الجزء الأول

الميكانيكا وخواص المادة

الباب الأول

الوحدات والأبعاد

Units and Dimensions

لكى نعرف أى كمية طبيعية يجب أن نحدد الوحدات التى تقاس بها هذه الكمية وكذلك العدد الذى تتكرر به هذه الوحدة داخل هذه الكمية وتعتمد كل القياسات الطبيعية على وحدات أساسية هى :

١ — الطول ٢ — الكتلة ٣ — الزمن

ويوجد خلاف هذه الوحدات الأساسية وحدات مشتقة منها مثل وحدة الحجوم وهى مشتقة من الوحدة الطولية .

١ — ١ الوحدات الأساسية : Fundamental units

أولاً : الطول Length

وحدة الطول هى المتر وتعرف بأنها المسافة فى درجة الصفر المئوى بين نهايتى قضيب عيارى محفوظ فى باريس .

وتوجد وحدات عملية أخرى للطول مثل السنتيمتر وهو $\frac{١}{١٠٠}$ من المتر ، والكيلومتر وهو ١٠٠٠ متر وتستعمل كل من هذه الوحدات العملية فى المناسبات الملائمة . فمثلا إذا كانت المسافة المقاسة صغيرة جدا فبديهى أنك لن تستعمل الكيلومتر بل المليمتر أو الميكرون وإذا كانت كبيرة جداً تستخدم السنة الضوئية .

يشتق من وحدة الطول وحدات أخرى مثل وحدة المساحة ونحصل عليها برسم مربع طول ضلعه وحدة الأطوال ، ووحدة الحجوم ونحصل عليها بعمل مكعب طول ضلعه الوحدة . وتعرف وحدة المساحة بالمتر المربع ووحدة الحجم بالمتر المكعب وهما وحدتان مشتقتان .

ثانياً : الكتلة Mass

تعرف الكتلة بأنها كمية المادة ووحدتها الكيلوجرام وهى كمية المادة الموجودة فى قطعة من البلاتين

محفوظة في باريس . والكيلوجرام وحدة كبيرة بها ١٠٠٠ جرام ، ويعرف الجرام بأنه كمية المادة الموجودة في ١ سم^{٣} من ماء نقي في درجة حرارة ٤°م .

ثالثاً : الزمن Time

استخدمت الحركة الدورانية للأرض حول نفسها كمقياس للزمن . فمن المعروف أن الدورة الكاملة تتم في زمن يوم كامل وهذا يقسم إلى ٢٤ ساعة ، وتقسم الساعة إلى ٦٠ دقيقة ، والدقيقة إلى ٦٠ ثانية ، وقد أخذت الثانية كوحدة للزمن .

يوجد نظم قياس مختلفة في العالم . يستخدم النظام الفرنسي وحدات السنتيمتر – جرام – ثانية (c.g.s.) . ويتبع الإنجليز وحدات قياسية أخرى هي القدم للطول ويساوي ١٢ بوصة ، والبوصة تساوي حوالي ٢,٥٣٩ من السنتيمتر ، والباوند للكتلة وتساوي ٤٥٣,٦ جرام ، والثانية للزمن .

ويتفق العلماء في الوقت الحاضر على استخدام نظام قياس مشتق من النظام الفرنسي وحداته الأساسية هي المتر – كيلوجرام – ثانية (M K S) وذلك رغبة منهم في التوحيد القياسي في جميع أنحاء العالم .

١ – ٢ الوحدات المشتقة Derived units :

لكل كمية طبيعية وحدة مشتقة من الوحدات الأساسية السابقة . لكي نعين الوحدة المشتقة يجب العودة إلى تعريف الكمية الطبيعية المراد تعيين وحدتها .

السرعة مثلا هي المعدل الزمني الذي يقطع به الجسم المتحرك للمسافات وتكون وحدة السرعة بذلك متر/ ثانية ، أما العجلة فهي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن وتكون وحدتها هي متر / (ثانية)^{٢} ، وهكذا .

يطلق على وحدة القوة في نظام كيلوجرام – متر – ثانية (MKS) « نيوتن » وهي القوة التي تعطي لكتلة كيلوجرام واحد عجلة تسارع قدرها متر / (ثانية)^{٢} . ويناظر النيوتن في نظام سم – جم – ثانية قوة « الداين » ويمكن إيجاد العلاقة العددية بينهما كما يأتي :

١ نيوتن = ١ كيلوجرام × ١ متر / (ثانية)^{٢}

= ١٠٠٠ جرام × ١٠٠ سم / (ثانية)^{٢}

= ١٠^{٥} جرام . سم / (ثانية)^{٢}

١٠^{٥} داين

وحدة الطاقة أو الشغل في نظام (MKS) هو الشغل المبذول عندما تتحرك قوة قدرها ١ نيوتن مسافة متر واحد في اتجاه تأثيرها .

∴ وحدة الشغل = وحدة القوة × وحدة المسافة

= نيوتن . متر وتسمى بالجول

= ١٠^٥ داين × ١٠٠ سم

= ١٠^٧ داين . سم

= ١٠^٧ إرج

أى أن وحدة الشغل فى نظام (M K S) هى الجول وهى الوحدة العملية للطاقة .

نتيجة :

تعيين وحدات أى كمية طبيعية بدلالة الوحدات الأساسية التى سترمز لها بالرموز ل للطول ، ك للكتلة ، ن للزمن . وحدات الكثافة مثلا كما تشتق من التعريف هى ك ل^-٣ وهكذا .

مثال :

أوجد الوحدات القياسية للضغط .

الحل : من التعريف . الضغط هو القوة العمودية الواقعة على وحدة المساحات وبذلك تكون وحدات الضغط هى :

$$ض = \frac{قوة}{مساحة} = \frac{كتلة \times عجلة}{مساحة} = \frac{ك \;.\; ل}{ل^٢ \; ن^٢}$$

$$= ك \; ل^{-١} \; ن^{-٢}$$

من المثال السابق يتضح طريقة تعيين وحدات أى كمية طبيعية من تعريفها وعلى الطالب أن يتحقق من وحدات الكميات الطبيعية المبينة فى الجدول الآتى :

(جدول رقم ١)

الكمية	المعادلة البعدية
السرعة : معدل تغير المسافة	ل ن$^{-١}$
العجلة : معدل تغير السرعة	ل ن$^{-٢}$
القوة : كتلة × عجلة	ك ل ن$^{-٢}$
الشغل – الطاقة : قوة × مسافة	ك ل^{٢} ن$^{-٢}$
الحجم : مكعب الطول	ل^{٣}
الكثافة : كتلة وحدة الحجوم	ك ل$^{-٣}$
الضغط : قوة على وحدة المساحة	ك ل$^{-١}$ ن$^{-٢}$
التوتر السطحى : قوة لوحدة الأطوال	ك ن$^{-٢}$
كمية الحركة : كتلة × سرعة	ك ل ن$^{-٢}$
سرعة زاوية أو التردد : مقلوب الزمن	ن$^{-١}$
عجلة زاوية : معدل تغير السرعة الزاوية	ن$^{-٢}$
القدرة : معدل بذل الشغل	ك ل^{٢} ن$^{-٣}$
الازدواج أو عزم القوة : قوة × مسافة	ك ل^{٢} ن$^{-٢}$
القصور الذاتى : كتلة × مربع الطول	ك ل^{٢}
اللزوجة : قوة لوحدة المساحة لوحدة ميل السرعة	ك ل$^{-١}$ ن$^{-١}$
المرونة	ك ل$^{-١}$ ن$^{-٢}$
ثابت الجاذبية :	ك$^{-١}$ ل^{٣} ن$^{-٢}$

١ – ٣ نظرية الأبعاد :

تنص نظرية الأبعاد على وجوب التجانس من ناحية الأبعاد لكل طرف من أطراف المعادلات الرياضية . وتكمن أهمية ذلك فى أننا نستطيع التحقق من صحة أى معادلة فى زمن وجيز دون الاحتياج لاستنباطها الذى قد يكون شاقاً أو متعذراً . فمثلا إذا قيل أن قطرة سائل كروية الشكل تتذبذب حول شكل الاتزان بتردد γ يتوقف على التوتر السطحى ت والكثافة ρ ونصف القطر نق حسب المعادلة :

$$\gamma = \text{ث} \sqrt{\frac{\text{ت}}{\rho \,.\, \text{نق}^{٣}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{١ . ١})$$

حيث ث هو ثابت عددى ، فإنه يمكننا التحقق من صحة هذه العلاقة بإيجاد أبعاد كل طرف من المعادلة كما يأتى :

الطرف الأيسر :

التوتر السطحى : وحداته $\text{ك}\ \text{ن}^{-2}$

الكثافة : وحداتها $\text{ك}\ \text{ل}^{-3}$

نصف القطر : وحداته ل

الطرف الأيمن :

التردد : وحداته ن^{-1}

وحدات الطرف الأيسر هى :

$$\left(\text{ك}\,\text{ن}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\text{ك}\ \text{ل}^{-3}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\text{ل}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$= \text{ن}^{-1}$ وهى نفس وحدات الطرف الأيمن .

أى أن وحدات طرفى المعادلة متجانسة بعدياً . إذاً فهى صحيحة .

إستنباط العلاقات الطبيعية بواسطة الأبعاد :

يمكن باستخدام نظرية الأبعاد استنباط بعض العلاقات التى تربط المتغيرات دون الحاجة إلى حل رياضى كامل وتوضح الأمثلة الآتية الطريقة :

١ — إيجاد العلاقة بين سرعة الأمواج الطولية والعوامل المؤثرة عليها . نبدأ أولا بتعيين العوامل المختلفة التى قد يكون لها تأثيراً على سرعة الأمواج مثل مرونة الوسط الناقل للأمواج (م) وكذا كثافته (ρ) .

نفرض أن السرعة ع تتوقف على كل من م ، ρ وفقاً لقانون أسى . فتكون المعادلة البعدية هى :

$$\text{ع} = \text{ث}\ (\text{م})^{\alpha} \ (\rho)^{\beta}$$

وحيث إن ث هو ثابت عددى لا أبعاد له . تكون المعادلة البعدية هى :

$$(\text{ل}\ \text{ن}^{-1}) = (\text{ك}\ \text{ل}^{-1}\ \text{ن}^{-2})^{\alpha} \ . \ (\text{ك}\ \text{ل}^{-3})^{\beta}$$

و بمساواة قوى الوحدات المماثلة فى طرفى المعادلة نحصل على :

$\text{صفر} = \alpha + \beta$ بالنسبة للكتلة ك

$1 = -\alpha + 3\beta$ بالنسبة للطول ل

$-١ = -٢\alpha$ بالنسبة للزمن ن

$\therefore \alpha = \frac{١}{٢} \quad \beta = -\frac{١}{٢}$

وتكون بذلك العلاقة المطلوبة هى :

$$ع = ث \sqrt{\frac{م}{\rho}}$$

ويمكن تعيين الثابت ث إما بالتجربة أو بالتحليل الرياضى . وقيمته فى هذه الحالة : ث = ١

وتكون سرعة الأمواج هى :

$$ع = \sqrt{\frac{\text{المرونة}}{\text{الكثافة}}}$$

٢ — إيجاد زمن ذبذبة بندول بسيط : $\ddot{\gamma}$

العوامل التى تتوقع أن يكون لها تأثير على زمن ذبذبة بندول بسيط هى .

الطول ل

عجلة الجاذبية حـ

كتلة كرة البندول ك

نفرض أن العلاقة تتبع قانون أسى كما يلى :

$$\ddot{\gamma} = ث\, ك^{\alpha}\, م^{\beta}\, حـ^{\gamma}$$

وتكون المعادلة البعدية هى :

$$(ن) = (ك)^{\alpha}\,(ل)^{\beta}\,(ل\, ن^{-٢})^{\gamma}$$

$$\therefore \alpha = \text{صفر} \quad ، \quad \beta + \gamma = \text{صفر}$$

$$١ = -٢\gamma$$

$$\therefore \beta = \frac{١}{٢} \quad ، \quad \gamma = -\frac{١}{٢}$$

وتكون المعادلة المطلوبة هى :

$$\ddot{\gamma} = ث \sqrt{\frac{ل}{حـ}}$$

ويمكن إثبات أن الثابت العددى فى هذه الحالة هو ٢ ط أى أن :

$$\ddot{\gamma} = ٢\, ط \sqrt{\frac{ل}{حـ}}$$

تمارين :

١ – أوجد الضغط داخل فقاعة صابون علماً بأنه يتوقف على كل من التوتر السطحي ونصف قطر الفقاعة .

الجواب : $ض = \frac{٤\ ت}{نق}$

٢ – أوجد زمن دوران كوكب حول الشمس علماً بأنه يتوقف على بعده عن الشمس ، $ر$ ، وعلى كتلة الشمس ، ك ، وثابت الجاذبية ، ج .

الجواب : γ = ثابت $\left(\frac{ر^{٣}}{ج.ك}\right)^{\frac{١}{٢}}$

٣ – إذا علم أن التردد ت لسلك صونومتر يتوقف على الشد ش والطول ل وكتلة وحدة الأطوال ρ أثبت أن :

ت تتناسب مع $\frac{١}{ل}\sqrt{\frac{ش}{\rho}}$

٤ – إذا فرضنا أن عجلة الجاذبية الأرضية تمثل وحدة أساسية وأن الثانية هي وحدة الزمن ، ماذا يجب أن تكون وحدة الطول ؟

(حـ = ٩٨٠ سم / ث^{٢}) .

٥ – باستخدام نظرية الأبعاد أثبت صحة المعادلة بعدياً :

ح . ضـ = $\frac{١}{٣}$ ك ع^{٢}

حيث ح ، ضـ هما حجم وضغط غاز ما وزنه الجزيئي ك ومتوسط سرعة جزيئاته ع .

٦ – إذا علم أن وحدات معامل الصلابة هي ك . ل$^{-١}$. ن$^{-٢}$ ، استخدم نظرية الأبعاد للتحقق من صحة المعادلة :

$$ع = \frac{ط\ م\ نق^{٤}}{٢\ ل} \cdot \theta$$

حيث ع هو عزم الازدواج اللازم للي سلك طوله ل ونصف قطره نق ومعامل صلابته م خلال زاوية قدرها θ .

٧ — تتوقف زمن الذبذبة γ لقطرة صغيرة من سائل تحت تأثير التوتر السطحى على كل من كثافة السائل ρ ، نصف قطر القطرة نق ، والتوتر السطحى للسائل ت . أثبت باستخدام نظرية الأبعاد أن

$$\ddot{\gamma} = \text{م} \,.\, \rho^{\frac{1}{2}} \,.\, \text{نق}^{\frac{3}{2}} \,.\, \text{ت}^{-\frac{1}{2}}$$

حيث م ثابت عددى .

الباب الثاني

الحركة الخطية

٢ ـ ١ الكميات المتجهة وغير المتجهة : Vectors and Scalars

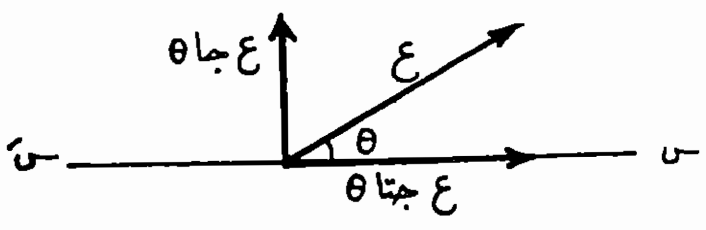
كل كمية طبيعية تحتاج لاتجاه لكي يتم تعريفها تماماً تسمى كمية متجهة أما الكميات التي لا تحتاج لاتجاه لتعريفها فهي غير متجهة . ومن أمثلة الكميات الغير متجهة : الكتلة ــ الزمن ــ الطول ــ الكثافة . ومن أمثلة الكميات المتجهة : إزاحة جسم متحرك ــ عجلته ــ القوة المؤثرة عليه .

٢ ـ ٢ محصلة كميتين متجهتين : Resultant oftwo vectors

إذا كانت $ع_1$ ، $ع_2$ كميتين متجهتين بينهما زاوية θ فإن محصلتهما ع هي :

$$ع = \sqrt{ع_1^2 + ع_2^2 + 2 ع_1 ع_2 جتا \theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (٢ - ١)$$

وكما يمكن تحصيل متجهتين فإنه يمكن تحليل أي كمية متجهة إلى مركبات . فإذا كانت الكمية ع تصنع زاوية θ مع الاتجاه س سَ ، (أنظر شكل ٢ ـ ١) ، فإن مركباتها في في اتجاهين متعامدين هما ع جتا θ في اتجاه س س ، ع حا θ في الاتجاه العمودي عليه .



(شكل ٢ ـ ١)

مركبات الكمية المتجهة في اتجاهين متعامدين

٢ ـ ٣ محصلة عدد من المتجهات بطريقة التحليل :

نفرض ع ١ ، ع ٢ ، ع ٣ ، .... مجموعة من المتجهات المتشابهة تؤثر فى نقطة . لإيجاد محصلة هذه المجموعة نختار محورين متعامدين س ، ص ونفرض أن الزوايا التى تصنعها هذه المتجهات مع المحور السينى هى θ_1 ، θ_2 ، θ_3 ، ... على الترتيب .

المركبات السينية لهذه المتجهات هى ع ١ جتا θ_1 ، ع ٢ جتا θ_2 ، ع ٣ جتا θ_3

المحصلة لهذه المركبات السينية هى :

ع س = ﻉ ع جتا θ مجموعة جمعاً جبرياً .

وبالمثل المركبات الصادية لهذه المتجهات هى على الترتيب :

ع ١ حا θ_1 ، ع ٢ حا θ_2 ، ع ٣ حا θ_3 ، ... ... إلخ .

المحصلة الصادية لهذه المركبات هى :

ع ص = ﻉ ع حا θ مجموعة جمعاً جبرياً .

ويصبح لدينا مركبتان متعامدتان ع س ، ع ص تكون محصلتهما هى المحصلة المطلوبة وهى :

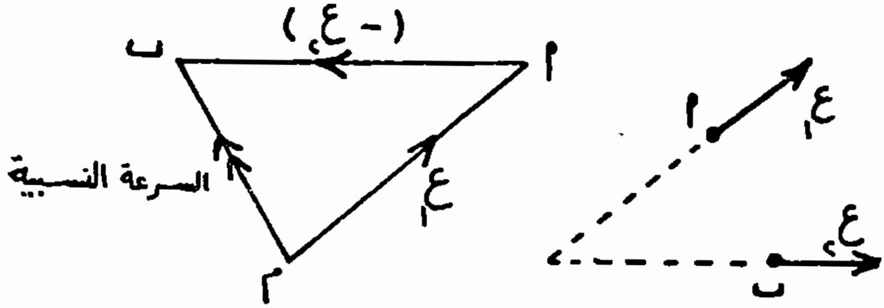
ع = $\sqrt{\text{ع}^2_{\text{س}} + \text{ع}^2_{\text{ص}}}$ ... ... (٢ ـ ٢)

٢ ـ ٤ الحركة النسبية والسرعة النسبية : Relative motion

حركة جميع الأجسام فى الكون الذى نعيش فيه هى حركة نسبية ولا توجد حركة مطلقة إذ ثبت قطعاً عدم وجود مركز ثابت فى الكون تتحرك الأجسام نسبة إليه . فإذا تحرك جسمان ا ، ب بسرعتين ع ١ ، ع ٢ على خط واحد تكون سرعة الجسم ا بالنسبة للجسم ب هى ع ٢ ـ ع ١ إذا كانا يسيران فى نفس الاتجاه بينما تكون ع ١ ـ (ـ ع ٢) أى ع ١ + ع ٢ إذا كانا يسيران فى اتجاهين متعاكسين .

أما إذا تحرك الجسمان على مستو وليس على خط واحد ، نفرض أن م ا يمثل السرعة ع ا للجسم الأول كما مبين بشكل (٢ ـ ٢) .

نرسم ا ب ممثلا للسرعة (ـ ع ٢) مقداراً واتجاهاً فتكون السرعة النسبية للجسم ا بالنسبة للجسم ب ممثلة بالضلع م ب مقداراً واتجاهاً .



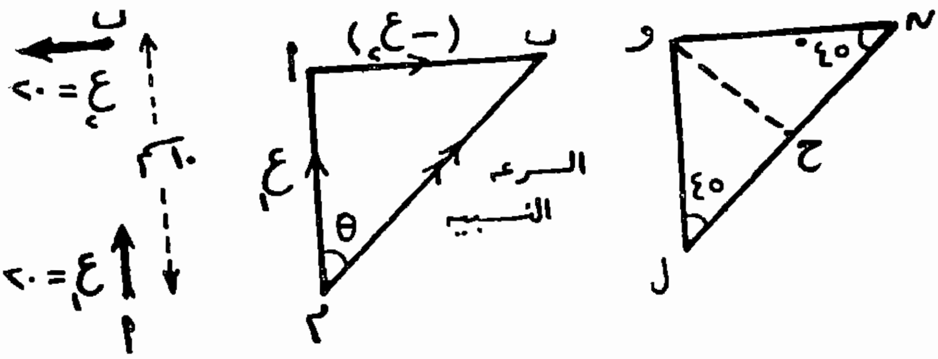
(شكل ٢ – ٢)

مثال :

تبعد سفينتان عن بعضهما مسافة ١٠ كيلومتر ، فإذا كانت الأولى تسير بسرعة ٢٠ كيلومتر فى الساعة فى اتجاه الشمال والثانية تسير بسرعة ٢٠ كيلو متر فى الساعة فى اتجاه الغرب ، أوجد أقرب بعد بينهما والزمن اللازم لكى يصلا إلى هذا الوضع .

الحل :

توجد أولا السرعة النسبية بين السفينتين . نرسم م ا يمثل السرعة ع ١ للسفينة (شكل ٢ – ٣) ثم نرسم الخط أ ب يمثل المتجه (– ع ٢) مقداراً واتجاهاً فتكون السرعة النسبية ممثلة بالخط م ب .



(شكل ٢ – ٣)

المثلث م ا ب قائم الزاوية

$\therefore$ السرعة النسبية م ب $= \sqrt{٢٠^٢ + ٢٠^٢} = ٢٨,٢٨$ كم

ظا $\theta = \frac{٢٠}{٢٠} = ١$ $\qquad \therefore \theta = ٤٥^\circ$

تتحرك السفينة أ فى الاتجاه ل ن بالنسبة للسفينة ب فإذا كان ل و = ١٠ كم فإن أقرب بعد بين السفينتين هو العمود و ح حيث و ح = و ل جا ٤٥

$$= ١٠ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٧,٠٧ \text{ كيلومتر}$$

زمن الوصول من ل إلى ح ، أى زمن قطع المسافة ل ح = و ل حا ٤٥ = ٧,٠٧ كم بسرعة ٢٨,٢٨ كم/ ساعة هو :

$$ن = ٧,٠٧ \ / \ ٢٨,٢٨ = \frac{١}{٤} \text{ ساعة}$$

وهو زمن الوصول إلى أقرب بعد بينهما .

٢ ــ ٥ الحركة الخطية للأجسام : Linear motion

إذا تحرك جسم على خط مستقيم وكان يقطع مسافات متساوية فى أزمنة متساوية سميت حركته بأنها خطية ومنتظمة وتعرف سرعته بأنها المعدل الزمنى لقطع المسافة ف أى أن :

$$ع = \frac{ى ف}{ى ن} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٢ - ٣)$$

أما إن لم تكن سرعة الجسم ثابتة مقداراً واتجاهاً فإن معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن يسمى بالعجلة حـ (acceleration) حيث

$$حـ = \frac{ى ع}{ى ن} = \frac{ى^٢ ف}{ى ن^٢} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٢ - ٤)$$

وتكون العجلة منتظمة عندما يكون التغير فى سرعة الجسم فى الثانية الواحدة ثابت دائماً .

وإذا ابتدأ جسم فى مثل هذه الحركة من حالة سكون فإن سرعته بعد زمن ن هى : ع = حـ . ن

وتكون السرعة المتوسطة للحركة فى هذه الفترة الزمنية = $\frac{١}{٢}$ حـ ن وبذلك تكون المسافة المقطوعة فى الزمن ن هى $\frac{١}{٢}$ حـ ن^٢ .

إذا كانت ع. هى سرعة الجسم الابتدائية تكون سرعته بعد زمن ن هى ع = ع. + حـ ن
$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٢ - ٥)$

السرعة المتوسطة للجسم = $\frac{١}{٢}$ (ع. + ع. + حـ ن) .

$$= ع. + \frac{١}{٢} حـ ن .$$

وتكون الإزاحة فى هذه الحالة هى :

$$\text{ف} = \text{ع}_{.}\,\text{ن} + \tfrac{1}{2}\,\text{ح}\,\text{ن}^{2} \quad \ldots \quad (٢-٦)$$

وبتربيع المعادلة (٢ — ٥) والتعويض من المعادلة (٢ — ٦) نحصل على

$$\text{ع}^{2} = \text{ع}_{.}^{2} + 2\,\text{ح}\,\text{ف} \quad \ldots \quad (٢-٧)$$

تحدد القوانين السابقة العلاقة بين الإزاحة والسرعة والعجلة فى حالة الحركة الخطية المنتظمة .

٢ — ٦ قوانين نيوتن للحركة :

أرسى نيوتن الأساس لعلم الميكانيكا على ثلاثة قوانين حركة تعرف باسمه هى :

١ — تستمر جميع الأجسام فى حالة سكون أو فى حالة حركة منتظمة فى خط مستقيم إلا إذا أثرت عليها قوى خارجية تغير من حالتها .

٢ — يتناسب معدل التغير فى كمية حركة جسم ما مع القوة التى تؤثر عليه ويكون هذا التغير على الدوام فى اتجاه القوة .

٣ — لكل فعل رد فعل مساو له فى المقدار ومضاد فى الاتجاه .

والقانون الأول يعبر عن فكرة القصور الذاتى للأجسام والتى تكمن فى ممانعة أى جسم للحركة إذا كان أصلا فى حالة سكون وكذلك ممانعته للتوقف عن الحركة إذا كان أصلا فى حالة حركة . أما القانون الثالث فهو يؤكد عدم وجود قوة مفردة إذ لا بد أن يصاحب كل فعل رد فعل .

تعاريف :

كمية التحرك (momentum) : هى حاصل ضرب كتلة الجسم فى سرعته ووحداتها ك ل ن^{-1} .

وبتطبيق قانون نيوتن الثانى الذى ينص على أن القوة هى معدل التغير فى كمية التحرك للجسم فإن :

$$\text{القوة ق} = \frac{\text{ك}\,\text{ع}_{2} - \text{ك}\,\text{ع}_{1}}{\text{ن}_{2} - \text{ن}_{1}} = \text{ك} \,.\, \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$$

$$= \text{ك} \,.\, \text{ح} \quad \ldots \quad (٢ - ٨)$$

حيث ح هى عجلة التسارع وتكون وحدات القوة هى ك ل ن^{-2} وتقدر بالنيوتن .

الشغل (Work): إذا أثرت قوة ق على جسم فأزاحته مسافة ف فإن القوة تكون قد بذلت شغلا قدره حاصل ضرب القوة فى المسافة .

$$\text{ش} = \text{ق} \,.\, \text{ف}$$

وحدة الشغل هى الجول وتتبع نظام متر . كيلوجرام . ثانية أما فى نظام سم . جم . ثانية فالوحدة هى الإرج . والجول وحدة تساوى ١٠^{٧} أرج . وتوجد وحدة للشغل صغيرة جدا هى الإليكترون فولط وتساوى ١,٦ × ١٠$^{-١٢}$ إرج . وتستخدم عادة فى الطبيعة الذرية .

القدرة (Power) : تعرف قدرة الآلة بمعدل بذل الشغل ووحداتها جول لكل ثانية وتسمى بالواط .

$$\text{القدرة} = \frac{\text{الشغل المبذول}}{\text{زمن بذل هذا الشغل}} \text{ جول/ثانية (واط)}$$

وتوجد وحدة شائعة للقدرة هى قدرة الحصان وتساوى ٧٤٦ واط .

طاقة الحركة (Kinetic energy) : كل جسم يحتوى على طاقة يستطيع بذل شغل . إذا كانت طاقة الجسم كامنة فى حركته تسمى بطاقة الحركة وهى كمية غير متجهة .

نفرض جسم كتلته ك يتحرك بسرعة ابتدائية ع . إذا تحرك الجسم بعجلة تناقصية حـ فإنه يصل إلى حالة سكون بعد أن يقطع مسافة ف . ويكون الشغل المبذول ضد القوة المحركة يساوى تماماً طاقة حركته .

∴ الشغل المبذول لإيقاف الحركة = ق . ف = ك . حـ . ف .

ولكن من قوانين نيوتن : ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ حـ ف ، وبما أن الجسم وصل لحالة سكون فإن ع . = صفر .

∴ ع^{٢} = ٢ حـ ف وبالتعويض فى معادلة الشغل نحصل على :

∴ الشغل = ك حـ ف = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} وهذا يساوى طاقة الحركة ... ... (٢ — ٩)

طاقة الموضع (Pot3ential energy) : عندما يوجد جسم فى مجال قوة جا ب فإنه يكتسب طاقة بفضل موضعه من مركز هذه القوة كما هو الحال بالنسبة للجاذبية الأرضية . و يطلق على هذه الطاقة طاقة الموضع . فمثلا إذا وضع جسم كتلته ك على ارتفاع ف من سطح الأرض ثم ترك ليسقط فإن الشغل المبذول فى السقوط يساوى قوة جذب الأرض للجسم مضروباً فى مسافة السقوط أى أنه يساوى ك حـ ف حيث حـ هى عجلة الجاذبية الأرضية .

قانون بقاء الطاقة (Law of conservation of energy) : ينص القانون على أنه داخل أى مجموعة معزولة تظل مجموعة الطاقات داخلها ثابتة حتى ولو تحول أى نوع منها إلى نوع آخر . فمثلا عند سقوط جسم تحت تأثير الجاذبية الأرضية ، وباعتبار أن الجسم يكون مجموعة معزولة تتحول طاقة الموضع ك حـ ف إلى طاقة حركة $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} ، هذا يفرض عدم وجود عوامل تؤدى إلى

فقدان الطاقة بأى شكل من الأشكال مثل مقاومة الهواء للحركة .

ومن الجدير بالذكر هنا أن كتلة الجسم وهى كمية المادة بداخله هى نوع من أنواع الطاقة المتجمدة والتى يمكن تحريرها بطرق خاصة . وقد أثبت أينشتين أن الطاقة المتحررة عن إفناء كتلة من المادة قدرها ك هى :

الطاقة المتحررة = الكتلة × مربع سرعة الضوء .

وبالحساب البسيط نجد أن إفناء ما يعادل ١ جرام من المادة ينتج عنه طاقة قدرها ٩ × $١٠^{١٣}$جول وهذه الطاقة الهائلة هى التى تحدث التأثير التدميرى العنيف للانفجارات النووية .

٢ — ٧ التصادم وقانون بقاء كمية التحرك : Impact

إذا تحرك جسم كتلته ك تحت تأثير قوة متغيرة ق ، فمن قانون نيوتن الثانى تكون القوة مساوية لمعدل التغير فى كمية التحرك .

$$\therefore ق = \frac{ى}{ى ن} (ك ع)$$

$$\therefore ق . ى ن = ى (ك ع) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (٢ - ١٠)$$

ويطلق على حاصل الضرب ق . ى ن أى القوة فى الزمن بدفع القوة على الجسم ووحداتها نيوتن. ثانية .

نفرض أن $ك_١$ ، $ك_٢$ هما كتلتى جسمين ا . ب يتحركان بسرعتين $ع_١$ ، $ع_٢$ على الترتيب فى نفس الاتجاه . عند تصادمهما تكون القوة التى تؤثر بها الجسم ا على ب مساوية فى المقدار ومضادة فى الاتجاه للقوة التى يؤثر بها الجسم ب على ا خلال زمن التصادم . أى أن دفع ا إلى ب يساوى دفع ب إلى ا . ولذلك لا يحدث حسب المعادلة (٢ — ١٠) أى تغير فى كمية التحرك قبل وبعد التصادم .

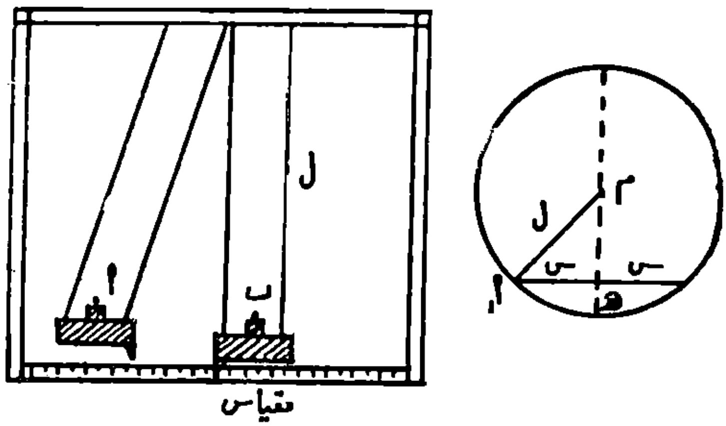
إذا كانت سرعتى الجسمين بعد التصادم هما $عَ_١$ ، $عَ_٢$ فإن $ك_١ ع_١ + ك_٢ ع_٢ = ك_١ عَ_١ + ك_٢ عَ_٢ \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (٢ - ١١)$

ويعرف هذا بقانون بقاء كمية التحرك . وينص على أنه إذا لم تؤثر على الأجسام المتصادمة قوى خارجية فإن كمية التحرك الكلية لهذه الأجسام تظل ثابتة لا تتغير قبل وبعد التصادم .

تحقيق قانون بقاء كمية التحرك عملياً باستخدام الميزان القذفى : (Ballistic balance)

يتركب الميزان القذفى كما مبين بشكل ٢ — ٤ من كتلتين ا ، ب موضوعتين على كفتى ميزان وكل منهما معلقتان بواسطة أربعة خيوط ويمكن قياس الإزاحة الأفقية لكل كتلة منها على مقياس

مدرج . تزاح الكتلة أ إلى الوضع أ١ ثم تترك لتسقط فتتصادم مع الكتلة الساكنة ب وتقاس الإزاحة الأفقية س لكل منهما الناتجة عن التصادم .



(شكل ٢ – ٤)

تتحرك الكتلة أ على قوس من دائرة نصف قطره ل يساوى طول الخيط . إذا كانت هـ هى مسافة السقوط الرأسى للكتلة ا تكون طاقة حركتها عند أسفل نقطة فى المسار هى :

$\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} = ك جـ هـ

∴ ع^{٢} = ٢ جـ هـ

ومن هندسة الحركة (انظر شكل ٢ — ٤)

هـ (٢ ل — هـ) = س^{٢}

∴ س^{٢} = ٢ ل هـ تقريباً .

ويكون بذلك ع^{٢} = $\frac{\text{جـ}}{\text{ل}}$. س^{٢} ... ... (٢ — ١٢)

أى أن السرعة تتناسب مع الإزاحة الأفقية .

إذا كانت الإزاحة الأفقية الابتدائية للكتلة ك أ هى س ، وكانت الإزاحة للكتلتين ك$_{ا}$ ، ك$_{ب}$ بعد التصادم هما س$_{١}$ ، س$_{٢}$ على الترتيب ، فإنه يمكن التحقق عملياً بالقياس من أن

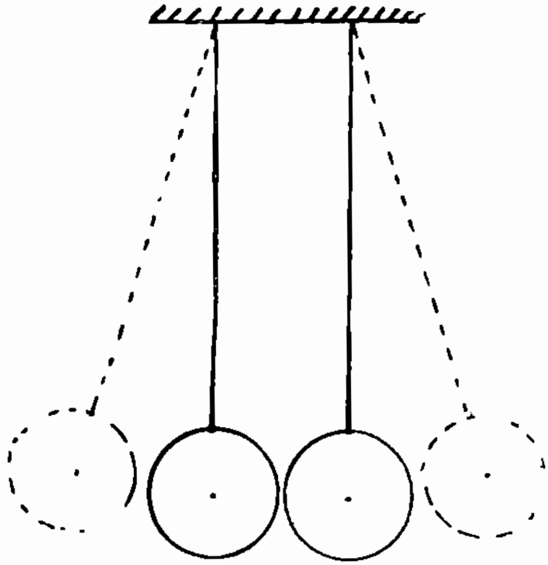
ك$_{ا}$. س = ك$_{ا}$. س$_{١}$ + ك$_{ب}$. س$_{٢}$

أى أن ك$_{ا}$ ع = ك$_{ا}$ ع$_{١}$ + ك$_{ب}$ ع$_{٢}$

وهذا يثبت عملياً قانون بقاء كمية التحرك .

