثة هي:

$$+4\hat{i}, -5\hat{j}, 3\hat{k}$$

كما نلاحظ أن مركباتها القياسية:

$$+4, -5, +3$$

ومن الممكن عملياً تمثيل ذلك على المحاور المتعامدة $(x, y, z)$، انظر الشكل (2-14):




الشكل (2-14) يبين كيف يمكن تمثيل المتجه $(\vec{A})$ في الفراغ باستخدام المحاور الثلاثية المتعامدة مع متجهات الوحدة

## 2–7 جمع الكميات المتجهة بطريقة جمع مركباتها Adding Vectors by Adding their Components:

يمكننا أن نستعرض هذه المسألة المهمة، وذلك باستخدام ثلاث متجهات $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ و$(\vec{C})$ معبِّرين عنها بالعلاقات الرياضية الآتية:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \quad (2\text{-}14)$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \quad (2\text{-}15)$$

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k} \quad (2\text{-}16)$$

إنّ المعادلات الرياضية التي نستخدمها لإيجاد محصلة المتجهات الثلاثة هي:

$$R_x = A_x + B_x + C_x \quad (2\text{-}17)$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y \quad (2\text{-}18)$$

$$R_z = A_z + B_z + C_z \quad (2\text{-}19)$$

$$\boxed{\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}} \qquad (2\text{-}20)$$

ومعنى ذلك أنَّ محصلة المركبات $(x,y,z)$ كلٌ على انفراد، وهي: $(R_x, R_y, R_z)$، تمثل مُركبات متجه المحصلة $(\vec{R})$ القياسية بدلالة متجهات الوحدة $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$.

**مثال Example (2-6):**

أوجد متجه المحصلة $(\vec{R})$ الذي يمثل حاصل جمع المتجهات الثلاثة الآتية:

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$
$$\vec{C} = \hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

**الحل Solution:**

$$R_x = 4 + 3 + 1 = 8$$
$$R_y = 6 + 3 - 4 = 5$$
$$R_z = 2 - 2 + 2 = 2$$

وهكذا نجد أنَّ:

$$\vec{R} = 8\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

## 2-8 ضرب الكميات المتجهة Vectors Product:

بدايةً، لا بد من التأكيد على أن هناك نوعين اثنين من أنواع ضرب الكميات المتجهة وهما: الضرب القياسي، والضرب الاتجاهي. وسنفرد فقرةً خاصةً لكلٍ منهما.

### 2-8-1 الضرب القياسي Vectors Salar Product:

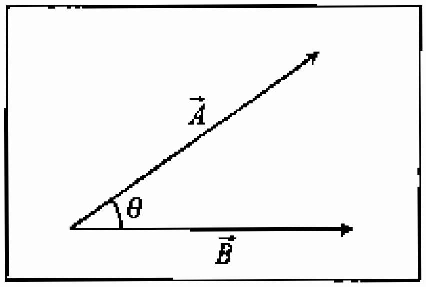
لقد سُميت العملية بهذا الاسم لأن ناتج الضرب عبارة عن كمية عددية scalar، ومعنى ذلك أن حاصل ضرب كميتين اتجاهيتين ضرباً قياسياً ينتج عنهما كميةً عدديةً، ويُعبَّر عن الضرب القياسي بالمعادلة الآتية:

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos(\theta)} \qquad (2\text{-}21)$$

حيث إن $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ يمثلان الكميتين الاتجاهيتين، و$(\theta)$ هي الزاوية المحصورة بينهما*، وتُقرأ $(\vec{A}\,dot\,\vec{B})$، انظر الشكل (2-15).

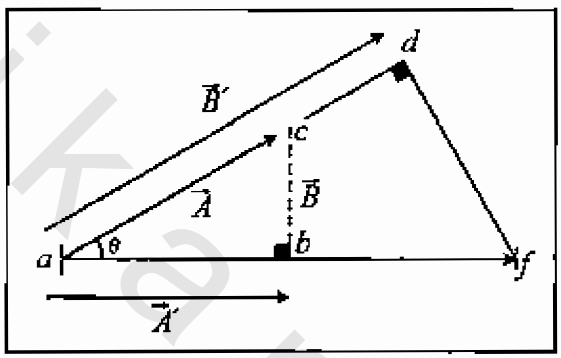
---

* يطلق على الزاوية $(\theta)$ في بعض المصادر "الزاوية الصغرى" لتمييزها عن الزاوية الأخرى بين المتجهين وهي $(\theta\text{-}360°)$.




الشكل (2-15) الضرب القياسي للمتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$

ويمكننا هنا أن نستخدم خاصية التبادل commutative law بين المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$؛ ولبيان ذلك انظر الشكل (2-16).




