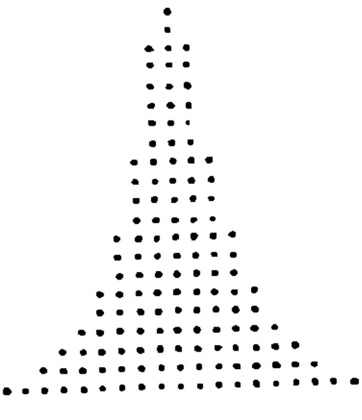
الفصل الثامن

المنحنى الاعتدالى

THE NORMAL CURVE

تصور عدداً كبيراً من الناس . مجتمعين . ومصفوفين تبعاً للطول . بحيث يقف ذوو الطول الواحد وراء بعضهم ، فعند الوسط ، أو قريباً منه ؛ حيث يوجد ذوو الطول المتوسط ، تطول الطوابير بعيداً إلى الخلف ، بينما تقصر الطوابير قرب نهايتى الصف حيث يقف قصار القامة وطوالها ؛ حتى أنه عند أقصى نهايتى الصف ، قد نجد أن بعض الأفراد لا يقف وراءهم أحد .

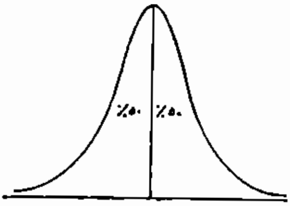
ومنظر هذه الطوابير كما تبدو من طائرة عمودية (هليوكبتر) تعلو الجمع مباشرة يبدو كما فى شكل ١٥ .



شكل (١٥)

وتميل معظم التمثيلات البيانية للتوزيعات التكرارية للدرجات إلى أخذ هذا الشكل العام — فالقياسات تكون متمركزة حول الوسط ، ثم تخف تدريجياً من النقطة الأشد تركيزاً ، أو القمة . بالتساوى نحو اليمين واليسار . ويسمى المنحنى المار بالنقطة ، والممثل لقيم التكرار ، بالمنحنى الاعتدالى .

وهو متماثل تماماً على جانبى عمــود ساقط من أعلى نقطة فى المنحنى إلى خط القاعــدة (انظر شكل ١٦) :



شكل (١٦)

ومنحنى التكرار الاعتدالى له أهمية كبيرة فى الإحصاء التربوى وهو يمثل بالتقريب توزيع القدرة العقلية على تلاميذ المدرسة الابتدائية ، وله تطبيقات تربوية مهمة .

الفروق الفردية :

كان الاعتراف بوجود فروق فردية ، تقدماً كبيراً فى التربية ، وكذلك كان الاعتراف بالحاجة إلى تكييف التربية لتقابل القدرة العقلية لكل طفل . وبينما توجد فروق كبيرة جداً فى القدرة بين الأفراد ، إلا أن هناك استمرارية تمتد من إحدى نهايتى المقياس إلى نهايته الأخرى ، ففى المدرسة أو الفصل حيث لايتبع نظام خاص للاختيار ، توجد كل مستويات الذكاء من أدناها إلى أقصاها ، ولا يوجد انتقال فجائى بين ذوى النقص العقلى إلى ذوى الذكاء الممتاز . وقد توقعنا فى الخطأ ، التقسيمات التى يصنف وفقاً لها الناس من حيث الذكاء : كالناقصين عقلياً ، والعباقرة ، والمتفوقين ، والأغبياء ، والمتخلفين ؛ فهناك استمرار يشمل كل الفئات ، وهى متداخلة ، وهكذا الحال مع درجات الامتحان ، فهناك فروق قليلة ، أو أنه لا توجد فروق إطلاقاً بين إنجازات التلاميذ الذين تتقارب درجاتهم .

الحيود عن الاعتدال :

توجد عدة أمور تتعلق بالمنحنى الاعتدالى يجب فهمها بوضوح .