٢ ــ ٨ التصادم ومعامل الارتداد :

اعتبر كرتين معلقتين بخيطين كما هو مبين بشكل (٢ــ٥) نفرض أن الكرتين قد أزيحتا عن وضع الاتزان ثم تركتا ليسقطا . وأن سرعتيهما قبل وبعد لحظة التصادم مباشرة كانتا ($ع_1$ ، $ع_2$) ، ($\bar{ع}_1$ ، $\bar{ع}_2$) على الترتيب .



ك١ ك٢

(شكل ٢ — ٥)

إذا كان التصادم فى اتجاه العمود المشترك عند نقطة التصادم كان خارج قسمة السرعة النسبية بعد التصادم على السرعة النسبية قبل التصادم مقداراً ثابتاً يطلق عليه معامل الارتداد e (coefficiént of restitutoni) ونحصل بذلك على المعادلة .

$$e = -\frac{\bar{ع}_1 - \bar{ع}_2}{ع_1 - ع_2}$$

إذا طبقنا قانون بقاء كمية التحرك على المجموعة باعتبارها معزولة فإن

$$ك_1 ع_1 + ك_2 ع_2 = ك_1 \bar{ع}_1 + ك_2 \bar{ع}_2$$

حيث $ك_1$ ، $ك_2$ هما كتلتى الكرتين على الترتيب .

بحل المعادلتين السابقتين نحصل على سرعة الارتداد لكل من الكرتين كما يأتى :

$$\text{ع}'_1 = \frac{\text{ك}_1 \text{ع}_1 + \text{ك}_2 \text{ع}_2}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2} + e \frac{\text{ك}_2}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2} (\text{ع}_2 - \text{ع}_1)$$

$$\text{ع}'_2 = \frac{\text{ك}_1 \text{ع}_1 + \text{ك}_2 \text{ع}_2}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2} - e \frac{\text{ك}_1}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2} (\text{ع}_2 - \text{ع}_1)$$

وتكون بذلك معادلة طاقة الحركة قبل و بعد التصادم هى :

$$\frac{1}{2} \text{ك}_1 \text{ع}'^2_1 + \frac{1}{2} \text{ك}_2 \text{ع}'^2_2$$

$$= \frac{1}{2} \text{ك}_1 \text{ع}^2_1 + \frac{1}{2} \text{ك}_2 \text{ع}^2_2 - \frac{1}{2} (1 - e^2) \frac{\text{ك}_1 \text{ك}_2}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2} (\text{ع}_2 - \text{ع}_1)^2$$

أى أنه يحدث نقص فى طاقة الحركة نتيجة للتصادم الغير مرن بمقدار

$$\frac{1}{2} (1 - e^2) \frac{\text{ك}_1 \text{ك}_2}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2} (\text{ع}_2 - \text{ع}_1)^2$$

فإذا كان معامل الارتداد $e = 1$ لا يحدث أى نقص فى طاقة الحركة ويسمى التصادم فى هذه الحالة تام المرونة . ولما كان هذا المعامل لجميع المواد أقل من الوحدة فإنه ينتج عن التصادم فقدان للطاقة التى تظهر على شكل طاقة حرارية . ويبين الجدول الآتى معاملات الارتداد لبعض المواد المعروفة .

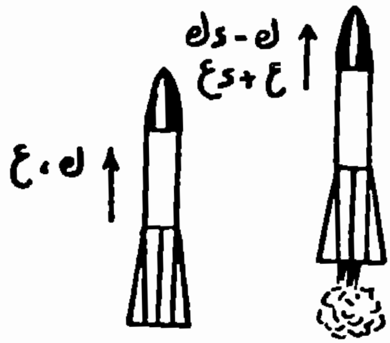
(جدول رقم ٢)

المادة	e	المادة	e
كرات الحديد	٠,٦٦	الزجاج	٠,٩٤
النحاس الأصفر	٠,٣٦	العاج	٠,٨١
الرصاص	٠,٢٠	الفلين	٠,٦٥

٢ — ٩ حركة الصاروخ :

اعتبر حركة الانطلاق لصاروخ رأسياً إلى أعلى (شكل ٢ — ٦) .

نفرض أن كتلته فى لحظة ما بالإضافة إلى كتلة الوقود بداخله هى ك ، وأن سرعته الرأسية فى هذه اللحظة هى ع وكمية تحركه ك ع .



(شكل ٢ – ٦)

بعد زمن ء ن تنقص كتلة الصاروخ بمقدار ء ك وهى كتلة الوقود المحترق والذى ينفثه الصاروخ إلى أسفل بسرعة نسبية ع ن بالنسبة للصاروخ .

سرعة جزيئات الغاز المحترق بالنسبة للأرض هى :

عَ = ع − ع ن

كمية التحرك لجزيئات الغاز المحترق فى الزمن ء ن = ء ك · عَ

= ء ك (ع − ع ن) .

فى نهاية الفترة الزمنية ء ن تكون كتلة الصاروخ هى ك ـ ء ك وسرعته ع + ء ع .

كمية التحرك للصاروخ عند نهاية هذه الفترة = (ك ـ ء ك) (ع + ء ع) .

كمية التحرك الكلية للصاروخ وللغازات المحترقة عند نهاية الفترة ء ن .

= (ك ـ ء ك) (ع + ء ع) + ء ك (ع − ع ن)

باستخدام قانون نيوتن الثانى .

القوة المؤثرة على الصاروخ إلى أعلى = معدل تغير كمية التحرك

= (ء / ء ن) (ك ع) = − ك جـ

ويلاحظ هنا أن هذه القوة توازن تأثير قوة جذب الأرض للصاروخ .

∴ − ك جـ · ء ن = [(ك ـ ء ك) (ع + ء ع) + ء ك (ع − ع ن) − ك ع] .

وباختصار المعادلة السابقة نحصل على

$$\text{ك}\,\frac{\text{ى ع}}{\text{ى ن}} = \text{ع}_{\text{ن}}\,\frac{\text{ى ك}}{\text{ى ن}} - \text{ك جـ} \quad \ldots \quad (\text{٢} - \text{١٣})$$

$$\therefore \frac{\text{ى ع}}{\text{ى ن}} = \text{عجلة تسارع الصاروخ} = \left[\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ك}} \cdot \frac{\text{ى ك}}{\text{ى ن}} - \text{جـ}\right]$$

وكلما ارتفع الصاروخ كلما نقصت عجلة الجاذبية الأرضية حـ وتنقص أيضاً كتلته لاستهلاك المزيد من الوقود ولكن تظل النسبة $\frac{\text{ى ك}}{\text{ى ن}}$ ثابتة لأنها عبارة عن معدل الاحتراق .

لإيجاد سرعة الصاروخ عند أى لحظة نكامل المعادلة (٢ – ١٣) مع ملاحظة وضع إشارة سالبة للمقدار $\frac{\text{ى ع}}{\text{ى ن}}$ لأن الكتلة تتناقص مع الزمن ، أى أن

$$\text{ك}\,\frac{\text{ى ع}}{\text{ى ن}} = -\text{ع}_{\text{ن}}\,\frac{\text{ى ك}}{\text{ى ن}} - \text{ك جـ}$$

$$\therefore \text{ى ع} = -\text{ع}_{\text{ن}} \cdot \frac{\text{ى ك}}{\text{ك}} - \text{جـ} \cdot \text{ى ن}$$

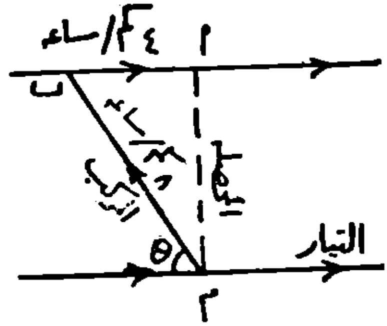
$$\therefore \int_{0}^{\text{ع}} \text{ى ع} = -\text{ع}_{\text{ن}} \int_{\text{ك}_0}^{\text{ك}} \frac{\text{ى ك}}{\text{ك}} - \text{جـ} \int_{0}^{\text{ن}} \text{ى ن}$$

$$\therefore \text{ع} = \text{ع}_{\text{ن}}\ \text{لوهـ}\ \frac{\text{ك}_0}{\text{ك}} - \text{جـ ن} \quad \ldots \quad (\text{٢} - \text{١٤})$$

وهذه المعادلة تعطى تغير سرعة الصاروخ مع الزمن . وقد فرضنا عند إجراء التكامل أن $\text{ع}_{\text{ن}}$ ، وهى السرعة النسبية للغازات بالنسبة للصاروخ ، ثابتة . وأن كتلة الصاروخ هى ك_0 . عند بدء الزمن للانطلاق ن = صفر ، وأن كتلة الصاروخ هى ك عند الزمن ن حيث تكون سرعته ع .

تمارين :

١ – مركب تسير بسرعة ٨ كم / ساعة فى الماء الساكن . أوجد مقدار الزاوية مع الشاطئ التى يجب أن تسير فى اتجاهها لكى تصل إلى نقطة مقابلة تماماً إذا كانت سرعة المياه فى النهر ٤ كم / ساعة .



(شكل ٢ – ٧)

الحل : لكى تصل المركب للنقطة المقابلة أ يجب أن تسير فى اتجاه ب حيث تعمل زاوية θ مع الشاطئ . المثلث م ب أ هو مثلث السرعات فيه م ب = ٨ ويمثل المركب ، ب أ = ٤ ويمثل سرعة التيار فتكون المحصلة للحركة هى م أ حيث :

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{م ب}} = \text{جتا}\ \theta = \frac{1}{2} \qquad \therefore\ \theta = ٦٠^\circ$$

٢ – قذفت كرة رأسياً إلى أعلى وعادت ثانية إلى نقطة القذف بعد ٤ ثوان . أوجد السرعة الابتدائية . (حـ = ٩٨٠ سم / ثانية^{٢}) .

الحل : أعتبر الاتجاه الرأسى إلى أعلى اتجاهاً موجباً للقياس . عجلة الجاذبية الأرضية إلى أسفل = – ٩٨٠ سم / ثانية^{٢} .

∴ بعد ٤ ثوان تكون الإزاحة ف = صفر لأن الجسم قد عاد إلى موضعه .

∴ ف = ع. ن + $\frac{1}{2}$ حـ ن^{٢}

∴ صفر = ع. × ٤ + $\frac{1}{2}$ × – ٩٨٠ × ١٦

∴ ع. = ١٩٦٠ سم / ثانية = ١٩,٦ متر / ثانية

٣ – مضخة حريق ترفع الماء إلى ارتفاع أربعة أمتار فوق سطح نهر وتفرغ المياه خلال ماسورة قطرها ٤ سم بسرعة ٥٠ متر / ثانية . أوجد القدرة الآتية .

(حـ = ٩٨٠ سم / ثانية^{٢}) .

الحل : باعتبار كثافة الماء = ١ تكون كتلة الماء المارة خلال الماسورة فى الثانية = مساحة المقطع × سرعة الماء .

معدل التدفق = ط نق^{٢} . ع = ك جم / ثانية

طاقة الحركة للمياه فى الثانية = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} إرج / ثانية

الزيادة فى طاقة الموضع = ك حـ ف إرج / ثانية

القدرة = معدل بذل الشغل

= $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} + ك حـ ف إرج / ثانية

= ك ($\frac{١}{٢}$ ع^{٢} + حـ ف)

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤ × ٥٠٠٠ ($\frac{١}{٢}$ × ٢٥ × ١٠^{٦} + ٩٨٠ × ٤٠٠)

= ٨١٠٣٥ × ١٠^{٧} إرج / ثانية = ٨١٠٣٥ جول / ثانية

٤ — طريق يتجه من الشمال إلى الجنوب . يتقاطع مع آخر يتجه من الشرق إلى الغرب . تتحرك سيارة من الغرب بسرعة ٤٠ كم / ساعة وأخرى من الشمال بسرعة ٦٠ كم / ساعة . إذا كانت السيارتان تبعدان عن نقطة تقاطع الطريقين ٢٠٠ ، ٤٠٠ متر على الترتيب وتتجهان إليها . أوجد السرعة النسبية للسيارتين وأوجد أقل مسافة ستفصل بينهما وعين مكانهما عند هذه اللحظة .

٥ — خرطوم مياه يخرج ١٠٠ سم^{٣} من الماء فى الثانية خلال فتحة قطرها ١٠م . أوجد مقدار الدفع الخلفى على يد من يمسك بالخرطوم .

٦ — ينزلق جسم على مستو أملس مائل بزاوية ٣٠° على الأفقى ، احسب سرعته بعد انزلاقه ٨ أمتار من حالة السكون والزمن الذى يقطع فيه هذه المسافة .

(الجواب : ٨٨٥ سم / ثانية ، ١,٨١ ثانية)

٧ — إناءين يزن كل منهما ٢ كيلوجرام يتصلان بحبل خفيف يمر على بكرة حرة الحركة . سقطت كتلة واحد كيلوجرام من مادة رخوة من ارتفاع ١٠ أمتار فى أحد الإناءين أوجد سرعة المجموعة عند التصادم وكذلك عجلة الحركة لها بعد ذلك . (حـ = ٩,٨ متر / ثانية^{٢}) .

الحل : نوجد أولاً سرعة المادة الرخوة ع$_{١}$ عند وصولها للإناء باستخدام قوانين نيوتن للحركة .

ع$_{١}^{٢}$ = ع$_{٠}^{٢}$ + ٢ حـ ف = صفر + ٢ حـ ف

∴ ع$_{١}^{٢}$ = ٢ + ٩,٨ × ١٠

∴ ع$_{١}$ = ١٤ متر / ثانية

نفرض أن سرعة المجموعة بعد التصادم هي ع . بتطبيق قانون بقاء كمية التحرك :

∴ ١ × ١٤ = (٢ + ٢ + ١) ع

∴ ع = ٢,٨ متر / ثانية .

لإيجاد عجلة الحركة بعد التصادم نفرض أن قيمتها ى وأن الشد فى الحبل ش . أصبحت كتلة الإناء أ ٣ كيلوجرامات فيكون الثقل إلى أسفل ٣ حـ .

∴ القوة الكلية المؤثرة إلى أسفل على الإناء أ = ٣ حـ — ش

∴ ٣ حـ — ش = ٣ ى

القوة المؤثرة إلى أعلى على الاناء ب = ش — ٢ حـ

∴ ش — ٢ حـ = ٢ ى

وبإضافة المعادلتين السابقتين لحذف ش نحصل على حـ = ٥ ى

أى أن ى = $\frac{١}{٥}$ × ٩,٨ = ١,٩٦ متر / ثانية^{٢}

الباب الثالث

الحركة الدورانية والقصور الذاتي

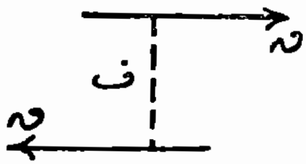
١ – ٣ تعاريف :

عندما يتحرك جسم ما حول محور لا ينتج عن ذلك إزاحة انتقالية للجسم ككل ولكن تكون الازاحة دورانية وتقاس بالزاوية التي دارها الجسم . وتعرف سرعة الجسم الدورانية ، ω بأنها معدل تغير الازاحة الزاوية بالنسبة للزمن ، أى أن :

$$\omega = \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}} = \frac{\text{٢ ط}}{\gamma}$$ حيث γ هى زمن الدورة الكاملة .

إذا كانت ق هى القوة المحدثة للحركة الدورانية فإن حاصل ضرب القوة فى المسافة العمودية بين اتجاه تأثيرها والمحور تسمى بعزم القوة حول المحور . ويبين العزم مدى تأثير القوة فى إحداث دوران للجسم .

الازدواج : يتركب من قوتين متساويتين مقداراً ومتضادتين اتجاهاً ، ولكنهما لا يعملان على خط تأثير واحد .



(شكل ٣ – ١)

عزم الازدواج = القوة × المسافة العمودية

= ق . ف

ويمكن للازدواج أن يتزن بتأثير ازدواج آخر يساويه فى المقدار ويضاده فى الاتجاه .

٣ – ٢ – حركة نقطة مادية فى دائرة : Motion in a circle

نفرض نقطة مادية تتحرك على محيط دائرة نصف قطرها نق بسرعة منتظمة ع .
ونفرض أن النقطة قد قطعت مسافة ى ف على محيط الدائرة فى زمن ى ن . تكون السرعة الخطية هى

$$\text{ع} = \frac{\text{ى ف}}{\text{ى ن}}$$

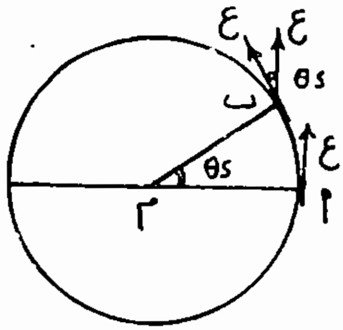
لكن ى ف = نق . ى θ حيث ى θ هى الزاوية عند المركز المقابل لهذا القوس .

$$\therefore \text{ع} = \text{نق} \cdot \frac{\text{ى}\theta}{\text{ى ن}} = \text{نق} \cdot \omega \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\text{٣ – ١})$$

القوة الطاردة المركزية : Centrifugal force

نفرض أن النقطة المتحركة تأخذ الوضع أ عند لحظة ما وأن سرعتها المنتظمة هى ع فى اتجاه المماس للدائرة .

بعد زمن ى ن تكون النقطة قد انتقلت إلى الوضع ب ويكون نصف القطر م أ قد قطع زاوية صغيرة ى θ .



(شكل ٣ – ٢)

العجلة هى معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن وتنشأ العجلة فى هذه الحالة من تغير اتجاه السرعة المنتظمة ع أثناء الحركة على الدائرة .

التغير فى السرعة فى اتجاه المماس بعد الزمن ى ن

= ع – ع جتا ى θ .

ولما كانت ى θ زاوية صغيرة

$\therefore$ جتا ﻯ θ = ١

$\therefore$ التغير فى السرعة فى اتجاه المماس = صفر

التغير فى السرعة فى اتجاه نصف القطر بعد الزمن ﻯ ن

= صفر − ع حا ﻯ θ

= − ع . ﻯ θ

حيث حا ﻯ θ = ﻯ θ تقريباً

والإشارة السالبة تعنى هنا أن التغير فى اتجاه نصف القطر للداخل ناحية المركز م .

$\therefore$ العجلة فى اتجاه المركز = ع . $\frac{ﻯ\theta}{ﻯ ن}$ = ع . θ

لكن ع = نق ω

$\therefore$ العجلة = ω^{2} نق = $\frac{ع^{2}}{نق}$ ... ... (٣ − ٢)

إذا كانت كتلة النقطة المادية ك فإن القوة المركزية الناتجة عن دورانها فى دائرة هى ك ω^{2} نق وتتجه نحو المركز . ويكون السبب فى ظهور هذه القوة المركزية هو نفس العامل المسبب للحركة الدائرية لجسم .

ولما كان لكل فعل رد فعل مساو له فى المقدار ومضاد فى الاتجاه ينتج لذلك قوة طاردة مركزية عكس اتجاه القوة الأولى وذلك لحفظ الاتزان الحركى . ومثال ذلك الحركة الدورانية لجسم (قطعة حجر مثلا) مربوط فى خيط وهو ما يسمى بالمقلاع. يؤثر الخيط بقوة على الحجر وتكون فى اتجاه الخيط ناحية المركز بينما يعمل الحجر نظراً لكتلته على مقاومة القوة المركزية بقوة طاردة تساويها . ولذلك نجد أنه عندما يترك طرف الخيط حرًّا من اليد أثناء حركة المقلاع يندفع الحجر المثبت فى الطرف الآخر بعيداً عن المركز الجاذب بسبب تأثير هذه القوة الطاردة .

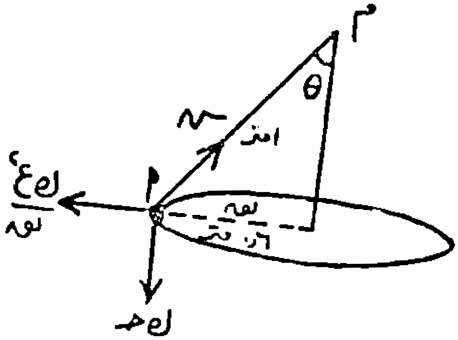
مثال :

الكتلة المعلقة فى خيط بندول طوله متر هى ١ كيلوجرام . إذا تحركت الكتلة فى دائرة أفقية نصف قطرها ٠,٦ متر أوجد الشد فى الخيط وكذلك الزمن الدورى .

(ﺟ = ٩.٨ متر / ثانية^{2})

الحل :

نفرض أن θ هى زاوية الحركة لهذا البندول المخروطى ، وهى الزاوية التى يصنعها الخيط م أ مع الرأسى (شكل ٣ — ٣) وأن الشد فى الخيط هو ش . تؤثر على الكتلة ك نتيجة للحركة الدائرية قوة طاردة مركزية $\frac{\text{ك ع}^{2}}{\text{نق}}$ متجهة للخارج .



(شكل ٣ — ٣)

بتحليل القوى المؤثرة على الكتلة ك فى الاتجاهين الأفقى والرأسى على الترتيب نحصل على :

ش حا θ = $\frac{\text{ك ع}^{2}}{\text{نق}}$

ش جتا θ = ك جـ

من هندسة الشكل و بوضع نق = ٠,٦ متر وطول الخيط = ١ متر

∴ حا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا θ = $\frac{٤}{٥}$

∴ ش = $\frac{\text{ك جـ}}{\text{جتا } \theta}$ = ٩,٨ × $\frac{٥}{٤}$ = ١٢,٢٥ نيوتن .

سرعة الحركة ع = $\sqrt{\frac{\text{ش نق حا } \theta}{\text{ك}}}$ = $\sqrt{١٢,٢٥ \times ٠,٦ \times \frac{٣}{٥}}$

= ٢,١ متر / ثانية

$$\text{السرعة الزاوية} = \omega = \frac{\text{ع}}{\text{نق}} = \frac{٢,١}{٠,٦} = ٣,٥$$

$$\text{الزمن الدورى} = \frac{\text{٢ ط}}{\omega} = ١,٨ \ \text{ثانية}$$

يلاحظ أنه بإيجاد خارج قسمة مركبات القوى فى الاتجاهين الأفقى والرأسى يمكن استنتاج قاعدة عامة للزمن الدورى للبندول المخروطى وهى :

$$\text{الزمن الدورى} = ٢ \ \text{ط} \sqrt{\frac{\text{ل جتا } \theta}{\text{جـ}}} \quad \text{حيث ل هو طول الخيط}$$

الميل فى سطح الطرق عند المنحنيات

إذا تحركت سيارة مثلا بسرعة ع على منحنى فى طريق نصف قطره نق فإنها تقع تحت تأثير عجلة طاردة مركزية تساوى $\frac{\text{ع}^٢}{\text{نق}}$

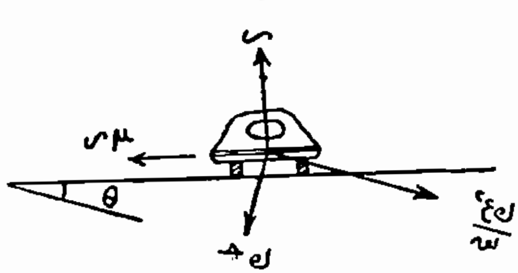
إذا كان الطريق أملساً فإن السيارة تندفع خارجه بعيداً عن مركز الانحناء ويتسبب ذلك فى وقوع حادث. وللتغلب على هذه الصعوبة ، خصوصاً فى الطرق التى تسير فيها بسرعة ، يصمم الطريق بحيث يرتفع مقطعه المستعرض فى الأجزاء المنحنية من الخارج عنه فى الأجزاء داخل المنحنى .

نفرض أن θ هى الزاوية التى يميلها سطح الطريق على الأفقى (شكل ٣ — ٤) من تحليل القوى المؤثرة على السيارة فى اتجاه سطح الطريق وفى الاتجاه العمودى عليه نحصل على :

$$\text{ك جـ حا } \theta = \text{ك } \frac{\text{ع}^٢}{\text{نق}} \text{ جتا } \theta$$

$$\text{ك جـ جتا } \theta = \text{ن}$$

حيث ك هى كتلة السيارة ، ن هو رد الفعل العمودى على الطريق



(شكل ٣ - ٤)

أى أن $\text{طا}\ \theta = \dfrac{\text{ع}^{2}}{\text{نق}\ .\ \text{حـ}}$

وتعطى هذه المعادلة الزاوية θ التى يجب أن يكون عليها ميل الطريق حتى لا تنقلب السيارة إذا سارت بسرعة أقصاها ع

عندما يكون سطح الطريق خشناً أى فى حالة وجود احتكاك معامله μ .

تكون قوة الاحتكاك $\mu\,\text{ر}$

وبتحليل القوى نحصل على :

$$\text{ك حـ حا}\ \theta + \mu\,\text{ر} = \frac{\text{ك ع}^{2}}{\text{نق}}\ \text{جتا}\ \theta$$

$$\text{ك حـ جتا}\ \theta = \text{ر}$$

أى أن

$$\text{ك حـ حا}\ \theta + \text{ك حـ جتا}\ \theta\ .\ \mu = \frac{\text{ك ع}^{2}}{\text{نق}}\ \text{جتا}\ \theta$$

وبالقسمة على ك حـ جتا θ نحصل على :

$$\text{طا}\ \theta = \frac{\text{ع}^{2}}{\text{نق حـ}} - \mu$$

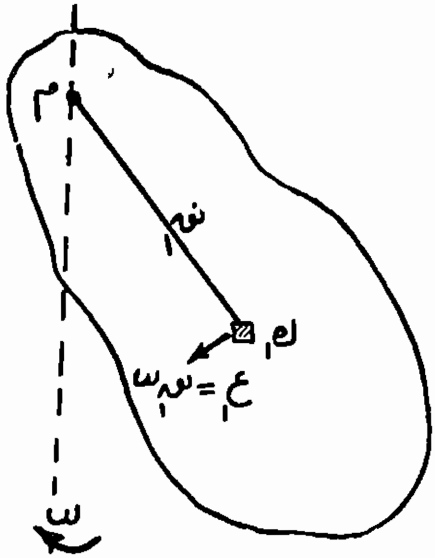
٣ – ٣ عزم القصور الذاتى : Moment of inertia

عندما يدور جسم متماسك حول محور ثابت م فإن جميع نقط الجسم تتحرك بنفس السرعة الزاوية ω . وتتوقف طاقة حركته الدورانية على السرعة الزاوية وعلى طريقة توزيع كتلة الجسم حول محور الدوران .

نفرض أن الجسم مكون من كتل صغيرة ك_{1} ، ك_{2} ، . . . تبعد عمودياً عن محور الدوران بالمسافات نق_{1} ، نق_{2} ، . . . وأن السرع الخطية لهذه الكتل هى ع_{1} ، ع_{2} ، ... على الترتيب (انظر شكل ٣ – ٥) .

طاقة حركة الكتلة $\text{ك}_{1} = \frac{1}{2}\,\text{ك}_{1}\,\text{ع}_{1}^{2} = \frac{1}{2}\,\text{ك}_{1}\,\text{نق}_{1}^{2}\,\omega^{2}$

بالمثل طاقة حركة $\text{ك}_{2} = \frac{1}{2}\,\text{ك}_{2}\,\text{نق}_{2}^{2}\,\omega^{2}$



(شكل ٣ – ٥)

∴ طاقة حركة الجسم = $\frac{1}{2}$ ك١ نق١² ω² + $\frac{1}{2}$ ك٢ نق٢² ω² + . . .

= $\frac{1}{2}$ ω² Σ ك نق²

= $\frac{1}{2}$ ے ω² .

والعلامة Σ تعبر عن مجموع أو تكامل ك نق² لجميع الكتل المكونة للجسم .

وتسمى Σ ك نق² بعزم القصور الذاتى للجسم حول محور الدوران ويرمز له بالرمز ے .
ويمكن كتابتها ك نق² حيث ك كتلة الجسم ، نق هو نصف قطر القصور الذاتى .

٣ – ٤ عزم القوى على جسم متماسك :

القوة المؤثرة على الكتلة ك١ = الكتلة × العجلة = ك١ . $\frac{د ع_1}{د ن}$

= ك١ $\frac{د}{د ن}$ (نق١ ω) = ك١ نق١ $\frac{د ω}{د ن}$

= ك١ نق١ $\frac{د^2 θ}{د ن^2}$ . . . . (٣ – ٣)

حيث $\frac{\text{د}\,\omega}{\text{د}\,\text{ن}} = \frac{\text{د}^{2}\,\theta}{\text{د}\,\text{ن}^{2}}$ هى قيمة العجلة الزاوية .

عزم هذه القوة حول محور الدوران $= \text{ك}_1\,\text{نق}_1^{2}\,\frac{\text{د}^{2}\,\theta}{\text{د}\,\text{ن}^{2}}$

بتجميع مثل هذه العزوم لجميع الكتل مثل ك_1 والتى يتكون منها الجسم يكون العزم الكلى للقوى المؤثرة على الجسم المتحرك دورانياً .

$$= (\text{ك}_1\,\text{نق}_1^{2} + \text{ك}_2\,\text{نق}_2^{2} + \ldots)\,\frac{\text{د}^{2}\,\theta}{\text{د}\,\text{ن}^{2}}$$

$$= \text{ے}\,\frac{\text{د}^{2}\,\theta}{\text{د}\,\text{ن}^{2}} \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \qquad (٣ - ٤)$$

٣ ــ ٥ كمية التحرك الزاوى :

كمية تحرك الكتلة ك_1 = الكتلة × السرعة الخطية

$$= \text{ك}_1\,\text{ع}_1$$

$$= \text{ك}_1\,\text{نق}_1\,\omega$$

عزم كمية التحرك حول المحور $= \text{ك}_1\,\text{نق}^{2}\,\omega$

ويسمى عزم كمية التحرك حول محور الدوران بكمية التحرك الزاوى . وبتجميع الكتل مثل ك_1 المكونة للجسم نحصل على كمية التحرك الزاوى للجسم كله .

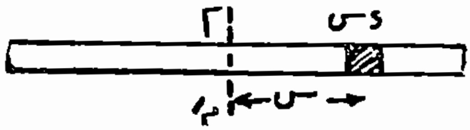
$$= (\text{ك}_1\,\text{نق}_1^{2} + \text{ك}_2\,\text{نق}_2^{2} + \cdots\cdots)\,\omega$$

$$= \text{ے}\,.\,\omega \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \qquad (٣ - ٥)$$

وينطبق قانون بقاء كمية التحرك الزاوى على الأجسام المتحركة دورانيًّا تماماً كما ينطبق قانون بقاء كمية التحرك الخطى فى حالة الحركة الخطية .

٣ ــ ٦ عزم القصور الذاتى لقضيب منتظم حول محور يمر بمنتصفه :

نقسم القضيب إلى أجزاء صغيرة كما فى شكل (٣ ــ ٦) . ولتكن مثل د س التى تبعد مسافة س عن مركز الإحداثيات السينى عند منتصف القضيب .



(شكل ٣ – ٦)

إذا كانت كتلة القضيب ك وطوله ل فإن كثافة الطولية هى $\frac{\text{ك}}{\text{ل}}$ وتكون كتلة الجزء ى س هى

$$\frac{\text{ك}}{\text{ل}} \,.\, \text{ى س}$$

عزم القصور الذاتى لهذه الكتلة الصغيرة $\left(\frac{\text{ك}}{\text{ل}} \,.\, \text{ى س} \right) \text{س}^{٢}$

وبتجميع مثل هذه الكميات لكل أجزاء القضيب نحصل على

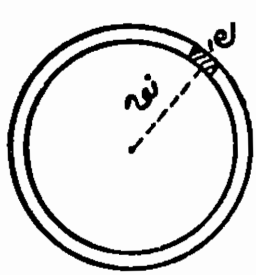
$$\text{عزم القصور الذاتى} = ٢ \int_{٠}^{\frac{\text{ل}}{٢}} \frac{\text{ك}}{\text{ل}} \,.\, \text{س}^{٢} \, \text{ى س}$$

$$\text{ے} = \frac{\text{ك ل}^{٢}}{١٢} \quad \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \quad (٣ - ٦)$$

٣ – ٧ عزم القصور الذاتى لحلقة حول مركزها :

نقسم الحلقة إلى أجزاء صغيرة كتلتها $\text{ك}_{١}$ ، $\text{ك}_{٢}$ ، ... وكلها يبعد نق عن مركز الحلقة .
« شكل (٣ – ٧) » .

عزم القصور الذاتى للحلقة حول المركز :



(شكل ٣ – ٧)

$$= \text{ك}_{١}\,\text{نق}^{٢} + \text{ك}_{٢}\,\text{نق}^{٢} + \ldots$$

$$= \text{نق}^{٢}\,(\text{ك}_{١} + \text{ك}_{٢} + \text{ك}_{٣} + \ldots)$$

$$= \text{ك}\,\text{نق}^{٢} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٣ - ٧)$$

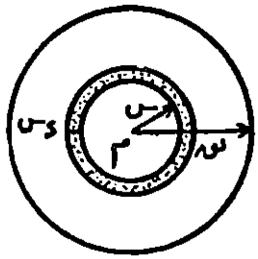
٣ – ٨ عزم القصور الذاتى لقرص حول محور عمودى يمر بمركزه :

نفرض أن القرص عبارة عن مجموعة حلقات داخل بعضها .

نعتبر حلقة نصف قطرها س وسمكها ى س .

تكون مساحتها ٢ ط س ى س . إذا كانت الكثافة السطحية هى :

$\dfrac{\text{ك}}{\text{ط}\,\text{نق}^{٢}}$ تكون :



(شكل ٣ – ٨)

$$\text{كتلة الحلقة} = ٢\ \text{ط}\ \text{س}\ \text{ى}\ \text{س} \cdot \frac{\text{ك}}{\text{ط}\,\text{نق}^{٢}}$$

عزم القصور لها حول المركز = كتلتها × مربع بعدها عن المركز .

$$= ٢\ \text{ط}\ \text{س}\ \text{ى}\ \text{س}\ \frac{\text{ك}}{\text{ط}\,\text{نق}^{٢}} \cdot \text{س}^{٢}$$

وبإجراء التكامل على جميع الحلقات ابتداء من س = صفر إلى س = نق نحصل على عزم القصور للقرص ے

$$\text{ے} = \int_{٠}^{\text{نق}} ٢\,\frac{\text{ك}}{\text{نق}^{٢}}\,\text{س}^{٣}\ \text{ى}\ \text{س} = \frac{٢\ \text{ك}}{\text{نق}^{٢}} \cdot \frac{\text{نق}^{٤}}{٤}$$

$$= \frac{\text{ك}\,\text{نق}^{٢}}{٢} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٣ - ٨)$$

٣ — ٩ عزم القصور الذاتى لأسطوانة حول محورها :

يمكن اعتبار الأسطوانة مجموعة أقراص ويكون عزم القصور لكل قرص مساويًا $\frac{1}{2}$ ك$_1$ نق^2 ، حيث ك$_1$ هى كتلة القرص ، نق نصف قطر الأسطوانة .

وبتجميع عزم القصور لكل هذه الأقراص المتشابهة يكون عزم القصور للأسطوانة .

$$ى = \frac{1}{2} \text{ك نق}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٣-٩)$$

حيث ك هى كتلة الأسطوانة .

تمرين :

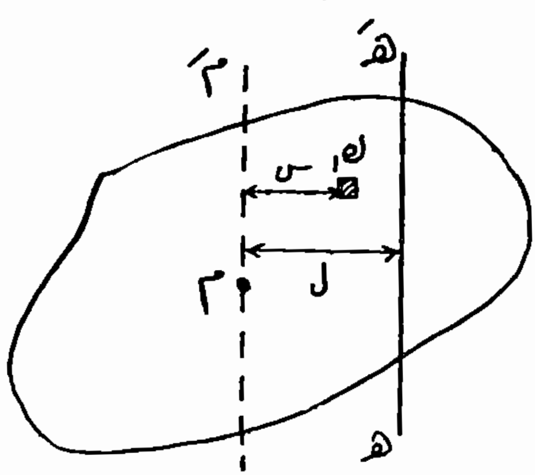
أثبت أن عزم القصور الذاتى لكرة حول محور يمر بمركزها هو $\frac{2}{5}$ ك نق^2 ، حيث ك كتلة الكرة ، نق نصف قطرها .

الحل :

الحل : (تقسم الكرة إلى مجموعة أقراص ، ثم يوجد عزم القصور الذاتى لكل قرص ، ثم يجمع لتحصل على المطلوب) .