الشكل (2-16) خاصية التبادل في الضرب القياسي

انظر المثلث القائم (a b c) تجد أن:

$$cos(\theta) = \frac{A'}{A}$$
$$A' = A\cos(\theta)$$

وهذا المتجه $(A')$ هو عبارة عن المسقط العمودي للمتجه $(\vec{A})$ على امتداد المتجه $(\vec{B})$. وهو كمية عددية يمكن معرفتها بمعرفة القيمة القياسية للمتجه $(\vec{A})$ وكذلك $cos(\theta)$، وبالذهاب إلى المعادلة (2-23) نجد أن:

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos(\theta)$$
$$= [A\cos(\theta)]B = A'B$$

من ناحية أخرى وبهدف التأكد أن $(\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A})$ يمكننا إيجاد مسقط المتجه $(\vec{B})$ على المتجه $(\vec{A})$، انظر الشكل (2-16) وتأمل المتجه $(\vec{B})$ ولاحظ أن $cos(\theta)$ في المثلث القائم (a d f) يساوي:

$$cos(\theta) = \frac{B'}{B}$$
$$B' = B\cos(\theta)$$

إنّ المتجه $B\cos(\theta)$ هو $(B')$، وهو عبارة عن المسقط العمودي للمتجه $(\vec{B})$ على امتداد المتجه $(\vec{A})$ ويمكن تعيينه بمعرفة القيمة القياسية للمتجه $(\vec{B})$ وكذلك $\cos(\theta)$.

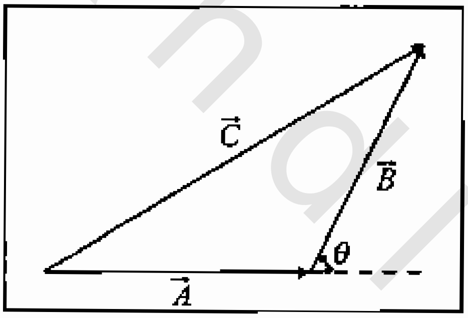
بالذهاب إلى المعادلة $(2-23)$ مرة أخرى نجد أن:

$$\begin{aligned}\vec{A}.\vec{B} &= A\,B\cos(\theta)\\ &= A\left[B\cos(\theta)\right]\\ &= A\,B'\end{aligned}$$

وهذه النتيجة تبين لنا من خلال النظر إلى الطرف الأيمن للمعادلة حيث يشتمل على المقادير القياسية للمتجهين وجيب تمام الزاوية، وهذه كلها كميات عددية، كما تؤكد مجدداً أن حاصل ضرب كميتين اتجاهيتين ضرباً قياسياً هو كمية عددية، مثلما تؤكد أيضاً أن الضرب القياسي هو عملية تبادلية:

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

ومن أهم التطبيقات المباشرة على قانون الضرب القياسي هو إثبات صحة قانون "جيب التمام" الذي مر ذكره في الفقرة $2-4$، وبهدف توضيح قانون "جيب التمام" تأمل الشكل $(2-17)$.



الشكل $(2-17)$

إن محصلة المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ هي المتجه الثالث $(\vec{C})$، حيث أن الزاوية بينهما $(\theta)$، وكما يُلاحظ هي الزاوية الخارجية. والآن إذا أردنا معرفة حاصل الضرب الاتجاهي للمتجه $(\vec{C})$ بنفسه، أي أنّ:

$$\begin{aligned}\vec{C}.\vec{C} &= |C|\,|C|\cos(0)\\ &= C^2\end{aligned}$$

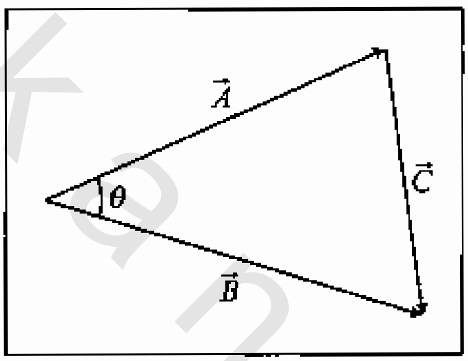
ذلك أن الزاوية بين المتجه ونفسه تساوي الصفر، أي أنّ $\cos(0) = 1$

ولكن نحن نعلم أن:

$$\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})$$
$$\vec{C}.\vec{C} = C^2 = (\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})$$
$$= \vec{A}.\vec{A} + AB\cos(\theta) + BA\cos(\theta)$$
$$+ \vec{B}.\vec{B}$$
$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\theta)$$

وهذه هي الصيغة المستخدمة لإيجاد محصلة (جمع) متجهين باستخدام قانون "جيب التمام". ومن الممكن استخدامها لإيجاد محصلة (طرح) متجهين، انظر الشكل *(2-18)*، حيث ستكون النتيجة:

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$$
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2A\cos(\theta)$$




الشكل *(2-18)*

ملاحظة: في حالة الجمع، إذا كانت الزاوية أكثر من *(90°)* بين المتجهين فإننا نأخذ الزاوية الخارجية بينهما، وقياس الزاوية يبدأ من المحور السيني الموجب، كما يمكننا التأكد مرة أخرى، وذلك لأن جيب تمام الزاوية الداخلية يكون مقداراً سالباً.

مثلما يعتبر أيضاً من التطبيقات المباشرة على الضرب القياسي حاصل الضرب لاتجاهي لمتجهات الوحدة، ولا بد في هذا المقام من التأكيد على ما يلي:

1- $\hat{i}.\hat{i} = |1|\ 1|\cos(0) = |1||1|\cos(0) = 1$

2- $\hat{i}.\hat{j} = |1||1|\cos(90) = 0$

3- $\hat{i}.\hat{k} = |1||1|\cos(90) = 0$

ومعنى ذلك أن القيمة القياسية لمتجهات الوحدة هي:

$$|i| = |j| = |k| = 1$$

كما أن الزاوية بين أي متجهين منها هي زاوية قائمة، والزاوية بين المتجه ونفسه تساوي الصفر.

