الفصل السادس

المقارنة بين الدرجات وجمعها

Comparison and Addition of Marks

فيما يلى نبذة من سجل درجات تلميذ :

المادة	الدرجة	متوسط درجات الفصل
إنجليزى	٦٨	٥٨
تاريخ	٧٠	٥٢
جغرافيا	٧٠	٥٢
فرنسى	٦٥	٥٠
لاتينى	٧٠	٦٦
رياضيات	٩٠	٦٠
رسم	٦٠	٥٠

وواضح أن الدرجة ٧٠ ليس لها نفس الدلالة فى كل مادة . فالدرجة ٧٠ فى اللاتينى يبدو أنها صغيرة عن الدرجة ٧٠ فى كل من التاريخ والجغرافيا . لأن الأولى أعلى بأربع درجات فقط عن متوسط الفصل . بينما الدرجتان الأخريان أعلى من متوسط الفصل بثمانية عشر درجة . ولكن هل للدرجة ٧٠ نفس الدلالة فى التاريخ والجغرافيا ؟ يمكن فقط الإجابة عن هذا السؤال إذا عرف تشتت درجات الفصل فى كل من المادتين .

افترض أن الانحراف المعيارى لكل من المواد كما يلى :

المادة	الانحراف المعيارى
إنجليزى	١٠
تاريخ	٩
جغرافيا	١٢
فرنسى	١٠
لاتينى	٨
رياضيات	١٥
رسم	٥

الدرجتان اللتان حصل عليهما التلميذ فى التاريخ والجغرافيا أعلى من متوسط الفصل فيهما بثمانية عشرة درجة ، ولكن هذا الفرق فى التاريخ يمثل $\frac{١٨}{٩}$ أى أعلى من متوسط الفصل بضعف الانحراف المعيارى ، فى حين أن درجة الجغرافيا $\frac{١٨}{١٢}$ أى أعلى من متوسط الفصل بمره ونصف الانحراف المعيارى ، بهذا يمكن القول بأن الدرجة ٧٠ فى التاريخ أفضل من الدرجة ٧٠ فى الجغرافيا .

والدرجة ٩٠ فى الرياضيات أعلى من المتوسط بثلاثين درجة ، حيث أن الانحراف المعيارى لدرجات الرياضيات فى الفصل ١٥ ، بهذا تكون هذه الدرجة أعلى من متوسط الفصل بانحرافين معياريين . أما فى مادة الرسم فالدرجة ٦٠ أعلى من متوسط الفصل بضعف الانحراف المعيارى بهذا يمكن أن نخلص إلى أن هاتين الدرجتين تمثلان نفس المستوى من الإنجاز .

والدرجة ٧٠ فى اللاتينى تقع أعلى من متوسط الفصل بنصف انحراف معيارى فقط ، بينما أن الدرجة ٦٠ فى الرسم أعلى من متوسط الفصل بانحرافين معياريين ، هكذا نرى أن درجة مادة الرسم ، أفضل من درجة مادة اللاتينى .

وبالمثل يمكن استنتاج أن درجتى الجغرافيا والفرنسى تمثلان نفس المستوى من الانجاز .

وهكذا نرى أن الدرجات لا يمكن مقارنتها أو تفسيرها دون الرجوع إلى المتوسط والانحراف المعيارى .

المقارنة بين الدرجات :

لنفرض أن تلميذنا فى المثال السابق سئل أن يختار أفضل ثلاث درجات حصل عليها ، فإنه يشعر بأنه محق فى اختيار درجات الجغرافيا واللاتينى والرياضيات ، ومجموعها ٢٣٠ (٧٠ + ٧٠ + ٩٠) : أما مجموعه فى التاريخ والرسم والرياضيات فهو ٢٢٠ (٧٠ + ٦٠ + ٩٠) . وقد سبق أن أوضحنا أن درجتى التاريخ والرسم ، أفضل نسبياً من درجتى الجغرافيا واللاتينى . من هذا يتضح أن المجموع ٢٢٠ فى التاريخ والرسم والرياضيات يمثل إنجازاً أفضل من المجموع ٢٣٠ فى الجغرافيا واللاتينى والرياضيات .