(١) إذا كان عدد القيودات صغيراً ، فقد لا تكون هناك استمرارية كما هو مبين فى شكل (٣) (ص ١٩) . ولهذا فإن النتائج التى يحصل عليها من فصل واحد ، نادراً ما تعطى منحنى اعتدالياً ؛ وكلما زاد حجم المجموعة ، كلما أصبح المنحنى أكثر اعتدالا ، ولا يتوقع أن يعطى التوزيع التكرارى لمعاملات ذكاء تلاميذ فصل ، أو حتى مدرسة ، منحنى اعتدالياً ، ومن ناحية أخرى ، فإنه إذا جمعت نتائج عدة مدارس ، فإن التوزيع يقترب أكثر من الاعتدال .

(٢) إذا لم تكن عينة التلاميذ التى يجرى اختبارها عادية فى طبيعتها ، وإذا لم يكن الامتحان معداً خصيصاً لها ، فإن التوزيع التكرارى لدرجاتها لن يعطى منحنى اعتدالياً ، فإذا كان الفصل لأطفال أغبياء أو متخلفين دراسياً ، وكان اختبارهم بامتحان معد لتلاميذ عاديين من نفس العمر ، فإن النتائج لن تكون اعتدالية .

٣ – قد يكون الحيود عن الاعتدال بسبب طبيعة الامتحان ، أو بسبب طبيعة المجموعة التى يجرى اختبارها ، ومع هذا فقد يصمم اختبار يحصل به على منحنى اعتدالى من مجموعة ليست عادية ، ولا يدرك كثير من المعلمين أنه يمكن تصميم اختبارات لإنتاج أنواع مختلفة من توزيعات الدرجات .

المساحات التى توجد أسفل المنحنى الاعتدالى

حيث إنه يمكن تحديد المنحنى الاعتدالى رياضيًّا بدقة ، فإنه يمكن إجراء حسابات مهمة ومفيدة عليه . فمثلا من الواضح أن العمود الذى يرسم من النقطة المتوسطة من القاعدة إلى قمة المنحنى ، يقسم المساحة التى توجد أسفله إلى قسمين متساويين : فخمسون فى المائة من المجموعة تقع أعلى المتوسط الحسابى ، والخمسون فى المائة الأخرى تقع أدناه (انظر شكل ١٦) .

وقد وضع جدول (انظر الملحق ٢) ، يوضح المساحة التى توجد أسفل المحنى الاعتدالى بين المتوسط والانحرافات المعيارية المختلفة عن المتوسط ، معبراً عنها بنسبة من المساحة الكلية .

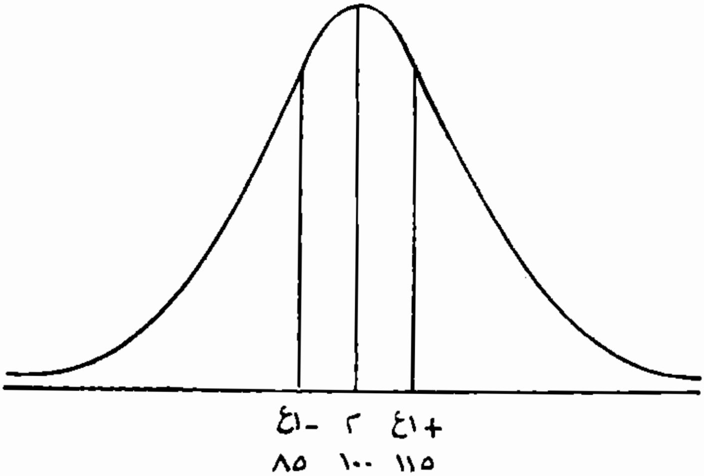
نسبة الحالات التى تقع من المتوسط ، + ١ ع تبلغ ٣٤,١٣٪ (الرقم المبين فى الجدول هو ,٣٤١٣) . وهذا صحيح مهما كانت قيمة «ع» ، بشرط أن يكون التوزيع اعتدالياً تقريباً ، ويعنى هذا إذا حول إلى المقياس الحتيقى أنه على سبيل المثال يوجد ٣٤٪ من التلاميذ لهم معامل ذكاء يتراوح بين ١٠٠ ، ١١٥ إذا كان متوسط الذكاء ١٠٠ ، وانحرافه المعيارى ١٥ .