4- كما نؤكد على ضرورة ملاحظة الحالة العامة للتعبير عن الضرب الاتجاهي التي استخدمناها في حل المثال وهي:

$$\boxed{\bar{A}.\bar{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})}$$

حيث إن:

$$\bar{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\bar{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

وهذا ما استخدمناه لحساب الطرف الأيمن في المثال (2-7)، مع مراعاة الخاصة التوزيعية في الضرب *distribution lew*.

**مثال (2-7) Example:**

أوجد مقدار الزاوية $(\theta)$ بين المتجهين $(\bar{A})$ و $(\bar{B})$ المعرفين على النحو الآتي:

$$\bar{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$
$$\bar{B} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$$

**الحل Solution:**

$$\bar{A}.\bar{B} = |A||B|\cos(\theta)$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$$
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = 3.6$$

من ناحية أخرى:

$$\begin{aligned}\bar{A}.\bar{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j})(B_x\hat{i} + B_z k) \\ &= (3\hat{i} - 4\hat{j})(-2\hat{i} + 3\hat{k}) \\ &= (3\hat{i}).(-2\hat{i}) + (3\hat{i}).(3\hat{k}) + (-4\hat{j}).(-2\hat{i}) + (-4\hat{j}).(3\hat{k}) \\ &= (-6)(1) + (9)(0) + 8(0) - (12)(0) = -6\end{aligned}$$

وهكذا بالتعويض نجد أنّ:

$$\cos(\theta) = \frac{-6}{18} = -0.333$$
$$\theta = \cos^{-1}(-0.333) = 110^{\circ}$$

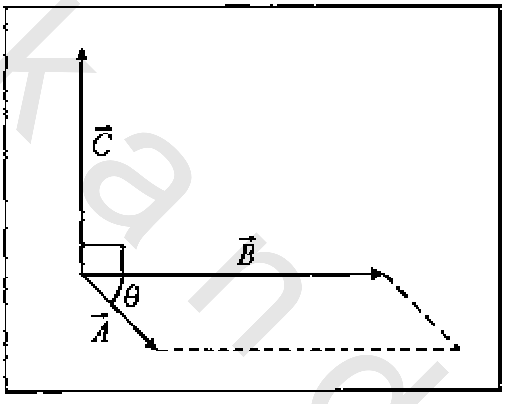
أي أنّ الزاوية بين المتجهين $(\bar{A})$ و $(\bar{B})$ هي $(\theta = 110^{\circ})$.

**2-8-2 الضرب الاتجاهي *Vectors Product*:**

لقد سُميت العملية بهذا الاسم لأن ناتج الضرب عبارة عن كمية اتجاهية *vector*، ومعنى ذلك، أن حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين هو متجه ثالث، اتجاهه يكون عمودياً على المستوى الذي يحتوي المتجهين اللذين يراد إيجاد حاصل ضربهما اتجاهيا، أما مقدار المتجه الجديد فيعبَّر عنه بالعلاقة الرياضية الآتية:

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}=|A||B|\sin(\theta)} \qquad (2\text{-}22)$$

حيث *(C)* تمثل مقدار الكمية المتجهة الجديدة، و $(\theta)$ تمثل الزاوية الصغرى المحصورة بين المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$، انظر الشكل *(2-19)*، وتقرأ $(\vec{A}cross\vec{B})$.




الشكل *(2-19)* يوضح ناتج الضرب الاتجاهي لكميتين اتجاهيتين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$

أما اتجاه المتجه $(\vec{C})$ فيمكن معرفته باستخدام قاعدة اليد اليمنى، انظر الشكل *(2-19)*، مع ضرورة أن يبقى منفرداً لتحديد اتجاه حاصل الضرب الاتجاهي، وعملية الترتيب هنا هامة للغاية، بمعنى أن المتجه الأول $(A)$ تمثله أصابع اليد اليمنى والثاني $(B)$ تمثله راحة اليد اليمنى، ويمثل الإبهام اتجاه المتجه الجديد $(C)$، وهذا ما يؤكد ضرورة الانتباه إلى الآتي:

$$\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{A}\times\vec{B}$$ غير تبادلية *(2-23)*

كما أن التعبير الرياضي عن عملية الضرب الاتجاهي باستخدام متجه الوحدة يكون على الشكل الآتي:

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})} \qquad (2\text{-}24)$$

ويمكننا إيجاد $(\vec{A}\times\vec{B})$ باعتماد خاصية التوزيع *distribution law*، ومن الضروري جداً أن نؤكد هنا على أن الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة في النظام الثلاثي المتعامد $(x,y,z)$ هو أرضح

وأقرب مثال على التطبيق المباشر لهذا النوع من الضرب، فعلى سبيل المثال: لو أردنا أن نجد حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $(\hat{i})$ و $(\hat{j})$ فهذا يقتضي:

$$\hat{i} \times \hat{j} = |i||j|\sin(\theta)$$

ولكن:

$$|i| = |j| = 1$$

كما أن الزاوية بينهما تساوي $(\theta = 90°)$، إذاً المتجه الثالث $(\hat{k})$ هو المتجه العمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهين $(\hat{i})$ و $(\hat{j})$ وهكذا نجد أن:

$$\hat{i} \times \hat{j} = |1||1|\sin(90) = 1(\hat{k}) = \hat{k}$$

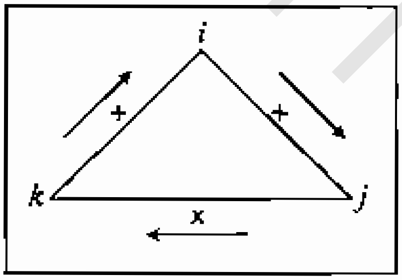
من الواضح أنَّ مقدار المتجه الجديد يساوي الواحد، أما اتجاهه فهو اتجاه $(\hat{k})$ أي منطبق على المحور $(z)$. ويمكننا أن نستنتج بيسرٍ وسهولة كلاً مما يلي:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \tag{2-25}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \tag{2-26}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \tag{2-27}$$

ومن للمكن تبسيط ذلك كلّه باستخدام المثلث البسيط المبيّن في الشكل (2-20).