٣ — ١٠ قانون المحاور المتوازية لعزم القصور :

نفرض أن ى م هو عزم قصور جسم حول محور م مَ يمر بمركز الثقل م ، (شكل ٣ — ٩)



(شكل ٣ — ٩)

وأن ى هو عزم القصور الذاتى حول المحور هـ هـَ الذى يوازى م مَ ويبعد عنه مسافة ل . اعتبر كتلة صغيرة ك تبعد عن م مَ مسافة س عزم القصور الذاتى لها حول هـ هـَ = $ك_١$ (ل − س)^٢ .

∴ عزم القصور للجسم كله حول هـ هـَ

$= \text{ى} = \Sigma\ ك_١\ (ل - س)^٢$

$= \Sigma\ ك_١\ ل^٢ + \Sigma\ ك_١\ س^٢ - ٢\ \Sigma\ ك_١\ ل\ س$

لكن $\Sigma\ ك_١\ ل^٢ = ل^٢\ \Sigma\ ك_١ = ك\ ل^٢$

حيث ك هى الكتلة الكلية للجسم ،

Σ ك س^٢ = $\text{ى}_م$ = عزم القصور الذاتى حول م مَ ،

$\Sigma\ ٢\ ك_١\ ل\ س = ٢\ ل\ \Sigma\ ك_١\ س$ = صفر

لأن $\Sigma\ ك_١$ س هى مجموع العزوم حول مركز الثقل وهذا يساوى صفراً لأن وزن الجسم يمر بمركز الثقل .

∴ $\text{ى} = \text{ى}_م + ك\ ل^٢$ ... ... (٣−١٠)

أى أنه عند إيجاد عزم القصور الذاتى حول محور يوازى المحور الأصلى يضاف المقدار ك ل^٢ حيث ل هو البعد بين المحورين .

مثال ١ : عزم القصور الذاتى لأسطوانة حول محورها = $\frac{١}{٢}$ ك نق^٢ . لإيجاد عزم القصور الذاتى لها حول خط تلامسها مع السطح الموضوعة عليه يضاف إلى ذلك مقدار ك نق^٢ ويصبح العزم $\frac{٣}{٢}$ ك نق^٢ .

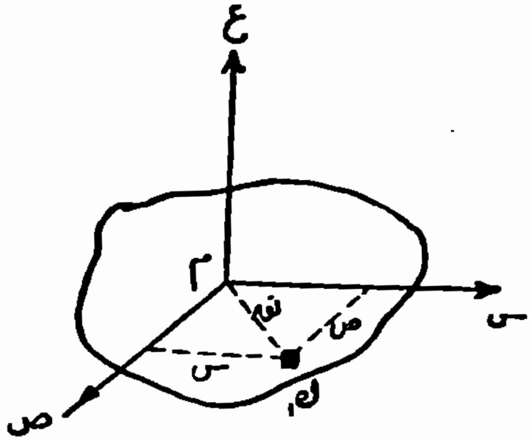
مثال ٢ : عزم القصور الذاتى لقضيب طوله ل حول منتصفه = $\frac{ك\ ل^٢}{١٢}$

لإيجاد عزم القصور له حول أحد طرفيه يضاف المقدار ك $\left(\frac{ل}{٢}\right)^٢$ أى $\frac{ك\ ل^٢}{٤}$

ويصبح عزم القصور الذاتى للقضيب حول طرفه مساوياً $\frac{١}{٣}$ ك ل^٢ .

٣ − ١١ قانون المحاور المتعامدة :

اعتبر ثلاثة محاور متعامدة م س ، م ص ، م ع . نفرض كتلة صغيرة من الجسم $ك_١$ ، تبعد نق عن المحور م ع .



(شكل ٣ – ١٠)

عزم القصور الذاتى لها حول م ع = ك$_1$ نق^2

∴ ے = ك$_1$ (س^2 + ص^2)

∴ عزم القصور الكلى للجسم حول م ع

= Σ ك$_1$ س^2 + Σ ك$_1$ ص^2

∴ ے = ےس + ےص ... ... (٣ – ١١)

حيث ےس ، ےص هما عزما القصور الذاتى حول م س ، م ص على الترتيب .

٣ – ١٢ طاقة حركة جسم متدحرج :

عندما يتدحرج جسم أسطوانى أو كروى على مستوى يكون للجسم طاقة حركة دورانية بالإضافة لطاقة حركته الانتقالية ، عند دحرجة أسطوانة على سطح يكون خط التلامس بين الأسطوانة والسطح هو محور الدوران . إذا كان عزم القصور الذاتى للأسطوانة حول المحور ے تكون طاقة الحركة الكلية للأسطوانة :

الطاقة = $\frac{1}{2}$ ے ω^2 ... ... (٣ –١٢)

حيث ω هى السرعة الزاوية للحركة .

بتطبيق قانون المحاور المتوازية ے = ےم + ك نق^2 حيث ےم هو عزم القصور الذاتى حول محور الأسطوانة ، نق نصف قطرها ،

∴ طاقة الحركة للأسطوانة = $\frac{1}{2}$ ــــم ω^2 + $\frac{1}{2}$ ك ω^2 نق^2

لكن السرعة الخطية لحركة الأسطوانة ع = نق . ω

∴ طاقة حركة الأسطوانة = $\frac{1}{2}$ ــــم ω^2 + $\frac{1}{2}$ ك ع^2 ... ... (٣ – ١٣)

= طاقة الحركة الدورانية حول المحور + طاقة الحركة الانتقالية .

مثال :

أوجد عجلة أسطوانة تتحرك من سكون على مستوى مائل بزاوية θ على الأفقى ، وأوجد كذلك الزمن اللازم لكى تقطع المسافة ف .

الحل : نفرض أن كتلة الأسطوانة ك

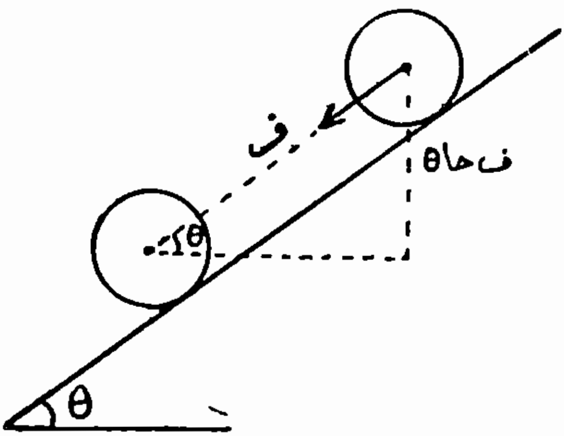
∴ طاقة الحركة = $\frac{1}{2}$ ك ع^2 + $\frac{1}{4}$ ك نق^2 ω^2

= $\frac{1}{2}$ ك ع^2 + $\frac{1}{4}$ ك ع^2 = $\frac{3}{4}$ ك ع^2

إذا تحركت الأسطوانة من سكون مسافة ف فإنها تكون قد سقطت عمودياً المسافة ف حا θ ويتحول النقص فى طاقة الموضع ك جـ ف حا θ ، إلى طاقة حركة $\frac{3}{4}$ ك ع^2 أى أن

ك جـ ف حا ω = $\frac{3}{4}$ ك ع^2

∴ ع^2 = $\frac{4\text{ جـ}}{3}$ ف حا θ ، لكن إذا كانت عجلة التسارع للأسطوانة هـ ى فإن



(شكل ٣ – ١١)

$$\text{ع}^{٢} = ٢\ \text{ى}\ \text{ف}$$

حيث ع هى سرعة الأسطوانة عند نهاية المسافة ف .

$$\therefore\ ٢\ \text{ى}\ \text{ف} = \frac{٤\ \text{حـ}}{٣}\ \text{ف}\ \text{حا}\ \theta$$

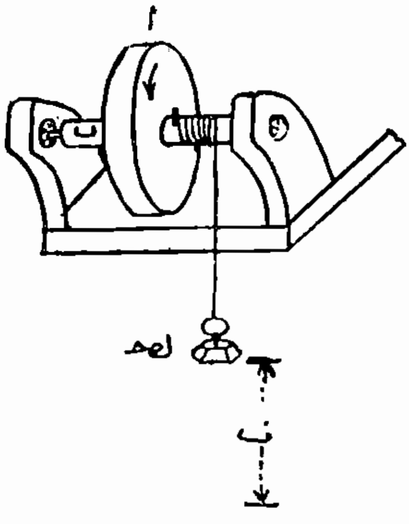
$$\therefore\ \text{ى} = \frac{٢}{٣}\ \text{حـ}\ \text{حا}\ \theta$$

لإيجاد زمن قطع مسافة ف نستخدم المعادلة $\text{ف} = \frac{١}{٢}\ \text{ى}\ \text{ن}^{٢}$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣}\ \text{حـ}\ \text{حا}\ \theta\ \text{ن}^{٢}$$

$$\therefore\ \text{ن} = \sqrt{\frac{٣\ \text{ف}}{\text{حـ}\ \text{حا}\ \theta}}$$

٣ – ١١ عزم القصور الذاتى للحدافة : Fly wheel



(شكل ٣ – ١٢)

الحدافة عبارة عن قرص ثقيل أ يمكن له أن يدور بحرية حول أسطوانة ب نصف قطرها نق (شكل ٣ – ١٢) . مثبت على الأسطوانة مسمار يوضع عليه خية خيط طويل يلف عليها وينتهى بكتلة معلقة ك . إذا ترك الثقل يسقط مسافة ف مثلا فإن الأسطوانة تدور حول محورها وكذلك الحدافة . يستمر تسارع الحدافة حتى يسقط الثقل على الأرض ونفرض أن $\text{ن}_{١}$ هى عدد دورات الحدافة من بدء الحركة حتى سقوط الثقل وأن الزمن الذى تمت فيه هذه الدورات هو $\text{ز}_{١}$.

نفرض أن عدد الدورات التالية حتى تعود الحدافة ثانية إلى حالة السكون هى $ن_٢$ وأن الزمن اللازم لذلك هو $ز_٢$.

باعتبار المجموعة معزولة و بتطبيق قانون بقاء الطاقة فإن :

طاقة الموضع التى فقدت بسقوط الكتلة ك مسافة ف تساوى طاقة الحركة الخطية المكتسبة بواسطة الكتلة الساقطة ك بالإضافة إلى طاقة الحركة الدورانية التى اكتسبتها الحدافة .

أى أن

$$ك\ جـ\ ف = \frac{١}{٢}\ ك\ ع^٢ + \frac{١}{٢}\ ى\ \omega^٢$$

حيث ع هى السرعة النهائية للكتلة ك عند نهاية السقوط ، ω هى السرعة الزاوية للحدافة عند نفس هذه اللحظة

السرعة المتوسطة للكتلة الساقطة هى $\bar{ع} = \frac{ف}{ز_١}$

السرعة النهائية للكتلة = ضعف السرعة المتوسطة

$$\therefore\ ع = ٢\ \bar{ع} = \frac{٢\ ف}{ز_١}$$

وتكون بذلك

السرعة الزاوية للحدافة عند لحظة سقوط الكتلة هى $\omega = ع\ /\ نق$. يلاحظ أنه يمكن إيجاد هذه السرعة بطريق آخر :

السرعة الزاوية المتوسطة للحدافة من لحظة سقوط الكتلة على الأرض حتى لحظة سكون الحدافة

$$= \frac{٢\ ط\ ن_٢}{ز_٢}$$

السرعة الزاوية للحدافة عند لحظة سقوط الكتلة $= ٢\ \bar{\omega} = \frac{٤\ ط\ ن_٢}{ز_٢}$

وتستخدم هذه الطريقة فى إيجاد السرعة الزاوية إذا كان زمن سقوط الكتلة ($ز_١$) صغيراً

تصحيح الاحتكاك فى محاور الدوران :

إذا كان الاحتكاك كبيراً عند محاور الدوران فإن جزءاً من الطاقة يتبدد فى التغلب على قوى الاحتكاك .

نفرض أن ش هو كمية الشغل المبذول ضد الاحتكاك فى كل دورة . بما أن الحدافة قد دارت أثناء سقوط الكتلة عدد ن_1 دورات فإن الشغل الكلى المبذول ضد الاحتكاك أثناء سقوط الكتلة $= \text{ن}_1$ ش

وتصبح معادلة قانون بقاء الطاقة كما يلى :

$$\text{ك ح ف} = \frac{1}{2}\,\text{ك ع}^{2} + \frac{1}{2}\,\text{ے}\,\omega^{2} + \text{ن}_1\,\text{ش}$$

ولكن بما أن الاحتكاك وحده هو المتسبب فى إيقاف الحدافة وبما أنها قد دارت عدد ن_2 دورات حتى السكون فإن طاقة الحركة الدورانية $\frac{1}{2}\,\text{ے}\,\omega^{2}$ تكون قد استنفدت فى التغلب على الاحتكاك .

أى أن :

$$\frac{1}{2}\,\text{ے}\,\omega^{2} = \text{ش}\,\text{ن}_2$$

$$\therefore\ \text{ش} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{ے}\,\omega^{2}}{\text{ن}_2}$$

وبحذف ش من المعادلتين السابقتين نحصل على

$$\text{ك ح ف} = \frac{1}{2}\,\text{ك ع}^{2} + \frac{1}{2}\,\text{ے}\,\omega^{2} + \frac{\text{ن}_1}{\text{ن}_2}\cdot\frac{1}{2}\,\text{ے}\,\omega^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{ك ع}^{2} + \frac{1}{2}\,\text{ے}\,\omega^{2}\left(1 + \frac{\text{ن}_1}{\text{ن}_2}\right)$$

وتعتبر هذه المعادلة مصححة لخطأ الاحتكاك فى محاور الدوران .

تمارين :

١ ــ تتحرك أسطوانة مصمتة على مستوى أملس مائل بزاوية ٣٠° على الأفقى . إذا تمت الحركة أولا بالانزلاق وثانياً بالتدحرج . قارن بين عجلتى التسارع فى كلتا الحالتين إذا كانت الحركة تبدأ من السكون .

(الجواب ٣ : ٢)

٢ ــ أوجد عزم القصور الذاتى لقرص حول محور عمودى عليه ويمر بنقطة على المحيط . ثم احسب طاقة حركة قرص كتلته $\frac{1}{2}$ كيلوجرام يتدحرج بدون انزلاق على مستوى بسرعة ثابتة قدرها ٠,٢ متر / ثانية .

(الجواب ٠,٠١٥ جول)

٣ ــ كرتان متساويتان فى الكتلة والحجم ، إحداهما مصمتة والأخرى مجوفة اشرح كيف يمكن تمييزهما عن بعضهما ؟

٤ ــ حبل ينقطع تحت تأثير ثقل ٥٠ كجم. علق فى جزء طوله ١٠ أمتار من هذا الحبل كتلة قدرها ١ كيلوجرام ، ثم أديرت الكتلة فى مستوى أفقى حول الطرف الآخر من الحبل . أوجد أكبر عدد من الدورات فى الدقيقة التى يحتملها الحبل قبل أن ينقطع .

الباب الرابع

البندول والجاذبية الأرضية

٤ ـــ ١ الحركة التوافقية البسيطة : Simple harmonic motion

عندما يتحرك جسم ما ذهاباً وإياباً حول موضع اتزان ثابت يطلق على هذه الحركة التذبذبية بالحركة التوافقية البسيطة . ومثال ذلك حركة بندول الساعة . ولما كان لهذا النوع من الحركة أهمية كبيرة فى علم الطبيعة إذ أنه يتكرر كثيراً بأشكال مختلفة فى جميع المجالات ، لذلك فسوف نقدم دراسة تفصيلية لها .

تنشأ هذه الحركة عادة إذا أزيح جسم إزاحة صغيرة من موضع اتزان فى مجال جاذب للقوة ثم ترك حرًّا . مثلا سلك زنبركى معلق بطرفه ثقل ، إذا أزيح الثقل من وضع اتزانه وترك لشأنه تحدث حركة تذبذبية .

يعرف ثابت القوة بأنه القوة التى إذا أثرت على الجسم أحدثت فيه وحدة الإزاحة . ويرمز له بالرمز μ فإذا كانت الإزاحة ص تكون القوة التى تعمل على إعادة الجسم لوضع اتزانه هى $-\mu$ ص وهذه القوة هى التى تحدث عجلة التسارع للحركة $\frac{d^2 ص}{d ن^2}$. فإذا كانت كتلة الجسم ك تكون معادلة الحركة هى :

القوة = الكتلة × العجلة أى

$$ك \cdot \frac{d^2 ص}{d ن^2} = -M \text{ ص} \quad \ldots \quad (٤-١)$$

من هذه المعادلة يتضح أن النسبة بين عجلة الحركة التوافقية إلى الإزاحة فى أى لحظة تساوى $-\left(\frac{\mu}{ك}\right)$ أى ـــ (مقدار ثابت موجب) ويؤخذ هذا كتعريف للحركة التوافقية البسيطة .

الزمن الدورى للحركة ، γ ، هو الزمن الذى يمضى بين وضعين متتالين للجسم تتكرر فيهما حركته مقداراً وإتجاهاً ، أى أنه الزمن اللازم لعمل ذبذبة كاملة

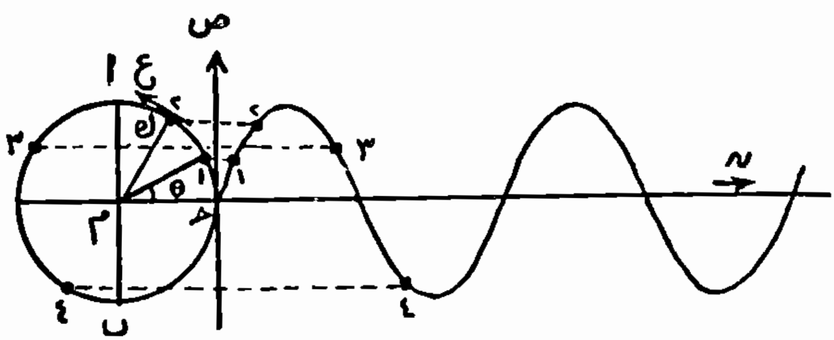
التردد « ت » هو مقلوب الزمن الدورى . ويساوى عدد الذبذبات فى الثانية .

سعة الحركة التوافقية هى أقصى إزاحة للجسم ، ومدى الحركة التوافقية هو ضعف سعة الحركة .

٤ — ٢ معادلات الحركة التوافقية البسيطة :

أولاً — الإزاحة :

اعتبر حركة نقطة مادية كتلتها ك تتحرك على محيط دائرة مركزها م ونصف قطرها نق ، بسرعة زاوية ω ، (شكل ٤ — ١) .



(شكل ٤ — ١)

نفرض أن أ م ب هو قطر ثابت بالدائرة . يتحرك مسقط الكتلة ك على القطر أ ب ذهاباً وإياباً مرة كل دورة كاملة تتحركها ك على محيط الدائرة. نفرض أن وضع الكتلة ك عند لحظة ما بعد زمن ن من بدء الحركة عند حـ يصنع مع المركز م زاوية θ مع المحور السينى م حـ . ونفرض أن المسقط على أ ب يبعد مسافة ص عن مركز الدائرة م .

$\therefore$ ص = نق حا θ

لكن من تعريف السرعة الزاوية $\omega = \frac{\theta}{ن}$

$\therefore$ θ = ن ω .

$\therefore$ إزاحة الحركة التوافقية على أ ب هى

ص = نق حا ω ن ... ... (٤ — ٢)

تصبح الإزاحة أكبر ما يمكن وتسمى سعة الحركة عندما تكون الزاوية ω ن = $\frac{ط}{٢}$ وتكون عندئذ مساوية لنصف قطر الدائرة .

المعادلة (٤ – ٢) تبين مقدار الإزاحة ص فى أى لحظة ن أثناء الحركة وعند رسم هذه العلاقة بيانياً نحصل على الشكل (٤ – ٢) الذى يطلق عليه منحنى الجيب نسبة إلى الدالة التى تربط الإزاحة بالزمن .

ثانياً – السرعة :

إذا كانت ع. هى السرعة المنتظمة التى تتحرك بها الكتلة ك على المحيط تكون مركبتها فى اتجاه القطر أ ب هى ع. حتا θ وهى سرعة الحركة التوافقية .

من هندسة الشكل :

$$\text{حتا}\ \theta = \sqrt{1 - \text{جا}^2\ \theta} = \sqrt{1 - \frac{\text{ص}^2}{\text{نق}^2}}$$

$$\text{لكن ع.} = \text{نق}\ .\ \omega$$

$\therefore$ سرعة الحركة التوافقية عند لحظة ن هى

$$\text{ع} = \text{نق}\ \omega \sqrt{1 - \frac{\text{ص}^2}{\text{نق}^2}}$$

$$= \omega \sqrt{\text{نق}^2 - \text{ص}^2} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (٤-٣)$$

وتعطى هذه المعادلة السرعة بدلالة الإزاحة ص .

ثالثاً – العجلة :

توجد نتيجة للحركة الدائرية عجلة مركزية فى اتجاه نصف القطر للداخل قيمتها نق ω^2 .

عجلة الحركة التوافقية البسيطة ، حـ . هى مركبة العجلة المركزية فى اتجاه القطر أ ب

$$\therefore \text{حـ} = -\text{نق}\ \omega^2\ \text{حا}\ \theta$$

$$\therefore \frac{\text{د}^2\ \text{ص}}{\text{د ن}^2} = -\text{نق}\ \omega^2 \frac{\text{ص}}{\text{نق}} = -\omega^2\ \text{ص}$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (٤ - ٤)$$

والإشارة السالبة هنا سببها تعاكس العجلة والإزاحة فى الاتجاه . أى أن العجلة تكون تناقصية عندما تتزايد الإزاحة والعكس بالعكس . وبمقارنة المعادلة (٤ – ٤) بالمعادلة (٤ – ١) نجد أن ω^2 =

$\frac{\mu}{ك}$ وبمعرفة أن $= \frac{٢ ط}{\gamma} = ٢$ ط ت ، حيث γ هي الزمن الدورى ، ت هو التردد

نحصل على

$$ت = \frac{١}{٢ ط}\sqrt{\frac{\mu}{ك}} \quad \ldots \quad (٤ - ٥)$$

٤ ــ ٣ طاقة الحركة التوافقية البسيطة :

إذا كانت ك هي كتلة النقطة المادية التي تتحرك حركة توافقية بسيطة تكون القوة التي تحدث الحركة هي

$$ق = ك ح = - \mu ص$$

لكن من قانون نيوتن الثانى القوة هى المعدل الزمنى لتغير كمية التحرك أى أن

$$ق = \frac{ى}{ى ن}(ك ع) = \frac{ى}{ى ص}(ك ع)\ \frac{ى ص}{ى ن} = \frac{ى ع}{ى ص} . ك ع$$

$$\therefore ك ع \frac{ى ع}{ى ص} + \mu . ص = صفر$$

$$\therefore ك ع ى ع + \mu ص ى ص = صفر$$ وبالتكامل نحصل

$$\frac{١}{٢} ك ع^{٢} + \frac{١}{٢} \mu ص^{٢} = ثابت \quad \ldots \quad (٤ - ٦)$$

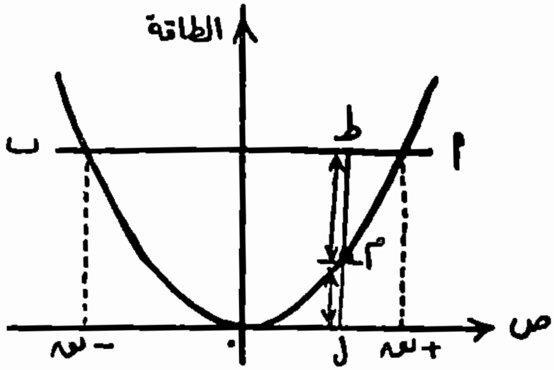
تمثل $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} طاقة الحركة للجسم فى موضع معين بينما تمثل $\frac{١}{٢} \mu$ ص^{٢} طاقة الموضع له فى نفس المكان . وواضح أن مجموع الطاقتين يكون ثابتاً دائماً ويساوى مقدار الطاقة الكلية للحركةالتوافقيةالبسيطة .

ويمكن إظهار هذه العلاقة بالرسم الموضح بشكل (٤ ــ ٢) .

يبين القطع المكافئ تغير طاقة الموضع مع الإزاحة إذ أن

طاقة الموضع $= \frac{١}{٢} \mu$ ص^{٢}.

كما يمثل الخط الأفقى أ ب مستوى الطاقة الكلية للحركة التوافقية التي يحدها المدى ± ى.
عند أى نقطة م داخل الحركة يمثل الإحداثى ل م طاقة الموضع بينما يمثل الإحداثى مط طاقة الحركة . ومن الواضح أن طاقة الحركة والموضع دائمة التغير من نقطة إلى أخرى ولكن مجموعهما دائماً ثابت . وتكون طاقة الموضع أكبر ما يمكن عند طرفى الحركة « ص = ى » بينما تكون طاقة الحركة أكبر ما يمكن عند مركز الحركة « ص = صفر » .



(شكل ٤ – ٢)

٤ – ٤ البندول البسيط : Simple Pendulum

يتركب البندول البسيط من كتلة صلبة معلقة فى خيط . إذا أزيحت كرة البندول جانباً ، وتركت فإنها تتذبذب فى حركة توافقية تحت تأثير الجاذبية الأرضية .

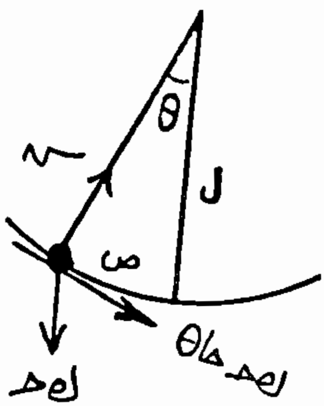
لكى نثبت أولا أن الحركة توافقية نفرض أن ك هى كتلة الجسم ، θ هى زاوية الحركة عند لحظة ما .

يؤثر على الحركة ثقل الجسم إلى أسفل ويساوى ك حـ والشد فى الخيط ش . بتحليل القوى المؤثرة على البندول فى اتجاه الخيط وفى اتجاه عمودى عليه نجد أن

مركبة الثقل فى اتجاه المماس = ك حـ حا θ

وفى اتجاه الخيط = ك حـ جتا θ

وتتعادل هذه المركبة الأخيرة مع الشد فى الخيط .



(شكل ٤ – ٣)

∴ القوة التى تتحرك بها الكتلة ك هى $\text{ق} = -$ ك جـ حا θ

والإشارة سالبة لأن ق تتزايد عندما تنقص θ . هذه الحركة غير توافقية لأن القوة ق تتناسب مع حا θ . ولكن فى حالة الزوايا الصغيرة يمكن اعتبار حا $\theta = \theta$.

$$\therefore \text{ق} = -\text{ك} \times \text{جـ} \times \theta = -\text{ك} \times \text{جـ} \times \frac{\text{ص}}{\text{ل}}$$

حيث ل هو طول البندول ، ص هى الإزاحة .

∴ $\text{ق} = -\text{ك} \frac{\text{جـ}}{\text{ل}}$ ص وبقسمة الطرفين على الكتلة ك نحصل على

عجلة الحركة للبندول $= -\frac{\text{جـ}}{\text{ل}}$ ص $= -\omega^{2}$ ص وهذه معادلة حركة

توافقية بسيطة ، تكون فيها $\omega^{2} = \frac{\text{جـ}}{\text{ل}}$ أى أن $\omega = \sqrt{\frac{\text{جـ}}{\text{ل}}}$

$$\therefore 2\,\text{ط}\,\text{ت} = \sqrt{\frac{\text{جـ}}{\text{ل}}} \qquad \frac{2\,\text{ط}}{\ddot{\gamma}}$$

ويكون زمن الذبذبة للبندول $\ddot{\gamma} = 2\,\text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{جـ}}}$ ... ... (٤ – ٧)

٤ – ٥ تأثير درجة الحرارة على زمن ذبذبة بندول بسيط :

عندما ترتفع درجة حرارة جسم متذبذب (بندول ساعة مثلا) تتغير أبعاده وبالتالى يقل زمن ذبذبته . فإذا اعتبرنا حالة بندول بسيط يتركب من سلك معدنى طوله ل_1 فى درجة د_1 ومعامل تمدده الطولى $\propto$ فإن زمن ذبذبته ن_1 فى هذه الدرجة هى :

$$\text{ق}_1 = 2\,\text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}_1}{\text{جـ}}}$$

حيث جـ هى عجلة الجاذبية الأرضية ، ط هى النسبة التقريبية .

إذا ارتفعت درجة الحرارة إلى د_2 فإن طول البندول يصبح ل_2 ويتغير زمن ذبذبته إلى ن_2 بحيث تكون :–

$$\text{ن}_{2} = 2\,\text{ط}\,\sqrt{\frac{\text{ل}_{2}}{\text{جـ}}}$$

وتكون بذلك النسبة بين زمن الذبذبتين هى :

$$\frac{\text{ن}_{2}}{\text{ن}_{1}} = \sqrt{\text{ل}_{2} / \text{ل}_{1}} = \sqrt{\text{ل}_{1}\,(1 + \alpha\,.\,\text{ى}) / \text{ل}_{1}}$$

$$= (1 + \alpha\,.\,\text{ى})^{\frac{1}{2}}$$

حيث $\text{ى} = \text{ى}_{2} - \text{ى}_{1}$. وهذه تساوى تقريباً :

$$\frac{\text{ن}_{2}}{\text{ن}_{1}} = 1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha\,.\,\text{ى}$$

ويمكن كتابتها على الصورة :

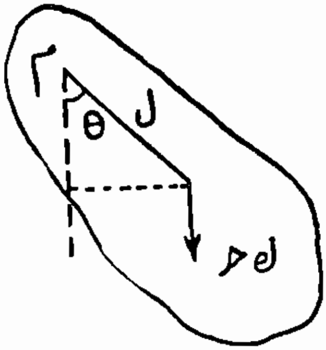
$$(\text{ن}_{2} - \text{ن}_{1}) = \tfrac{1}{2}\,\alpha\,\text{ن}_{1}\,.\,\text{ى} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (٤ - ٨)$$

من هذا يتضح أن الزيادة فى زمن الذبذبة من ن_{1} إلى ن_{2} بارتفاع درجة الحرارة بمقدار ى°م يساوى $\tfrac{1}{2}\,\alpha\,\text{ن}_{1}\,.\,\text{ى}$ وتتحول هذه الزيادة إلى نقص إذا انخفضت درجة الحرارة وأصبحت ى_{2} أقل من ى_{1} .

تظهر أهمية هذه الظاهرة عند صناعة الساعات . فمن المفروض أن يعطى بندول الساعة زمناً ثابتاً لذبذبته لا يتوقف على اختلاف درجة الحرارة من الليل للنهار أو من مكان إلى آخر . لذلك اتجه التفكير إلى تصميم بندول للساعة يظل طوله (من نقطة التعليق إلى مركز حركته) ثابتاً مهما تغيرت درجة الحرارة . وقد كان بندول هاريسون التكافؤى المستعمل حتى الآن فى ساعات الحائط أحد هذه المحاولات الناجحة . ويتركب من مجموعة من القضبان معاملات تمددها مختلفة وقد ثبتت ببعضها على شكل إطار بعد اختيار مناسب لأطوالها بحيث يظل بعد مركز ثقل البندول عن نقطة تعليقه ثابتاً دائماً لا يتغير باختلاف درجة حرارة الجو من مكان لآخر أو من زمان لآخر .

٤ — ٦ البندول المركب : Compound Pendulum

إذا علق جسم من نقطة م ثم أزيح جانباً وترك بعد ذلك حراً فإنه يتحرك حركة توافقية بسيطة حول محور يمر بنقطة التعليق عمودياً على مستوى الحركة بشرط أن تكون زاوية الحركة θ صغيرة . عزم الازدواج المسبب للحركة = ك جـ . ل حا θ حيث ل هى المسافة بين مركز ثقل الجسم ونقطة التعليق عندما تكون θ صغيرة ، يكون حا θ = θ وتصبح معادلة الحركة :



(شكل ٤ – ٤)

$$\text{ے}\,\frac{d^{2}\theta}{d\text{ن}^{2}} = -\,\text{ك حـ ل}\;\theta \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \qquad (\text{٤ – ٩})$$

الإشارة السالبة تعنى أن عزم القوة ك حـ يعاكس فى الاتجاه دائماً تزايد الإزاحة الزاوية θ .

$$\therefore\ \frac{d^{2}\theta}{d\text{ن}^{2}} = -\,\omega^{2}\,\theta \quad \text{حيث} \quad \omega^{2} = \frac{\text{ك حـ ل}}{\text{ے}}$$

∴ الحركة توافقية بسيطة فيها ω هى السرعة الزاوية .

$$\therefore\ \text{زمن الدورة}\ \ddot{\text{ن}} = \frac{\text{٢ ط}}{\omega} = \text{٢ ط}\sqrt{\frac{\text{ے}}{\text{ك حـ ل}}} \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots \qquad (\text{٤ – ١٠})$$

بتطبيق قانون المحاور المتوازية لعزم القصور الذاتى :

$$\therefore\ \text{ے} = \text{ے}_{\text{م}} + \text{ك ل}^{2} = \text{ك ع}^{2} + \text{ك ل}^{2}$$

حيث $\text{ے}_{\text{م}}$ هو عزم القصور للجسم حول محور يمر بمركز الثقل ، ع هو نصف قطر القصور حول هذا المحور .

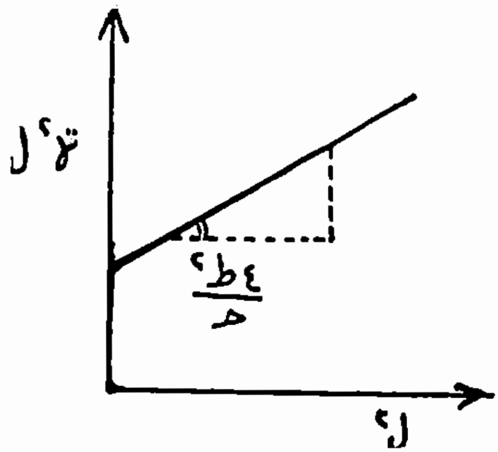
$$\therefore\ \ddot{\text{ن}} = \text{٢ ط}\sqrt{\frac{\text{ك}\,(\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2})}{\text{ك حـ ل}}} = \text{٢ ط}\sqrt{\frac{\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2}}{\text{ل حـ}}}$$

$$= \text{٢ ط}\sqrt{\bar{\text{ل}}\,/\,\text{حـ}} \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \qquad (\text{٤ – ١١})$$

حيث إن $\bar{\text{ل}} = \dfrac{\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2}}{\text{ل}}$ هو طول البندول البسيط المكافىء .

لإيجاد عجلة الجاذبية عملياً يستخدم قضيب من النحاس به ثقوب تصلح نقط تعليق .

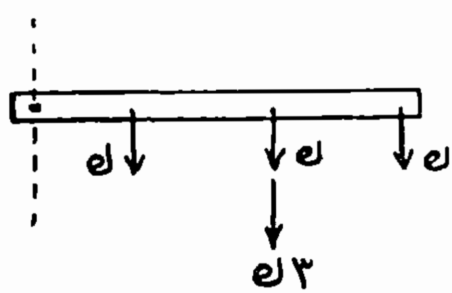
نوجد مركز ثقل القضيب ثم يعلق من نقط مختلفه و يقاس فى كل مرة بعد نقطة التعليق عن مركز الثقل ، ل.
ونوجد زمن الذبذبة ن لكل بعد . ثم ترسم علاقة بيانية بين ن^{٢} ل ، ل^{٢} نحصل على خط مستقيم
(شكل ٤ ــ ٥) يكون ميله حسب المعادلة السابقة هو $\frac{٤ ط^{٢}}{حـ}$ ومن الميل نوجد الجاذبية حـ .



(شكل ٤ ــ ٥)

تمرين :

قضيب خفيف عديم الوزن طوله ل يتذبذب حول محور يمر بأحد طرفيه . إذا ثبتت ثلاث كتل متساوية فى نقط تبعد $\frac{ل}{٣}$ ، $\frac{٢ ل}{٣}$ ، ل من نقطة التعليق احسب زمن الذبذبة .