ولا يكون لجمع الدرجات الخام دلالة ، دون أن يجرى عليها بعض التعديل الذى يأخذ فى الاعتبار كلا من المتوسط والانحراف المعيارى لكل مجموعة من هذه الدرجات .

تمارين :

(١) أى هذه الدرجات أفضل

٧٠ (م = ٦٠ ، ع = ٨) أو ٦٧ (م = ٥٥ ، ع = ٩) ؟

(٢) رتب الدرجات التالية حسب أفضليتها من حيث الإنجاز :

٧٥ (م = ٦٠ ، ع = ١٢) ، ٧٠ (م = ٥٥ ، ع = ١٠)

٦٨ (م = ٤٨ ، ع = ١٥) .

نحدد قيمة الدرجات فى سجل التلميذ ؛ ببعدها عن المتوسط ، مقاساً بوحدات انحراف معيارى .

فدرجة التاريخ كانت أعلى من المتوسط بانحرفين معياريين ، بينما درجة اللاتينى كانت أعلى من المتوسط بنصف انحراف معيارى فقط .

ويرمز لهذا بالرمزين ٢ ع ، $\frac{١}{٢}$ ع على التوالى . وتسمى هذه بالدرجات المعيارية Standrd Scores

وتقنن اختبارات الذكاء الجماعية عادة بمتوسط ١٠٠ وانحراف معيارى ١٥ ، وبهذا فإن معاملا للذكاء يبلغ ١١٥ يكون أعلى من المتوسط بمقدار ١٥ ، أو بانحراف معيارى واحد ، وبهذا يكون معامل الذكاء ١١٥ بالدرجات المعيارية يساوى ١ ع ٥

والدرجة المعيارية ٢ ع على اختبار ذكاء مشابه ، تكون أعلى من المتوسط بمقدار ٢ × ١٥ أو ٣٠ ، ويمثل هذا معامل ذكاء يبلغ ١٣٠ . وإذا كان معامل الذكاء ٨٥ فإنه يكون ١٥ أقل من المتوسط . أو ١ ع أقل من المتوسط ويرمز له بالرمز (— ١ ع) ، والدرجة المعيارية (— ٢ ع) لمعامل ذكاء ، تكون أقل من المتوسط بمقدار ٣٠ أى أن هذا المعامل يكون ٧٠ .

فالدرجات أعلى من المتوسط تكون موجبة ، بينما تلك الأقل من المتوسط تكون سالبة .

تمرين :

حول إلى درجات معيارية :

(أ) معاملات الذكاء : ١٢٠ ، ١٠٠ ، ٧٠ ، ٩٥ ، علماً بأن م = ١٠٠ ، ع = ١٥ .

(ب) الدرجات ٤٠ ، ٣٥ ، ٥٠ ، ٨٠ حيث م = ٥٠ ، ع = ١٥ .

(حـ) ما هى معاملات الذكاء التى تمثلها الدرجات المعيارية التالية :

٢ ع ، — ١ ع ، — ١,٣ ع ، ١,٧ ع .

حيث م = ١٠٠ ، ع = ١٥ .

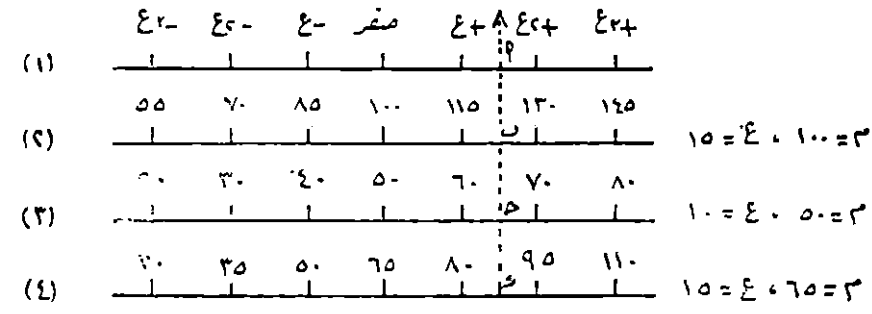
ويمكن حساب الدرجة المعيارية من المعادلة التالية :

$$د = \frac{س - م}{ع}$$

حيث د = الدرجة المعيارية ، س = الدرجة الخام

، م = المتوسط الحسابى . ، ع = الانحراف المعيارى .