وإذا كانت الدرجة المتوسطة ٦٥ ، والانحراف المعيارى ١٥ ، فإن ٣٤ ٪ من التوزيع يقع بين الدرجة ٦٥ والدرجة ٨٠ ، وبالمثل فإن ٣٤,١٣ من الحالات فى توزيع اعتدالى تقع بين معامل الذكاء ١٠٠ ، ومعامل الذكاء ٨٥ أى بين الانحراف المعيارى صفر ، والانحراف – ١ ع ، وبهذا فإن ٦٨,٢٦ ٪ من الناس لهم معاملات ذكاء تتراوح بين ٨٥ . ١١٥ (انظر شكل ١٧)

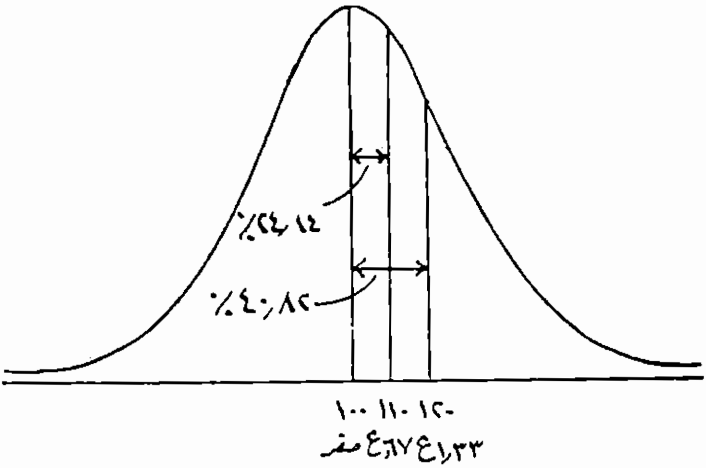
وبالمثل فإنه فى توزيع اعتدالى لمجموعة من الدرجات متوسطه ٥٠ ، وانحرافه المعيارى ١٠ ، فإن ٦٨,٢٦ ٪ من الدرجات تقع بين ٤٠ ، ٦٠ .

ويبين الشكل ١٨ كيفية حساب نسبة مجموع الأفراد التى تقع بين معامل الذكاء ١١٠ ، ومعامل الذكاء ١٢٠ (م = ١٠٠ ، ع = ١٥) .

فمعامل الذكاء ١١٠ هو ,٦٧ ع أعلى من المتوسط . وفى الملحق ٢ نجد أن نسبة الحالات التى توجد بين المتوسط . ,٦٧ ع هى ٠,٢٤٨٦ ، وبهذا فإن ٢٤,٨٦ ٪ من مجموع الأفراد يقعون بين معاملى الذكاء ١٠٠ ، ١١٠ ؛ وحيث إن معامل الذكاء ١٢٠ هو ١,٣٣ ع أعلى من معامل الذكاء المتوسط ١٠٠ ، فإن نسبة مجموع الأفراد التى توجد بين معامل الذكاء المتوسط ، ومعامل الذكاء ١٢٠



شكل (١٧)

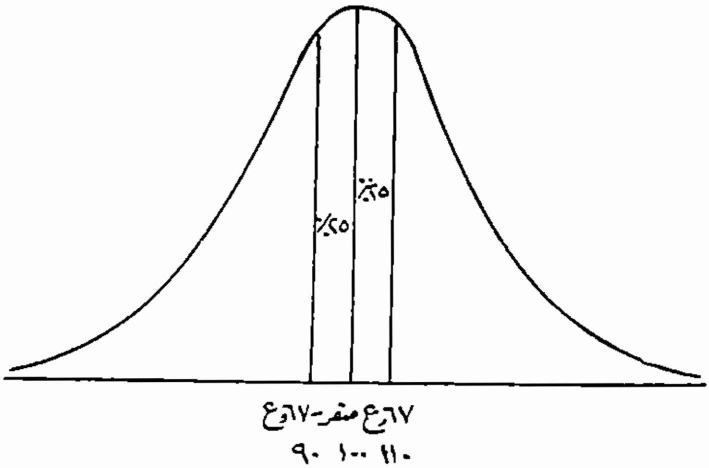


شكل (١٨)