الشكل (2-20) ويبين الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة $(i)$ و$(j)$ و$(k)$

**مثال Example (2-8):**

لديك المتجهان المعرفان على النحو التالي:

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$$

أوجد المتجه الجديد: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

**الحل** ***Solution***:

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A}\times\vec{B} = (3\hat{i}-4\hat{j})\times(-2\hat{i}+3\hat{k})\\ &= -(3\hat{i}\times 2\hat{i})+(3\hat{i}\times 3\hat{k})+(4\hat{j}\times 2\hat{i})-(4\hat{j}\times 3\hat{k})\\ &= 0+9(-\hat{j})+8(-\hat{k})-12(\hat{i})\\ \vec{C} &= -12\hat{i}-9\hat{j}-8\hat{k}\end{aligned}$$

الملاحظات الهامة في هذا المثال، والتي نلفت انتباه أبنائنا الطلبة إليها، هي الآتي:

$$\boxed{\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0} \tag{2-28}$$

ذلك أن:

$$\hat{i}\times\hat{i} = |1||1|\sin(0) = 0$$

وكذلك بالنسبة لكل من $(\hat{j}\times\hat{j})$ و $(\hat{k}\times\hat{k})$.

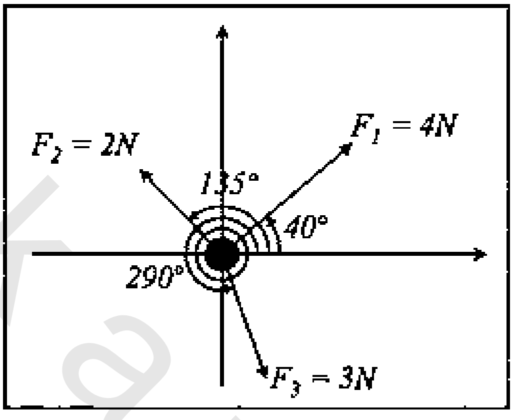
# مسائل عامة محلولة

# *Solved Problems*

2-1 أثرت ثلاث قوى $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ على جسم كتلته $(m)$، انظر الشكل (2-21).

1– أوجد حسابياً مقدار القوة المؤثرة على الجسم.

2– حدد اتجاه هذه القوة.




الشكل (2-21)

**الحل** :solution

مـن الواضـح أن هـذا المثـال تطبيـق مباشـر علـى الطريقـة التحليليـة باسـتخدام المحـاور الديكارتية، أي بتحويل القوى الثلاث إلى مركباتها.

$$1- \quad F_{1x} = F_1\cos(\theta_1) = 4\cos(40) = 3.06\,N \qquad F_{1y} = F_1\sin(\theta_1) = 4\sin(40) = 2.57\,N$$

$$F_{2x} = F_2\cos(\theta_2) = 2\cos(135) = -1.41\,N \qquad F_{2y} = F_2\sin(\theta_2) = 2\sin(135) = 1.41\,N$$

$$F_{3x} = F_3\cos(\theta_3) = 3\cos(290) = 1.026\,N \qquad F_{3y} = F_3\sin(\theta_3) = 3\sin(290^\circ) = -2.82$$

$$\sum F_x = 2.676\,N \qquad \sum F_y = 1.16\,N$$

$$F = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2}$$

$$= \sqrt{(2.676)^2 + (1.16)^2} = 2.91\,N$$

$$2- \quad \tan(\theta) = \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = \frac{1.16}{2.676} = 0.433$$

$$\theta = \tan{-}1(0.433) = 23.43^\circ$$

ملاحظة: استخدم طريقة الرسم في المستوى على المحاور الديكارتية $(x, y)$ لتمثيل كل من $(F, \Sigma F_y, \Sigma F_x)$.

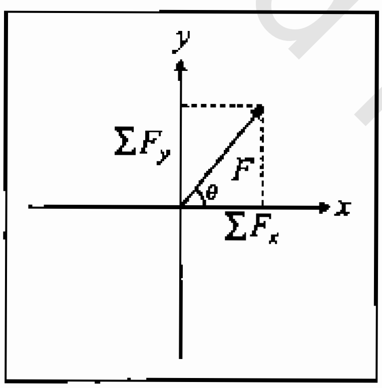
2-2 بعد أن أوجدت حسابياً المركبات السينية والصادية لمجموعة القوى المستوية في الشكل (15-2)، أوجد حسابياً:

1– محصلة مجموع القوى على المحور السيني $\sum F_x$.

2– محصلة مجموع القوى على المحور الصادي $\sum F_y$.