(شكل ٤ ــ ٦)

الحل :

مركز الثقل يبعد $\frac{٢}{٣}$ ل من نقطة التعليق

عزم القصور الذاتى للمجموعة حول محول الدوران $= \text{٣ ك} \left(\frac{\text{٢}}{\text{٣}} \text{ ل} \right)^{\text{٢}}$

أى أن $\text{ــــ} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}} \text{ ك ل}^{\text{٢}}$

وباستخدام المعادلة (٤ – ١٠) نحصل على

$$\text{زمن الذبذبة} = \text{٢ ط} \sqrt{\frac{\frac{\text{٤}}{\text{٣}} \text{ ك ل}^{\text{٢}}}{\text{٣ ك} \times \text{حـ} \times \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \text{ ل}}}$$

$$\therefore \quad \ddot{\text{ن}} = \text{٢ ط} \sqrt{\frac{\text{٢ ل}}{\text{٣ حـ}}}$$

القانون العام للجاذبية

٤ – ٧ قوانين كبلر لحركة الكواكب : Keplers' Laws

استحوذت حركة الكواكب حول الشمس اهتمام العلماء من قديم الزمن وقد وضع كبلر خلاصة بحوث العلماء فى هذا الشأن فى ثلاثة قوانين تعرف باسمه هى :

١ – تتحرك كواكب المجموعة الشمسية فى مسارات على شكل قطع ناقص تكون الشمس فى أحد بؤرتى المسار لكل .

٢ – يقطع الخط الواصل بين الكواكب والشمس أثناء الحركة مساحات متساوية فى أزمنة متساوية .

٣ – يتناسب مربع الزمن الدورى للكواكب حول الشمس مع مكعب متوسط المسافة التى تفصلهما .

القانون العام للجاذبية : General law of gravitation

وضع نيوتن القانون العام للجاذبية عام ١٦٦٦ بأن افترض أن كواكب المجموعة الشمسية تتحرك فى مسارات دائرية مركزها الشمس . القوة الطاردة المركزية الناشئة عن هذه الحركة $= \text{ك نق } \omega^{\text{٢}}$. حيث ك هى كتلة الكوكب ، نق هو نصف قطر مساره حول الشمس ، ω هى السرعة الزاوية للحركة وتساوى $\frac{\text{٢ ط}}{\ddot{\text{ن}}}$ حيث $\ddot{\text{ن}}$ هو الزمن الدورى

$$\therefore \quad \text{القوة المسببة للحركة} = \frac{\text{٤ ط}^{2}\ \text{ك نق}}{\text{ن}^{2}}$$

وعندما افترض نيوتن أن هذه القوة تتناسب عكسيًا من مربع متوسط نق التى تفصل الكوكب عن الشمس وجد أن

$$\frac{\text{٤ ط}^{2}\ \text{ك نق}}{\text{ن}^{2}} = \frac{\text{ثابت}}{\text{نق}^{2}}$$

أى أن ن^{2} مع نق^{3} وهذا هو بالنص قانون كبلر الثالث مما يثبت صحة هذا الفرض .

وينص قانون نيوتن للجاذبية على أن قوة التجاذب بين كتلتين ك ، ك َ يفصلهما مسافة نق هى :

$$\text{ق} = G \cdot \frac{\text{ك} \cdot \text{ك}'}{\text{نق}^{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\text{٤} - \text{١٢})$$

حيث G مقدار ثابت يسمى ثابت نيوتن للجاذبية. إذا اعتبرنا جسمًا كتلته ك موضوعاً على سطح الأرض فإن قوة جذبها له تساوى ك . حـ حيث حـ هى عجلة الجاذبية الأرضية أى أن :

$$\text{ق} = \text{ك} \cdot \text{حـ} = G \frac{\text{ك} \cdot \text{ك}'}{\text{نق}^{2}}$$

$$\therefore \quad \text{حـ} = G \frac{\text{ك}'}{\text{نق}^{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\text{٤} - \text{١٣})$$

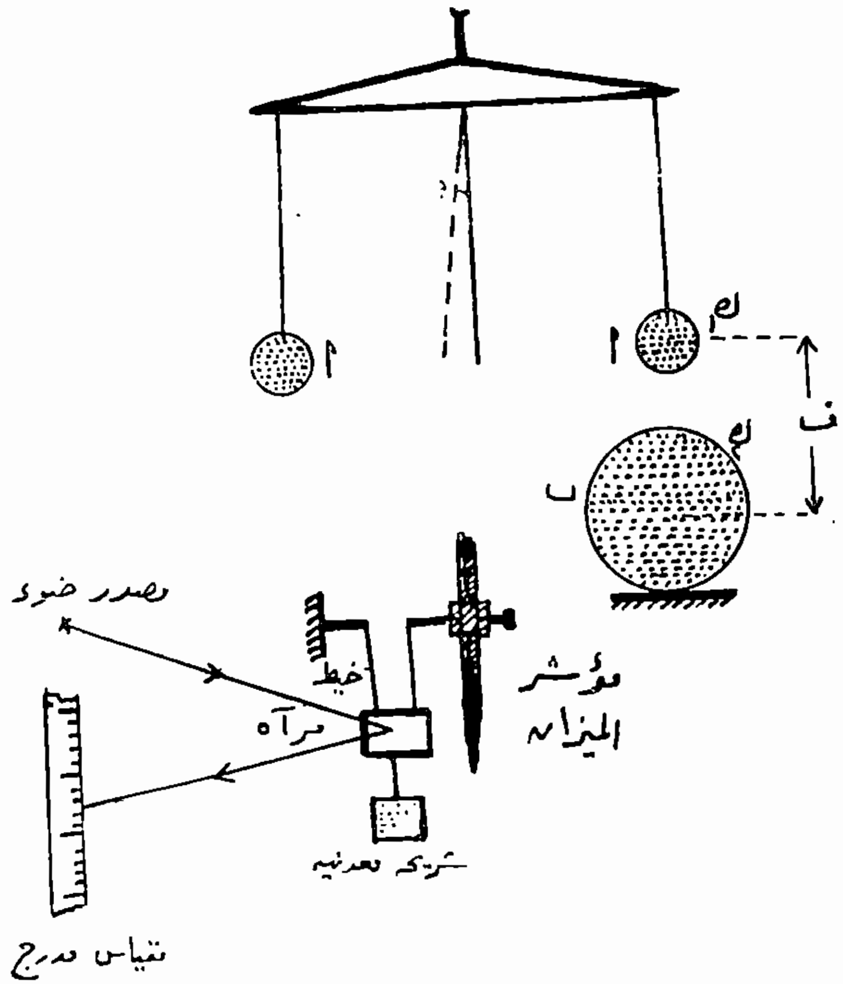
حيث نق فى هذه الحالة هو نصف قطر الأرض . يتضح من المعادلة السابقة أن وحدات ثابت نيوتن للجاذبية هى $\text{ك}^{-1}\ \text{ل}^{3}\ \text{ز}^{-2}$.

٤ ــ ٩ تعيين ثابت الجاذبية لنيوتن بطريقة معملية :

يتركب الجهاز من ميزان تعلق فى كل كفة من كفتيه كرة من الرصاص أ بحيث تكونا متساويتى الكتلة (ك_1) ، (شكل ٤ ــ ٧) . عند وضع كرة ب كتلتها ك_2 أسفل الكرة أ وبحيث يبعد مركزهما مسافة ف سم ، تحدث بينهما قوة تجاذب تسبب انحراف الميزان .

إذا عادلنا الميزان بوضع كتلة صغيرة ك فى الكفة اليسرى فإن

$$\text{ك حـ} = G \frac{\text{ك}_1\ \text{ك}_2}{\text{ف}^{2}}$$



(شكل ٤ – ٧)

حيث ـ هى عجلة الجاذبية الأرضية .

بمعرفة قيم الكتل ك . ك١ . ك٢ والمسافة ف والمسافة ف يمكن إيجاد ثابت الجاذبية لنيوتن G .

ولما كانت قوة التجاذب بين الكرتين صغيرة ولا ينتج عنها انحراف لمؤشر الميزان إلا بزاوية صغيرة لا تتعدى جزء من ألف من الدرجة لذلك فإننا نستخدم عادة طريقة ضوئية لقياس انحراف مؤشر الميزان . وتتكون هذه الطريقة من تعليق مرآة بواسطة خيطين من ذراعين أحدهما مثبت فى حائط والآخر مثبت

فى مؤشر الميزان . ويعلق أسفل المرآة شريحة معدنية الغرض منها منع المرآة من الحركة الجانبية . يسقط على المرآة شعاع ضوئى ينعكس عليها ليسقط على مقياس مدرج . إذا تحرك مؤشر الميزان فإنه يدفع الذراع المثبتة عليه وبالتالى تتحرك المرآة دورانياً مما يتسبب عنه حركة شعاع الضوء على المقياس . وبهذه الطريقة تؤخذ حركة شعاع الضوء كمقياس لموضع الاتزان فى الميزان بدلا من المؤشر بعد أن تكون حساسيته قد زادت بدرجة كبيرة .

٤ — ١٠ تأثير الارتفاع أو الانخفاض عن سطح الأرض على عجلة الجاذبية :

إذا ارتفعنا عن سطح الأرض تقل قوة جذبها للأجسام وتقل بالتالى عجلة الجاذبية الأرضية . إذا كانت العجلة جـ عند سطح الأرض فإن :

$$\text{جـ} = G\,\frac{\text{ك}}{\text{نق}^{2}}$$ وهى المعادلة رقم (٤ — ١٣) السابقة .

إذا ارتفعنا إلى مسافة ف فوق سطح الأرض كانت العجلة هناك $\bar{\text{جـ}}$ حيث

$$\bar{\text{جـ}} = G\,\frac{\text{ك}}{(\text{نق} + \text{ف})^{2}} \quad \ldots\ldots \quad (٤ - ١٤)$$

بقسمة المعادلتين (٤ — ١٣) ÷ (٤ — ١٤) نحصل على :

$$\frac{\bar{\text{جـ}}}{\text{جـ}} = \frac{\text{نق}^{2}}{(\text{نق} + \text{ف})^{2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\text{ف}}{\text{نق}}\right)^{2}} = \left(1 + \frac{\text{ف}}{\text{نق}}\right)^{-2}$$

ولكن :

$$\left(1 + \frac{\text{ف}}{\text{نق}}\right)^{-2} \text{ يساوى تقريباً } \left(1 - \frac{2\,\text{ف}}{\text{نق}}\right)$$

أى أن $$\bar{\text{جـ}} = \text{جـ}\left(1 - \frac{2\,\text{ف}}{\text{نق}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (٤ - ١٥)$$

أما إذا انخفضنا عن سطح الأرض بمسافة ف فإن عجلة الجاذبية تصبح :

$$\bar{\text{جـ}} = G\,\frac{\bar{\text{ك}}}{(\text{نق} - \text{ف})^{2}} \quad \ldots\ldots \quad (٤ - ١٦)$$

حيث ك' هى كتلة الكرة الأرضية بدون كتلة القشرة الخارجية التى سمكها ف .

ويلاحظ أن العجلة حـ' لا تتأثر بالقشرة الخارجية حيث إن محصلة جذب هذه القشرة لأى جسم بداخلها تساوى صفر . إذا كانت م هى متوسط كثافة الأرض ، فإن :

$$\text{ك}' = \frac{٤}{٣}\,\text{ط}\,(\text{نق} - \text{ف})^{٣}\,\text{م} .$$

$$\text{ك} = \frac{٤}{٣}\,\text{ط}\,\text{نق}^{٣}\,\text{م} .$$

بقسمة المعادلة (٤ – ١٦) على المعادلة (٤ – ١٣) والتعويض نحصل على :

$$\frac{\text{حـ}'}{\text{حـ}} = \frac{\text{نق} - \text{ف}}{\text{نق}} = ١ - \frac{\text{ف}}{\text{نق}} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (٤ - ١٧)$$

تأثير دوران الأرض على جاذبيتها للأجسام :

نتيجة لدوران الأرض حول نفسها بسرعة زاوية ω تتأثر الأجسام على سطحها بقوة طاردة مركزية تساوى $\text{ك}\,\text{نق}\,\omega^{٢}$ وتعاكس هذه القوة تأثير الجاذبية الأرضية . ويصبح الوزن الظاهرى للأجسام أقل ما يمكن عند خط الاستواء . وكلما اقتربنا من القطبين الشمالى أو الجنوبى ينقص نصف قطر الحركة الدائرية التى يتسبب عنها القوة الطاردة حتى تتلاشى كلية عند القطبين .

٤ – ١١ حركة الأقمار الصناعية :

إذا قذف جسم فوق سطح الأرض إلى أعلى بسرعة ع. فإنه يرتفع إلى مسافة معينة يعود بعدها ثانية إلى الأرض . وتكون سرعته عند أى ارتفاع يصله ف هى ع حيث :

$$\text{ع}^{٢} = \text{ع}_{٠}^{٢} - ٢\,\text{حـ}\,\text{ف}$$

أما إذا قذف الجسم بسرعة كبيرة فإنه قد لا يعود ثانية إلى الأرض بل يدور فى مسار حولها كحركة القمر الطبيعى حول الأرض . ويسمى الجسم فى هذه الحالة قمراً صناعياً ، ويشترط لكى يدور الجسم حول الأرض أن تتزن قوة جذب الأرض له (ك حـ) مع القوة الطاردة المركزية $\left(\frac{\text{ك}\,\text{ع}^{٢}}{\text{نق}}\right)$ ، الناتجة عن الحركة الدائرية .

أى أن $\text{ك}\,\text{حـ} = \frac{\text{ك}\,\text{ع}^{٢}}{\text{نق}}$

وتكون أقل سرعة قذف لتسيير قمر صناعى حول الأرض هى حينئذ

$$ع = \sqrt{نق . جـ}$$

فإذا علم أن نق = ٦,٤ × ١٠^٦ متر

، جـ = ٩,٨ متر / ثانية^٢

فإن سرعة القمر يجب ألا تقل عن حوالى ٨ كم / ثانية . وتكون زمن دورته حول الأرض = طول المحيط / السرعة .

$$= \frac{٢ ط نق}{ع} = ٨٠ \text{ دقيقة تقريباً .}$$

وذلك باعتبار أن الحركة تتم بالقرب من سطح الأرض وأن نصف قطر المسار هو نصف قطر الأرض تقريباً .

سرعة الهروب : أما لكى يخرج الجسم نهائياً من مجال جذب الأرض فإن طاقة حركته يجب أن تساوى على الأقل أو تزيد على طاقة موضعه على سطح الأرض . أى أن :

$$\frac{١}{٢} ك ع^٢ = ك جـ نق$$

$$\therefore \text{ سرعة الهروب } ع = \sqrt{٢ جـ نق}$$

وتساوى تقريباً ١١,٢ كم / ثانية .

تمارين :

١ ــ أوجد قيمة تقريبية لكتلة الشمس ، واحسب متوسط كثافتها من المعلومات الآتية :

بعد الشمس عن الأرض = ١٥٠ × ١٠^٦ كيلومتر تقريباً

سرعة الأرض فى مدارها = ٣٠ كم / ثانية

ثابت الجاذبية الأرضية = ٦,٧ × ١٠^-٨ (سم . جم . ثانية)

قطر الشمس = ١٤ × ١٠^٥ كيلومتر

٢ ــ بندول بسيط زمن ذبذبته ٤,٢ ثانية . عندما ينقص طوله بمقدار متر تصبح زمن الذبذبة ٣,٧ ثانية . أوجد الطول الأصلى للبندول وعجلة الجاذبية الأرضية .

٣ ــ يتحرك قمر صناعى فى مسار دائرى حول كوكب متوسط كثافته ١٠ جم / سم^٣ . احسب زمن الدورة بفرض أن نصف قطر المسار يساوى نصف قطر الكوكب تقريباً . (ثابت الجاذبية ٦,٧×١٠^-٨ وحدات سم . جم . ثانية) .

(الجواب ١,٠٤ ساعة)

٤ — بندول بسيط زمن ذبذبته ثانيتان وكتلة كرته ١٠ جم وسعة ذبذبته ٥ سم . احسب سرعة وعجلة الكرة عندما تكون على مسافة ٢ سم من وضع الاتزان واحسب أيضاً الطاقة الكلية للحركة .

٥ — قضيب منتظم يتذبذب حول محور أفقي يمر بأحد طرفيه . إذا علم أن زمن الذبذبة ١,٦٥ ثانية وكتلة القضيب ١٢٥ جرام . أوجد طوله وعزم القصور الذاتي له حول المحور الأفقي .

(الجواب ١٠١,٤ سم ، ٤,٢٩ × $١٠^{٥}$ جم . $سم^{٢}$)

٦ — اثبت أنه إذا علقت كتلة في طرف سلك زنبركي ، ثم شدت وتركت حرة ، فإنها تتحرك حركة توافقية بسيطة .

إذا علقت كتلة مقدارها ٢٠٠ جم من طرف سلك زنبركي فإنها تحدث فيه استطالة قدرها ٢ سم . أوجد زمن الذبذبة عند تعليق كتلة ٥٠٠ جرام في هذا الطرف من السلك .

٧ — احسب الارتفاع الذي تبلغ فيه عجلة الجاذبية ٠,٠١ من قيمتها عند سطح الأرض علماً بأن نصف قطر الكرة الأرضية ٦٤٠٠ كيلومتر .

٨ — شريحة من الصلب مثبت إحدى طرفيها ، تهتز بتردد قدره ٥٠ ذبذبة في الثانية ، إذا كانت سعة الذبذبة ٠,٨ سم عند الطرف المطلق . أوجد سرعة هذا الطرف عندما يمر بمركز الحركة وكذلك العجلة عند أقصى إزاحة .

٩ — ساعتان بندولاهما من الحديد والنحاس يعطيان نفس الوقت في درجة ٥° م ما هو مدى اختلافهما في يوم كامل إذا كانت متوسط درجة الحرارة ٢٥° م . (معاملا التمدد الطولي للحديد والنحاس هما ١٢ × $١٠^{-٦}$ ، ١٨ × $١٠^{-٦}$ على الترتيب) .

الباب الخامس

تركيب المادة وخواصها

٥ ــ ١ النظرية الجزيئية للمادة : Molecular theory of Matter

تتركب المادة من أجزاء صغيرة جداً تسمى بالذرات أو الجزيئات وذرات المادة الواحدة متشابهة تماماً من ناحية التركيب والخواص الطبيعية . وتستقر ذرات أو جزيئات المادة فى حالة اتزان داخلها تحت تأثير قوى بينية كبيرة بعضها جاذب والآخر طارد . وتتوقف نوع هذه القوى وشدتها على نوع المادة المعنية .

القوى الجاذبة على ثلاثة أنواع :

(ا) قوى كولومية تعتمد على التجاذب الكهربى بين الشحنات المختلفة الإشارة كما يحدث فى حالة البلورات الأيونية مثل كلوريد الصوديوم .

(ب) قوى فان درفال . وتحدث نتيجة لدوران الإلكترونات فى مساراتها حول نواة الذرة ويتسبب عن ذلك ما يسمى بثنائى القطب الكهربى electric dipol وهذه بتجاذبها مع بعضها فى الذرات المتجاورة تحدث ما يطلق عليه بقوى فان درفال وهى غالباً قوى ضعيفة كما فى الشمع وذلك سبب انخفاض نقطة انصهاره .

(حـ) قوى التبادل وتنشأ عندما يحدث اتحاد كيميائى ينتقل فيه الكترون من الذرة الأولى إلى ذرة مجاورة ويتسبب هذا لانتقال فى تلاصق الذرتين بقوى كبيرة .

أما القوى الطاردة فتنتج بسبب التنافر بين الشحنات السالبة (الإلكترونات) المحيطة بكل ذرة والتى يصبح تأثيرها كبيراً جداً عند ما تقترب الذرات من بعضها بدرجة كبيرة تحت تأثير القوى الجاذبة سالفة الذكر .

٥ ــ ٢ أحوال المادة الثلاثة :

توجد المادة فى الطبيعة على أشكال ثلاثة هى الصلبة ، السائلة والغازية وتتوقف الحالة التى توجد عليها المادة على كيفية ارتباط جزيئاتها ببعضها وعلى مقدار القوى البينية بين هذه الجزيئات .

١ – الحالة الصلبة للأجسام :

وفيها تكون الجزيئات قريبة من بعضها وتكون قوى التجاذب بين الجزيئات كبيرة جداً وهذه القوى هى التى تحفظ للجسم الصلب شكله . ويتحرك كل جزىء حركة تذبذبية حول موضع توازنه تزايد سعتها بازدياد درجة الحرارة . وهذا يفسر ظاهرة تمدد الأجسام الصلبة بالحرارة . وعندما تصل درجة الحرارة لنقطة الانصهار تكون الذبذبات من العنف بمكان حتى إنها تتغلب على قوى التجاذب ، فيتحطم الشكل الصلب للجسم متحولا إلى سائل . وتمثل الحرارة الكامنة للانصهار الطاقة الحرارية اللازمة لتحطيم الشكل الصلب للجسم .

٢ – حالة السوائل :

فى هذه الحالة تتحرك الجزيئات بحرية أكثر من حالة الصلابة وإن كانت قوى التجاذب بينها لا تزال من القوة بحيث تجمعها جميعاً فى حجم ثابت . وتغادر السائل عند سطحه بعض الجزيئات ذات الطاقة الكبيرة ويعرف ذلك بالبخر . ونتيجة هروب الجزيئات السريعة ذات الطاقة العالية وتبقى الجزيئات البطيئة ذات الطاقة المنخفضة نسبياً ، فإن متوسط طاقة الجزىء فى داخل السائل تنخفض ولذلك فإن البخر يخفض من درجة حرارة السائل .

أما إذا رتفعت درجة الحرارة حتى تصل إلى نقطة الغليان فإن الطاقة الحرارية تكون كافية لهروب جميع الجزيئات من السائل وبذلك يتحول إلى الحالة الغازية . ويكون ضغط الجزيئات فوق سطح السائل (ضغط البخار) عند نقطة الغليان مساوياً للضغط الجوى

٣ – حالة الغازات :

فى هذه الحالة لا تشغل جزيئات الغاز أماكن ثابتة فهى حرة الحركة فى أى مكان ولذلك فإننا نجد الغاز يشغل دائماً حجم كل الإناء الموضوع فيه . ونتيجة لبعد جزيئات الغاز عن بعضها يسهل ضغط الغازات عن السوائل والأجسام الصلبة .

مرونة الأجسام الصلبة :

إذ أثرنا بقوة على جسم صلب ، ونتج عنها تغير فى أبعاده أو فى شكله ، يقال أن الجسم تام المرونة إذا عاد إلى سابق شكله وأبعاده تماماً بعد إزالة القوة . وتعود خاصية المرونة فى الأجسام إلى القوة البينية الكبيرة بين الذرات المكونة لها .

تنبنى نظرية المرونة على بعض المشاهدات التى أجراها هوك لربط العلاقة بين القوة المؤثرة على الجسم والتغير فى أبعاده وشكله . وكمقياس للقوة عرف هوك الإجهاد بأنه القوة الواقعة على وحدة المساحات من الجسم كما عرف الانفعال بأنه التغير النسبى الحادث وينقسم إلى أنواع ثلاثة :

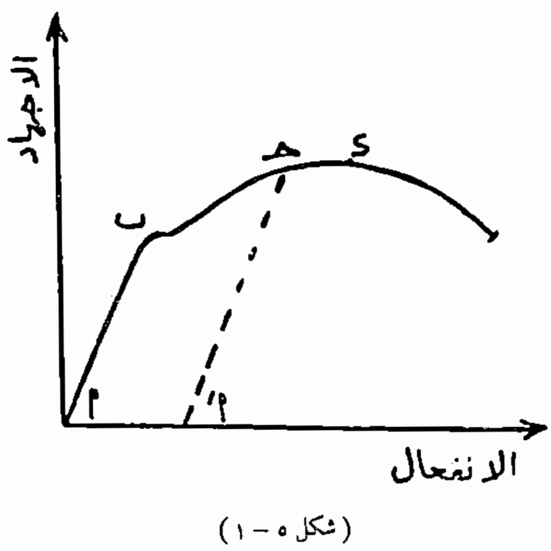
١ — انفعال طولى و يساوى التغير فى الطول مقسوماً على الطول الأصلى ، $\frac{ى ل}{ل}$

٢ — انفعال حجمى ويساوى التغير فى لحجم مقسوماً على الحجم الأصلى ، $\frac{ى ح}{ح}$

٣ — انفعال قاص ويحدث فى حالة تغير شكل الجسم دون أبعاده كما يحدث مثلا إعند لى سلك بقوة قاصة : ويقاس الانفعال القاص بالزاوية θ التى يدورها خط مستقيم على سطح الجسم نتيجة لتأثير القوة .

وضع هوك خلاصة تجاربه على شكل قانون يعرف باسمه وينص على « تتناسب مركبات الإجهاد طردياً مع مركبات الانفعال المناظرة داخل الحد المرن للجسم » .

والحد المرن هو النقطة التى يبطل بعدها قانون هوك . فإذا زيدت تدريجياً القوة المؤثرة على سلك ما وقيس الانفعال الطولى الحادث نحصل على منحنى كالمبين فى شكل (٥ — ١) ، الذى يبين العلاقة بين الإجهاد والانفعال . يلاحظ أن استطالة السلك تتناسب طردياً مع الثقل المعلق فى المدى من التغير أ ب والذى يصح فيه تطبيق قانون هوك . و يطلق على النقطة ب بالحد المرن للجسم وأحياناً بنقطة التداعى .



(شكل ٥ — ١)

إذا تعدى الجسم حده المرن بأن وصل إلى نقطة مثل حـ فإنه عند إزالة القوة المؤثرة يتراجع الانفعال فى اتجاه حـ أ ً ويبقى قدر دائم منه يساوى أ أ ً .

وإذا زيد الاجهاد حتى النقطة ى نكون قد وصلنا إلى أكبر إجهاد يمكن للجسم أن يتحمله وبعدها ينكسر .

ولذلك يطلق على الاجهاد عند النقطة ى بإجهاد الكسر . ويطلق على المواد التى لها إجهاد كسر أعلى من إجهاد التداعى بالمواد اللينة (ductile) بينما يطلق على تلك المواد التى يقترب فيها إجهاد الكسر من إجهاد التداعى بالمواد الهشة (brittle) إذ أنها تنكسر قبل أن يحدث لها انفعال دائم يذكر .

٥ — ٤ معاملات المرونة : Moduli ol elasticitiy

يمكن التعبير عن قانون هوك رياضياً بالمعادلة الآتية :

$$\frac{\text{الاجهاد}}{\text{الانفعال}} = \text{ثابت}$$

حيث يتوقف المقدار الثابت على طبيعة المادة ويميزها من ناحية المرونة ولذلك يطلق عليه معامل المرونة . ولما كان هناك ثلاثة أنواع من الانفعال لذلك يوجد أيضاً ثلاثة أنواع من معاملات المرونة .

معامل المرونة الطولى (معامل يونج) : Young's modulus

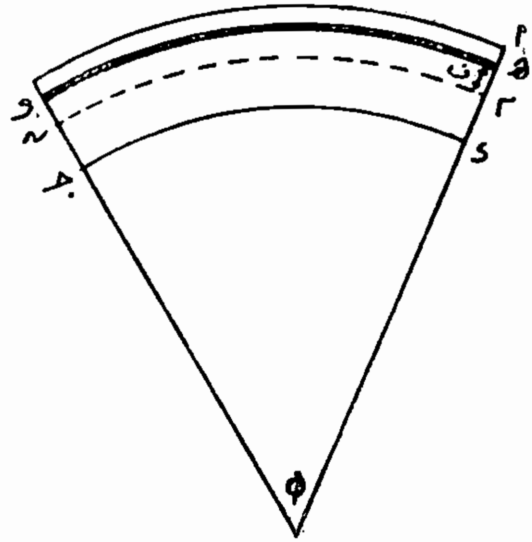
ويستخدم عندما يتضمن الانفعال تغييراً فى الطول كما هى الحال فى حالة استطالة سلك . فمثلا إذا علق ثقل كتلته ك فى سلك طوله ل ونصف قطره نق فأحدث استطالة قدرها ى ل ، يمكن إيجاد معامل يونج كما يأتى :

$$\text{الاجهاد الطولى} = \frac{\text{القوة}}{\text{المساحة}} = \frac{\text{ك . حـ}}{\text{ط نق}^2}$$

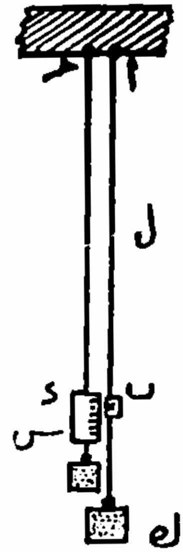
$$\text{الانفعال الطولى} = \text{التغير النسبى فى الطول} = \frac{\text{ى ل}}{\text{ل}}$$

$$\therefore \text{معامل يونج للمرونة الطولية } Y = \frac{\text{الاجهاد}}{\text{الانفعال}} = \frac{\text{ك ل}}{\text{ط نق}^2} \cdot \frac{\text{ل}}{\text{ى ل}}$$

تقاس الزيادة فى الطول ى ل للسلك أ ب تحت الاختبار بوضع ثقل إضافى ك عليه ، ثم باستخدام ورنيه ب تتحرك أمام مقياس مدرج س مثبت فى أسفل سلك حـ ى مشدود بثقل ثابت



(شكل ٥ — ٣)



(شكل ٥ — ٢)

ويعمل كعلامة ثابتة ؛ تعين مقدار استطالة ا ب، شكل (٥ — ٢) . وباستخدام المعادلة السابقة يمكن تعيين معامل المرونة الطولى للسلك .

معامل يونج بطريقة انحناء القضبان :

اعتبر حالة قضيب ا ب حـ ى واقع تحت تأثير ازدواج تسبب عنه انحناء القضيب على شكل قوس من دائرة كما هو مبين بشكل (٥ — ٣) .

إذا فرضنا أن القضيب مكون من شرائح رقيقة ملتصقة بعضها ببعض تكون الشرائح الداخلية القريبة من مركز الانحناء واقعة تحت تضاغط بسبب انكماشها بينما يحدث العكس لتلك الشرائح البعيدة التى تستطيل . توجد فى وسط القضيب شريحة لم يتغير طولها بالزيادة أو بالنقصان وتسمى بالشريحة المتعادلة وتوجد عند خط يسمى بمحور التعادل م ن . نفرض أن نصف قطر انحناء خط التعادل هو نوع وأن الزاوية التى تقابله عند المركز هى φ .

اعتبر الشريحة هـ و التى تبعد مسافة ف عن خط التعادل .

من هندسة الشكل :

هـ و = (نوع + ف) φ

مقدار الاستطالة فى الشريحة هـ و بسبب الانحناء

$$= \phi\,(\text{نق} + \text{ف}) - \phi\,\text{نق}$$

$$= \text{ف} \, . \, \phi$$

$$\text{الانفعال الناتج فى هذه الشريحة} = \frac{\text{الاستطالة}}{\text{الطول الأصلى}}$$

$$= \frac{\text{ف}\ \phi}{\text{نق}\ .\ \phi} = \frac{\text{ف}}{\text{نق}}$$

إذا كانت مساحة مقطع الشريحة م ومعامل يونج لمادة القضيب Y فإن القوة ق المسببة هذه الاستطالة حسب قانون هوك هى :

$$\text{ق} = Y \, . \, \frac{\text{ف}}{\text{نق}} \, . \, \text{م}$$

$$\text{عزم هذه القوة حول خط التعادل} = Y \, . \, \frac{\text{ف}}{\text{نق}} \, . \, \text{م} \, . \, \text{ف}$$

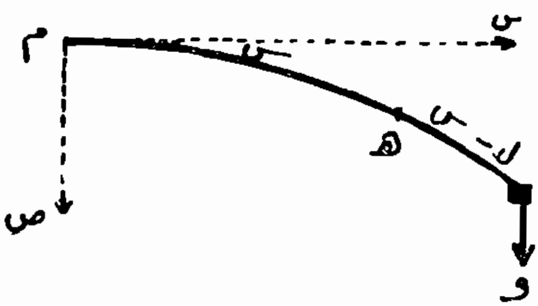
وبتجميع عزوم مثل هذه القوى المؤثرة على جميع شرائح القضيب نحصل على العزم الكلى للانحناء ع حيث :

$$\text{ع} = \frac{Y}{\text{نق}} \Sigma\, \text{م}\, \text{ف}^2$$

$$\text{ع} = \frac{Y}{\text{نق}} \, . \, \text{ے} \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \qquad (٥-١)$$

ويسمى المقدار $\text{ے} = \Sigma\, \text{م}\, \text{ف}^2$ بعزم القصور الذاتى الهندسى لمقطع القضيب حول محور عمودى على مستوى الانحناء (مستوى الورقة فى الرسم) ويلاحظ أنه يحمل نفس طابع عزم القصور الذاتى لجسم مع فارق واحد هو إننا نتعامل هنا مع مساحة م مضروبة فى مربع بعدها عن محور ما بينما فى حالة القصور الذاتى للجسم فإننا نتعامل مع كتلة ك مضروبة أيضاً فى مربع بعدها عن محور ما .

لتعيين عزم الانحناء لقضيب خفيف ومنتظم مثبت من أحد طرفيه ومحمل بثقل على الطرف الآخر (شكل ٥ — ٤) نفرض أن كتلة القضيب صغيرة بالنسبة للكتلة المعلقة عند طرفه ونعتبر الطرف المثبت للقضيب مركزاً للإحداثيات والمحور الأفقى م س اتجاهاً موجباً للقياس وأن العمودى عليه هو م ص . عندما يكون نصف قطر الانحناء نق كبيراً أى يكون الانحناء صغيراً (الانحناء هو مقاوب نصف القطر)



(شكل ٥ – ٤)

فإنه يمكن إثبات أن الانحناء = $\frac{١}{\text{نق}} = \frac{\text{ى}^{٢}\,\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}}$

اعتبر مقطع للقضيب عند نقطة مثل هـ تبعد عن المركز م مسافة س . إذا كان طول القضيب ل يكون بعد النقطة هـ عن موضع الثقل وهو (ل – س) ويكون عزم القوة المؤثرة على مقطع القضيب عند هذه النقطة هو ع = و (ل – س) .

ولما كان هذا الجزء من القضيب فى حالة اتزان فإنه يكون واقعاً تحت تأثير ازدواج معاكس عزمه كما أثبتنا سابقاً هو :

عزم الانحناء ع = $\frac{Y}{\text{نق}}$. ك

أى أن :

$$\frac{Y}{\text{نق}}\,\text{ك} = \text{و}\,(\text{ل} - \text{س})$$

ويمكننا رفع المجهول نق من المعادلة السابقة بوضع

$$\frac{\text{ى}^{٢}\,\text{ص}}{\text{ى س}^{٢}} = \frac{١}{\text{نق}} = \frac{\text{و}}{\text{ك}\,Y}\,(\text{ل} - \text{س})$$

وبإجراء التكامل فإن :

$$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \frac{\text{و}}{\text{ك}\,Y}\left(\text{ل س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right) + \text{مقدار ثابت}$$

وبمعرفة أن $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ = صفر عند س = صفر فإن ثابت التكامل يتلاشى .

و بإجراء التكامل مرة ثانية نحصل على

$$[ص]^{\delta} = \frac{و}{ك\,ل}\left[\left(ل\,\frac{س^{2}}{2} - \frac{س^{3}}{6}\right)\right]_{0}^{ل} + ثابت$$

والثابت هنا أيضاً يساوى صفر لأن عند س = صفر يكون ص = صفر أيضاً . ويكون بذلك الانخفاض δ فى نهاية القضيب تحت تأثير و هو :

$$\delta = \frac{و}{Y\,ك}\left(\frac{ل^{3}}{2} - \frac{ل^{3}}{6}\right) = \frac{و\,ل^{3}}{3\,Y\,ك}$$

عندما يكون للقضيب مقطع مستطيل الشكل عرضه أ وعمقه ب فإن عزم القصور الذاتى الهدسى لمقطعه حول محور التعادل يكون :

$$ك = \frac{1}{12}\,أ\,ب^{3}$$

ويكون بذلك الانخفاض

$$\delta = \frac{4\,و\,ل^{3}}{Y\,أ\,ب^{3}} \qquad \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\dots\dots\ \dots \qquad (٥ - ٢)$$

ولتعيين معامل يونج عملياً يقاس الانخفاض δ فى طرف القضيب الناتج عن تعليق ثقل قدره ك وذلك بواسطة ميكروسكوب له مقياس رأسى ثم بالتعويض فى المعادلة (٥ – ٢) وبوضع و = ك حـ حيث ك هى الكتلة المعلقة ، حـ عجلة الجاذبية فإننا نحصل على

$$Y = \frac{4\,ك\,حـ\,ل^{3}}{\delta\,أ\,ب^{3}} \qquad \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \qquad (٥ - ٣)$$

ويلاحظ أنه إذا استخدمنا قضيب طوله ل مرفوع على حافتين ثم وضعنا أثقالا عند منتصف القضيب وجب تعديل المعادلة (٥ – ٣) وذلك باعتبار أن نصف الثقل المعلق يؤثر على نصف طول القضيب أى أننا نستبدل قيمة الثقل و فى المعادلة (٥ – ٣) بالمقدار $\frac{و}{2}$ والطول ل بالمقدار $\frac{ل}{2}$ فنحصل على المعادلة

$$Y = \frac{ك\,حـ\,ل^{3}}{4\,\delta\,أ\,ب^{3}}$$

معامل المرونة الحجمى : Bung's modulus

وينشأ عندما يكون الانفعال الناشئ عن القوة حجميا كما هو الحال فى الغازات والسوائل والأجسام التى يقع عليها ضغوط من جميع الاتجاهات .

