الفصل الخامس

مقاييس التشتت

Measurements of Scatter

ليس للدرجة معنى بدون معرفة علاقتها بغيرها من الدرجات ، وقد أوضحنا هذا فى الفصل الثانى ، كما يجب الإشارة إلى مستوى التصحيح الذى يمكن أن يكون المتوسط دالة عليه .

وحتى لو كان لمجموعتين من الدرجات نفس المتوسط ، فليس من الضرورى أنه يمكن المقارنة بينهما ، فالفرق فى تشتت درجاتهما يعطى لكل من هذه الدرجات قيمة مختلفة فى كل من المجموعتين .

المجموعة ا	المجموعة ب
١١٧	١٣٠
١١٦	١٢١
١١٥	١١٥
١١٣	١١٤
١١٢	١١١
١١٠	١١١
١٠٩	١٠٨
١٠٨	١٠٦
١٠٦	١٠٤
١٠٤	٩٠

وتمثل هاتان المجموعتان من الدرجات نتيجتى اختبار ذكاء طبق على مجموعتين من التلاميذ . ويبلغ متوسط معامل الذكاء فى كل من المجموعتين ١١١ . ولكن معاملات الذكاء فى المجموعة ا تميل إلى التجمع حول المتوسط ، بينما تنتشر الدرجات فى المجموعة ب أكثر منها فى المجموعة ا ؛ حيث إن الفروق الفردية فى هذه المجموعة أكبر .

المدى المطلق : Range

المدى المطلق هو أحد مقاييس تشتت الدرجات ؛ وهو الفرق بين أعلى القيم فى المجموعة وأدناها ؛ فالمدى فى المجموعة ا هو ١١٧ — ١٠٤ أى ١٣ . بينما أنه فى المجموعة ب ١٣٠ — ٩٠ أى ٤٠ .

وهكذا فإن ما يؤثر فى المدى هو الحالات المتطرفة فى المجموعة ، وبذلك فإنه غير ثابت عندما تكون هناك فجوات متعددة أو كبيرة فى التوزيع . فمثلا ، إذا أضيف إلى المجموعة ا فردان لهما معاملا الذكاء ١٤٠ ، ٨٢ على التوالى ، فإن المتوسط لا يتغير ولكن المدى يصبح ٥٨ ، برغم أن غالبية الأفراد فى المجموعة تتجمع حول المتوسط أكثر مما فى المجموعة ب .

الانحراف المتوسط Mean Deviation :

لكى نحصل على مقياس أكثر دقة للتشتت ، يجب أن تأخذ فى الاعتبار الدرجة التى يختلف بها كل فرد عن المتوسط ؛ فى المثال السابق ، تكون القيمة العددية لانحراف كل معامل ذكاء عن المتوسط كما يلى :

المجموعة ا	المجموعة ب
٦	١٩
٥	١٠
٤	٤
٢	٣
١	صفر
١	صفر
٢	٣
٣	٥
٥	٧
٧	٢١
٣٦	٧٢

الانحراف المتوسط للمجموعة ا ، مع إهمال الإشارات هو ٣,٦ ، بينما يبلغ هذا الانحراف للمجموعة ب ٧,٢ . وبهذه الطريقة يكون التباين فى المجموعة ا نصفه للمجموعة ب . بينما يكون التباين للمجموعة ب بطريقة المدى الكلى ثلاثة أمثاله للمجموعة ا ، وليس هناك داع لأخذ الإشارات السالبة والموجبة فى الاعتبار عند حساب الانحراف المتوسط .

تمرين :

حصل ٣٤ تلميذاً على الدرجات التالية فى اختبار للحساب :

٣٤	٤٣	٤٠	٢١	٤٠	٣٠	٦٧
٣٦	٤٩	١١	٨	٩	٦٠	٦٨
٤٧	٥٦	٢٧	٤٧	٦	٥٦	٦٣
٤٧	٤٩	٤١	٣٣	٢٦	٦٢	٦٢
٥٦	٣٧	١٥	٨	٤٤	٦٢	

أوجد (أ) الدرجة المتوسطة .

(ب) الانحراف المتوسط للدرجات .