3– أوجد محصلة مجموع هذه القوى، ثم حدد اتجاهها مستعيناً بطريقة الرسم.

$$1-\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$
$$= 7.07 + 3.5 + 4.24 + 5.19 = 11.52\,N$$
$$2-\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$$
$$= 7.07 + 6.06 + 4.24 - 3 = 14.37$$
$$3- \quad F = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2} = \sqrt{(11.52)^2 + (14.37)^2}$$
$$= 18.4\,N$$
$$\tan\theta = \frac{\sum F_y}{\sum F_x} = \frac{14.37}{11.52} = 1.247$$
$$\theta = \tan^{-1}(1.247) = 51.28^\circ$$




المسألة (2-1)

2-3 إذا كان لديك $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ والمعرفين على النحو الآتي:

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$$
$$\vec{B} = -3\hat{i} + 3\hat{j}$$

اوجد حسابياً كلاً مما يلي:

1– المتجه $(3\vec{A})$، والمتجه $(2\vec{B})$.

2- المقدار العددي لكلٍ من المتجه $(\vec{A})$ والمتجه $(\vec{B})$.

3- المتجه $(\vec{A}+\vec{B})$ والمتجه $(\vec{A}-\vec{B})$.

4- مقدار الزاوية $(\theta)$ بين المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$.

5- ناتج الضرب القياسي للمتجهين $(\vec{A}.\vec{B})$.

6- ناتج الضرب الاتجاهي للمتجهين $(\vec{A}\times\vec{B})$.

**الحل:**

1- المتجه $(3\vec{A})$ يساوي:

$$3\vec{A}=6\hat{i}+9\hat{j}$$

أما المتجه $(2\vec{B})$ فيساوي:

$$2\vec{B}=-6\hat{i}+9\hat{j}$$

2- المقدار العددي للمتجه $(\vec{A})$ يساوي:

$$\begin{aligned}|A|&=\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2}\\&=\sqrt{(4)^2+(3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5\\|B|&=\sqrt{(B_x)^2+(B_y)^2}\\&=\sqrt{(-3)^2+(3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=4.24\end{aligned}$$

3- المتجه $(\vec{A}+\vec{B})$ يساوي:

$$\begin{aligned}(\vec{A}+\vec{B})&=(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{i}\\&=(2-3)\hat{i}+(3+3)\hat{j}=-\hat{i}+9\hat{j}\end{aligned}$$

أما المتجه $(\vec{A}-\vec{B})$ فيساوي:

$$\begin{aligned}(\vec{A}-\vec{B})&=(A_x-B_x)\hat{i}-(A_y-B_y)\hat{i}\\&=(2-(-3))\hat{i}-(3-3)\hat{j}=5\hat{i}-0\hat{j}=5\hat{i}\end{aligned}$$

4- لإيجاد مقدار الزاوية $(\theta)$ بين المتجهين نستطيع الاستفادة من قاعدة الضرب القياسي لهما وعلى النحو الآتي:

$$\begin{aligned}\vec{A}\,.\,\vec{B}&=|A||B|\cos(\theta)\\\vec{A}\,.\,\vec{B}&=(2i+3\hat{j})\,.\,(-3\hat{i}+3\hat{j})\\&=(2)(-3)\,\hat{i}.\hat{i}+(2)(3)\,\hat{i}.\hat{j}+(3)(-3)\hat{j}.\hat{i}+(3)(3)\hat{j}.\hat{j}\\&=-6+9=3\end{aligned}$$

لاحظ أنّ:

$$(\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = 0)$$

$$\therefore \cos(\theta) = \frac{A.B}{|A||B|} = \frac{3}{(5)(4.24)} = 0.1415$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.1415) = 81.865$$

5– ناتج الضرب القياسي للمتجهين $(\vec{A}\,.\,\vec{B})$ يساوي:

$$\begin{aligned}(\vec{A}.\vec{B}) &= |A||B|\cos(\theta)\\ &= (5)(4.24)\cos(81.865) =\\ &= 3\end{aligned}$$

لاحظ أنها ذات النتيجة التي حصلنا عليها في الطلب *(4)* من هذا السؤال.

6– ناتج الضرب الاتجاهي للمتجهين $(\vec{A}\times\vec{B})$ يساوي:

$$\begin{aligned}(\vec{A}\times\vec{B}) &= |A||B|\sin(\theta)\\ &= (2\hat{i}+3\hat{j})\times(-3\hat{i}+3\hat{j})\\ &= (2)(-3)\hat{i}\times\hat{i} + (2)(3)\hat{i}\times\hat{j} + (3)(-3)\hat{j}\times\hat{i} + (3)(3)\hat{j}\times\hat{j}\\ &= 6\hat{k}(-9)(-k) = 6\hat{k} + 9\hat{k} = 15\hat{k}\end{aligned}$$

لاحظ أنّ: $(\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = 0)$ ، بينما $(\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k})$ و $(\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k})$.

1–4 أوجد حسابياً المركبة السينية *x–component*، والمركبة الصادية *y–component* لكل واحدة من القوى الموضحة في الشكل *(2–22)*.

**الحل:**

نلاحظ أن هذا الاختبار يهدف إلى تدريب الطالب على ضبط الطريقة التحليلية للقوى في المستوى، من خلال أربع حالات اتجاهية، متمثلة في أربع زوايا مختلفة.