ويمكن توضيح فكرة المقياس المعيارى كما يلى :



ويمثل الخط العلوى المقياس المعيارى ، بينما يمثل الخط الثانى معاملات الذكاء بمتوسط ١٠٠ وانحراف معيارى ١٥ ، وبثلاث انحرافات معيارية أعلى وأقل من المتوسط . أما الخطين الثالث والرابع فتمثل مقياسين متوسطهما ٥٠ ، ٦٥ ، وانحرافين معياريين ١٠ ، ١٥ على الترتيب .

موضع الدرجة على المقياس .

تتحدد موضع الدرجة على مقياس ببعدها عن المتوسط : علوا وهبوطاً ، بوحدات الانحراف المعيارى ، فمثلا ٢ ع هى النقطة التى تعلو المتوسط بانحرافين معياريين . وهى تساوى على الثلاثة مقاييس المبينة بالرسم ١٣٠ ، ٧٠ ، ٩٥ على التوالى .

تحويل الدرجات :

يمكن تحويل درجة ما على مقياس إلى مقابلا على مقياس آخر ، فمثلا . فى الشكل السابق ، من الواضح أن الدرجة ٤٠ على المقياس الثالث تعادل درجة ٥٠ على المقياس الرابع .

ما هى الدرجة على المقياس الرابع التى تعادلها الدرجة ٦٥ على المقياس الثالث ؟ الدرجة ٦٥ تزيد عن المتوسط $\frac{١٥}{١٠}$ درجة أى أو ١ $\frac{١}{٢}$ ع بالدرجات المعيارية .

والدرجة ١,٥ على المقياس الرابع هى ١,٥ × ١٥ أو ٢٢,٥ أعلى من المتوسط ٦٥ . وبذلك تكون ٨٧,٥ . وقد حددت المواضع النسبية على المقاييس الأربعة بالحروف ا ، ب ، حـ ، د .

ولتحويل الدرجة س (م س ، ع س) . إلى الدرجة ص (م ص ، ع ص) تتبع الخطوات التالية :

(١) أوجد الفرق بين الدرجة س ، ومتوسطها مع مراعاة الإشارة :

$$س - م_س = ٦٥ - ٥٠$$
$$= ١٥$$

(٢) عبر عن الفرق بالانحرافات المعيارية عن للتوسط . وذلك بقسمة الفرق على الانحرافات المعيارية ، وبهذا فإن :

$$\frac{س - م_س}{ع_س} = \frac{١٥}{١٠}$$
$$= ١,٥$$

(٣) حول البعد عن المتوسط بالانحرافات المعيارية إلى البعد الحقيقى عن متوسط الدرجات ص ، وذلك بضربه × الانحراف المعيارى للدرجات ص :

$$\frac{س - م_س}{ع_س} \times ع_ص = ١,٥ \times ١٥ = ٢٢,٥ :$$

(٤) اجمع البعد عن متوسط الدرجات ص : على المتوسط .

$$\text{الدرجة ص} = م_ص + \frac{ع_ص}{ع_س} (س - م_س)$$
$$= ٦٥ + ٢٢,٥$$
$$= ٨٧,٥$$

التدريج Scaling :

يمكن التعبير عن العملية الكاملة لتحويل الدرجة س ($م_س$ ، $ع_س$) إلى الدرجة ص ($م_ص$ ، $ع_ص$) بالمعادلة الآتية :

$$ص = م_ص + \frac{ع_ص}{ع_س} (س - م_س)$$

وتعرف هذه بمعادلة التدريج .

جمع الدرجات :

يعطى الجدول التالى تقديرات المدرسين لست تلاميذ ، والدرجات التى حصلوا عليها فى أحد الامتحانات :

التلميذ	التقدير	درجة الامتحان	المجموع
ا	٨٢	٦٨	١٥٠
ب	٨٠	٧٠	١٥٠
حـ	٧٨	٧٢	١٥٠
ﻙ	٥٠	٥٥	١٠٥
هـ	٤٠	٤٩	٨٩
و	٣٦	٦٢	٩٨

لقد كان متوسط تقديرات المدرس للفصل ٤٠ ، والانحراف المعيارى لها ٢٠ . بينما كان متوسط درجات الامتحان ٥٠ ، والانحراف المعيارى لها ١٠ .