الانحراف المعيارى Standard Deviation :

لأسباب تخرج عن نطاق هذا الكتاب ، اتفق على طريقة تربع فيها الانحرافات الفردية ، ويحسب متوسطها ، ثم يوجد الجذر التربيعى لهذا المتوسط ، ويطلق على المقياس الناتج اسم « الانحراف المعيارى » وهو أهم مقاييس التباين أو التشتت . ويرمز إليه بالرمز « ع » . ويمكن إيضاح طريقة حساب الانحراف المعيارى « ع » من المثال التالى :

المجموعة أ		المجموعة ب	
ع	ع^٢	ع	ع^٢
+٦	٣٦	+١٩	٣٦١
+٥	٢٥	+١٠	١٠٠
+٤	١٦	+٤	١٦
+٢	٤	+٣	٩
+١	١	صفر	صفر
–١	١	صفر	صفر
–٢	٤	–٣	٩
–٣	٩	–٥	٢٥
–٥	٢٥	–٧	٤٩
–٧	٤٩	–٢١	٤٤١
	١٧٠		١٠١٠

المتوسط للمجموعة ا = $\frac{١٧٠}{١٠}$ = ١٧ المتوسط للمجموعة ب = $\frac{١٠١٠}{١٠}$ = ١٠١

ع ا = $\sqrt{١٧}$ = ٤.١ ع ب = $\sqrt{١٠١}$ = ١٠

وتعطى هذه الطريقة مقياساً يبين أن تشتت المجموعة ب أكثر من ضعف تشتت المجموعة ا. وللانحرافات المتطرفة تأثير ملحوظ على التباين إذا قيس بهذه الطريقة ؛ فمثلا الانحرافان ١٩ ، — ٢١ فى المجموعة ب لهما تأثير أكبر على مقياس التشتت بطريقة الانحراف المعيارى ، عما لو كان قياس التشتت قد تم بطريقة الانحراف المتوسط .

ويمكن القول بأن الانحراف المعيارى هو الجذر التربيعى لمتوسط مربعات الانحراف عن متوسط التوزيع . أو أنه باختصار هو الجذر التربيعى لمتوسط مربع الانحرافات .

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجموع مربعات الانحرافات}}{ن}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ}\,(س - م)^٢}{ن}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ}\,ح^٢}{ن}}$$

حيث ح = س — م

تمرين :

أوجد متوسط الدرجات العشر التالية ؛ والانحراف المعيارى لها :

٦٧ ٧٩ ٧٥ ٨٢ ٧٨ ٧٦ ٦٠ ٦١ ٥٩ ٥٣

وإذا كان متوسط الدرجات رقماً صحيحاً يكون حساب الانحراف المعيارى سهلا نسبيًا ولكن الأمر يحتاج إلى بعض التبسيط فى الحالات الأخرى :

س	ع	$ع^{٢}$
٧	+١,٨	٣,٢٤
٦	+,٨	,٦٤
٥	−,٢	,٠٤
٥	−,٢	,٠٤
٣	−٢,٢	٤,٨٤

مج س = ٢٦   مج $ع^{٢}$ = ٨,٨٠

المتوسط = $\frac{٢٦}{٥٠}$ $ع^{٢} = \frac{مج\ ع^{٢}}{ن}$

= ٥,٢   = $\frac{٨,٨}{٥}$

= ١,٧٦

ع = $\sqrt{١,٧٦}$

= ١,٣٣

ويمكن تبسيط حساب الانحراف المعيارى بتغيير الأصل . فى المثال السابق يختار المتوسط أقرب ما يكون إلى المتوسط الحقيقى بالقدر الذى يمكن توقعه . وفى هذه الحالة يكون المتوسط ٥ وتصبح الانحرافات والمربعات كما يلى :

ع	$ع^{٢}$
+٢	٤
+١	١
صفر	صفر
صفر	صفر
−٢	٤
مج ع = ١	مج $ع^{٢}$ = ٩

ولا يكون الانحراف المعيارى فى هذه الحالة مساوياً $\sqrt{\frac{مج\ ع^{٢}}{ن}}$ حيث إن الانحرافات مقاسة من

المتوسط الفرضى ٥ ، ولكن يمكن حساب الانحراف المعيارى من المعادلة :

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ح}^{2}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مجـ ح}}{\text{ن}}\right)^{2}}$$

وبرهان هذه المعادلة يمكن الرجوع إليه فى الملحق ١ .

$$\frac{\text{مجـ ح}}{\text{ن}} = \frac{١}{٥} \qquad \frac{\text{مجـ ح}^{2}}{\text{ن}} = \frac{٩}{٥}$$

$$= ,٢ \qquad = ١,٨$$

$$\left(\frac{\text{مجـ ح}}{\text{ن}}\right)^{2} = ,٠٤$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{(١,٨ - ,٠٤)}$$

$$= \sqrt{١,٧٦}$$

$$= ١,٣٣$$

وهذه هى النتيجة نفسها التى حصلنا عليها بالطريقة السابقة .