بالعودة إلى الشكل *(2–1a)* من الوحدة الثانية، نجد أن:

$$1-\quad F_{1x} = F_1\cos(\theta_1) = 10\cos(45) = 7.07\ N$$

$$F_{1y} = F_1\sin(\theta_1) = 10\sin(45) = 7.07\ N$$

$$2-\quad F_{2x} = F_2\cos(\theta_2) = 7\cos(60) = 3.5\ N$$

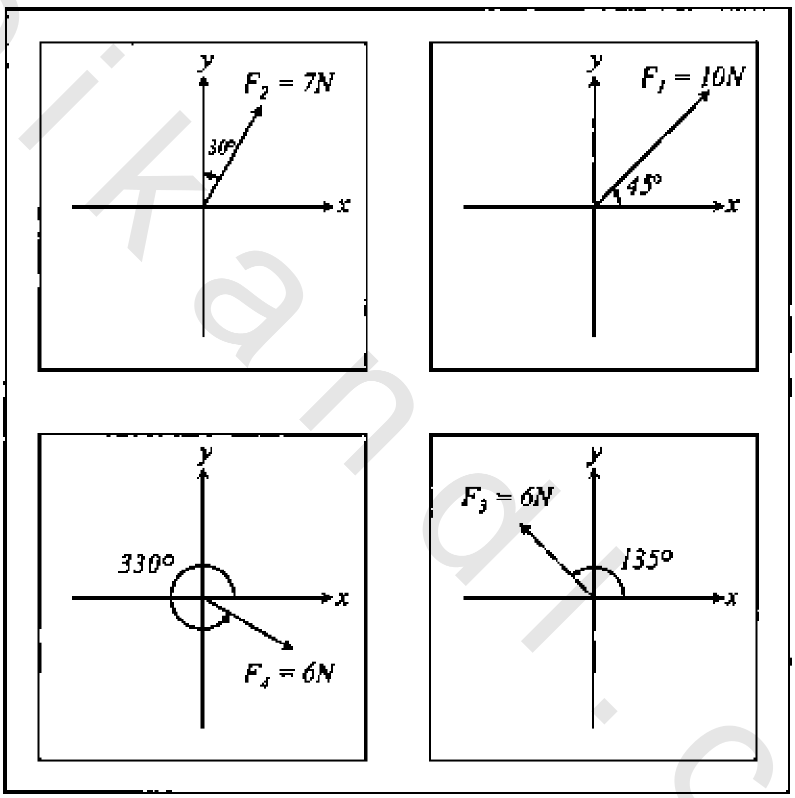
$$F_{2y} = F_2 \sin(\theta_2) \qquad = 7\sin(60)$$
$$= 6.06\,N$$

3 – $F_{3x} = F_3 \cos(\theta_3) \qquad = 6\cos(135)$

$$= -4.24\,N$$
$$F_{3y} = F_3 \sin(\theta_3) \qquad = 6\sin(135)$$
$$= 4.24\,N$$

4 – $F_{4x} = F_4 \cos(\theta_4) \qquad = 6\cos(330)$

$$= 5.19\,N$$
$$F_{4y} = F_4 \sin(\theta_4) \qquad = 6\sin(330)$$
$$= -3\,N$$




الشكل (2-22)

# مسائل وتمارين الفصل الثاني

## Chapter Two Exercises & Problems

2-1 إذا كان مقدار المتجه $(\bar{A})$ يساوي $(7)$ وحدات قياسية، ويصنع زاوية مقدارها $(250°)$ باتجاه عقارب الساعة بدءاً من الاتجاه الموجب للمحور السيني ارسم هذا المتجه مستخدماً المحورين $(x, y)$ ثم أوجد مركبتيه السينية والصادية للمتجه $(\bar{A})$.

2-2 إذا كانت المركبتان السينية والصادية للمتجه $(\bar{A})$ هما:

$$x = -25\ unit$$
$$y = 40\ unit$$

أوجد حسابياً:

أ) المقدار العددي للمتجه $(\bar{A})$.

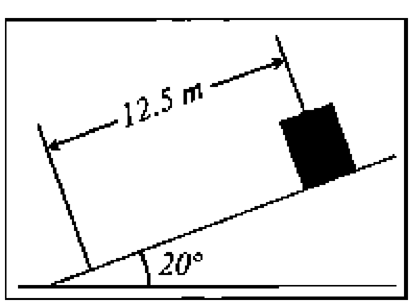
ب) مقدار الزاوية بين المتجه $(\bar{A})$ والمحور السيني الموجب.

ج)تأكد من صحة الحل بطريقتين مختلفتين.

2-3 يبلغ مقدار طول متجه الإزاحة لجسم متحرك $(\bar{R})$ $(15m)$ ويصنع زاوية قدرها $(30°)$ مع المحور السيني الموجب.

ارسم هذا المتجه مستخدماً المحورين $(x, y)$، ثم أوجد حسابياً مركبتيه السينية والصادية. ثم تأكد من صحة الحل.

2-4 قطعة معدنية ثقيلة على شكل آلة، دفعت على سطح مائل إلى الأعلى مسافة $(12.5m)$ حيث تبلغ زاوية الميل $(20°)$، انظر الشكل $(2\text{-}23)$.




الشكل $(2\text{-}23)$، المسألة $(2\text{-}4)$

أوجد حسابياً:

أ) المسافة التي ارتفعتها القطعة المعدنية إلى الأعلى بعد الدفع.

ب) المسافة التي تحركتها القطعة أفقياً بعد الدفع.