إذا أحدث تغير فى الضغط ى صـ تغيراً نسبياً فى الحجم بمقدار $\frac{\text{ى ح}}{\text{ح}}$ يكون معامل المرونة الحجمى $B = -\frac{\text{ى صـ}}{\text{ى ح}/\text{ح}}$ والإشارة السالبة هنا تعنى أن الزيادة فى الضغط تحدث نقصاً فى الحجم .

ويعرف مقلوب معامل المرونة الحجمى بمعامل الانضغاط

معامل المرونة الحجمى للغاز :

يتغير حجم أى غاز تبعاً لضغطه حسب قانون بويل .

$\text{ح} \,.\, \text{صـ} = \text{ثابت}$ بفرض ثبوت درجة الحرارة .

بمفاضلة المعادلة بالنسبة للحجم فإن

$$\text{صـ} + \text{ح}\,\frac{\text{ى صـ}}{\text{ى ح}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{صـ} = -\text{ح}\,\frac{\text{ى صـ}}{\text{ى ح}} = B$$

أى أن معامل المرونة الحجمى لغاز عند ثبوت درجة حرارته تساوى ضغطه . أما إذا تغيرت درجة الحرارة أثناء الضغط فإن علاقة ح ، صـ تتبع المعادلة

$\text{ح}^{\gamma} \,.\, \text{صـ} = \text{ثابت}$ حيث $\gamma = \frac{\text{ن ص}}{\text{ن ح}}$ = النسبة بين الحرارة النوعية للغاز تحت ضغط ثابت إلى تلك تحت حجم ثابت .

وبمفاضلة المعادلة بالنسبة للحجم نحصل على

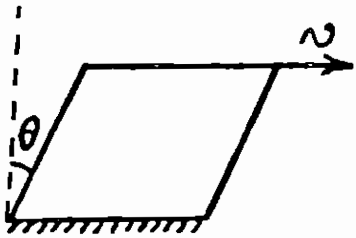
$$\text{صـ} \,.\, \gamma\, \text{ح}^{\gamma-1} + \text{ح}^{\gamma} \,.\, \frac{\text{ى صـ}}{\text{ى ح}} = \text{صفر}$$

أى أن $\gamma\ \text{صـ} = -\text{ح}\,\frac{\text{ى صـ}}{\text{ى ح}} = B$ ... ... (٥ — ٤)

أى أن معامل المرونة الحجمى فى هذه الحالة يساوى γ . صـ

معامل الصلابة أو القص : Shear Modulus

يستخدم عندما يحدث الاجهاد تغيراً فى الشكل فقط . نفرض مثلا مكعب من المطاط مثبت من قاعدته وأثرنا على سطحه العلوى بقوة مماسية تتسبب فى انبعاج شكله كما فى الرسم (٥ — ٥) .



(شكل ٥ — ٥)

الانفعال القاص = الزاوية θ بالتقدير الدائرى

$$\text{معامل المرونة القاص} N = \frac{\text{ق}}{\text{س} \cdot \theta}$$

حيث ق هى القوة المماسية التى تؤثر على السطح العلوى للمكعب ومساحته س .

وحدات معامل المرونة هى ك $\text{ل}^{-1}\text{ن}^{-2}$

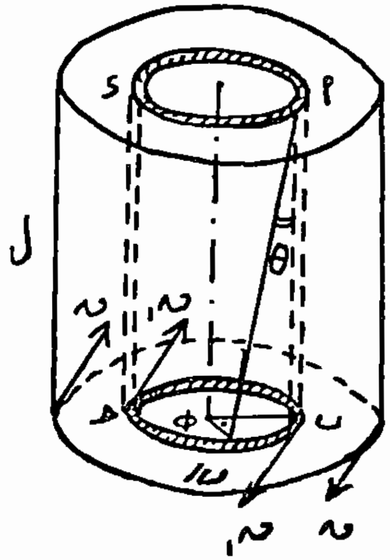
تعيين معامل الصلابة أو القص لسلك :

اعتبر مثلا حالة أسطوانة مثبتة من طرفها العلوى ويؤثر على طرفها السفلى ازدواج مماسى يحدث انفعال قص فى الأسطوانة . اعتبر شريحة أسطوانية أ ب حـ ى ، شكل (٥ — ٦) ، نصف قطرها س وسمكها ى س وتؤثر عليها قوة ق١

$$\text{الاجهاد} = \frac{\text{القوة}}{\text{المساحة}} = \frac{\text{ق}_1}{٢ \text{ ط س ى س}}$$

نفرض أن الخط أ ب على سطح هذه الشريحة الاسطوانية قد أخذ الوضع أ ب بعد الانفعال أى أنه دار بزاوية θ . ونفرض أن القوس ب بَ يعمل زاوية φ عند مركز مقطع الأسطوانة السفلى . إذا كان ل هو طول الأسطوانة فإن

$$\text{طول القوس ب بَ} = \text{ل} \cdot \theta = \text{س} \cdot \phi$$



(شكل ٥ – ٦)

ومن تعريف معامل الصلابة $N = \dfrac{\text{الاجهاد}}{\text{الانفعال}} = \dfrac{\text{ق}_1}{\text{٢ ط س ى س} \,.\, \theta}$

$$\therefore \text{ق}_1 = \text{٢ ط } N \text{ س ى س} \,.\, \frac{\text{س } \phi}{\text{ل}}$$

عزم هذه القوة حول محور الأسطوانة

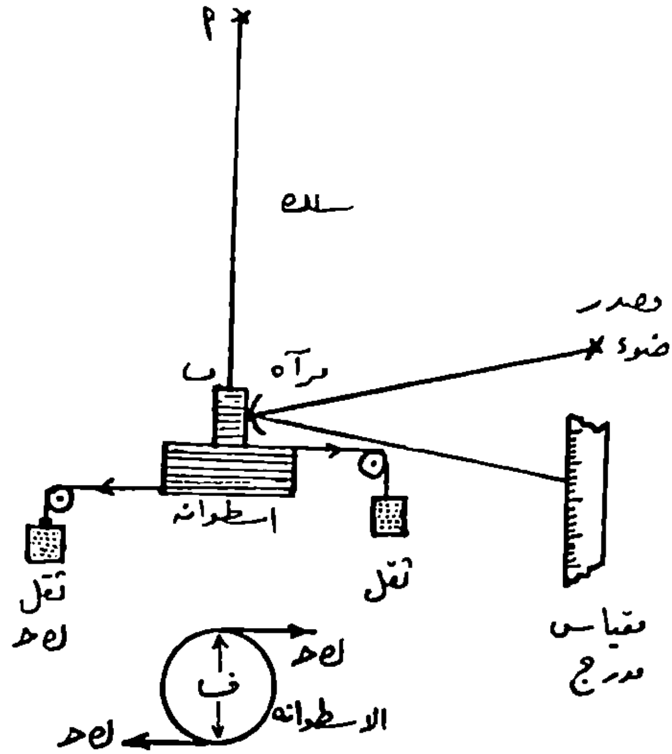
$$\text{ع}_1 = \text{ق}_1 \,.\, \text{س} = \frac{\text{٢ ط } N \phi}{\text{ل}} \text{ س}^3 \text{ ى س}$$

العزم الكلى للقوة المؤثرة على نهاية الأسطوانة يساوى مجموع العزوم على جميع الشرائح الأسطوانية المكونة لها .

$$\therefore \text{ع} = \sum \text{ع}_1 = \int_0^{\text{نق}} \frac{\text{٢ ط } N \phi}{\text{ل}} \,.\, \text{س}^3 \text{ ى س}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ط } N \phi \text{ نق}^4}{\text{٢ ل}} \quad \ldots\ldots \quad (\text{٥ – ٥})$$

وتستخدم هذه المعادلة لإيجاد معامل الصلابة لأسلاك بقياس عزم الازدواج ع المحدث للقص وذلك بالجهاز المبين بشكل (٥ – ٧) .



(شكل ٥ – ٧)

يثبت السلك أ ب المراد تعيين معامل صلابته من أحد طرفيه ويثبت الطرف الآخر فى أسطوانة قطرها ف ملفوف عليها خيط يتصل طرفاه بكفتى ميزان الوضع الأثقال كما يمرر كل خيط قبل اتصاله بالكفة على بكرة .

عند وضع كتلة ك فى كل من الكفتين يحدث لى فى السلك ويمكن قياس زاوية الدوران ϕ بواسطة انعكاس ضوئى من مصباح ساقط على مرآة مثبتة على الأسطوانة . وينعكس الشعاع ليسقط على مقياس مدرج . تبين حركة الشعاع على المقياس قيمة زاوية الدوران .

عزم الازدواج المحدث للقص = ك . ح . ف

$$\therefore \ \text{ك ح ف} = \frac{N \ \text{ط} \ \phi \ \text{نق}^4}{2 \ \text{ل}}$$

حيث نق نصف قطر السلك ، ل طوله . ومن المعادلة السابقة يمكن تعيين قيمة معامل الصلابة N .

طريقة سيرل لتعيين معاملا المرونة والصلابة لسلك :

نحضر قضيبين مربعين من النحاس أ ، ب ونثبت من منتصفيهما السلك تحت الاختبار كما فى شكل (٥ — ٨) ونعلق المجموعة بواسطة خيطين متوازيين من الحرير .

إذا قربنا طرفى القضيبين من بعضهما قليلاً ثم تركناهما حدثت حركة تذبذبية فى مستوى أفقى ويكون مركزى القضيبين م ، م فى حالة سكون تقريباً أى أن حركة السلك تكون تحت تأثير ازدواج عزمه ع =

$$\frac{Y}{\text{ى}}\ \text{ع م فا}^{2} .$$

نفرض أن طول السلك ل وأن كل قضيب قد دار زاوية أفقية قدرها θ يكون نصف قطر انحناء السلك ى = $\frac{\text{ل}}{2\theta}$. وإذا كان ك هو عزم القصور الذاتى لكل قضيب حول محور رأسى يمر بمركزه فإن معادلة الحركة تصبح

$$\text{ك}\,\frac{d^{2}\theta}{d\text{ن}^{2}} = -\frac{Y}{\text{ى}}\ \text{ع م فا}^{2}$$

$$= -\frac{2Y}{\text{ل}}\ \text{ع م فا}^{2} .\ \theta$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة على شكل

$$\frac{d^{2}\theta}{d\text{ن}^{2}} = -\omega^{2}$$

حيث $\omega^{2} = \frac{2Y\ \text{ع م فا}^{2}}{\text{ك . ل}} = \frac{4\text{ط}^{2}}{\text{ن}_{1}^{2}}$

حيث ن$_1$ هى زمن الذبذبة . أى أن

$$\text{ن}_{1} = 2\text{ط}\sqrt{\frac{\text{ك ل}}{2Y\ \text{ع م فا}^{2}}}$$

وبما أن السلك دائرى المقطع فإن عزم القصور الذاتى الهندسى له ع م فا^{2} = $\frac{\text{ط نق}}{4}$

وبذلك يكون زمن الذبذبة

$$\text{ن}_{1} = 2\,\text{ط}\sqrt{\frac{\text{ك}\ \text{ل}}{2\,Y\,\frac{\text{ط}\ \text{نق}^{4}}{4}}} = 2\,\text{ط}\sqrt{\frac{2\ \text{ك}\ \text{ل}}{Y\ \text{ط}\ \text{نق}^{4}}}$$

وبمعرفة زمن الذبذبة . ن_{1} نحصل على معامل يونج للمرونة Y .

$$Y = \frac{8\ \text{ط}\ \text{ك}\ \text{ل}}{\text{ن}_{1}^{2}\ \text{نق}^{4}} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (٥ - ٦)$$

ولإيجاد معامل الصلابة لنفس السلك نزيل خيطى التعليق ويثبت أحد القضيبين أفقيًّا بينما يكون الثانى معلقاً بواسطة السلك تحت الاختبار . إذا أثرنا بازدواج على الأسطوانة المعلقة وتركناها حرة بعد ذلك نجد أنها تتحرك حركة توافقية بسيطة معادلتها :

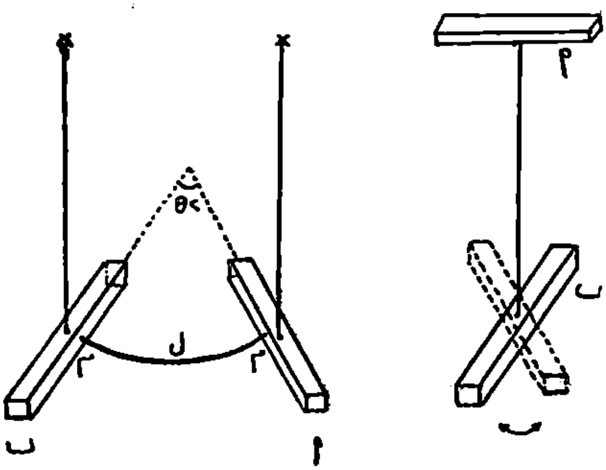
$$\text{ع} = \text{ك}\ \frac{\text{ء}^{2}\phi}{\text{ء}\,\text{ن}^{2}} = -\frac{\text{ط}\ N\ \text{نق}^{4}}{2\ \text{ل}}\ \phi$$

وسرعتها الزاوية $\omega = \sqrt{\frac{\text{ط}\ N\ \text{نق}^{4}}{2\ \text{ل}\ \text{ك}}}$

والزمن الدورى لها $\text{ن}_{2} = 2\,\text{ط}\sqrt{\frac{2\ \text{ل}\ \text{ك}}{\text{ط}\ N\ \text{نق}^{4}}}$

ومن المعادلة السابقة نحصل على معامل الصلابة

$$N = \frac{8\ \text{ط}\ \text{ل}}{\text{ن}_{2}^{2}}\ \ \frac{\text{ك}}{\text{نق}^{4}} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (٥ - ٧)$$



(شكل ٥ – ٨)

وبقياس زمن الذبذبة وإيجاد عزم القصور الذاتى ى للقضيب حول محور الدوران يمكن تعيين معامل الصلابة . ويمكن بطريقة سيرل إيجاد النسبة بين معامل المرونة إلى معامل الصلابة للسلك دون الحاجة لمعرفة نصف قطر وطول السلك وكذلك لعزم القصور الذاتى ى إذ بقسمه المعادلتين (٥ — ٦) و (٥ — ٧) نحصل مباشرة على

$$\frac{Y}{N} = \frac{\text{ز}_{٢}^{٢}}{\text{ز}_{١}^{٢}}$$

٥ — ٦ نسبة بواسون : Poisson ratio

يصاحب الانفعال الطولى لأى جسم تغييراً فى بعده المستعرض . فمثلا عندما يستطيل سلك ينقص طول قطره . وتعريف نسبة بواسون γ هو :

$$\frac{\text{الانفعال المستعرض}}{\text{الانفعال الطولى}} = \frac{\text{ى نق}}{\text{نق}} \Big/ \frac{\text{ى ل}}{\text{ل}}$$

حيث $\frac{\text{ى نق}}{\text{نق}}$ هو التغير النسبي فى نصف القطر المصاحب للانفعال $\frac{\text{ى ل}}{\text{ل}}$

وواضح أن نسبة بواسون لا أبعاد لها إذ أنها نسبة عددية . ويمكن بالحساب إثبات أن نسبة بواسون = $\frac{١}{٢}$ ، كما يأتى :

نفرض سلك طوله ل ونصف قطره نق ، يكون حجمه ح = ط نق^{٢} . ل عند استطالة هذا السلك لا يتغير حجمه ولكن يزداد طوله ويقل نصف قطره .

وبمفاضلة المعادلة السابقة « ح = ط نق^{٢} . ل » ينتج :

صفر = ط نق^{٢} ى ل + ٢ ط نق ل ى نق أى أن

$$\frac{\text{ى ل}}{\text{ل}} = -٢ \frac{\text{ى نق}}{\text{نق}}$$

$$\therefore \frac{\text{ى نق}}{\text{نق}} \Big/ \frac{\text{ى ل}}{\text{ل}} = -\frac{١}{٢} \text{ ومن التعريف}$$

« نسبة بواسون هى الانكماش النسبي فى القطر إلى الاستطالة » أى أن

$\gamma = \frac{١}{٢}$. وقد وجد عملياً أن متوسط نسبة بواسون للفلزات حوالى ٠,٣

٥ – ٧ العلاقة بين معاملات المرونة المختلفة :

أولاً : اعتبر مكعب من المادة طول ضلعه الوحدة . واعتبر ثلاثة من أحرفه المتعامدة تكون محاور إحداثيات س ، ص ، ع .

نفرض أننا أثرنا بقوة ق عمودياً على كل زوجين متقابلين من الأوجه المتعامدة .

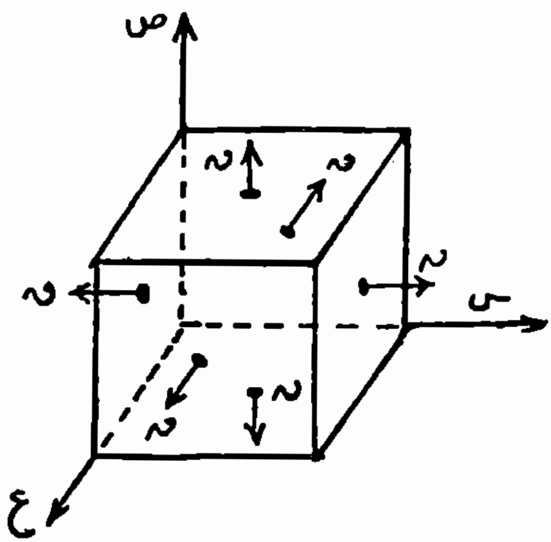
الاستطالة فى اتجاه القوة = الانفعال الطولى = $\frac{ق}{Y}$

حيث Y هو معامل يونج للمرونة .

الانكماش العمودي المصاحب هذه الاستطالة = $\gamma \frac{ق}{Y}$

∴ طول كل ضلع من أضلاع المكعب = $1 + \frac{ق}{Y} - 2\gamma\frac{ق}{Y}$

∴ التغير فى حجم المكعب = $\left[1 + \frac{ق}{Y} - 2\gamma\frac{ق}{Y}\right]^{3} - 1$



(شكل ٥ – ٩)

∴ الانفعال $\frac{ق}{Y}$ كمية صغيرة أصلا ، يمكن إهمال الحدود المربعة والمكعبة فى المكفوك لأنها تصبح كميات صغيرة جداً .

$$\therefore \text{التغير فى حجم المكعب} = ق \left(\frac{١}{Y} - \frac{٢\gamma}{Y} \right)$$

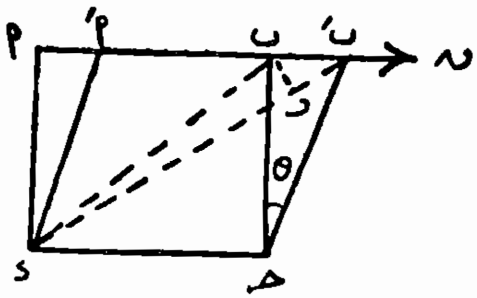
$$\therefore \text{معامل المرونة الحجمى } B = \frac{ق}{\text{التغير فى الحجم}} = \frac{Y}{٣(١ - ٢\gamma)} \quad \ldots \quad (٥ - ٥)$$

ثانياً : العلاقة بين القص والاستطالة :

لإثبات أن القص هو استطالة مقترنة بانكماش فى اتجاه عمودى عليه اعتبر الوجه أ ب ح ى فى المكعب بعد التأثير عليه بقوة قاصة وحدوث الانفعال .

الانفعال القاص = الزاوية θ .

يصاحب هذا الانفعال استطالة فى القطر بَ ى مع انضغاط فى القطر أَ ح .



(شكل ٥ − ١٠)

$$\text{الاستطالة فى ب ى} = \frac{\text{ب و}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{بَ ب}}{\sqrt{٢}} \cdot \frac{١}{\sqrt{٢}\ \text{ب ح}}$$

$$= \frac{١}{٢} \quad \frac{\text{بَ ب}}{\text{ب ح}} = \frac{١}{٢} \cdot \theta$$

$$\text{الانضغاط النسبى فى القطر أَ ح} = \frac{١}{٢} \cdot \theta$$

أى أن القص Θ يكافئ تماماً استطالة نسبية $\frac{1}{2}\Theta$ مصحوبة بانضغاط نسبي عمودى عليها قدره $\frac{1}{2}\Theta$.

نفرض الآن أن المكعب يؤثر عليه قوى شادة على وجهين متقابلين وضاغطة على وجهين آخرين .

الاستطالة $\frac{\text{ق}}{Y} + \frac{\text{ق}}{Y} \cdot \gamma$

الانكماش = $\frac{\text{ق}}{Y} + \frac{\text{ق}}{Y} \cdot \gamma$. وهما متساويان ومتعامدان أى أنهما يعادلان قص قدره زاوية Θ .

معامل المرونة القاص $N = \frac{\text{ق}}{\Theta}$

لكن مما سبق $\Theta = 2\left(\frac{\text{ق}}{Y} + \frac{\text{ق}}{Y} \cdot \gamma\right)$

$$\therefore N = \frac{Y}{2(1+\gamma)} \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \qquad (5 - 6)$$

بحذف نسبة بواسون γ من المعادلتين (٥ — ٥) ، (٥ — ٦) نحصل على العلاقة بين معاملات المرونة الثلاثة هى :

$$Y = \frac{9\,B\,N}{3\,B + N} \qquad (5 - 7)$$

٥ — ٨ الإجهاد الناتج عن تمدد الأجسام :

إذ ثبت قضيب معدنى من طرفيه ثم رفعت درجة حرارته يتولد داخله انفعال تضاغطى نتيجة لامتناع التمدد . يمكن إفتراض الوصول إلى هذه الحالة على مرحلتين .

أولاً : أن يترك القضيب حراً ليتمدد بالحررة .

ثانياً : نؤثر على طرفى القضيب بقوة ضاغطه ق لتعيد طول القضيب إلى ما كان عليه قبل التسخين .

إذا كان مقدار التمدد ءل ومساحته مقطع القضيب س فإن معامل يونج للمرونة :

$$Y = \frac{\text{ق}}{\text{س}} \div \frac{\text{ء ل}}{\text{ل}} .$$

ولكن من تعريف معامل التمدد الطولى α

$$\frac{ى\ ل}{ل} = \alpha \ .\ ى$$

حيث ى° م هو ارتفاع درجات الحررة الذى نشأ عنه التمدد ى ل فى الطول ل . من المعادلتين السابقين نحصل على قوة التضاغط داخل القضيب :

$ق = Y \ .\ س \ .\ \alpha \ .\ ى$ نيوتن ... ... (٥ – ٨)

٥ – ٩ الطاقة المختزنة فى سلك عليه إجهاد :

إذا أثرنا بقوة ق على سلك طوله ل وحدث عنها استطالة ى ل داخل الحد المرن لمادة السلك فإن لاستطالة تتناسب مع القوة حسب قانون هوك . يلاحظ هنا أن القوه تزايدت من صفر إلى قيمتها النهائية ق لتحدث لانفعال ى ل .

الشغل المبذول أثناء حدوث هذه الاستطالة = القوة × المسافة .

= القوة المتوسطة × الاستطالة

$= \frac{1}{2}\ ق\ .\ ى\ ل$ جول

وتختزن هذه الطاقة داخل السلك المشدود .

لكن من قانون هوك : $ق = Y \ .\ س \ .\ \frac{ى\ ل}{ل}$

∴ الطاقة المختزنة $= \frac{1}{2}\ Y\ س\ \frac{(ى\ ل)^2}{ل}$

لكن حجم السلك = مساحة مقطعة س × طوله ل .

∴ الطاقة المخزونة فى كل وحدة حجوم $= \frac{1}{2} Y \left(\frac{ى\ ل}{ل}\right)^2$

لكن $Y \frac{ى\ ل}{ل} =$ الإجهاد ، $\frac{ى\ ل}{ل} =$ الانفعال

∴ الطاقة المخزونة لكل وحدة حجوم = $\frac{1}{2}$ الإجهاد × الانفعال

تمارين :

١ ـــ سلكان أحدهما نحاس والآخر حديد طول كل منهما ٥ متر ، ثبت طرفاهما معاً فى نقطة وعلق فى الطرف المشترك الآخر كتلة ٢٠ كيلو جرام . إذا كانت مساحة مقطع كل منهما ٠٫٠١ سم^{٢} أوجد مقدار الاستطالة .

(Y للنحاس = ١٠^{١١} نيوتن / متر^{٢} ، $Y_{١}$ للحديد = ٢ × ١٠^{١١} نيوتن / متر^{٢})

الحل :

يستطيل كل من السلكين بمقدار واحد ليكن ى ل

بالنسبة للنحاس $\text{ق} = Y\ \text{س}\ \frac{\text{ى ل}}{\text{ل}} = ١٠^{١١} \times \frac{٠٫٠١}{١٠^{٤}} \times \frac{\text{ى ل}}{٥}$ نيوتن

للحديد $\text{ق}_{١} = Y_{١}\ \text{س}\ \frac{\text{ى ل}}{\text{ل}} = ٢ \times ١٠^{١١} \times \frac{٠٫٠١}{١٠^{٤}} \times \frac{\text{ى ل}}{٥}$ نيوتن

أى أن $\text{ق}_{١} = ٢\ \text{ق}$ ، لكن القوة الكلية هى ثقل الوزن المعلق

$= \text{ك} . \text{ﺟ} = ٢٠ \times ٩٫٨$

$= \text{ق} + \text{ق}_{١} = ٣\ \text{ق}$

$\therefore \text{ق} = \frac{٢٠ \times ٩٫٨}{٣}$ نيوتن

و بالتعويض نحصل على الاستطالة من المعادلة :

$$\frac{٢٠ \times ٩٫٨}{٣} = ١٠^{١١} \times \frac{٠٫٠١}{١٠^{٤}} \times \frac{\text{ى ل}}{٥}$$

ومنها ى ل = ٠٫٠٠٣٢٧ متر

= ٠٫ ٣٢٧ سم

٢ ـــ أنبوبة زجاجية منتظمة بها ماء وتتدلى رأسيًّا وتتعرض للشد بواسطة ثقل . أوجد نسبة بواسون للزجاج إذا علم أن المتر من الأنبوبة يستطيل بمقدار ٠٫٠٦ سم بينما يزداد طول متر من الماء داخلها بمقدار ٠٫٠٤ سم .

الحل :

حجم الماء داخل الأنبوبة ثابت

$\therefore$ ح = ط نق^{٢} . ع   حيث نق نصف قطر الأنبوبة ، ع هو ارتفاع السائل .

بمفاضلة المعادلة نحصل على :

صفر = ٢ نق ع ى نق + نق^{٢} ى ع

$$\therefore \frac{\text{ى نق}}{\text{نق}} = -\frac{١}{٢} \; \frac{\text{ى ع}}{\text{ع}}$$

$$\therefore \text{التغير النسبي فى نصف القطر} = \frac{١}{٢} \times \frac{٠,٤}{١٠٠} = ٠,٠٠٠٢$$

$$\text{التغير النسبي فى طول الأنبوبة} \frac{\text{ى ل}}{\text{ل}} = \frac{,٠٦}{١٠٠} = ٠,٠٠٠٦$$

$$\text{نسبة بواسون} = \frac{\text{التغير النسبي فى نصف القطر}}{\text{التغير النسبي فى الطول}} = \frac{\text{ى نق}}{\text{نق}} \div \frac{\text{ى ل}}{\text{ل}}$$

$$= \frac{,٠٠٠٢}{,٠٠٠٦} = \frac{١}{٣}$$

٣ — إحسب كثافة الماء فى قاع محيط على عمق ٥ كيلومترات علماً بأن معامل الانضغاط ٥ $\times$ ١٠$^{-١١}$

الحل :

$$\text{معامل الانضغاط} = \frac{١}{\text{معامل المرونة الحجمى}} \qquad \frac{\text{التغير النسبي فى الحجم}}{\text{الزيادة فى الضغط}}$$

الزيادة فى الضغط على عمق ٥ كم = ٥ $\times$ ١٠٠٠ $\times$ ١٠٠ $\times$ ٩٨٠ دين / سم^{٢}

$$\text{التغير النسبي فى الحجم} \frac{\text{ى ح}}{\text{ح}} = \frac{\text{الزيادة فى الضغط}}{\text{معامل المرونة الحجمى}}$$

$$= ٥ \times ١٠^{٥} \times ٩٨٠ \times ٥ \times ١٠^{-١١}$$

$$= ,٠٢٤٥$$

أى أن كل ١ سم^{٣} على هذ العمق ينقص حجمه بمقدار ٠٢٤٥,٠ سم^{٣} عن نظيره على السطح .

∴ تصبح الكثافة = $\frac{١}{١ - ٠,٠٢٤٥}$ = ١,٠٢٥ جم / سم^{٣}

٤ — ثبت قضيب من الصلب من طرفيه عندما كانت درجة حرارته ٢٠٠°م ، إحسب الطاقة المخزونة فى وحدة الحجوم عندما يبرد القضيب لدرجة الصفر المئوى (معامل يونج للصلب = ٢ × ١٠^{١٢} داين / سم^{٢} ، معامل التمدد الطولى α = ١,١ × ١٠$^{-٥}$) .

الحل :

الطاقة المخزونة فى وحدة الحجوم = $\frac{١}{٢}$ الإجهاد × الانفعال .

الإجهاد = Y . $\frac{ء ل}{ل}$

من قانون التمدد $\frac{ء ل}{ل}$ = معامل التمدد × زيادة درجات الحرارة

أى أن الانفعال = ١,١ × ١٠$^{-٥}$ × ٢٠٠

الإجهاد = ٢ × ١٠^{١٢} × ١,١ × ١٠$^{-٥}$ × ٢٠٠

الطاقة = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١٠^{١٢} × ١,١ × ١٠$^{-٥}$ × ٢٠٠ × ١,١ × ١٠$^{-٥}$ × ٢٠٠

= ٤٨٤ × ١٠^{٥} إرج = ٠,٤٨٤ جول

٥ — أوجد عزم الازدواج اللازم للى قضيب نصف قطره نق وطوله ل ومعامل صلابته N بزاوية معينة . ماذا يكون الازدواج فى حالة أسطوانة مجوفة نصف قطريها نق$_{١}$ ، نق$_{٢}$

احسب الشغل المبذول فى لى سلك طوله ١٠٠ سم ونصف قطره ٢ مم خلال زاوية نصف قطرية (N = ٨ × ١٠^{١١} داين / سم^{٢}) .

٦ — وضعت كتلة قدرها ٥ كيلوجرام على اسطوانة رأسية طولها ٥٠ سم ونصف قطرها ١ سم ومعامل يونج لمادتها ٣,٥ × ١٠^{١١} داين / سم^{٢} . أوجد النقص فى طول الاسطوانة كذلك كمية الطاقة المختزنة بداخلها .

(الجواب ٠,٠٠٠٢٢ سم ، ٥٤٦ إرج)

٧ — علقت كتلة صغيرة فى طرف سلك رأسى من النحاس نصف قطره ١ مم . احسب الثقل الإضافى الذى يجب تعليقه ليمنع انكماش السلك عندما تنخفض درجة حرارته من ٢٠° م إلى الصفر المئوى .

(Y للنحاس = ١,١ × ١٠^١٢ وحدات سم . جم . ثانية . معامل التمدد الطولى للنحاس = ٠٠٠٠١٨, لكل درجة) .

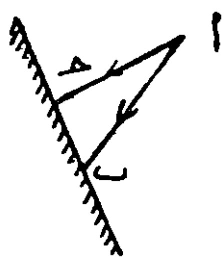
(الجواب ١٧,٧ كيلوجرام)

الباب السادس

خواص السوائل الساكنة

٦ — ١ ضغط السائل : Pressure

يؤثر ضغط السائل المتزن دائماً عمودياً على السطح لأنه إذا لم يكن كذلك نفرض أنه يعمل فى الاتجاه أ ب المائل على السطح . يمكن تحليل هذه القوة إلى مركبتين فى اتجاهين إحداهما عمودية على اتجاه



(شكل ٦ — ١)

السطح وتتزن مع رد الفعل العمودى أما الأخرى التى فى اتجاه السطح فإنها تعمل على تحريك السائل فى هذا الاتجاه وهذا خلاف الفرض من أن السائل فى حالة توازن .

∴ ضغط السائل المتزن لا بد أن يكون عمودياً على السطح .

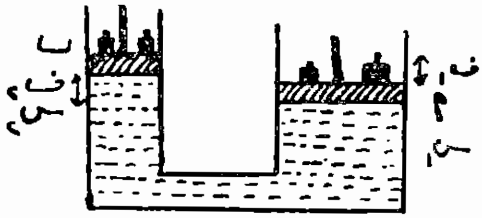
مقدار ضغط أى سائل على سطح ما يعرف بأنه القوة العمودية الواقعة على وحدة المساحات وتساوى وزن عمود من السائل ارتفاعه يساوى ارتفاع السائل من السطح حتى هذه النقطة ومساحة مقطعه تساوى الوحدة .

أى أن ص = ع . ث . حـ

حيث ع ارتفاع السائل ، ث هى كثافة السائل . حـ عجلة الجاذبية .

٦ ــ ٢ قاعدة باسكال :

إذا وقع أى جزء من سائل متزن فى حيز محدود تحت تأثير ضغط ما فإن الضغط ينتقل غير منقوصاً إلى جميع أجزاء السائل .



شكل (٦ ــ ٢)

ولإثبات هذه القاعدة اعتبر أسطوانتين أ ، ب (شكل ٦ ــ ٢) يتصلان من أسفل وبهما بعض من سائل . يقفل كل أسطوانة مكبس حر الحركة . نفرض أن مساحة المقطع للأسطوانتين أ ب هما س_1 ، س_2 على الترتيب . إذا أثرنا بقوة ق_1 على المكبس أ بحيث يتحرك مسافة ف إلى أسفل فإنه يؤثر بضغط قدره $\frac{\text{ق}_1}{\text{س}_1}$ على السائل فى الأسطوانة أ . ينتقل هذا الضغط داخل السائل ويدفع المكبس ب فى الأسطوانة الثانية . نفرض أن المسافة التى يتحركها المكبس ب هى ف_2 .

الشغل الخارجى المبذول على المكبس أ $= \text{ق}_1 \times \text{ف}_1$.

$$= \frac{\text{ق}_1}{\text{س}_1} \times \text{ف}_1\ \text{س}_1 = \frac{\text{ق}_1}{\text{س}_1} \cdot \text{ح}$$

حيث $\text{ح} = \text{ف}_1\ \text{س}_1$ هو حجم السائل الذى أزاحه المكبس أ .

إذا فرضنا أن السائل يؤثر بقوة ق_2 على المكبس ب يكون الشغل المبذول من السائل على المكبس

$$\text{ب} = \text{ق}_2 \cdot \text{ف}_2 = \frac{\text{ق}_2}{\text{س}_2} \cdot \text{ف}_2 \cdot \text{س}_2 = \frac{\text{ق}_2}{\text{س}_2} \cdot \text{ح} \, .$$

يلاحظ أن $\text{ف}_2\ \text{س}_2 = \text{ح} =$ الحجم الذى تحركه المكبس ب وهو نفس الحجم من السائل الذى زاحه المكبس أ باعتبار أن السائل غير قابل للانضغاط .

وبتطبيق قانون بقاء الطاقة على المجموعة يكون الشغل المبذول على المكبس أ مساوياً للشغل الذى يبذله السائل على المكبس ب .

∴ $\frac{\text{ق}_1}{\text{س}_1} = \frac{\text{ق}_2}{\text{س}_2}$ ، لكن من التعريف ، الضغط عند أ

$= \text{ض}_1 = \frac{\text{ق}_1}{\text{س}_1}$ والضغط عند ب $= \text{ض}_2 = \frac{\text{ق}_2}{\text{س}_2}$

أى أن $\text{ض}_1 = \text{ض}_2$

∴ ضغط السائل فى جميع أجزائه واحداً .