ويوضح المثال التالى طريقة لحساب الانحراف المعيارى لعشر درجات :

س	ح	ح٢
٦٠	+٥	٢٥
٥٨	+٣	٩
٥٦	+١	١
٥٥	صفر	صفر
٥٥	صمر	صفر
٥١	−٤	١٦
٤٩	−٦	٣٦
٤٨	−٧	٤٩
٤٧	−٨	٦٤
٤٥	−١٠	١٠٠
	+٩	
	−٣٥	
المجموع	−٢٦	٣٠٠

$ن = ١٠$ $\qquad$ $مح = -٢٦$ $\qquad$ $مح^٢ = ٣٠٠$

$$\frac{مح}{ن} = \frac{-٢٦}{١٠} = -٢,٦$$

$$\left(\frac{مح}{ن}\right)^٢ = (-٢,٦)^٢ = ٦,٧٦$$

$$\frac{مح^٢}{ن} = \frac{٣٠٠}{١٠} = ٣٠$$

طريقة الحساب :

الخطوة ١ : اختر درجة أقرب ما يكون إلى المتوسط المتوقع (م فرضى = ٥٥) .

الخطوة ٢ : أوجد الانحرافات (ح) عن هذا المتوسط ، وأوجد المجموع الجبرى لها مح = -٢٦

الخطوة ٣ : أوجد مربعات الانحرافات (ح٢) ، وأوجد مجموعها مح٢ = ٣٠٠

الخطوة ٤ : $ع = \sqrt{\frac{مح^٢}{ن} - \left(\frac{مح}{ن}\right)^٢}$

$= \sqrt{٣٠ - ٦,٧٦}$

$= \sqrt{٢٣,٢٤}$

$= ٤,٨٢$

الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى :-

لإيجاد الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى المعطى فى الفصل الرابع ، ص ، تتبع نفس الخطوات الموضحة فى الطريقة السابقة . ولكن يجب ضرب كل انحراف × تكراره .

س	ت	ح	ت ح	ت ح٢
٥	١	+٢	+٢	٤
٤	٣	+١	+٣	٣
٣	٨	صفر	صفر	صفر
٢	٢	-١	-٢	٢
١	١	-٢	-٢	٤
صفر	١	-٣	-٣	٩
			+٥	
			-٧	
المجموع	١٦		-٢	٢٢

$\text{ن} = \text{١٦}$ $\qquad$ $\text{مج ت ح} = -\text{٢}$ $\qquad$ $\text{مج ت ح}^{\text{٢}} = \text{٢٢}$

$$\frac{\text{مج ت ح}}{\text{ن}} = \frac{-\text{٢}}{\text{١٦}} = -\text{,١٢٥}$$

$$\left(\frac{\text{مج ت ح}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}} = (-\text{,١٢٥})^{\text{٢}} = \text{,٠١٥٦} \cong \text{,٠٢}$$

$$\frac{\text{مج ت ح}^{\text{٢}}}{\text{ن}} = \frac{\text{٢٢}}{\text{١٦}} \cong \text{١,٣٨}$$

طريقة الحساب :

الخطوة ١ : اختر متوسطاً فرضياً : م فرضى = ٣

الخطوة ٢ : أوجد الانحرافات (ح) لكل الدرجات عن المتوسط الفرضى .

الخطوة ٣ : اضرب كل انحراف (ح) × التكرار الخاص به ، وبذلك نحصل على ت ح ، وأوجد المجموع . مع مراعاة الإشارات مج ت ح = ــ ٢

الخطوة ٤ : أوجد مربع الانحرافات ، واضربها فى التكرار (ت) للحصول على ت ح$^{\text{٢}}$. ويمكن أن يتم هذا ببساطة بضرب ت ح × ح . . . (٤ ، ٣ ، صفر ، ٢ ، ٤ ، ٩) .

الخطوة ٥ : أوجد المجموع (مج ت ح$^{\text{٢}}$)

الخطوة ٦ : $\text{ع}^{\text{٢}} = \frac{\text{مج ت ح}^{\text{٢}}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مج ت ح}}{\text{ن}}\right)^{\text{٢}}$

$$= \text{١,٣٨} - \text{,٠٢}$$

$$= \text{١,٣٦}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\text{١,٣٦}}$$

$$= \text{١,١٧}$$

تمرين :

أعطت الدرجات التى حصل عليها أربعون تلميذاً التوزيع التكرارى التالى . احسب الانحراف المعيارى لهذه الدرجات .