2-5 إذا كان لديك متجها الإزاحة $(\vec{C})$ و$(\vec{D})$ ولهما المركبات الآتية مقاسة بالمتر:

$$C_x = 7.4,\ \ C_y = 3.8,\ \ C_z = -6.1$$
$$D_x = 4.4,\ \ D_y = 2.0,\ \ D_z = 0$$

أوجد حسابياً مركبات المتجه $(\vec{R})$ الذي يمثل حاصل جمع المتجهين.

2-6 لديك المتجهان $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ المعرفان على الشكل الآتي:

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$
$$\vec{B} = -13\hat{i} + 7\hat{j}$$

أوجد حسابياً:

أ) حاصل جمع المتجهين باستخدام متجهات الوحدة $(\hat{i})$ و$(\hat{j})$.

ب) أوجد حسابياً مقدار واتجاه المحصلة $(\vec{R})$ التي تمثل $(\vec{A}+\vec{B})$.

2-7 إذا كان لديك المتجهان $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ والمعرفان على الشكل الآتي:

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$
$$\vec{B} = 5\hat{i} - \hat{j}$$

أوجد حسابياً المركبتان السينية والصادية، ثم احسب مقدار واتجاه كل من:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$
$$\vec{R} = \vec{B} - \vec{A}$$

2-8 إذا كان لديك المتجهان $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ والمعرفان على الشكل الآتي:

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$
$$\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$$

أوجد حسابياً:

أ) $(\vec{A}+\vec{B})$.

ب) $(\vec{A}-\vec{B})$.

ج) عرّف المتجه الجديد $(\vec{C})$ حيث إن:

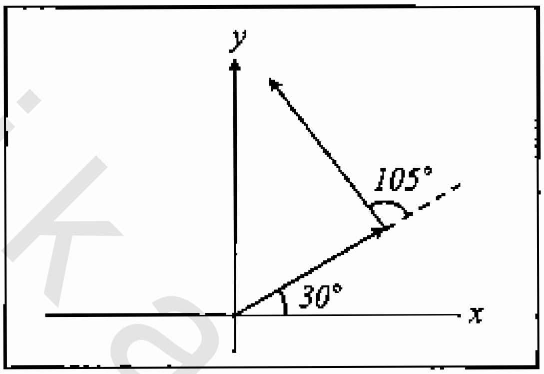
$$\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = 0$$

2-9 إذا كان لديك المتجهات الثلاثة $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ و$(\vec{C})$ حيث إن:

$$\vec{A}-\vec{B}=2\vec{C}$$
$$\vec{A}+\vec{B}=4\vec{C}$$
$$\vec{C}=3\hat{i}+4\hat{j}$$

عرّف المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$.

2-10 المتجهان $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ والموضعان في الشكل *(2-24)* لهما نفس الكمية *(10)* وحدات، ولهما الاتجاهان المبينان بالشكل الموضّح.




الشكل *(2-24)*، المسألة *(2-10)*

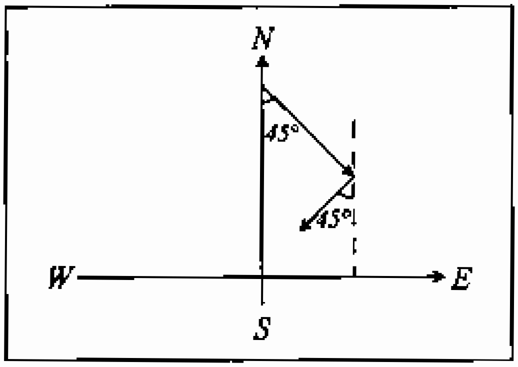
أوجد حسابياً:

أ) المتجه $(\vec{R})$ الذي يمثل حاصل جمع المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$.

ب) المركبتين السينية والصادية للمتجه $(\vec{R})$.

ج) مقدار الزاوية بين المتجه $(\vec{R})$ والمحور السيني الموجب.

2-11 لاعب غولف احتاج إلى ثلاث محاولات لإدخال الكرة في الحفرة المخصصة لها. كانت المحاولة الأولى على مسافة *(12m)* شمالاً، والمحاولة الثانية *(6m)* شمال شرق، والمحاولة الثالثة *(3m)* جنوب غرب، ما هي المسافة المطلوبة لإدخال الكرة في موضعها الصحيح بمحاولة واحدة؟ انظر الشكل *(2-25)*.




الشكل (2-25)، المسألة (2-11)

2-12 استخدم التعبير الرياضي لكل من الضرب القياسي والضرب الاتجاهي كي تتحقق من صحة النتائج الآتية:

1- $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

2- $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

3- $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$

4- $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k},\ \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j},\ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$

2-13 إذا كانت القيمة القياسية للمتجه $(\vec{A})$ تساوي $(10)$ وحدات، والقيمة القياسية للمتجه $(\vec{B})$ تساوي $(6)$ وحدات، ومقدار الزاوية بينهما $(60°)$.

أوجد حسابياً:

أ) حاصل الضرب القياسي للمتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$.

ب) مقدار حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$.

2-14 إذ كان لديك المتجهان $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ والمعرفان على الشكل الآتي:

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

استخدم كلاً من:

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos(\theta)$$
$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

وذلك لحساب الزاوية المحصورة بينهما.