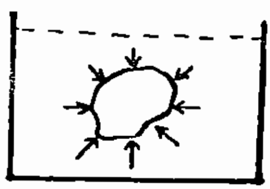
٦ – ٣ دفع السوائل للأجسام المغمورة فيها وقاعدة أرشميدس :

إذا غمر جسم فى سائل فإنه يقع تحت تأثير دفع من أسفل إلى أعلى بسبب السائل . وهذا الدفع سبب نقص وزن الجسم ظاهرياً . ويؤثر هذا الدفع على الجسم سواء كان مغموراً كلياً أو مغموراً جزئياً . وقد وجد أن هذا الدفع مساوياً لوزن السائل الذى يزيحه الجزء المغمور من الجسم .

أى أن الدفع = وزن السائل المزاح = حجم الجزء المغمور من الجسم × كثافة السائل . وتعرف هذه بقاعدة أرشميدس .

« إذا كان السائل ماء (كثافته = ١) وكان الجسم مغموراً تماماً فإن دفع السائل يساوى وزن الماء الذى أزاحه الجسم ويساوى عددياً حجم الجسم » .

لإثبات قاعدة أرشميدس نعتبر جزءاً داخلياً فى السائل المتزن، تؤثر على هذا الجزء قوى أو ضغوط فى جميع الجهات من السائل الخارجى ، كما فى شكل (٦ – ٣) .



(شكل ٦ – ٣)

بتحليل هذه القوى فى الاتجاهين الأفقى والرأسى نجد أن محصلة المركبات الأفقية تتلاشى إذ أن السائل ساكن ولا توجد فيه حركة أفقية . أما محصلة المركبات الرأسية فلها قيمة محددة وتعمل إلى أعلى لكى تتعادل فى تأثيرها مع الوزن إلى أسفل لهذا الجزء المعلق من السائل . إذ لو لم تكن هاتين القوتين متعادلتين لتحرك ذلك الجزء إلى أعلى أو إلى أسفل وهذا خلاف الواقع . فإذا أزحنا هذا الجزء من السائل ووضعنا

بدله جسماً له نفس الشكل فسوف يعانى دفعاً من السائل إلى أعلى يساوى وزن السائل المزاح الذى له نفس حجم الجسم .

استعمالات قاعدة أرشميدس : تستعمل هذه القاعدة فى تعيين الأوزان النوعية للأجسام والسوائل .

ويعرف الوزن النوعى لجسم بأنه النسبة بين وزن الجسم فى الهواء ووزن حجم من الماء يساوى حجم الجسم . وواضح أن هذه النسبة لا تميز ، وإن كانت تساوى عددياً كثافة الجسم لأن وزن حجم مساو لحجم الجسم من الماء هو نفسه حجم الجسم باعتبار أن كثافة الماء هى الوحدة .

١ — الوزن النوعى لجسم صلب أكثف من الماء .

نزن الجسم فى الهواء (و١) ، ثم نزنه وهو مغمور فى الماء (و٢) يكون دفع الماء للجسم مساوياً؛ و١ — و٢ ويساوى عددياً حجمه ويكون الوزن النوعى للجسم هو

$$ث = \frac{\text{وزن الجسم فى الهواء}}{\text{وزن حجم مساو للجسم من الماء}} = \frac{و_1}{و_1 - و_2}$$

٢ — الوزن النوعى لجسم أقل كثافة من السائل : نستعمل غامر مع الجسم .

نوجد أولا وزن الجسم فى الهواء وليكن و١

ثم نوجد وزن الجسم فى الهواء والغامر فى الماء (و٢) وأخيراً وزن الجسم والغامر وكليهما مغموراً فى الماء (و٣) .

$و_2 - و_3 =$ دفع السائل للجسم .

$$\therefore ث = \frac{و_1}{و_2 - و_3}$$

٣ — الوزن النوعى لسائل .

نستعمل جسم صلب لا يذوب فى الماء أو السائل . نزنه فى الهواء (و١) ونزنه فى السائل (و٢) .

يكون دفع السائل له = و١ — و٢ ثم نزن الجسم فى الماء و٣ يكون دفع الماء له و١ — و٣ وهذا يساوى عددياً حجم الجسم .

$$\text{الكثافة النوعية السائل} = \frac{\text{وزن حجم معين من السائل}}{\text{وزن نفس الحجم من الماء}}$$

$$= \frac{و_1 - و_2}{و_1 - و_3}$$

٦ — ٤ الهيدرومترات : Hydrometers

الهيدرومتر هو جهاز لقياس الأوزان النوعية للسوائل . وأكثر استعمالاته شيوعاً فى قياس الوزن النوعى للألبان وأحماض البطاريات . يتركب النوع البسيط منه من عمود من الخشب منتظم المقطع مثبت بأسفله قطعة رصاص . وإذا وضع فى سائل فإنه يطفو رأسياً . ويتوقف طول العمود ، ف ، المغمور تحت سطح السائل على كثافة السائل .

دفع السائل للهيدرومتر = وزن السائل المزاح = س . ف . ث .

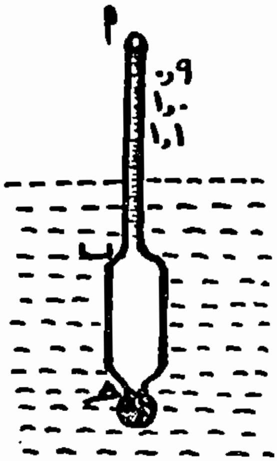
حيث س مساحة المقطع . ث كثافة السائل

بما أن الهيدرومتر يطفو على السائل

∴ وزن الهيدرومتر = دفع السائل له .

و = س . ف . ث

وبما أن كل من وزن الهيدرومر ومساحة مقطعه مقدار ثابت فإن كثافة السائل تتناسب عكسياً مع طول الجزء المغمور من الهيدرومتر ، ويمكن تدريج الجزء الظاهر فوق السائل ليعطى الأوزان النوعية مباشرة كما هو الحال فى الهيدرومتر المعتاد المبين بشكل (٦ — ٤) .



(شكل ٦ — ٤)

ويتركب من ساق رفيعة أ ب منتظمة المقطع تتصل بانتفاخ حـ ينتهى بمكان يوضع به بعض كرات الرصاص وذلك لكى يأخذ الهيدرومتر الوضع الرأسى والساق إلى أعلى عند وضعه بالسائل .

نفرض أن ص هو الجزء الغير مغمور من الساق داخل السائل . حجم هذا الجزء = ص . س حيث س هى مساحة المقطع .

الحجم المغمور من الهيدرومتر $=$ ح $-$ ص . س

$=$ حجم السائل المزاح

حيث ح هو الحجم الكلى للهيدرومتر .

∴ وزن الهيدرومتر و $=$ (ح $-$ ص . س) . ث

$$∴ \text{ح} - \text{ص} . \text{س} = \frac{\text{و}}{\text{ث}}$$

$$∴ \text{ص} = \frac{\text{ح}}{\text{س}} - \frac{\text{و}}{\text{س}} . \frac{١}{\text{ث}}$$

ولكن بما أن $\frac{\text{و}}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{ح}}{\text{س}}$ مقادير ثابتة للهيدرومتر الواحد فإن الجزء غير المغمور من الساق ، ص ، يتناسب طردياً مع مقلوب الكثافة ويعاير الهيدرومتر عادة بوضعه فى سوائل كثافتها معلومة ثم يدرج الساق حسب العلاقة السابقة .

اتزان الأجسام الطافية :

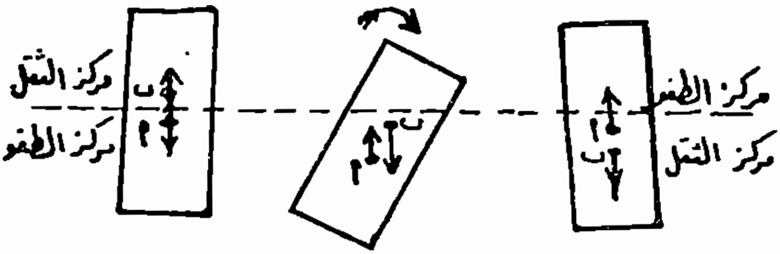
عندما يطفو أى جسم فوق سائل يكون متزناً تحت تأثيره قوتين هما :

أولاً : ثقله إلى أسفل وتعمل هذه القوة فى نقطة تسمى بمركز ثقل الجسم .

ثانياً : دفع السائل إلى أعلى وتؤثر قوة الدفع فى نقطة تسمى بمركز الطفو وهو فى الواقع مركز ثقل السائل المزاح .

ويكون الجسم فى حالة اتزان مستقر إذا كان مركز الطفو أعلى وضعاً من مركز ثقل الجسم . أما إذا حدث العكس فإن الاتزان يكون غير مستقر . وذلك بسبب تكون ازدواج من قوتى الثقل والدفع مما يؤدى إلى دوران الجسم ويجعل سافله عاليه (كما مبين بالشكل ٦ — ٥) .

ويجب مراعاة ذلك دائماً عند بناء السفن وتحميلها بحيث يكون مركز الطفو دائماً أعلى من مركز ثقل السفينة .



توازن مستقر   توازن غير مستقر ينتج دورانه

(شكل ٦ – ٥)

تمرين :

هيدرومتر يتكون من انتفاخ حجمه ٥ سم^{٣} تعلوه ساق أسطوانة قطرها٥ م يطفو فى الماء ومغمور منه أعلى الانتفاخ مسافة قدرها ٢ سم . ما هو للطول الذى ينغمر من ساقه إذا وضع فى سائل وزنه النوعى ٠,٩٥

الحل :

أولاً : فى حالة الماء يكون حجم الجزء المغمور= حجم الانتفاخ ح + ط نق^{٢} ل حيث ل هو طول الجزء المغمور فى الماء ، نق نصف قطر الساق .

وزن الماء المزاح = كثافة الماء × الحجم المغمور .

ثانياً : فى حالة السائل يكون وزن السائل المزاح= ٠,٩٥ × (ح + ط نق^{٢} ل¯) حيث ل¯ هو طول الجزء المغمور فى السائل .

حسب قانون الطفو فإن وزن السائل المزاح = وزن الجسم الطافى .

∴ وزن الماء المزاح فى الحالة الأولى = وزن السائل المزاح فى الحالة الثانية .

∴ ح + ط نق^{٢} ل = ٠,٩٥ (ح + ط نق^{٢} ل¯) .

∴ ٥ + ٣,١٤ × (٠,٢٥)^{٢} × ٢ = ٠,٩٥ (٥ + ٣,١٤ × (٠,٢٥)^{٢} ل¯) .

∴ ل¯ = ٣,٤٥ سم .

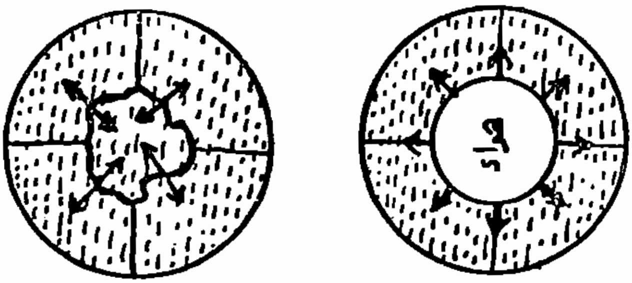
٦ – ٥ التوتر السطحى : Surface tension

تنشأ ظاهرة التوتر السطحى عن قوى التماسك وقوى الالتصاق بين الجزيئات عند سطوح السوائل وهى خاصية سطحية لا وجود لها فى داخل السائل . إذا اعتبرنا جزىء موجود فى باطن السائل فإنه يكون واقعاً تحت

تأثير قوى الجزيئات المحيطة به من جميع الجهات ولذلك فإن محصلة هذه القوى تساوى صفراً . أما الجزىء الموجود على السطح فإنه يقع تحت تأثير قوى جذب الجزيئات التى تحته فقط وتكون محصلة هذه القوى إلى أسفل . تعمل هذه المحصلة على حركة الجزيئات عند السطح إلى داخل السائل وهذا يسبب ميل سطح السائل دائماً إلى الانكماش ويؤدى ذلك إلى تكور قطرات السوائل فوق ورق مشمع وتبدو كما لو كانت موضوعة داخل غشاء مشدود رقيق من المطاط .

إذا اعتبرنا أى خط على سطح السائل فإنه يقع تحت تأثير قوتين متساويتين مقداراً ومتضادتين اتجاهاً . ويعرف التوتر السطحى بالقوة المؤثرة على وحدة الأطوال من أى خط من خطوط سطح السائل . ووحدات التوتر السطحى هى نيوتن / متر أى ك ن$^{-2}$.

ولتوضيح قوى التوتر السطحى عملياً نحضر سلك معدنى على شكل حلقة ونثبت بداخله خيه ب من خليط خفيف كما فى الشكل (٦ — ٦) عندما نغمر السلك فى محلول صابون ونرفعه يتكون غشاء رقيق من الصابون داخل الحلقة وتأخذ خية الخيط أى شكل .



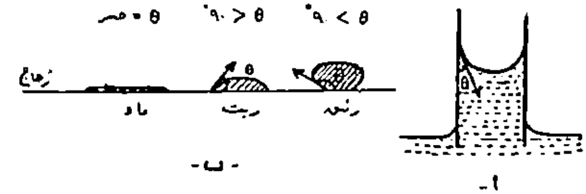
(شكل ٦ — ٦)

إذا قطعنا الغشاء داخل الخية فقط نجد أنها تأخذ فى الحال الشكل الدائرى المبين بالرسم . وذلك لأن قوى التوتر السطحى تؤثر عمودياً على جميع أجزاء خية الخيط فتجعلها لذلك دائرية الشكل .

الخاصية الشعرية وزاوية التلامس : Capillarity

إذا غمرنا طرف أنبوبة رأسياً فى سائل نلاحظ ارتفاع السائل داخل الأنبوبة . تسمى هذه الظاهرة بالخاصة الشعرية ومرجعها وجود توتر سطحى للسائل . وكلما ضاق مقطع الأنبوبة الشعرية كلما ازداد ارتفاع السائل بها ويشذ الزئبق عن جميع السوائل فى هذا الشأن إذا يلاحظ انخفاض سطح الزئبق داخل الأنابيب الشعرية بالنسبة لسطحه خارجها .

إذا لاحظنا أى سائل داخل أنبوبة شعرية نجد أن السائل يرتفع قرب جدار الأنبوبة عنه فى المنتصف



(شكل ٦ – ٧)

كما فى الشكل (٦ – ٧ أ) ، حيث يصنع المماس لسطح السائل عند نقطة تلامسه مع جدار الأنبوبة زاوية θ داخل السائل تسمى بزاوية التلامس (angle of contact) . تؤثر قوة التوتر السطحى فى اتجاه هذا المماس . وتتوقف زاوية التلامس على كل من طبيعة السائل والمادة التى يلامسها . فى حالة الماء والزجاج تكون زاوية التلامس صفر لذلك نجد أن الماء يبلل الزجاج تماماً أى أنه ينتشر فوقه . أما إذا لم يكن الزجاج نظيفاً كأن دهن بمادة شمعية أو ما شابه ذلك نجد أن الماء يتكور على السطح لأن زاوية التلامس لن تكون صفرية فى هذه الحالة ، انظر (٦–٧ ب) . وتكون زاوية التلامس دائماً حادة ماعدا فى حالة الزئبق وهو السائل الوحيد الذى زاوية تلامسه مع الزجاج منفرجة وتساوى ١٣٧° . وسبب ذلك أن قوة التماسك بين جزيئات الزئبق أكبر من قوة التلاصق بين هذه الجزيئات وسطح الزجاج بينما يحدث العكس فى حالة الماء والزجاج .

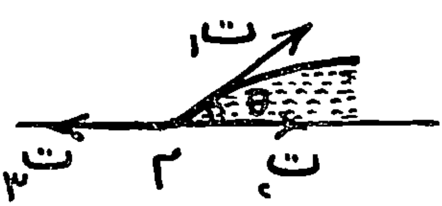
اعتبر قطره من سائل متزن فوق سطح مستو نفرض أن زاوية التلامس θ

وأن $ت_١$ ، $ت_٢$ ، $ت_٣$ هى قيم التوتر السطحى بين السائل والهواء وبين السائل والسطح الصلب وبين السطح الصلب والهواء على الترتيب .

لدراسة الاتزان اعتبر قوى التوتر السطحى عند نقطة مثل م (شكل ٦ – ٨) بالتحليل فى الاتجاه الأفقى نحصل على :

$$ت_١ \text{ جتا } \theta + ت_٢ = ت_٣$$

$$\therefore \text{ جتا } \theta = \frac{ت_٣ - ت_٢}{ت_١}$$

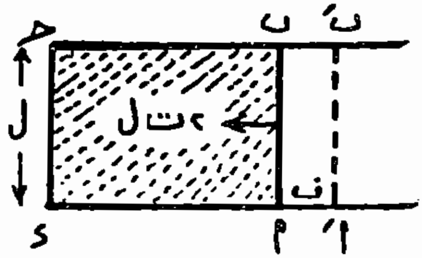


(شكل ٦ – ٨)

فإذا كانت $ت_{٣}$ أكبر من $ت_{٢}$ فإن جتا θ يكون موجباً أى أن θ تكون أقل من ٩٠° ويمكن للسائل أن يبلل السطح . أما إذا كان $ت_{٣}$ أقل من $ت_{٢}$ فإن الزاوية تكون منفرجة كما هى الحال فى الزئبق ولذلك يتكور على سطح الزجاج دون أن يبلله .

٦ — ٦ العلاقة بين التوتر السطحى والطاقة السطحية :

اعتبر غشاء من سائل داخل الإطار أ ب حـ ، كما فى شكل (٦ — ٩) ، ونفرض أن الضلع أ ب من الإطار يمكن له أن يتحرك . إذا كان ت هو التوتر السطحى للسائل فإن القوة المؤثرة على الضلع أ ب للداخل تساوى ٢ ت ل حيث ل هو طول أ ب والعدد ٢ ، نسبة لوجود سطحين للغشاء على كل سطح توجد قوة ت . ل .



(شكل ٦ — ٩)

نفرض أننا جذبنا الضلع أ ب للخارج مسافة ف ضد تأثير قوة التوتر السطحى للسائل فإن الشغل المبذول = ٢ ت ل . ف = ت × ٢ ل ف .

لكن ٢ ل ف هى الزيادة الكلية فى مساحة الغشاء .

∴ الشغل المبذول = التوتر السطحى × الزيادة فى مساحة الغشاء .

أى أن التوتر السطحى يساوى الشغل المبذول لكل زيادة فى مساحة الغشاء قدرها الواحدة . ويعد هذا تعريف آخر للتوتر السطحى .

تمرين :

(ا) أوجد مقدار الشغل المبذول ضد قوى التوتر السطحى لتكوين فقاعة صابون قطرها ١ سم إذا علم أن التوتر السطحى لمحلول الصابون ٢٥ داين / سم .

(ب) أوجد الشغل اللازم لتحويل قطرة من الماء نصف قطرها ٠,٥ سم إلى قطرات نصف قطر كل منها ١ مم . (ت للماء = ٧٠ داين / سم) .

الحل :

(ا) مساحة السطح الابتدائى لفقاعة الصابون = صفر .

مساحة السطح النهائى بعد تكوينها = ٢ × ٤ ط نق٢

= ٢ × ٤ ط × (٠,٥)٢ = ٢ ط سم٢

الشغل المبذول = ت × الزيادة فى المساحة

= ٢٥ × ٢ ط = ١٥٧ أرج

(ب) حجم قطرة الماء = $\frac{٤}{٣}$ ط نق٣

عدد القطرات بعد التجزئة = الحجم الابتدائى للقطرة / حجم القطرة بعد التجزئة .

$$= \frac{\frac{٤}{٣}ط \times (٠,٥)^٣}{\frac{٤}{٣}ط \times (٠,١)^٣} = ١٢٥ \text{ قطرة}$$

المساحة النهائية للقطرات = ١٢٥ × ٤ ط نق٢

= ١٢٥ × ٤ ط × (٠,١)٢ = ٥ ط سم٢

الزيادة فى المساحة كنتيجة للتجزئة

= ٥ ط − ٤ ط (٠,٥)٢ = ٤ ط سم٢

∴ الشغل المبذول = المساحة الزائدة × التوتر السطحى

= ٤ ط × ٧٠

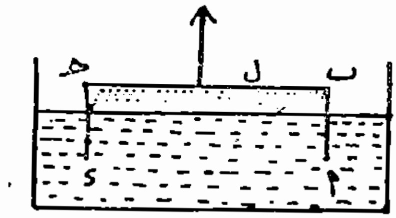
= ٨٧٩ أرج

٦ – ٧ طرق قياس التوتر السطحى (ت) :

١ – طريقة الميزان :

احضر سلك ا ب حـ ى كما فى الشكل (٦ – ١٠) واغمره فى السائل المراد تعيين توتره السطحى عندما تجذب السلك إلى أعلى خارج السائل يتكون غشاء من السائل داخل السلك ، تكون قوة التوتر السطحى المؤثرة على السلك = ٢ ت × ل حيث يوجد سطحان للغشاء إذا علق السلك فى كفة ميزان حساس يمكننا معرفة مقدار قوة التوتر السطحى بمعرفة الزيادة فى وزن الميزان بعد تكوين الغشاء فى السلك.

إذا كانت الزيادة فى الوزن ك حـ



شكل (٦ — ١٠)

∴ ك حـ = ٢ ت ل

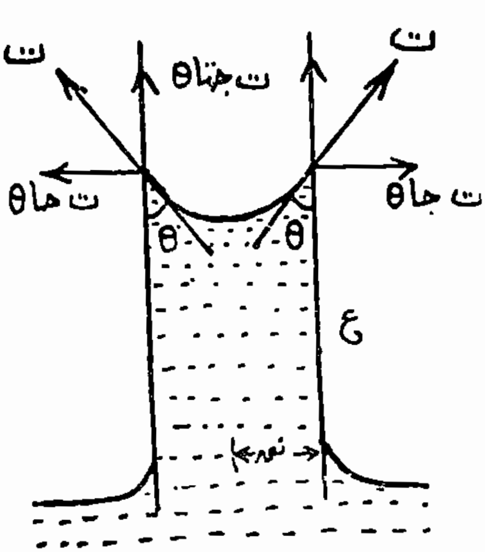
∴ ت = $\frac{\text{ك . حـ}}{\text{٢ ل}}$ نيوتن / متر

٢ — طريقة الأنبوبة الشعرية :

نظرية التجربة :

عند غمر طرف أنبوبة شعرية رأسياً فى سائل نجد أن السائل يرتفع فيها بمقدار محدود . وهذا الارتفاع يختلف من سائل لآخر ويعتمد أيضاً على نصف قطر الأنبوبة الشعرية .

نفرض أن ع هو ارتفاع السائل بالأنبوبة وأن نق هو نصف قطرها . على كل وحدة أطوال من خط التلامس بين السائل وجدار الأنبوبة عند السطح الحر تؤثر قوة التوتر السطحى ، ت ، على السائل



(شكل ٦ – ١١)

فى اتجاه المماس للسطح إلى أعلى ، هذه القوة لها مركبتان أحدهما ت جتا θ فى اتجاه الأنبوبة ، والأخرى ت حا θ فى اتجاه عمودى على الأنبوبة (θ هى زاوية التلامس) ، جميع المركبات ت جا θ تتلاشى مع بعضها لتضادها فى الاتجاه وتساويها فى المقدار .

ويكون مجموع مركبات القوى ت جتا θ على طول المحيط كله إلى أعلى هو ٢ ط نق . ت حتا θ . وتتزن هذه القوة مع وزن عمود السائل الذى يرتفع داخل الأنبوبة .

فإذا كانت δ كثافة السائل ، حـ عجلة الجاذبية الأرضية فإن

$$٢ \text{ ط نق ت جتا } \theta = \text{ط نق}^٢ \text{ ع } \delta \text{ حـ}$$

$$\therefore \text{ت} = \frac{\text{نق ع } \delta \text{ جـ}}{٢ \text{ جتا } \theta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٦ - ١)$$

وتعطى هذه المعادلة قيمة التوتر السطحى للسائل .

« فى حالة الماء θ = صفر ، حتا θ = ١ وكذلك δ = ١ »

$$\therefore \text{ت} = \frac{\text{نق ع حـ}}{٢} \text{ نيوتن / متر} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٦-٢)$$

ولإجراء تجربة لقياس التوتر السطحى للماء بواسطة الخاصة الشعرية نبلل الأنبوبة جيداً من الداخل ثم تثبت فى وضع رأسى ويقاس ارتفاع الماء ع بداخلها . وكذلك نصف قطر الأنبوبة نق بإدخال شريط من الزئبق داخلها فإذا كان طول الشريط ل وكتلته ك فإن :

$$\text{ك} = \text{ط نق}^٢ \text{ ل . ث}$$

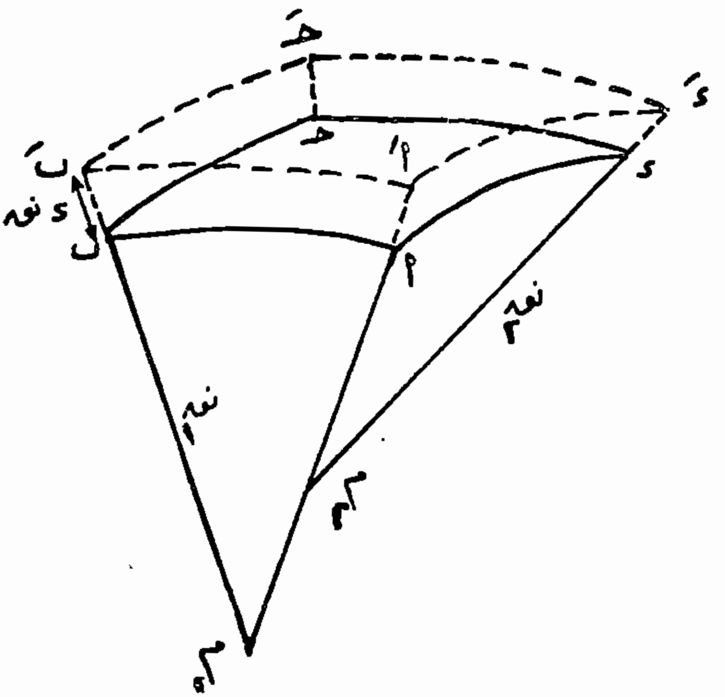
حيث ث كثافة الزئبق = ١٣,٣٦ جم / سم^٣

ومن المعادلة السابقة يكون $\text{نق} = \sqrt{\frac{\text{ك}}{\text{ط ل ث}}}$

وباستخدام المعادلة (٦ ــ ٢) نحصل على قيمة التوتر السطحى للماء .

اختلاف الضغط على السطوح المنحنية للسوائل والأغشية .

يتقعر السطح الحر لسائل إذا كان الضغط فوقه أكبر منه فى الداخل . ولإيجاد العلاقة بين الزيادة فى الضغط وانحناء السطح نعتبر جزء صغير ا ب حـ ى من السطح ونفرض فى الحالة العامة أن نصف قطر انحناء كل ا ب ، حـ ى هو نق$_١$ بينما انحناء كل من ب حـ ، ا ى هو نق$_٢$ ، شكل (٦ ــ ١٢) .



(شكل ٦ – ١٢)

نفرض أن هذا الجزء من السطح قد تمدد نتيجة لزيادة فى الضغط ض وأخذ الوضع أَ بَ حَ ءَ ، ونفرض أن المسافة العمودية التى أزيح بها هى ء نق باعتبار المجموعة معزولة وبتطبيق قانون بقاء الطاقة يجب أن يتساوى الشغل الخارجى المبذول فى عمل الإزاحة مع الزيادة فى الطاقة السطحية .

الشغل المبذول = القوة × الازاحة

$$= \text{ض} \times \text{أ ب حـ ء} \times \text{ء نق}$$

الزيادة فى مساحة السطح نتيجة التمدد

$$= \text{أَ بَ حَ ءَ} - \text{أ ب حـ ء}$$

من هندسة الشكل :

$$\frac{\text{أَ بَ}}{\text{نق}_1 + \text{ء نق}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{نق}_1} \quad ، \quad \frac{\text{بَ حَ}}{\text{نق}_2 + \text{ء نق}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{نق}_2}$$

$$\therefore \text{أَ بَ حَ ءَ} = \text{أ ب}\left(1 + \frac{\text{ء نق}}{\text{نق}_1}\right) \times \text{ب حـ}\left(1 + \frac{\text{ء نق}}{\text{نق}_2}\right)$$

$$= أ ب ح ى \left(١ + \frac{ى نو}{نو_١} + \frac{ى نو}{نو_٢} \right)$$

وأهملنا هنا (ى نو^٢) لأنها كمية صغيرة من الدرجة الثانية .

∴ الزيادة فى المساحة = أ َ بَ حَ ىَ − أ ب ح ى

$$= ى نو \left(\frac{١}{نو_١} + \frac{١}{نو_٢} \right) أ ب ح ى$$

ومن تعريف التوتر السطحى بأنه الطاقة الكامنة فى وحدة المساحات

$$∴ \text{ الزيادة فى الطاقة السطحية } = ت \times ى نو \left(\frac{١}{نو_١} + \frac{١}{نو_٢} \right) أ ب ح ى$$

وهذه الزيادة فى الطاقة تساوى الشغل المبذول أى أن

$$ص \times أ ب ح ى \times ى نو = ت \times ى نو \left(\frac{١}{نو_١} + \frac{١}{نو_٢} \right) ا ب ح ى$$

$$∴ ص = ت \left(\frac{١}{نو_١} + \frac{١}{نو_٢} \right)$$

ويسرى هذا القانون بالنسبة لسطح واحد فقط وزاوية تلامس صفر أما إذا كانت زاوية التلامس هى θ فإن المعادلة العامة تصبح

$$ص = ت \left(\frac{١}{نو_١} + \frac{١}{نو_٢} \right) \text{ جتا } \theta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٦ - ٣)$$

ونعتبر الآن الحالات الخاصة الآتية :

أولاً :

إذا كان السطح كروياً (مثلا حالة فقاعة تكونت داخل ماء) فإن

$$نو_١ = نو_٢ = نو$$

$$∴ ص = \frac{٢ \text{ ت}}{نو} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٦ - ٤)$$

ويلاحظ أن هذا القانون يسرى بالنسبة لسطح واحد فقط .

ثانياً :

إذا اعتبرنا حالة فقاعة صابون مثلا فإن لها سطحان واحد داخلى والآخر خارجى ويصبح القانون عندئذ :

$$ض = \frac{٤ \, ت}{نق} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٦ - ٥)$$

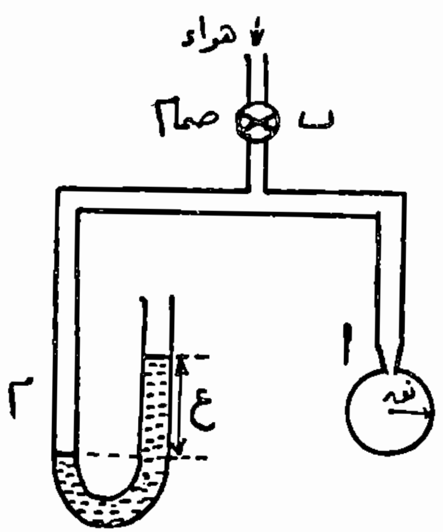
٣ – تعيين التوتر السطحى بطريقة فقاعة الصابون :

لتعيين قيمة التوتر السطحى لسائل بطريقة فقاعة الصابون يستخدم الجهاز المبين بشكل (٦ – ١٣) ويتركب من أنبوبة أ تنتهى بفوهة ضيقة . وتتصل هذه الأنبوبة بمانومتر م وبأنبوبة ب يقفلها صمام . توضع قطرة من السائل تحت الاختبار عند الفوهة أ فتقفلها . ثم يدخل بعض الهواء خلال الصمام فى الأنبوبة ب حتى تتكون فقاعة عند الفوهة ثم يقفل الصمام ويقاس قطر الفقاعة وليكن ٢ نق . ويقاس كذلك الزيادة فى الضغط داخلها بوسطة المانومتر م وذلك بمعرفة الفرق ع بين مستوى السائل فى فرعى المانومتر .

الزيادة فى الضغط داخل الفقاعة ض = ع . ϱ . جـ

حيث ϱ هى كثافة السائل فى المانومتر ، جـ عجلة الجاذبية الأرضية .

من ذلك نوجد التوتر السطحى ت من المعادلة



(شكل ٦ – ١٣)

$$\text{ت} = \frac{\text{نق} \cdot \text{ص}}{٤} = \frac{\text{نق} \cdot \text{ع} \cdot \delta \cdot \text{جـ}}{٤}$$

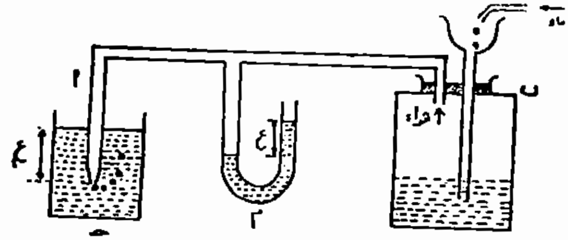
إذا كان سائل المانومتر ماء تكون $\delta = ١$ وتصبح المعادلة

$$\text{ت} \;\; \frac{\text{نق ع جـ}}{٤}$$

٦ — ٨ تغير التوتر السطحي بدرجة الحرارة :

تمكن ييجر JAEGER من قياس تغير التوتر السطحي للسوائل بدرجة الحرارة باستخدام الجهاز المبين بشكل (٦ — ١٤) .

ويتركب الجهاز من أنبوبة أ ضيقة الفوهة تتصل بمانومتر م وإناء ب يمكن إدخال تيار بطيء من الماء بداخله . يخرج هواء الإناء ب إلى الأنبوبة أ فينطلق على شكل فقاقيع في السائل حـ المغمورة فيه فوهة الأنبوبة أ على عمق ع١ من السطح . يسجل المانومتر م تغير الضغط داخل الأنابيب .



(شكل ٦ — ١٤)

عند بدء تكون الفقاعة يكون الضغط صغيراً ويزداد تدريجياً إلى حد أقصى تصبح عنده الفقاعة غير مستقرة فتترك فوهة الأنبوبة أ لتبدأ فقاعة أخرى في التكوين ، وهكذا . يقاس أقصى زيادة في الضغط داخل الفقاعة بواسطة المانومتر .

إذا كان ع هو أقصى فرق بين مستويي سائل المانومتر ، ع١ هو بعد الفوهة أ عن سطح السائل فإن الزيادة الفعلية في الضغط داخل الفقاعة عن الضغط الجوي هي :

$$\text{ص} = \text{ع}\ \delta\ \text{جـ} - \text{ع}_١\ \delta_١\ \text{جـ}$$

حيث :

δ ، $\delta_١$ هما كثافتي سائل المانومتر والسائل تحت الاختبار على الترتيب .

إذا كانت نق هى نصف قطر فتحة الأنبوبة أ (وتساوى فى نفس الوقت نصف قطر الفقاعة) فإن :

$$ص = \frac{٢ ت}{نق}$$

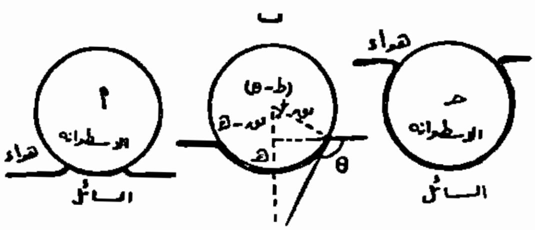
$$\therefore ت = \frac{نق ح}{٢} (ع\ \delta - ع_١\ \delta_١) \qquad \dots\ \dots\ \dots\ \dots \qquad (٦-٦)$$

من هذه المعادلة يمكن تعيين التوتر السطحى للسائل ت . وبتغير درجة حرارة السائل وإعادة التجربة السابقة يمكننا تعيين تغير التوتر السطحى للسائل بدرجة الحرارة .