الدرجة	التكرار	الدرجة	التكرار
٢٠	٢	١٤	٤
١٩	٣	١٣	٣
١٨	٢	١٢	٢
١٧	٥	١١	٢
١٦	٧	١٠	١
١٥	٩		

الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى لبيانات مجمعة :

يتبع لهذا الغرض طريقة مشابهة لما فى المثال السابق ، ويمكن إيضاحها بالمثال التالى :

ف	ت	ح	ت × ح	ت ح^٢
٢٠ — ٢٤	٤	+ ٢	+ ٨	١٦
١٥ — ١٩	٨	+ ١	+ ٨	٨
١٠ — ١٤	١٠	صفر	صفر	صفر
٥ — ٩	٦	— ١	— ٦	٦
صفر — ٤	٢	— ٢	— ٤	٨
			+ ١٦	
			— ١٠	
المجموع	٣٠		+ ٦	٣٨

ن = ٣٠   مجـ ت ح = ٦   مجـ ت ح^٢ = ٣٨

$$\frac{\text{مجـ ت ح}}{\text{ن}} = \frac{٦}{٣٠} = ,٢$$

$$\left(\frac{\text{مجـ ت ح}}{\text{ن}}\right)^{٢} = ,٠٤$$

$$\frac{\text{مجـ ت ح}^{٢}}{\text{ن}} = \frac{٣٨}{٣٠} \approx ١,٢٧$$

حجم الفئة = ٥

خطوات الحساب :

الخطوة ١ : اختر متوسطاً فرضياً (م فرضى = ١٢ ، وهو مركز الفئة ١٠ — ١٤)

الخطوة ٢ : أوجد الانحراف عن المتوسط ، بوحدات بحجم سعة الفئة .

الخطوة ٣ : اضرب كل انحراف (ح) × تكراره (ت) . . . للحصول على ت ح (٨ ، ٨ ، صفر ؛ — ٦ ، — ٤) .

الخطوة ٤ : أوجد حاصل ضرب مربعات الانحرافات × تكرارتها للحصول على ت ح^{٢} (١٦ ، ٨ ، صفر ، ٦ ، ٨) .

الخطوة ٥ : أوجد المجموع (مج ت ح^{٢} = ٣٨)

الخطوة ٦ : لاحظ حجم الفئة (ف = ٥) حيث إنها هى الوحدة المستخدمة فى القياس .

$$ع = \left[\sqrt{\frac{\text{مج ت ح}^{٢}}{\text{مج ت}} - \left(\frac{\text{مج ت ح}}{\text{مج ت}}\right)^{٢}}\right] \times ف$$

$$= \sqrt{[\,١٫٢٧ - ٫٠٤\,)} \,] \times ٥$$

$$= \sqrt{(١٫٢٣)} \times ٥$$

$$= ١٫١١ \times ٥$$

$$= ٥٫٥٥$$

تمارين :

(١) احسب الانحراف المعيارى لمعاملات الذكاء فى التوزيع التالى :

معاملات الذكاء	التكرار
١٣٥ — ١٣٩	٢
١٣٠ — ١٣٤	٥
١٢٥ — ١٢٩	١٤
١٢٠ — ١٢٤	٤٠
١١٥ — ١١٩	٤٠
١١٠ — ١١٤	٣٥
١٠٥ — ١٠٩	٢٣
١٠٠ — ١٠٤	٢٦
٩٥ — ٩٩	١٠
٩٠ — ٩٤	١
٨٥ — ٨٩	١

(٢) احسب الانحراف المعيارى للدرجات فى التوزيع التالى :

الدرجات	التكرار
٩٥ – ٩٩	١
٩٠ – ٩٤	٦
٨٥ – ٨٩	١٨
٨٠ – ٨٤	١٩
٧٥ – ٧٩	٥٢
٧٠ – ٧٤	٢٣
٦٥ – ٦٩	٥
٦٠ – ٦٤	٢
٥٥ – ٥٩	٢

وتوجد صحائف بالشكل التالى ، تفيد فى حساب المتوسطات والانحراف المعيارى . ذلك أن استخدامها لا يتطلب تذكر المعادلة ، كما أنها تسهل عمليات المراجعة .