فإذا جمعت تقديرات المدرسين ، ودرجات الامتحان : يتساوى التلاميذ ا ، ب ، حـ ، ويتبعهم على التوالى التلاميذ ﻙ ، هـ ، و :

وعلى وجه العموم ، فإن جمع الدرجات الخام إجراء غير سليم ، ويلزم إما أن نحول كل من مجموعتى الدرجات إلى مقياس مشترك ، أو نحول مجموعة منها إلى نفس معيار الدرجات الأخرى .

فإذا حولت التقديرات إلى نفس مقياس درجات الامتحان ، ثم جمعت الدرجات ، فإن النتيجة تصبح كما يلى :

التلميذ	التقدير	الدرجة المعيارية	التقديرات	درجة الامتحان	المجموع
			$\begin{bmatrix} م = ٥٠ \\ ع = ١٠ \end{bmatrix}$		
ا	٨٢	+ ٢,١ ع	٧١	٦٨	١٣٩
ب	٨٠	+ ٢ ع	٧٠	٧٠	١٤٠
حـ	٧٨	+ ١,٩ ع	٦٩	٧٢	١٤١
ﻙ	٥٠	+ ٠,٥ ع	٥٥	٥٥	١١٠
هـ	٤٠	٠ صفر ع	٥٠	٤٩	٩٩
و	٣٦	— ٠,٢ ع	٤٨	٦٢	١١٠

ويتغير ترتيب التلاميذ كثيراً ، ليصبح تنازلياً كما يلى : حـ . ب . ا ، ﻙ مع و (متساويان) ، هـ .

الطريقة البيانية لتحويل الدرجات :

معادلة تحويل الدرجات هى :

$$ص = م_{ص} + \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} (س - م_{س})$$

ويمثل هذا بيانياً بخط مستقيم يمكن رسمه بسهولة . افرض أن الخط ا ب يمثل هذا التحويل ، ولإيجاد الدرجة ص$_1$ على المقياس الصادى . التى تقابل الدرجة س$_1$ على المقياس السينى ، ارسم خطاً أفقياً من ص$_1$ ليقابل ا ب فى ح ثم يرسم عمود من ح على المحور السينى ليقطعه فى س$_1$ ، فتكون الدرجة س$_1$ هى الدرجة السينية المقابلة للدرجة ص$_1$

ويمدنا الرسم البيانى أيضاً ، بوسيلة لتحويل الدرجات على المقياس السينى إلى درجات على المقياس الصادى . وتحدد النقطة ك على الخط ا ب برسم خط رأسى من النقطة س$_2$. ويرسم من النقطة ك خط أفقى ليقابل المحور الصادى فى ص$_2$. وهذه هى الدرجة الصادية التى تقابل الدرجة س$_2$.

وتوضح الطريقة برسم خط بيانى لتحويل مجموعة من الدرجات س بمتوسط ٥٠ وانحراف معيارى ١٠ إلى مجموعة من الدرجات ص بمتوسط ٦٥ ، وانحراف معيارى ١٥ .

ويمكن رسم الخط المستقيم بوضع نقطتين عليه ، ولكى يمكن التوصل إلى درجة أكبر من الثقة باستخدام ثلاث نقط يمكن تحديدها بسهولة (أنظر شكل ١١) وهى :

(١) النقطة ا التى تمثل م$_س$ ، م$_ص$ (٥٠ × ، ٦٥) .

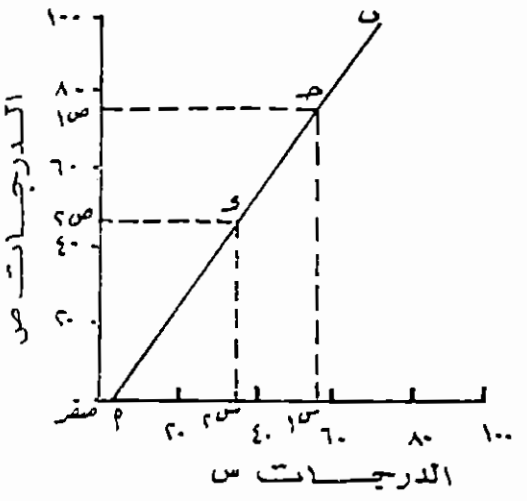
(٢) النقطة ب التى تمثل بعد انحراف معيارى أعلى من المتوسط (م س + ع س) . (م ص + ع ص)
أى ٥٠ + ١٠ = ٦٠ ، ٦٥ + ١٥ = ٨٠ .