تعيين زاوية التلامس بين مادة صلبة وسائل :

احضر أسطوانة ملساء نصف قطرها نق وضعها أفقياً بحيث تنغمر جزئياً فى السائل تحت الاختبار . ينحنى سطح السائل عند خط تلامسه مع الأسطوانة بسبب التوتر السطحى . يتوقف نوع الانحناء (مقعر أو محدب على عمق الجزء المنغمر من الأسطوانة ، انظر شكل ٦ — ١٥ أ ، حـ) يوجد وضع واحد (ب) للأسطوانة يكون فيه سطح السائل أفقياً تماماً ولا يتأثر بتلامسه مع الأسطوانة . بمعرفة عمق الجزء المنغمر من الاسطوانة (هـ) بواسطة ميكروسكوب وكذلك نصف قطرها (نق) نحصل مباشرة على زاوية التلامس θ .

من هندسة (شكل ٦ — ١٥) .



(شكل ٦ — ١٥)

$$جتا\ (ط - \theta) = \frac{نق - هـ}{نق} = -\ جتا\ \theta$$

$$\therefore \quad = جتا^{-1} \left(\frac{هـ - نق}{نق} \right)$$

تمارين :

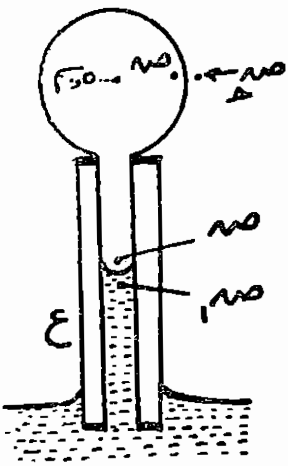
١ – غمر طرف أنبوبة شعرية قطرها ٢ مم رأسياً فى محلول صابون وتكونت على الطارف الآخر فقاعة صابون قطرها ٢ سم . أوجد ارتفاع محلول الصابون فى الأنبوبة علماً بأن التوتر السطحى لمحلول الصابون ٢٥ . « اعتبر كثافة السائل = ١ وزاوية التلامس = صفر بوحدات سم . جم . ثانية » .

الحل :

نفرض أن الضغط فوق السطح المقعر للسائل فى الأنبوبة الشعرية هو ض وأن الضغط تحت السطح مباشرة ض١ ، وأن نق١ نصف قطر الأنبوبة .

ض – ض١ = $\frac{\text{٢ ت}}{\text{نق١}}$ ... ... (١)

إذا كان الضغط الجوى ض ح وكثافة السائل δ وارتفاعه ع فإن



(شكل ٦ – ١٦)

ض ح – ض١ = ط نق١² ع δ جـ ... ... (٢)

باعتبار الضغط داخل وخارج الفقاعة

∴ ض – ض ح = $\frac{\text{٤ ت}}{\text{نق٢}}$ حيث نق٢ هو نصف قطر الفقاعة

من المعادلات الثلاثة وبحذف ض ، ض١ ، ضـ نحصل على .

$$\frac{\text{٢ ت}}{\text{نق}_{١}} = \frac{\text{٤ ت}}{\text{نق}_{٢}} + \text{ط نق}_{١}^{٢}\ \text{ع}\ \delta\ \text{جـ} \qquad \text{ومنها}$$

$$\frac{٢ \times ٢٥}{٠,١} \qquad \frac{٤ \times ٢٥}{١} + \text{ط} \times (٠,١)^{٢}\ \text{ع} \times ٩٨٠$$

∴ ع = ١٣ سم .

٢ — لوحان متوازيان من الزجاج وضعا رأسيًا بحيث يلامس طرفاهما السفليين سطح سائل يبلل الزجاج وتوتره السطحى ت . إذا كانت المسافة بين اللوحين ف أوجد الارتفاع الذى يصل إليه السائل .

الحل :

نفرض أن طول كل لوح هو ل سم

يكون طول خط التلامس بين اللوحين والسائل = ٢ ل سم

قوة التوتر السطحى التى تؤثر على اللوحين = ٢ ل ت داين

تتزن هذه القوة مع ثقل عمود من السائل ارتفاعه ع ومساحة مقطعة ل . ف . . . .

٢ ل ت = ل ف ع . δ . جـ حيث δ هى كثافة السائل .

$$\therefore \text{ ارتفاع السائل ع} = \frac{\text{٢ ت}}{\text{ف} . \delta . \text{جـ}}$$

٣ — وضع ماء فى أنبوبة على شكل حرف U قطر أحد فرعيها ١ سم وقطر الفرع الآخر ١ مم . أوجد الفرق بين مستويى سطح الماء فى الفرعين علماً بأن التوتر السطحى للماء = ٧٠ داين / سم .

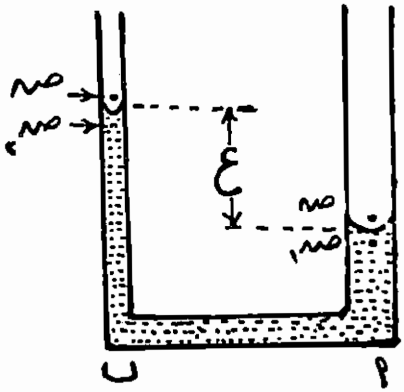
الحل :

نفرض أن ض هو الضغط الجوى وأن الضغط أسفل السطح الحر للسائل فى الفرعين أ ، ب هما على الترتيب ض١ ، ض٢ .

∴ الفرق فى الضغط على جانبى السطح الحر للسائل ، والذى يأخذ شكل نصف كرة هو :

$$\text{ض} - \text{ض}_{١} = \frac{\text{٢ ت}}{\text{نق}_{١}} \quad \text{للفرع أ}$$

$$\text{، ض} - \text{ض}_{٢} = \frac{\text{٢ ت}}{\text{نق}_{٢}} \quad \text{للفرع ب}$$



(شكل ٦ – ١٧)

بالطرح

∴ $\text{ص}_{١} - \text{ص}_{٢} = \frac{\text{٢ ت}}{\text{نق}_{٢}} - \frac{\text{٢ ت}}{\text{نق}_{١}}$

لكن $\text{ص}_{٣} - \text{ص}_{٢} = \text{ع} . \delta . \text{ح}$ حيث δ كثافة السائل

∴ $\frac{\text{٢ ت}}{\text{نق}_{٢}} - \frac{\text{٢ ت}}{\text{نق}_{١}} = \text{ع} . \delta . \text{ح}$

فى حالة الماء δ = ١ ، ت = ٧٠

∴ $\frac{٢ \times ٧٠}{٠٫٠٥} - \frac{٢ \times ٧٠}{٠٫٥} = \text{ع} \times ١ \times ٩٨٠$

∴ ع = ٢٫٦ سم

٤ – سبيكة من فلزين وزنها ١٧٠ جم يصبح وزنها الظاهرى ٩٥ جراماً إذا غمرت فى سائل كثافته ١٫٥ جم / سم^{٣} ، إذا كانت الكثافة النوعية لمكونات السبيكة ٤ ، ٣ على الترتيب . احسب النسبة الحجمية لكل من الفلزين .

(الجواب ٢ : ٣)

٥ – يرتفع الماء فى أنبوبة شعرية مقدار ٦٫٢ سم . أوجد إلى أى عمق ينخفض سطح الزئبق بداخلها عندما تغمر نفس الأنبوبة فيه .

(التوتر السطحى للماء ٧٠ داين / جسم وللزئبق ٥٤٠ داين / سم وزاوية تلامس الزئبق والزجاج

١٤٠° وكثافة الزئبق ١٣,٦ جم / سم^{٣}) .

(الجواب ٢,٧ سم)

٦ – علل لما يأتي :

(ا) كروية قطرات المطر .

(ب) إمكان تعلق إبرة معدنية على سطح الماء .

(حـ) الحركة المستمرة لقطرة من زيت الكافور على سطح الماء .

٧ – فقاعتان مختلفتى الحجم تكونتا على طرفى أنبوبة بها صمام يعزل بينهما اشرح مع التفسير ماذا يحدث للفقاعتين عند فتح الصمام .

٨ – أنبوبة زجاجية مخروطية الشكل ارتفاعها ٢٠ سم قطر طرفيها ٠,٣ سم ، ٠,١ مم ، ثبتت رأسياً بحيث يلامس طرفها المتسع سطح ماء (توتره السطحى ٨٠ داين / سم) احسب ارتفاع الماء فى الأنبوبة باعتبار زاوية التلامس بين الماء والأنبوبة يساوى صفر .

٩ – وضع هيدرومتر أسطوانى الشكل فى إناء به ماء فكان سطح الماء ملامساً ساق الهيدرومتر عند التدريج ٦ سم ، ولما وضع الهيدرومتر فى زيت كثافته النوعية ٠,٨ كان سطح الزيت ملامساً للهيدرومتر عند التدريج ٤ سم ، أوجد طول الجزء الغير مغمور من الهيدرومتر عندما يوضع فى سائل كثافته النوعية ٠,٩ علماً بأن طول الهيدرومتر ١٠ سم ومساحة مقطعة ٢ سم^{٢} وأنه مدرج من أعلى إلى أسفل .

١٠ – أوجد الشغل اللازم بذله ضد التوتر السطحى لتكوين فقاعة من الصابون قطرها ٣ سم . وما الشغل الإضافى لكى يزداد قطر الفقاعة إلى ٦ سم ؟

(التوتر السطحى لمحلول الصابون = ٢٨ داين / سم)

١١ – هيدرومتر يتكون من انتفاخ حجمه ٥ سم^{٣} تعلوه ساق أسطوانية قطرها ٥ مم يطفو فى الماء ومغمور منه أعلى الانتفاخ مسافة قدرها ٢ سم . ما هو العمق الذى ينغمر من ساقه وهو يطفو فى سائل وزنه النوعى ٠,٩٥ ؟

(الجواب ٣,٤٥ سم)

الباب السابع

السوائل فى حالة الحركة

٧ — ١ خاصية الانتشار : Difusion

يقصد بالانتشار هنا انتقال ذرات أو جزئيات المادة فى داخلها من مكان إلى مكان آخر . ويعود الفضل لاكتشاف الطبيعة الجزيئية للمادة إلى ظاهرة الانتشار .

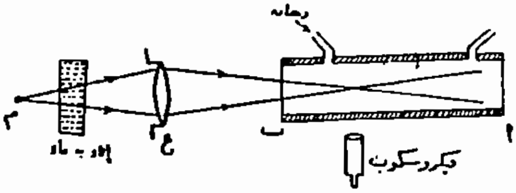
لكى نثبت خاصية الانتشار فى الأجسام الصلبة ، أحضرنا لوحين أحدهما من الذهب النقى والآخر من الرصاص النقى وضغطناهما متلاصقين ، وتركا لعدة سنين وبعد ذلك أجرى تحليل كيميائى على كل لوح فوجد بالتحليل تغلغل ذرات الذهب فى لوح الرصاص ، وكذلك ذرات الرصاص فى لوح الذهب إلى أعماق قد تصل إلى ٢ مم فى الداخل مما يدل على أن ذرات كل من الذهب والرصاص تحركت داخل المادة .

أما فى حالة السوائل فقد أجريت التجربة الآتية :

وضعت كمية كبريتات النحاس الزرقاء المركزة فى مخبار ثم سكب بلطف بيكرومات البوتاسيوم ، (وهو سائل أصفر اللون كثافته أقل من كثافة كبريتات النحاس)، على قطعة من الفلين طافية على سطح الكبريتات وذلك لكى تمنع امتزاج السائلين عند السكب . فى البداية نجد أن السطح الفاصل للسائلين واضح تمام الوضوح . وعندما ترك المخبار زمناً كافياً دون أن يقربه أحد وجد أن السائلين قد اختلطا تماماً وتكون لون أخضر منتظم فى كل المخبار .

أما فى حالة الغازات فتجرى تجربة الدخان لتبين حركة جزئيات الغاز .

ويتركب الجهاز كما فى شكل (٧ — ١) من مصدر ضوئى قوى م موضوع أمام عدسة لامة ع لتجميع الضوء داخل إناء زجاجى أ ب به فتحتان جانبيتان . يمرر تيار من الدخان (من سيجارة مثلا) . داخل الإناء الزجاجى وينظر إلى ذرات الدخان بواسطة ميكرسكوب فتظهر بتأثير شعاع الضوء كأنها نقط مضيئة فى فضاء مظلم (كالنجوم فى الليل) . وتزال الحرارة من شعاع الضوء الساقط بوضع إناء به ماء بارد فى طريق الضوء ، يسمح بمروره ، ولكنه يمتص الإشعاع الحرارى المتولد عن المصدر الضوئى . وذلك حتى لا تصل هذه الحرارة إلى الدخان فتسبب تيارات حمل تحرك ذراته .



(شكل ٧ – ١)

وقد لوحظ بالنظر فى الميكروسكوب أن النقط المضيئة ترتعش كما لو كان شيئاً غير منظور يصطدم بها وهذا الشىء هو جزيئات الهواء . وقد اختير الدخان فى هذه التجربة لأن جزيئاته من صغر الحجم وخفة الوزن بحيث يمكن أن يؤثر فيها تصادم جزيئات الهواء فتظهر نتيجة التصادم فى الميكروسكوب على شكل رعشة للنقط المضيئة .

٧ ـ ٢ معامل الانتشار :

نفرض أن لدينا وسطاً ما تختلف بداخله درجة تركيز جزىء معين . نعتبر مركزاً للأحداثيات داخل الوسط واتجاهاً موجباً للقياس بحيث يتزايد درجة تركيز هذا الجزىء فى هذا الاتجاه .

تنتشر الجزيئات عن طريق حركتها من الأجزاء ذات التركيز المرتفع إلى الأخرى الأقل تركيزاً أى أن الجزيئات تتحرك فى اتجاه تناقص المسافة .

اعتبر مساحة س عمودية على اتجاه الانتشار وتبعد مسافة ف عن مركز الأحداثيات . تتوقف كتلة المادة التى تعبر هذه المساحة على العوامل الآتية :

أولاً : الاختلاف فى درجة التركيز على جانبى هذه المساحة وتعرف درجة التركيز بكتلة المادة المنتشرة فى وحدة الحجوم ويسمى الفرق بين درجتى التركيز عند نقطتين تبعدان ١ سم فى اتجاه الانتشار بمعدل النقص فى التركيز بالنسبة للمسافة (الميل التركيزى) . وإذا رمزنا للتركيز بالرمز م فإن $\frac{ى\, م}{ى\, ف}$ = الميل التركيزى .

ثانياً : مقدار المساحة التى تنتشر خلالها المادة .

ثالثاً : زمن هذا الانتشار ، ν .

ويمكن بذلك كتابة قانون الانتشار الذى وضعه فيك Fick كما يأتى :

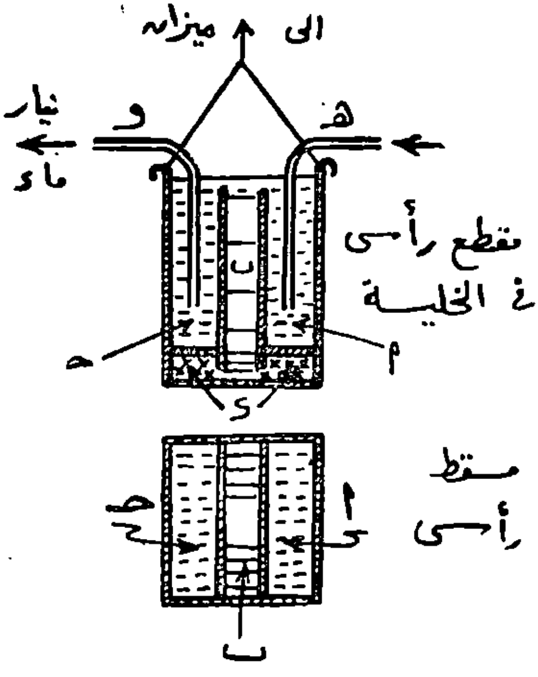
كتلة المادة التى تعبر المساحة س فى زمن ن هى :

$$\text{ك} = -\,\text{م س}\ \frac{\text{ى ن}}{\text{ى ف}}\ \text{ن}$$

ويلاحظ هنا وجود إشارة سالبة وذلك لأن اتجاه الانتشار يكون فى عكس اتجاه تزايد تركيز المادة . ويعرف الثابت م بمعامل الانتشار. ومن الواضح أن قيمة هذا المعامل تتوقف على نوع كل من المادة المنتشرة وكذلك الوسط الذى تنتشر خلاله هذه المادة . أما إذا كان الانتشار نتيجة لاختلاف تركيز نفس المادة فى الوسط ذاته سميت الظاهرة بالانتشار الذاتى .

تعيين معامل انتشار محلول ملح فى الماء :

تستخدم خلية زجاجية كالمبينة بشكل (٧ — ٢) وتتركب من إناء على شكل متوازى مستطيلات مقسم من الداخل لثلاث أقسام أ ، ب ، حـ بحيث يكون ارتفاع جدران القسم الداخلى ب فى مستوى منخفض قليلا عن حافة الجدران الخارجية . ويتصل القسم ب فقط بقسم ى فى قاع الإناء يحتوى على كمية من الأملاح . المراد تعيين معامل انتشار محلولها فى الماء . توجد أيضاً أنبوبتين هـ ، و



(شكل ٧ – ٢)

يسمحان بدخول وخروج تيار منتظم من الماء النقى . تملأ الخلية بالماء إلى مستوى أعلى قليلا من حافة جدران القسم ب يتكون فى القسم ى محلول ملح مركز نتيجة لذوبان الملح فى ماء الجزء ى يبدأ انتشار محلول الملح فى ماء الجزء ب من الخلية ويكون ذلك رأسياً إلى أعلى حتى يصل إلى حافة هذا القسم حيث يوجد تيار مستعرض من الماء يسحب أولا بأول كل المادة الملحية التى وصلت إلى هذا المكان نتيجة للانتشار .

ويترك الجهاز مدة كافية حتى الوصول إلى حالة الاستقرار التى يتم عندها سحب كل المادة التى انتشرت رأسياً إلى أعلى خلال مساحة عمودية قدرها س سم^2 فى زمن ثانية بواسطة تيار الماء المستعرض .

وتعلق عادة الخلية من كفة ميزان حساس لإيجاد معدل الفقد فى الثانية من كتلة السنتيمتر المكعب من المجموعة ويساوى هذا المقدار كتلة المادة ك التى تعبر عمودياً ١ سم^2 من فوهة الجزء ب من الخلية فى الثانية .

ومن قانون الانتشار لفيك :

$$ك = - م\ س \frac{ى\ ن}{ى\ ف} \qquad \dots \qquad (٧ - ١)$$

حيث س هى مساحة مقطع الجزء ب

لإيجاد معدل تغير تركيز المحلول مع الارتفاع عن قاع الخلية تجرى تجربتين جانبيتين .

الأولى يدرس فيها تغير معامل انكسار الضوء μ مع تركيز المحلول وذلك باستخدام مقياس الانكسار لآبى Abbe's refractometer ونحصل بذلك على قيمة $\frac{ى\ \mu}{ى\ ن}$

والتجربة الثانية يقاس فيها تغير معامل انكسار الضوء على الارتفاعات المختلفة داخل الجزء ب من الخلية وبذلك نحصل على $\frac{ى\ \mu}{ى\ ف}$

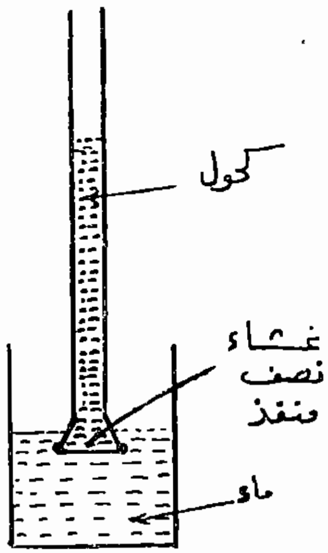
خارج قسمة المعادلتين السابقتين يعطينا $\frac{ى\ ن}{ى\ ف}$

$$\therefore \frac{ى\ ن}{ى\ ف} = \frac{\left(\frac{ى\ \mu}{ى\ ف}\right)}{\left(\frac{ى\ \mu}{ى\ ن}\right)}$$

وبالتعويض فى معاملة (٧ — ١) يمكننا إيجاد معامل الانتشار م .

٧ – ٣ الانتشار خلال الأغشية والضغط الأسموزى : Osmosis

تنتقل السوائل خلال الأغشية النصف نفاذة بدرجات متفاوتة وتسمى هذه الظاهرة بالانتشار الأسموزى ولتوضيح هذه الظاهرة نحضر مثانة مملوءة بالكحول ونغمرها فى ماء نقى نجد أن المثانة تتضخم حتى تنفجر نتيجة لدخول الماء إليها دون خروج الكحول منها وبالعكس إذا كانت المثانة مملوءة بالماء ووضعت فى كحول فإنها تتكمش لخروج الماء منها .



(شكل ٧ – ٣)

يمكن منع انتقال الماء خلال الغشاء إذا أثرنا على الكحول بضغط معين يطلق عليه الضغط الأسموزى نحضر أنبوبة مقفلة من أحد طرفيها بغشاء نصف نفاذ . يوضع المحلول أو السائل بداخلها وتثبت فى وضع رأسى بحيث يلامس طرفها السفلى سطح ماء نقى . بعد فترة نلاحظ ازدياد طول عمود السائل فى الأنبوبة بسبب انتقال الماء خلال الغشاء . وعندما يتساوى الضغط الأسموزى بالزيادة فى الضغط الناشئ عن ارتفاع عمود السائل مسافة ع يحدث اتزان ويكون الضغط الأسموزى = ع حـ ث

حيث ع هو الزيادة فى ارتفاع عمود السائل ، ث هى كثافته .

ويكون الشغل المبذول لنقل حجم ح من الماء خلال الغشاء عندما يكون الضغط الأسموزى للسائل ض هو ح . ض وقد وجد أن الضغط الأسموزى مثل ضغط الغاز يتأثر بدرجة الحرارة المطلقة ويتناسب معها طردياً .

قانون فانت هوف : Van't Hoff's law

وجد فانت هوف بالتجربة أن الضغط الأسموزى لمحلول مخفف لملح لا يتحلل داخل المذيب يساوى ضغط غاز تام جزيئاته من مادة المذاب ويشغل نفس حجم المحلول . ويمكن كتابة القانون رياضياً على الصورة الآتية :

$$\frac{ح\ ض}{ط} = \frac{ك}{م} \cdot ث$$

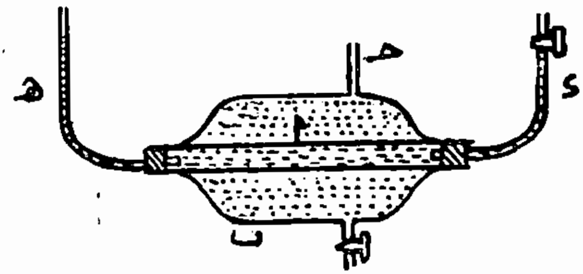
حيث ح حجم المحلول ، ض الضغط الأسموزى

، ط درجة الحرارة المطلقة ، ك كتلة المذاب

، م الوزن الجزيئى للمذاب ، ث مقدار ثابت .

تعين الضغط الأسموزى عملياً :

نستخدم الجهاز المبين بشكل (٧ – ٤) ويتركب من أنبوبة أ من الفخار رسب على مسامها مادة سيانيد الحديد النحاسية cupric ferro cyanide لكى تجعل مسامها نصف نفاذة . يحيط بهذه الأسطوانة غلاف معدنى ب يملأ بالمحلول تحت الاختبار عن طريق أنبوبة جانبية حـ . ويتصل بطرفى الأنبوبة أ أنبوبتان د ، هـ تقفل د صمام بينما هـ أنبوبة شعرية مدرجة .



(شكل ٧ – ٤)

تملأ الأنبوبة الفخارية أ بالماء النقى (أو المذيب عموماً) بحيث يظهر سطحه على تدريج الأنبوبة د يمر الماء خلال الأنبوبة أ إلى المحلول المذاب ما لم يؤثر على هذا الأخير ضغط هيدروستاتيكى عن طريق الفتحة حـ فى الأنبوبة ب .

عندما يتساوى هذا الضغط بالضغط الأسموزى للمحلول يظل سطح الماء فى الأنبوبة الشعرية هـ فى موضعه الأصلى .

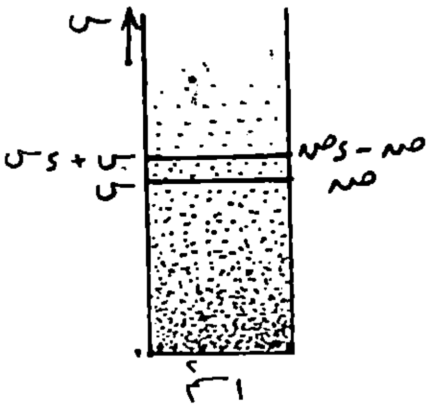
٧ – ٤ الحركة البراونية داخل السائل :

فى عام ١٨٢٧ لاحظ براون وجود حركة مستمرة لبعض المعلقات الموجودة داخل السائل . وقد فسرت هذه الظاهرة على أساس نظرية الحركة للمادة التى تنص على أن جزيئات كل مادة دائمة الحركة فى جميع الاتجاهات . فعند وجود ملعلقات فى سائل تتصادم هذه الجزيئات مع المعلقات فإذا كان هناك محصلة لدفع الجزيئات لأحد هذه المعلقات فى لحظة ما فإنها تتحرك تحت تأثيرها وتظهر الحركة البراونية .

قانون التوزيع العددى لدقائق جسم معلق فى سائل فى أعماقه المختلفة :

عندما يكون سائل فى حالة اتزان ديناميكى حرارى فإن ذلك لا يعنى أن تظل سرعات الجزيئات ثابتة لا تتغير ولكن إذا اعتبرنا أن عدد جزيئات الغاز التى يكون لها سرعات بين ع ، ع + ى ع فى لحظة ما هى ںع فإن شرط الاتزان هو أن يظل هذا العدد ثابتاً لا يتغير من الزمن .

اعتبر عموداً من السائل مساحة مقطعه ١ سم^2 يتزن تحت تأثير الجاذبية الأرضية ، ونفرض أن درجة الحرارة داخلة ثابتة ومنتظمة ، شكل (٧ – ٥) .



(شكل ٧ – ٥)

اعتبر طبقة من السائل سمكها ى س على ارتفاع س من أسفل عمود السائل وأن قيمة الضغط على سطحى هذه الطبقة هو ص ، ص – ى ص .

وزن جزيئات السائل فى هذه الطبقة . = δ . ح . ى س

حيث δ هى كثافة السائل عند الارتفاع س . يتزن هذا الوزن مع فرق الضغط على السطحين .

∴ (ص – ى ص) – (ص) = δ . ح . ى س

$$\therefore -\text{د ص} = \delta \,.\, \text{جـ} \,.\, \text{د س} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\text{٧} - \text{١})$$

ولكن من القانون العام للغازات

$$\text{ح} \,.\, \text{ص} = \text{ث} \,.\, \checkmark$$

حث ث هو ثابت الغاز للجرام الجزيئي ويساوى عدد إفوجادرو ن مضروباً فى ثابت بولتزمان k أي أن :

$$\text{ص} = \frac{\text{ن}}{\text{ح}} \,\text{k} \,.\, \checkmark = \nu \,.\, \text{k} \,.\, \checkmark \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\text{٧} - \text{٢})$$

حيث :

$$\nu = \frac{\text{ن}}{\text{ح}} = \text{عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم .}$$

$$\therefore \text{د ص} = \text{k} \,.\, \checkmark \,.\, \text{د}\nu \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\text{٧} - \text{٣})$$

ومن المعادلتين (٧ — ١) ، (٧ — ٣) نحصل على

$$-\text{k} \,.\, \checkmark \,.\, \text{د}\nu = \delta \,.\, \text{جـ} \,.\, \text{د س}$$

لكن الكثافة $\delta = \text{ك} \,.\, \nu$ حيث ك هى كتلة الجزىء ، ν عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم .

$$\therefore -\text{k} \,.\, \checkmark \,.\, \text{د}\nu = \text{ك} \,.\, \nu \,.\, \text{جـ} \,.\, \text{د س}$$

$$\therefore \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{\text{د}\nu}{\nu} = -\int_{0}^{\text{س}} \frac{\text{ك جـ}}{\text{k}\checkmark} \,.\, \text{د س}$$

وبالتكامل :

$$\therefore \nu = \nu_0 \,\text{هـ}^{-\frac{\text{ك جـ}}{\text{k}\checkmark}\,.\,\text{س}} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\text{٧} - \text{٤})$$

وهذه المعادلة تعطى توزيع الجزيئات فى وحدة الحجوم من السائل على الارتفاعات المختلفة س .
ومن المعادلة (٧ — ٢) يتناسب الضغط طردياً مع عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم فيكون بذلك تغير الضغط على الارتفاعات المختلفة هو :

$$- \frac{ك\ جـ}{k\ \checkmark} س$$

$$ص_{ـ} = ص \cdot هـ \qquad \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \qquad (٧ - ٥)$$

ويستخدم هذا القانون بعينه فى تعيين تغير ضغط الهواء الجوى مع الارتفاع عن سطح الأرض باعتبار ثبوت درجة الحرارة $\checkmark$.

٧ — ٥ تجارب بيرين لتعيين عدد أفوجادرو (١٩١١) :

استحضر بيرين محلول غروى (معلق) تكون جزيئاته نفس الحجم تقريباً وقد تحصل على هذا المحلول بإدارة المحلول الأولى بقوة طاردة مركزية لمدة طويلة حتّى انفصلت الجزيئات المتشابه معاً . وأخذ قطره من الجزء المتجانس ونظر إليها خلال ميكروسكوب قوى وافترض أن القطرة تكون عمود من السائل ارتفاعه حوالى ١,٠ مم .

وقد استطاع بيرين إيجاد عدد الجزيئات المعلقة التى تشغل مساحة معينة على ارتفاع معين من عمود السائل وذلك بالنظر خلال ثقب رفيع فى مجال رؤية الميكروسكوب . وبتغيير المستوى البؤرى للميكروسكوب بتغيير وضع قصبته تمكن من إيجاد تغير عدد الجزيئات الموجودة فى مساحة معينة مع الارتفاع .

نفرض أن ف هى المسافة داخل السائل بين قراءتين متتاليتين للمكروسكوب وأن عدد الجزيئات عندهما $ن_١$ ، $ن_٢$. إذا كان معامل انكسار السائل μ فإن المسافة الهوائية المكافئة هى :

س = μ ف .

وباستخدام قانون التوزيع العددى نحصل على المعادلة :

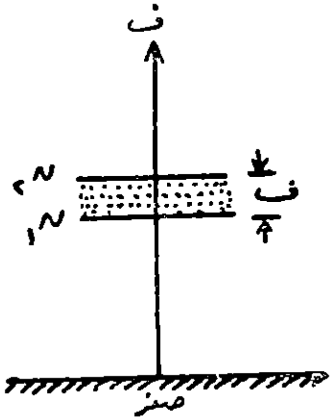
$$لو_{هـ} \left(\frac{ن_١}{ن_٢} \right) = \frac{ك\ جـ}{k\ \checkmark} \cdot \mu \cdot ف$$

$$لكن\ k = \frac{ن}{ث} \qquad حيث\ إن\ ث\ هو\ ثابت\ الغاز\ للجرام\ الجزيئى$$

$$\therefore\ لو_{هـ} \frac{ن_١}{ن_٢} = \frac{ك\ جـ\ ن}{\checkmark \cdot ث} \mu\ ف \qquad \dots\ \dots\ \dots\ \dots \qquad (٧ - ٦)$$

لإيجاد كتلة المعلق ك نوجد أولا كثافة المعلقات فى كل حجم السائل نظراً لتساوى كثافتها مع كثافة المحلول نوجد كثافة المحلول بواسطة قنينة الكثافة .

نوجد بعد ذلك حجم الجزىء المعلق بتخفيف المحلول والنظر إليه تحت الميكروسكوب مع إيجاد عدد الجزيئات التى تشغل طولا معيناً . ومن ذلك نوجد قطر الجزىء ثم حجمه . ومن الكثافة والحجم نوجد الكتلة .



(شكل ٧ – ٦)

ك = حجم الجزیء × كثافته .

وباستخدام المعادلة السابقة (٧ – ٦) وجد بيرين أن عدد أفوجادرو ن = ٦٫٠٦ × $١٠^{٢٣}$.

٧ – ٦ تدفق السوائل :

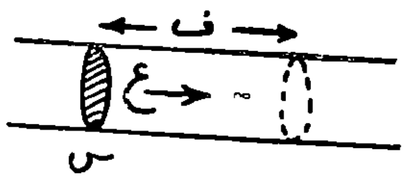
٧ – ٦ – ١ الشغل اللازم لتحريك سائل :

لكى يتحرك أى سائل داخل أنبوبة يجب بذل كمية من الطاقة على شكل شغل مبذول يتحول إلى طاقة حركة للسائل .

إذا كانت ق هى القوة الدافعة لحركة السائل فى أنبوبة مساحة مقطعها س يكون الضغط

$$ص = \frac{ق}{س}$$

إذا تحرك السائل مسافة ف داخل الأنبوبة نتيجة لتأثير القوة فإن :



(شكل ٧ – ٧)

الشغل المبذول = ح . ف = $\frac{ق}{س}$. ف س

= ض . ح

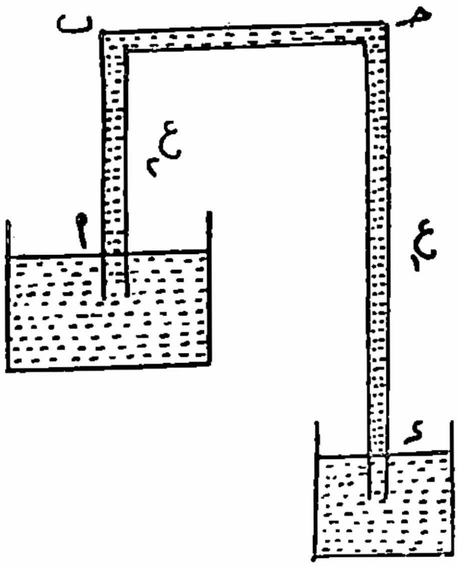
حيث ح = ف . س = حجم السائل المدفوع .

أى أن الشغل المبذول لتحريك سائل فى أنبوبة يساوى ضغط السائل مضروباً فى حجم السائل المدفوع .

٧ – ٦ – ٢ انتقال السوائل من المستويات المرتفعة للمنخفضة :

إذا غمر أحد طرفى أنبوبة أ ب حـ ، مثبتة على شكل زاويتين قائمتين فى إناء أ والطرف الآخر فى إناء د فى مستوى منخفض عن أ وكان السائل متصلاً داخل الأنبوبة فإن السائل يسرى داخلها من المستودع أ إلى د . (شكل ٧ – ٨) حتى يتساوى سطحى السائل فى كل منهما أو يفرغ السائل كلية من المستودع ذو المستوى المرتفع .

لتفسير سبب ذلك نفرض الضغط الجوى فوق سطحى السائل عند كل من أ ، د هو ض .
اعتبر ضغط السائل عند نقطتين ب ، حـ على نفس المستوى .
الضغط عند النقطة حـ .



(شكل ٧ – ٨)

$صـ_{جـ} = صـ - ع_{١} \cdot \delta \cdot حـ$

حيث حـ هى عجلة الجاذبية ، δ كثافة السائل ؛ $ع_{١}$ هو ارتفاع النقطة جـ عن سطح السائل فى المستودع ى .

الضغط عند النقطة ب $\quad صـ_{ب} = صـ - ع_{٢} \cdot \delta \cdot حـ$.

حيث $ع_{٢}$ هو ارتفاع النقطة ب عن سطح السائل فى المستودع أ .

$\therefore صـ_{ب} - صـ_{جـ} \quad = (ع_{١} - ع_{٢}) \cdot \delta \cdot حـ$.

ولما كانت $ع_{١}$ أكبر من $ع_{٢}$

$\therefore$ صـ ب أكبر من صـ جـ

أى أن السائل يسرى فى الاتجاه من ب إلى حـ طالما $ع_{١}$ أكبر من $ع_{٢}$.

٧ – ٦ – ٣ قاعدة توريشللى : (خروج سائل من ثقب فى إناء) .

نفرض وجود إناء مملوء بسائل وبه ثقب فى أسفله (شكل ٧ – ٩) . وأن سطح السائل قد حفظ فى مستوى ثابت بواسطة إضافة بعض السائل إضافة مستمرة لتعادل الكمية التى تخرج من الفتحة . يخرج السائل عند الفتحة تحت تأثير الضغط الناشئ من ارتفاع السائل فوقها وهذا يساوى ل . δ . حـ .