الفئة	ت	ح	ت ح	ت ح²
	ن		+	مج ت ح²
			−	
			مج ت ح	

$$\text{ف} = \qquad\qquad \text{م فرضى} =$$

$$\frac{\text{مج ت ح}}{\text{ن}} = \qquad \left(\frac{\text{مج ت ح}}{\text{ن}}\right)^{2} = \qquad \frac{\text{مج ت ح}^{2}}{\text{ن}} =$$

$$\text{المتوسط} = \text{م فرضى} + \frac{\text{مج ت ح}}{\text{ن}} \times \text{ف} \qquad \text{ع} = \left[\sqrt{\frac{\text{مج ت ح}^{2}}{\text{ن}} - \left(\frac{\text{مج ت ح}}{\text{ن}}\right)^{2}}\,\right] \times \text{ف}$$

$$= \boxed{\quad} \qquad\qquad = \boxed{\quad}$$

تمارين :

احسب المتوسطات والانحرافات المعيارية للتوزيعات التالية :

(١)

الدرجة	التكرار
٩٥ — ٩٩	١
٩٠ — ٩٤	١
٨٥ — ٨٩	٣
٨٠ — ٨٤	٥
٧٥ — ٧٩	٩
٧٠ — ٧٤	٣
٦٥ — ٦٩	٥
٦٠ — ٦٤	٣
٥٥ — ٥٩	٧
٥٠ — ٥٤	١
٤٥ — ٤٩	٣
٤٠ — ٤٤	٢
٣٥ — ٣٩	١
٣٠ — ٣٤	١

(٢)

الدرجة	التكرار
٩٥ — ٩٩	١
٩٠ — ٩٤	٢
٨٥ — ٨٩	٣
٨٠ — ٨٤	٢
٧٥ — ٧٩	٥
٧٠ — ٧٤	٨
٦٥ — ٦٩	٤
٦٠ — ٦٤	٨
٥٥ — ٥٩	٢
٥٠ — ٥٤	٣
٤٥ — ٤٩	٣
٤٠ — ٤٤	٢
٣٥ — ٣٩	صفر
٣٠ — ٣٤	٢

(٣)

الدرجة	التكرار
١٤٠ — ١٤٤	—
١٣٥ — ١٣٩	٢
١٣٠ — ١٣٤	٢
١٢٥ — ١٢٩	٣
١٢٠ — ١٢٤	٥
١١٥ — ١١٩	٩
١١٠ — ١١٤	١٨
١٠٥ — ١٠٩	١٢
١٠٠ — ١٠٤	١٧
٩٥ — ٩٩	٢٧
٩٠ — ٩٤	١٦
٨٥ — ٨٩	١٣
٨٠ — ٨٤	٩
٧٥ — ٧٩	١٠
٧٠ — ٧٤	٧

(٤)

الدرجة	التكرار
١٤٠ — ١٤٤	٢
١٣٥ — ١٣٩	٣
١٣٠ — ١٣٤	٥
١٢٥ — ١٢٩	٦
١٢٠ — ١٢٤	٩
١١٥ — ١١٩	٢١
١١٠ — ١١٤	٢٦
١٠٥ — ١٠٩	١٧
١٠٠ — ١٠٤	٣١
٩٥ — ٩٩	٢٣
٩٠ — ٩٤	٢٠
٨٥ — ٨٩	١٣
٨٠ — ٨٤	١٣
٧٥ — ٧٩	٧
٧٠ — ٧٤	٤

(٥)

الدرجة	التكرار
١٠٠ — ١٠٩	٨٣
٩٠ — ٩٩	٢٠٣
٨٠ — ٨٩	٢٧٣
٧٠ — ٧٩	٣٠٠
٦٠ — ٦٩	٢٩٧
٥٠ — ٥٩	٢٩٢
٤٠ — ٤٩	٢٢٨٠
٣٠ — ٣٩	٦٣
٢٠ — ٢٩	١٩٦
١٠ — ١٩	١٤٥
صفر — ٩	٧١

(٦)

الدرجة	التكرار
٧٠ — ٧٩	١٩
٦٠ — ٦٩	٢٧٦
٥٠ — ٥٩	٤٧٤
٤٠ — ٤٩	٥٠٤
٣٠ — ٣٩	٣٨٥
٢٠ — ٢٩	٣١٥
١٠ — ١٩	٢٧٨
صفر — ٩	١٤٥