(٣) النقطة ح التى تمثل بعد انحراف معيارى أقل من المتوسط (م س − ع س) ، (م ص − ع ص)
أى ٤٠ ، ٥٠ .

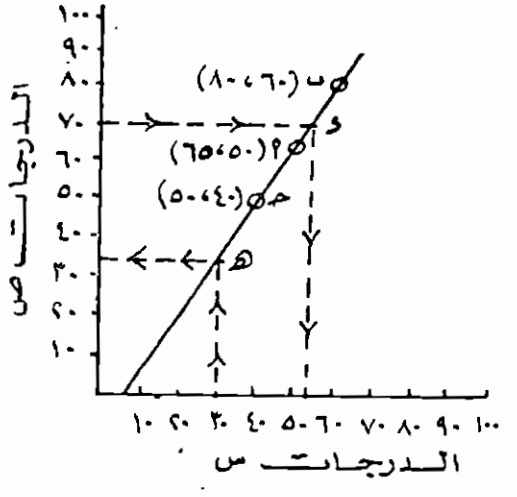
ويعطى الخط المار بهذه النقطة خط التحويل المطلوب .

ولتحويل درجة على المقياس ص (٧٠ مثلا) إلى الدرجة المقابلة لها على المقياس س ، ارسم خطاً أفقياً يمر بالنقطة الممثلة للدرجة ٧٠ على المحور الصادى ليتقابل الخط البيانى فى ك ، ثم ارسم من ك عموداً على المحور السينى فيقابل المحور السينى عند ٥٣ فتكون هى الدرجة السينية المطلوبة .

وبالمثل فإن درجة سينية ٣٠ يمكن تحويلها إلى درجة صادية برسم خط رأسى عند ٣٠ ليقابل الخط



(شكل ١٠)



(شكل ١١)

البيانى عند هـ . ثم يرسم من هـ خط أفقى ليقابل المحور الصادى عند ٣٥ ، وبذلك تكون الدرجة الصادية التى تقابل الدرجة السينية ٣٠ هى ٣٥ .

وليس هناك حاجة إلى رسم خطوط أفقية ورأسية ، بل يكفى تحديد المواقع على الخط باستخدام مسطرة توضع فى المواقع المناسبة .

تمارين :

(١) أوجد مجموع تقديرات المدرسين درجات الامتحان المذكورة فى ص .

ا ــ إذا حولت الدرجات فى مقياس متوسط درجاته ٤٠ ، وانحرافه المعيارى ٢٠ .

ب ــ إذا حولت كل من التقديرات والدرجات إلى مقياس متوسطه ٤٠ وانحرافه المعيارى ١٠ .

(٢) يعطى الجدول التالى درجات ثمانية تلاميذ ينظر فى ترشيحهم لمنح دراسية ، على أساس الامتحانات فى الانجليزى والرياضيات ، وكانت الدرجة المتوسطة لجميع التلاميذ الذين أدوا الامتحان فى اللغة الانجليزية (م ح = ٤٠) ، وفى الرياضيات (م ر = ٥٠) ،

أما الانحراف المعيارى فكان فى الانجليزى (ع ح = ١٠) ، وفى الرياضيات (ع ر = ٢٠) .

التلميذ	الانجليزى	الرياضيات
(١)	٦٠	٧٠
(٢)	٣٠	٣٠
(٣)	٤٢	٨٠
(٤)	٥٠	٨٤
(٥)	٢٠	٦٥
(٦)	٤٥	٦٥
(٧)	٤٠	٥٠
(٨)	٣٠	٧٠

أوجد :

ا ــ ترتيب التلاميذ الثمانية عند جمع الدرجات الخام .

ب ــ ترتيب التلاميذ الثمانية عند تحويل الدرجات بحيث يصبح لها مستوى تصحيح ، وتشتت ، درجات الانجليزى . وذلك باستخدام لطريقة الحسابية .

حـ ــ ترتيب التلاميذ الثمانية عند تحويل الدرجات بحيث يكون لها مستوى تصحيح ، وتشتت ، درجات الرياضيات ، وذلك باستخدام الطريقة البيانية .