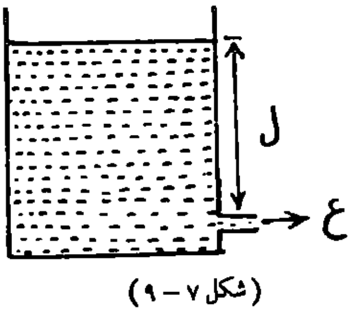
حيث ل ارتفاع السائل فوق الفتحة ، δ كثافة السائل ، حـ عجلة الجاذبية . إذا كانت سرعة خروج السائل من الفتحة ع فإن طاقة حركة ١ سم^{٣} من السائل $\frac{١}{٢}$ δ ع^{٢} . وبمساواة طاقة الموضع والحركة لهذا السنتيمتر المكعب عند سقوطه ل سم فإن :

$$\frac{١}{٢} \delta ع^{٢} = ل \cdot \delta \cdot حـ$$

$$\therefore ع^{٢} = ٢ حـ ل$$

$$\therefore ع = \sqrt{٢ حـ ل} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (٧ - ٧)$$

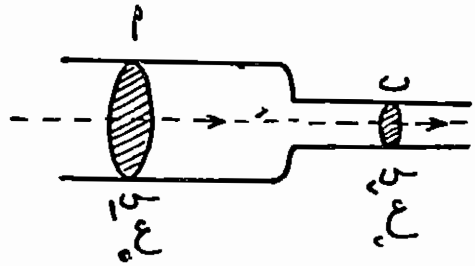
وهذه هى سرعة خروج الماء من الفتحة .



(شكل ٧ – ٩)

٧ — ٧ حركة السوائل فى الأنابيب :

تتغير سرعة حركة أى سائل فى أنبوبة ما حسب اتساع أو ضيق مقطعها . فكلما ازدادت الأنبوبة ضيقا كلما ازدادت سرعة السريان للسائل لإثبات تلك الحقيقة نفرض أنبوبة أفقية يتحرك فيها سائل غير قابل للانضغاط . نفرض مساحة مقطع الأنبوبة عند النقطتين أ ، ب (شكل ٧—١٠) هما س١ ، س٢ وأن سرعتى التدفق عندهما ع١ ، ع٢ على الترتيب .



(شكل ٧ — ١٠)

فى الزمن ن يتحرك السائل عند النقطة أ مسافة تساوى ع١ . ن بينما يتحرك السائل عند النقطة ب فى نفس الزمن مسافة ع٢ . ن

بما أن السائل غير قابل للانضغاط فإن حجم السائل الذى يمر بالنقطة أ فى الزمن ن يساوى حجم السائل الذى يمر بالنقطة ب فى نفس الزمن ، أى أن :

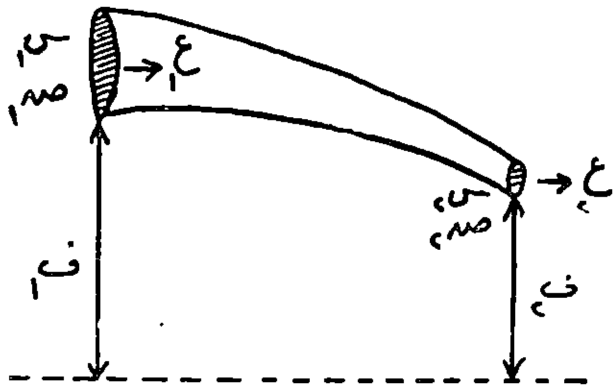
ع١ ن س١ = ع٢ ن س٢

∴ ع١ س١ = ع٢ س٢ ... ... (٧ — ٨)

أى أن سرعة التدفق تتناسب عكسياً مع مساحة مقطع الأنبوبة وهذا يفسر سبب اندفاع المياه بسرعة أكبر من خرطوم المياه كلما ازدادت فتحته ضيقاً .

٧ — ٨ نظرية برنولى :

لدراسة حركة سائل غير قابل للانضغاط داخل شبكة من الأنابيب الرأسية ذات المقطع المتغير (مثل شبكة أنابيب المياه فى المنازل) ، نفرض جزءاً من هذه الشبكة تمثله الأنبوبة أ ب (شكل ٧ — ١٧) ونفرض أن مساحة المقطع والارتفاع عن سطح الأرض عند كل من أ ، ب هما (س١ ، ف١) ، (س٢ ، ف٢) على الترتيب . وأن سرعة السائل وضغطه عندهما (ع١ ، ض١) ، (ع٢ ، ض٢)



(شكل ٧ – ١١)

على الترتيب . لإيجاد العلاقة بين سرعة التدفق والضغط والارتفاع عن سطح الأرض نعتبر أن هذه الأنابيب تكون مجوعة معزولة يمكن أن ينطبق عليها قانون بقاء الطاقة ، أى أن :

مجموع الطاقات عند النقطة أ = مجموع الطاقات عند النقطة ب .

تنشأ الطاقة عند أي نقطة مثل أ أو ب عن ثلاثة عوامل :

١ – طاقة الموضع التى يكتسبها السائل بفضل ارتفاعه ف عن سطح الأرض وتساوى هذه الطاقة ك ح ف حيث ك هى كتلة السائل الذى يمر فى وحدة الزمن .

٢ – طاقة الحركة التى يكتسبها السائل بفضل سرعتة ع وتساوى هذه الطاقة $\frac{1}{2}$ ك ع^2 .

٣ – الشغل الميكانيكى المبذول لدفع السائل داخل الأنابيب .

فإذا كان ضغط السائل عند نقطة ما هو صـ وإذا كانت مساحة المقطع للأنبوبة عند هذه النقطة هى س فإن القوة المحدثة للحركة = صـ . س .

إذا كانت سرعة السائل هى ع فإنه يتحرك فى وحدة الزمن مسافة تساوى عددياً السرعة ع .

∴ الشغل المبذول = القوة × المسافة .

ش = صـ . س . ع

بتطبيق قانون بقاء الطاقة عند كل من أ ، ب نحصل على

$$\text{ك ح ف}_1 + \frac{1}{2}\text{ك ع}_1^2 + \text{صـ}_1\text{س}_1\text{ع}_1 = \text{ك ح ف}_2 + \frac{1}{2}\text{ك ع}_2^2 + \text{صـ}_2\text{س}_2\text{ع}_2 \quad \ldots \quad (٧-٩)$$

وبما أن كتلة السائل المار فى وحدة الزمن ثابتة عند أ ، ب فإن

$ك = س_١ ع_١ \delta = س_٢ ع_٢ \delta$ ... ... (٧ — ١٠)

حيث δ هى كثافة السائل . ومن المعادلتين (٧ — ٩) ، (٧ — ١٠) نحصل على :

$$ح ف_١ + \frac{١}{٢} ع_١^٢ + \frac{ض_١}{\delta} = ح ف_٢ + \frac{١}{٢} ع_٢^٢ + \frac{ض_٢}{\delta}$$

... ... (٧ — ١١)

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة برنولى لتدفق السوائل فى الأنابيب .

إذا كانت الأنبوبة أفقية أى عندما يكون $ف_١ = ف_٢$ تصبح معادلة برنولى .

$$\frac{ض_١}{\delta} + \frac{١}{٢} ع_١^٢ = \frac{ض_٢}{\delta} + \frac{١}{٢} ع_٢^٢ \quad ... ... \quad (٧ - ١٢)$$

$$\therefore ض_٢ - ض_١ = \frac{١}{٢} \delta ع_١^٢ \left(\frac{ع_٢^٢}{ع_١^٢} - ١ \right)$$

لكن $ع_١ س_١ = ع_٢ س_٢$

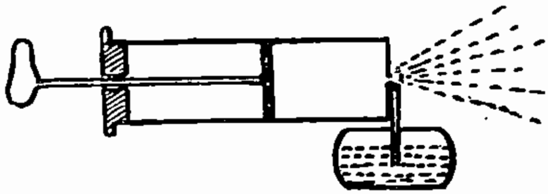
$$\therefore ض_٢ - ض_١ = \frac{١}{٢} \delta ع_١^٢ \left(\frac{س_١^٢}{س_٢^٢} - ١ \right)$$

من المعادلة يتضح أنه إذا كان $س_١$ أكبر من $س_٢$ يكون الضغط $ض_١$ أكبر من $ض_٢$ بينما تكون السرعة $ع_١$ أصغر من $ع_٢$. أى أنه عندما تزداد مساحة مقطع الأنبوبة تقل سرعة التدفق داخلها بينما يزداد ضغط السائل فى هذا المكان . وكمثال لتوضيح هذه الحقيقة نعتبر أن الأوعية الدموية فى جسم الإنسان ما هى إلا مجموعة من الأنابيب يتدفق داخلها سائل هو الدم . فعند قطع شريان حيث مساحة المقطع كبيرة تكون سرعة تدفق الدم صغيرة بينما يكون الضغط كبيراً مما يصعب معه إيقافه بطريق التجلط فقط ، بينما يلاحظ عكس ذلك فى حالة الجروح السطحية حيث تكون مقاطع الأوعية الدموية صغيرة فيكون ضغط السائل صغيراً ويسهل بذلك إيقافه بتكوين جلطة فى مكان القطع .

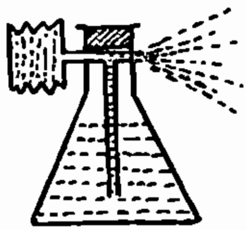
تطبيقات عملية لنظرية برنولى :

تتوقف الفكرة الأساسية فى عمل مذرات العطور والمبيدات الحشرية السائلة ومذرات الطلاء بالبويات على نتيجة نظرية برنولى التى تنص على أن ازدياد سرعة السائل أو الغاز عند مقطع فى أنبوبة يصحبه انخفاض

فى الضغط فى هذا المكان فعندما يندفع الهواء بسرعة من الفتحة الضيقة نتيجة للضغط على المكبس ينتج عن ذلك نقصاً فى الضغط فى المنطقة المحيطة بالفتحة والتى يوجد عندها فوهة الأنبوبة الرفيعة المغمورة فى السائل . فيرتفع فيها السائل ويختلط بالهواء المندفع و ينتشر بذلك فى الجو على شكل رذاذ خفيف .



مذرة المبيدات الحشريه



مذرة العطور

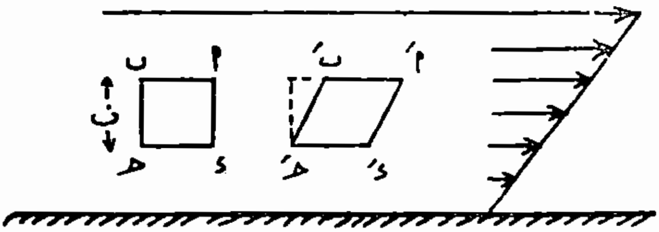
(شكل ٧ – ١٢)

لزوجة السوائل

إذا سكبنا كمية من زيت أو جليسرين وأخرى من ماء على مستوى أفقى نجد اختلافاً فى قابلية كل منهما على الانسياب . فبينما نجد الماء يستجيب بسهولة لفعل القوة التى تعمل على تحريكه نجد أن الجليسرين بطىء فى التدفق . والخاصية التى تميز السائل من حيث استجابته للحركة تسمى باللزوجة وتنشأ عن وجود ما يشبه الاحتكاك بين طبقات السائل بعضها وبعض . وكلما ازدادت قيمة هذا الاحتكاك كلما زادت لزوجة السائل . ويمكننا تعريف اللزوجة بأنها الممانعة التى تبديها طبقات السائل للحركة .

٧ – ٩ معادلة نيوتن :

نفرض سائلا يتحرك على مستوى أفقى ونفرض أن السائل يتكون من طبقات فوق بعضها البعض تتحرك بسرعات مختلفة تحت تأثير قوة مماسية تعمل على تحريك السائل (شكل ٧ – ١٣) . نفرض أن أ ب ح ء هو مكعب داخل السائل قبل الحركة وأن شكله قد تغير إلى الوضع أ َ بَ حَ ءَ أثناء حركة السائل . يتوقف مقدار انبعاج شكل المكعب على قوة الاحتكاك ق بين الطبقات المختلفة . ومن البديهى أن تتناسب هذه القوة طرديا مع مساحة سطح السائل الذى تتواجد قوى الاحتكاك علية .



(شكل ٧ – ١٣)

فإذا فرضنا أن مساحة سطح المكعب هو س وأن سرعة الطبقة العليا أ ب هى ع١ وسرعة الطبقة السفلى ب ح هى ع٢ فإن معدل تغير السرعة فى الاتجاه العمودى على سطح هو $\frac{ع١ - ع٢}{ف}$

حيث ف هى المسافة العمودية بين طبقتى السائل أ ب ، ح ء ، وواضح أن وحدات معدل تغير السرعة هى ($ن^{-١}$) .

افترض نيوتن أن قوة الاحتكاك ق تتناسب مع معدل تغير السرعة ، وكذلك مع مساحة السطح س أى أن :

$$ن = \eta \cdot س \cdot \frac{ع_1 - ع_2}{ف} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (١٧ - ١٢)$$

حيث ثابت التناسب η هو معامل اللزوجة للسائل . ويعرف بأنه القوة التى إذا أثرت على وحدة المساحات من سائل أحدثت فيه وحدة معدل تغير فى السرعة وتعرف المعادلة السابقة (٧ — ٢٣) بمعادلة نيوتن . وتستخدم فى تعيين وحدات معامل اللزوجة كما يأتى :

$$\eta = \frac{\text{قوة}}{\text{مساحة} \times \text{معدل تغير سرعة}}$$

$$= (ك\ ل\ ن^{-2}) \cdot (ل^{-2}) \cdot (ل \cdot ل^{-1}\ ن)$$

$$= (ك\ ل^{-1}\ ن^{-1}) .$$

وتسمى وحدة معامل اللزوجة بالبواز إذا استخدمنا وحدات سم . جم . ثانية

٧ — ١٠ سريان السوائل فى الأنابيب . معادلة بواسى .

يتوقف حجم السائل المتدفق فى الثانية عند سريانه فى أنبوبة على كل حال من المتغيرات الآتية :

١ — معامل لزوجة السائل ، η

٢ — نصف قطر الأنبوبة ، نق

٣ — معدل تغير الضغط فى اتجاه الأنبوبة ويعرف بأنه الفرق فى الضغط بين نقطتين تبعدان مسافة قدرها الوحدة فى اتجاه التدفق وتكون وحدات هذا المعدل هى :

$$\frac{\text{ضغط}}{\text{مسافة}} = \frac{\text{قوة}}{\text{مساحة} \times \text{طول}} = \frac{ك\ ل\ ن^{-2}}{ل^3} \quad [ك\ ل^{-2}\ ن^{-2}]$$

وتقاس قيمته بمعرفة الفرق فى الضغط ض بين طرفى الأنبوبة وطولها ل . بتطبيق نظرية الأبعاد :

$$\text{حجم السائل المتدفق فى الثانية} = م \cdot \eta^{\alpha}\ نق^{\beta} \cdot \left(\frac{ض}{ل}\right)^{\gamma}$$

حيث م ثابت عددى . وتصبح معادلة الأبعاد هى :

$$\left[\frac{ل^3}{ن}\right] = (ك\ ل^{-1}\ ن^{-1})^{\alpha} \cdot (ل)^{\beta}\ (ك\ ل^{-2}\ ن^{-2})^{\gamma}$$

$$\therefore \alpha + \gamma = \text{صفر}$$

$$-\alpha + \beta - ٢\gamma = ٣$$

$$\alpha + ٢\gamma = ١$$

وبحل المعادلات نحصل على

$$\alpha = -١ \quad . \quad \beta = ٤ \quad . \quad \gamma = ١$$

وتكون بذلك معادلة بواسى للتدفق هى :

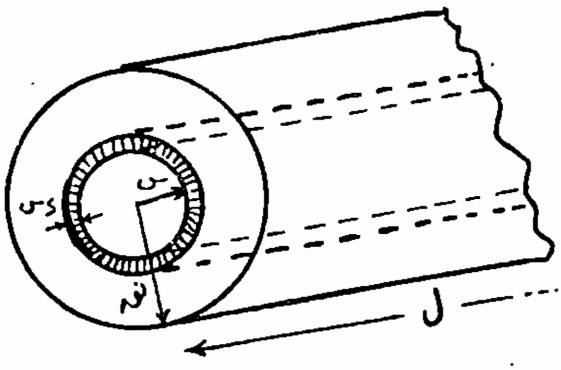
حجم السائل المار فى الثانية ح = م . $\frac{\text{ص} \,.\, \text{نق}^{٤}}{\eta \,.\, \text{ل}}$ ... ... (٧–١٤)

وقد وجد أن الثابت العددى هو $\frac{\text{ط}}{٨}$

∴ معدل التدفق ح = $\frac{\text{ط نق}^{٤}}{٨ \,.\, \eta \,.\, \text{ل}}$. ص ... ... (٧ – ١٥)

إثبات معادلة بواسى رياضياً :

نفرض أنبوبة نصف قطرها نق وطولها ل يسرى داخلها سائل معامل لزوجته η .



(شكل ٧ – ١٤)

اعتبر قشرة أسطوانية من السائل نصف قطرها س وسمكها ء س لها نفس محور الأنبوبة (شكل ٧ – ١٤) .

مساحة سطح القشرة الأسطوانية :

= ٢ ط س . ل

يؤثر على هذا السطح أثناء حركة السائل قوة احتكاك .

$ق_١ = - \eta . ٢ ط س ل . \frac{ى ع}{ى س}$ حيث $\frac{ى ع}{ى س}$ هو معدل تغير السرعة فى اتجاه نصف القطر . والإشارة سالبة لأن السرعة تتناقص كلما اقتربنا من جدار الأنبوبة أى كلما ازدادت س

إذا كان الفرق فى الضغط بين طرفى الأنبوبة هو ض تكون القوة المحركة لهذه القشرة من السائل هى $ق_٢ = ط س^٢ . ض$.

إذا كانت حركة السائل انسيابية منتظمة لا يوجد للسائل عجلة تسارع وتكون $ق_١ = ق_٢$.

$$\therefore ط س^٢ ض = - ٢ ط ل \eta س \frac{ى ع}{ى س}$$

$$\therefore \frac{١}{٢} ض س ى س = - ل \eta ى ع$$ وبالتكامل ينتج أن

$$\therefore - ل \eta ع = \frac{ض س^٢}{٤} + ث \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٧-١٦)$$

حيث ث هو ثابت التكامل ونوجد قيمته كما يأتى . عندما تكون س = نق تكون سرعة السائل ع = صفر

$$\therefore - ل \eta \times صفر = \frac{ض نق^٢}{٤} + ث$$

$$\therefore ث = - \frac{ض نق^٢}{٤}$$ وتصبح المعادلة (٧ — ١٦)

$$ع = \frac{ض}{٤ ل \eta} (نق^٢ - س^٢) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (٧ - ١٧)$$

وتعطى هذه المعادلة قيمة سرعة السائل عند أى نقطة فى الأنبوبة . لإيجاد معدل التدفق أى حجم السائل المار فى الأنبوبة فى الثانية نعتبر مساحة مقطع القشرة الأسطوانية ٢ ط س ى س . ع وبتجميع مثل هذه الكميات بالنسبة لكل القشر الأسطوانية التى يتكون منها السائل نحصل على :

$$معدل التدفق = \int_{٠}^{نق} ٢ ط س ع ى س$$

$$= \int_{٠}^{نق} \frac{ض}{٤ \eta ل} (نق^٢ - س^٢) ٢ ط س ى س$$

$$= \frac{\text{ط ص}}{\text{٢ ل } \eta} \int_{\text{٠}}^{\text{نق}} (\text{نق}^{\text{٢}}\text{ س} - \text{س}^{\text{٣}}) \text{ ى س}$$

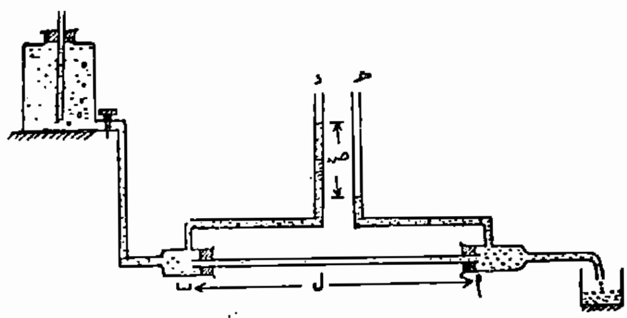
$$= \frac{\text{ط ص}}{\text{٢ ل } \eta} \left[\frac{\text{نق}^{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}} \right]_{\text{٠}}^{\text{نق}}$$

$$= \frac{\text{ط ص}}{\text{٢ ل } \eta} \left(\frac{\text{نق}^{\text{٤}}}{\text{٢}} - \frac{\text{نق}^{\text{٤}}}{\text{٤}} \right)$$

$\therefore$ ح = $\frac{\text{ط نق}^{\text{٤}}}{\text{٨ } \eta \text{ ل}}$. ص وهى نفس المعادلة التى حصلنا عليها بواسطة الأبعاد .

٧ – ١١ قياس معامل اللزوجة بطريقة بواسى :

يتركب الجهاز كما هو مبين بشكل (٧ – ١٥) من أنبوبة ضيقة المقطع أ ب تتصل بمستودع مرتفع مملوء بالسائل



(شكل ٧ – ١٥)

يمرر السائل بمعدل منتظم داخل الأنبوبة أ ب وتجمع كمية من السائل فى زمن معين لتعيين حجم السائل المتدفق فى الثانية ح . يقاس الفرق فى الضغط بين طرفى الأنبوبة بواسطة أنبوبتين مانومتريتين هـ ، ى متصلتين بالسائل عند مدخل الأنبوبة وعند مخرجها . إذا كان الفرق بين مستوى السائل داخل هـ ، ى هو ف يكون الفرق بين ضغط السائل عند مدخل الأنبو بة وعند مخرجها هو

ص = ف . δ . جـ

حيث δ هى كثافة السائل ، جـ عجلة الجاذبية .

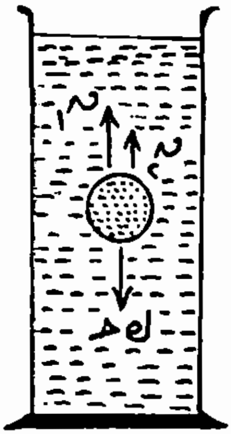
وبقياس كل من طول الأنبوبة ل ونصف قطرها نق يمكن إيجاد معامل لزوجة السائل من معادلة بواسى :

$$\eta = \frac{\text{ط}\ \text{نق}^{4}}{8\ \text{ح}\ \text{ل}} \cdot \text{ص}$$

٧ — ١٢ لزوجة السوائل بطريقة الكرة الساقطة :

قانون ستوكس

إذا أسقطت كرة معدنية صغيرة فى سائل لزج كالجليسرين فإن سرعة الكرة تتزايد تدريجيًّا حتى تصل إلى قيمة ثابتة تسمى بالسرعة النهائية للسقوط .



(شكل ٧ — ١٦)

تؤثر عندئذ على الكرة القوى الآتية :

١ — وزنها إلى أسفل ويساوى ك . جـ

٢ — دفع السائل إلى أعلى ويساوى وزن حجم الكرة من السائل :

$$\text{ق}_1 = \frac{4}{3}\ \text{ط}\ \text{نق}^{3} \cdot \delta \cdot \text{جـ}$$

حيث نق نصف قطرة الكرة ، δ كثافة السائل .

٣ — قوة ممانعة السائل لحركة الكرة وهى التى تنشأ عن لزوجته وتعمل هذه القوة إلى أعلى .

ولإيجاد قيمة قوة الممانعة للحركة ق٢ استخدم ستوكس التحليل بالأبعاد .

نفرض أن ق٢ تتوقف على كل من نصف قطر الكرة نق ولزوجة السائل وكذلك على السرعة النهائية ع .

$$\therefore\ \text{ق}_2 = \text{م} \cdot \text{نق}^{\alpha} \cdot \eta^{\beta} \cdot \text{ع}^{\gamma}$$

وتصبح معادلة الأبعاد هى

$$(\text{ك}\ \text{ل}\ \text{ن}^{-2}) = (\text{ل})^{\alpha} \cdot (\text{ك}\ \text{ل}^{-1}\ \text{ن}^{-1})^{\beta} \cdot (\text{ل}\ \text{ن}^{-1})^{\gamma}$$

$$\therefore\ \beta = 1$$

$$\alpha - \beta + \gamma = 1 \text{ ،}$$

$$- \beta - \gamma = -2 \text{ ،}$$

وبحل المعادلات نجد أن

$$\alpha = 1 \text{ ، } \beta = 1 \text{ ، } \gamma = 1$$

أى أن

$$\text{ق}_{2} = \text{م}\ \text{نق}\ \eta\ \text{ع}$$

وقد أثبت ستوكس أن قيمة الثابت العددى $\text{م} = ٦\ \text{ط}$

أى أن

$$\text{ق}_{2} = ٦\ \text{ط}\ \text{نق}\ \eta\ \text{ع}$$

عندما يكون سقوط الكرة بسرعة منتظمة تتزن القوى المؤثرة على حركتها حسب قانون نيوتن الأول .

أى أن :

$$\text{ك}\ \text{حـ} = \text{ق}_{1} + \text{ق}_{2}$$

$$\therefore\ \frac{٤}{٣}\ \text{ط}\ \text{نق}^{٣}\ \sigma\ \text{حـ} = \frac{٤}{٣}\ \text{ط}\ \text{نق}^{٣}\ \delta\ \text{حـ} + ٦\ \text{ط}\ \text{نق}\ \eta\ \text{ع}$$

حيث σ هى كثافة مادة الكرة .

$$\therefore\ \frac{٤}{٣}\ \text{ط}\ \text{نق}^{٣}\ (\sigma - \delta)\ .\ \text{حـ} = ٦\ \text{ط}\ \text{نق}\ \eta\ \text{ع}$$

أى أن

$$\eta = \frac{٢}{٩}\ .\ \frac{\text{حـ}\ \text{نق}^{٢}}{\text{ع}}\ (\sigma - \delta) \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (٧ - ١٨)$$

من هذه المعادلة يمكن إيجاد معامل لزوجة السائل η بمعرفة قيمة نق ، a ، δ وبقياس السرعة النهائية بتسجيل زمن سقوط الكرة مسافة معينة ف بعد الوصول إلى سرعتها النهائية . وتكون $\text{ع} = \frac{\text{ف}}{\text{ن}}$

ويمكن بهذه الطريقة مقارنة لزوجة سائلين بقياس السرعة النهائية للكرة فى كل منهما ولتكن ع١ ، ع٢ .

$$\therefore\ \eta_{1} = \frac{٢\ \text{حـ}\ \text{نق}^{٢}}{\text{ع}_{1}}\ (\sigma - \delta_{1})$$ للسائل الأول

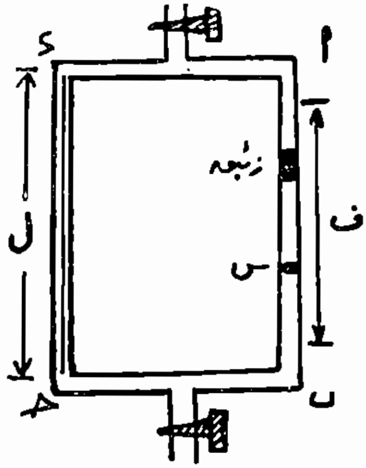
$$\eta_{2}\ \ \frac{٢\ \text{حـ}\ \text{نق}^{٢}}{\text{ع}_{2}}\ (\sigma - \delta_{2})$$ للسائل الثانى

وبالقسمة $$\frac{\eta_{1}}{\eta_{2}} = \frac{\text{ع}_{2}}{\text{ع}_{1}}\ .\ \frac{(\sigma - \delta_{1})}{(\sigma - \delta_{2})}$$

وبمعرفة كثافتى السائلين δ_{1} ، δ_{2} يمكن مقارنة لزوجتيهما .

٧ – ١٣ طريقة رانكين لقياس لزوجة الغازات :

يستخدم قانون بواسى لتعيين معامل اللزوجة لغاز باستخدام جهاز رانكين . ويتركب من أنبوتين أ ب ، حـ ى متصلتين كما فى شكل (٧ – ١٧) ويحتويان على الغاز تحت الاختبار . الأنبوبة حـ ى شعرية المقطع وطولها ل بينما الأنبوبة أ ب واسعة نسبياً ويوجد بها شريط قصير من الزئبق يتحرك رأسياً إلى أسفل عندما يوضع الجهاز فى وضع رأسى . عندما يتحرك شريط الزئبق يدفع الغاز المحبوس داخل الأنابيب للسريان داخل الأنبوبة الضيقة حـ ى وتتوقف سرعة هبوط الزئبق على لزوجة الغاز داخل الأنابيب .



(شكل ٧ – ١٧)

نفرض أن س هى مساحة مقطع الأنبوبة أ ب .

عند حركة شريط الزئبق يؤثر بضغط قدره صـ = $\frac{ك حـ}{س}$ على الغاز بالداخل فيجعله يسرى فى الأنبوبة حـ ى .

إذا كان ن هو زمن سقوط شريط الزئبق مسافة ف فإن حجم الغاز المار فى حـ ى فى وحدة الزمن هو ح = $\frac{س . ف}{ن}$. وباستخدام قانون بواسى :

ح = $\frac{ط نق^{٤}}{٨ \eta ل}$. صـ فإن

$$\frac{\text{س . ف}}{\text{ن}} = \frac{\text{ط نق}^{4}}{8\,\eta\,\text{ل}} \cdot \frac{\text{ك ح}}{\text{س}}$$ ومنه

$$\eta = \frac{\text{ط نق}^{4}\,\text{ن}}{8\,\text{ف ل س}} \cdot \frac{\text{ك ح}}{\text{س}}$$

حيث نق هو نصف قطر الأنبوبة الشعرية ح ء .

٧ — ١٢ السرعة الحرجة وعدد رينولدز :

تنطبق جميع القوانين والقواعد السابق ذكرها فى حركة السوائل على تلك السوائل التى تتحرك حركة خطية غير دوامية . ومن المعروف أنه إذا زيدت سرعة السائل عن حد معين تظهر مركبة لحركة السائل فى اتجاه عمودى على اتجاه التدفق هذه المركبة تكون صفرية دائماً فى الحركة الخطية . ويتسبب عن وجود هذه المركبة حركة دوامية تمتص جزءاً من طاقة حركة السائل .

ولايجاد قيمة السرعة للسائل التى ينتقل بعدها من حركة خطية إلى حركة دوامية نستخدم نظرية الأبعاد .

تتوقف قيمة السرعة الحرجة ع على كل من لزوجة السائل η وكثافته δ ونصف قطر الأنبوبة نق التى يتدفق داخلها السائل .

$$\therefore \text{ع} = \text{م} \,.\, \eta^{\alpha} \,.\, \delta^{\beta} \,.\, \text{نق}^{\gamma}$$

لكن أبعاد η هى ك ل$^{-1}$ ن$^{-1}$ ، δ هى ك ل$^{-3}$

$$\therefore (\text{ل ن}^{-1}) = (\text{ك ل}^{-1}\,\text{ن}^{-1})^{\alpha} \,.\, (\text{ك ل}^{-3})^{\beta} \quad \text{ل}^{\gamma}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \text{صفر} .$$

$$، \; -\alpha - 3\beta + \gamma = 1$$

$$، \; -\alpha = -1$$

$$\therefore \alpha = 1 \;،\; \beta = -1 \;،\; \gamma = -1$$

وتصبح المعادلة هى :

$$\text{ع} = \text{م} \,.\, \eta \,.\, \delta^{-1}\,\text{نق}^{-1} = \text{م} \,.\, \frac{\eta}{\delta \,.\, \text{نق}} \quad \ldots \quad \ldots \qquad (٧ - ١٩)$$

حيث م هو ثابت يطلق عليه عدد رينولدز نسبة إلى أول شخص اكتشف هذه العلاقة . وتقدر قيمته فى حالة الأنابيب الضيقة بحوالى ١٠٠٠ .

تمارين :

١ – يتسرب الماء من ثقب مساحته ٠,٥ سم٢ موجود فى جدار خزان به ماء بحيث كان ارتفاع الماء عن الثقب ١٠٠ سم ، أوجد سرعة الماء المنسكب وكذلك حجم الماء الذى يتسرب فى الساعة بفرض أن ارتفاع الماء فى الخزان ثابت طول الوقت .

٢ – احسب السرعة النهائية لكرة من الحديد نصف قطرها ٠,٢ سم تسقط فى حوض جلسرين كثافته ١,٢ جم / سم٣ ومعامل لزوجته ٨,٣ بواز علماً بأن كثافة الحديد ٨ جم / سم٣ (ح = ٩٨٠ سم / ثانية٢) .

٣ – فقاعة هوائية قطرها ١ م ترتفع إلى أعلى فى سائل معامل اللزوجة له ١٥٠ بواز وكثافته ٠,٨ جرام / سم٣ . أوجد السرعة النهائية للفقاعة .

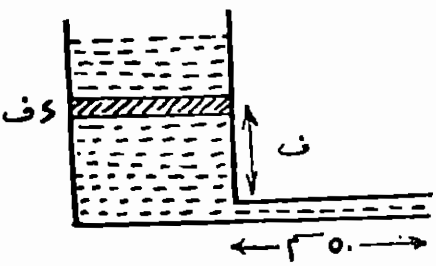
ماذا تكون هذه السرعة إذا كان السائل هو الماء ؟

(كثافة الهواء ٠٠١٣, جم / سم٣ ومعامل لزوجة الماء ٠,٠١ بواز) .

(الجواب ٠,٠٠٣٣ سم / ثانية ، ٥٥ سم/ثانية)

٤ – أنبوبة شعرية طولها ٥٠ سم ونصف قطرها الداخلى ٠,٢ م تتصل وهى فى وضع أفقى بأسفل مستودع أسطوانى مساحة مقطعه ١٠ سم٣ مملوء بالماء . أوجد الزمن اللازم لكى ينخفض سطح الماء فى الإناء من ارتفاع ١٠٠سم إلى ٥٠ سم فوق مستوى الأنبوبة . (معامل لزوجة الماء = ٠,٠١ . لوهـ ١٠ = ٢,٣) .

الحل : يتغير ارتفاع سطح الماء فى الخزان وكذلك ضغط السائل فوق الأنبوبة مع الزمن .
نفرض أن بدء قياس زمن التدفق كان عند الارتفاع ١٠٠ سم لسطح السائل . بعد زمن ن ثانية



(شكل ٧ – ١٨)

يصبح السطح على الارتفاع ف من الأنبوبة . اعتبر شريحة من سائل المستودع سمكها د ف وحجمها س . د ف حيث س هو مساحة مقطع الإناء .

نفرض أن زمن خروج هذه الكمية من السائل من الأنبوبةهو د ن . باستخدام معادلة بوازى للزوجة السوائل يكون معدل التدفق ح هو :

$$\text{ح} = \text{س} \cdot \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{\text{ط نق}^{4}}{8\,\eta\,\text{ل}} \cdot \text{ض}$$

لكن ض = ف × ١ × جـ وباعتبار كثافة الماء = ١

$$\therefore \text{س} \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \frac{\text{ط نق}^{4}}{8\,\eta\,\text{ل}} \cdot \text{جـ ف}$$

$$\therefore \frac{\text{د ف}}{\text{ف}} = \frac{\text{ط نق}^{4}\,\text{جـ}}{8\,\eta\,\text{ل س}} \cdot \text{د ن}$$

وبالتكامل نحصل على

$$\text{لوه} \left(\frac{\text{ف}_{1}}{\text{ف}_{2}}\right) = \frac{\text{ط نق}^{4}\,\text{جـ}}{8\,\eta\,\text{ل س}} \cdot \text{ن}$$

وبوضع ف١ = ١٠٠ سم ، ف٢ = ٥٠ سم نحصل على الزمن المطلوب

$$\therefore \text{لوه} \left(\frac{100}{50}\right) = \frac{3{,}14 \times (0{,}02)^{4} \times 980}{8 \times 0{,}01 \times 50 \times 10} \cdot \text{ن}$$

$\therefore$ ن = ٥٦٢٩٠ ثانية

= ١٥,٦ ساعة

٥ — أنبوبة أفقية مساحة مقطعها عند طرفيها هما ٤ ، ٢ سم^{2} على الترتيب تتصل من طرفها المتسع بإناء عند نقطة تبعد ٤٠ سم أسفل سطح الماء بالإناء . احسب سرعة الماء عند كل من طرفيها وكذلك معدل التدفق بفرض ثبوت مستوى سطح الماء فى الإناء .

٦ — أوجد القدرة الميكانيكية لقلب شخص إذا علم أنه يدفع الدم بمعدل ١٠٠ سم فى الثانية وأن ضغط الدم ١٢٠ مم زئبق .