لديك المتجهان $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ المعرفان على النحو الآتي:

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$$
$$\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$$

اوجد كلاً من:

1- $\vec{A} \times \vec{B}$
2- $\vec{A}.\vec{B}$
3- $(\vec{A} + \vec{B}).\vec{B}$

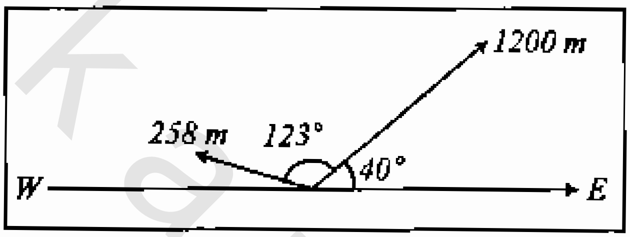
# مسائل اختيارية

## *Optional Problems*

2-1 رصدت محطة رادار طائرة قادمة من جهة الشرق مباشرة خلال موقعين، وذلك على النحو الآتي:

أ) على بعد $(1200m)$ وبزاوية مقدارها $(40°)$.

ب) استمر الرادار بالرصد وبعد زاوية قدرها $(123°)$ من نقطة الرصد الأولى سجل بعداً قدره $(258m)$، انظر الشكل $(2\text{-}26)$، أوجد حسابياً المسافة التي قطعتها الطائرة بين نقطتي الرصد.




الشكل $(2\text{-}26)$

2-2 لديك المتجهات الثلاثة $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ و$(\vec{C})$ المعرفة على النحو الآتي:

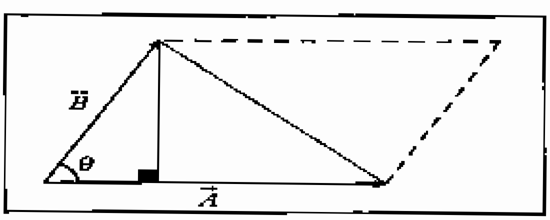
$$\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$
$$\vec{B} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\vec{C} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

أوجد كلاً من:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}), \vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}), \vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$$

2-3 أثبت أن مساحة المثلث الواقع بين المتجهين $(\vec{A})$ و$(\vec{B})$ في الشكل $(2\text{-}27)$ تساوي:

$$\frac{1}{2}\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|$$




الشكل $(2\text{-}27)$: المسألة الاختيارية $(2\text{-}3)$

# الخلاصة
## *Summary*

- **الكمية القياسية**: هي الكمية التي يمكن تعيينها تعييناً كاملاً بمعرفة مقدارها ووحدة قياسها، ويمكننا أن نستخدم مع مجموعة من الكميات القياسية المتجانسة؛ القوانين الجبرية الاعتيادية.
- **الكمية المتجهة**: هي الكمية التي يمكن تعيينها تعييناً كاملاً بمعرفة مقدارها ووحدة قياسها واتجاهها ونقطة تأثيرها ومحور عملها. ويتحتم علينا أن نستخدم مع مجموعة من الكميات المتجهة المتجانسة القوانين الخاصة بها.
- **محصلة عدد من الكميات المتجهة**: يمكننا إيجاد محصلة عدد من الكميات المتجهة المتجانسة بمعرفة مركباتها السينية ومركباتها الصادية على المحاور الديكارتية على النحو الآتي:

$$\sum A_x = A_{1x} + A_{2x} + ...$$
$$\sum A_y = A_{1y} + A_{2y} + ...$$
$$tan(\theta) = \frac{\sum A_y}{\sum A_x}$$

**متجهات الوحدة**: يمكننا أن نعبّر عن عدد من الكميات المتجهة المتجانسة في المستوي أو في الفراغ باستخدام متجهات الوحدة $(i, j, k)$ على النحو الآتي:

$$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$$
$$\vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k$$
$$\vec{C} = C_x i + C_y j + C_z k$$

حيث تساوي القيمة المطلقة لكل منها الواحد، كما أنّ الزاوية بين كل منها والآخر تساوي تسعين درجة، كما أن محصلة هذه الكميات المتجهة تكون على النحو الآتي:

$$\vec{R} = R_x i + R_y j + R_z k$$

- **قانون جيب التمام**: ويستخدم لإيجاد حاصل جمع متجهين $(B, A)$، ويُعبّر عنه رياضياً على الشكل الآتي:

$$\vec{C} = A^2 + B^2 + 2AB\,cos(\theta)$$

حيث $(A)$ هي المقدار العددي للمتجه الأول، $(B)$ المقدار العددي للمتجه الثاني، $(\theta)$ الزاوية المحصورة بين المتجهين.

- **الضرب القياسي**: إنّ ناتج الضرب القياسي لمتجهين $(B, A)$ يُعبّر عنه رياضياً على الشكل الآتي:

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|cos(\theta)$$

حيث $|A|$ هي القيمة المطلقة للمتجه الأول، $|B|$ هي القيمة القياسية المطلقة للمتجه الثاني، $(\theta)$ هي الزاوية المحصورة بينهما، وناتج الضرب هو كمية عددية.

- **الضرب الاتجاهي**: إنّ ناتج الضرب الاتجاهي لمتجهين $(B, A)$ يُعبّر عنه رياضياً على الشكل الآتي:

$$\vec{A} \times \vec{B} = |A||B|sin(\theta)$$

وناتج الضرب هو عبارة عن كمية اتجاهية ثالثة $(\vec{C})$ عمودية على المستوي الذي يحوي المتجهين $(B, A)$ يمكن تحديد مقداره باستخدام هذه العلاقة الرياضية، كما يمكن تحديد اتجاهه باستخدام قاعدة اليد اليمنى.