هى ٤٠,٨٢ ٪ ، وعلى هذا فإن نسبة مجموع الأفراد التى توجد بين معاملى الذكاء ١١٠ ، ١٢٠ هى ٤٠,٨٢ — ٢٤,٨٦ أى ١٥,٩٦٪ ، أى حوالى ١٦ ٪ ، وتصح هذه الحسابات فقط إذا كان المجموع الكلى للأفراد موزعاً توزيعاً اعتدالياً .

ويمكن إجراء الحسابات بطريقة عكسية . فإذا أعطيت نسبة من المجتمع الكلى للأفراد ، فإنه يمكن حساب حدود معامل الذكاء التى تضم بينها هذه النسبة . فمثلا الخمسون فى المائة المتوسطة يحدها معاملا الذكاء اللذين يضمان ٢٥ ٪ من الحالات أعلى من المتوسط ، ٢٥ ٪ من الحالات أقل من المتوسط . ويوضح الجدول فى الملحق ٢، أن الخط المرسوم من + ٦٧,ع يحد ٢٥ ٪ من المساحة إلى

يمين المتوسط ، وحيث إن ع = ١٥ ، فإن ٠,٦٧ ع يمثل ١٠,٠٥ (١٥ × ٠,٦٧) نقطة من معاملات الذكاء ، وهكذا يكون معامل الذكاء المطلوب هو ١١٠ (انظر شكل ١٩) .



شكل (١٩)

ولقد كانت الأمثلة التى أوردناها تتعلق بمعاملات الذكاء ، ولكن يمكن إجراء حسابات من أى متوسط . أو معامل انحراف .

خذ على سبيل المثال ، توزيعاً اعتدالياً متوسطه ١٢ ، وانحرافه المعيارى ٤ ، ما هى نسبة الحالات التى :

(ا) تقع بين الدرجتين ٨ ، ١٦ ؟

(ب) تقع أعلى من الدرجة ١٨ ؟

(ح) تقع أدنى من الدرجة ٦ ؟

(ا) تقع الدرجتان ٨ . ١٦ عند – ١ ع ، + ١ ع ، أى أنه توجد نسبة ٣٤,١٣ ٪ أعلى من المتوسط ، ونسبة ٣٤,١٣ ٪ أدنى منه ، وبهذا فإن الدرجتين ٨ ، ١٦ تضمان بينهما ٦٨,٢٦ ٪ من المجموع الكلى .

(ب) الدرجة ١٨ تعلو المتوسط بست نقاط . أى أنها تقع عند ١,٥ ع . ونسبة الحالات بين المتوسط ، ١,٥ ع هى ٤٣,٣٢ ٪ . وبهذا فإن نسبة الحالات أعلى من هذه النقطة هى ٦,٦٨ ٪ .

(ح) وبالمثل فإنه توجد أسفل الدرجة ٦ ، حوالى ٧ ٪ من مجموع الحالات .

تقريب :

تعطى فى بعض الأمثلة ، درجة أو معامل ذكاء ، ليس عدداً صحيحاً ، مثلا معامل الذكاء ١١٠,٠٥ ، وقد تكون لمثل هذه الدقة ما يبررها حسابيًّا ، ولكن القياس التربوى لا يتطلب مثل هذه الدقة ، وينبغى عادة التعبير عن الدرجات المفردة بأرقام صحيحة .

تمارين :

١ – ما هى النسبة المئوية من توزيع اعتدالى متوسطه ٢٩ . وانحرافه المعيارى ٤,٥ ، التى تقع بين ٢٠ ، ٣٨ .

٢ – توزيع اعتدالى متوسطه ١٤,٥ ، ع له ٢,٥ . ما هى النسبة المئوية من المجموعة التى تقع :

(ا) بين ١٢ ، ١٦ .
(ب) أعلى من ١٨ .
(حـ) أقل من ١٠ .

٣ – توزيع اعتدالى متوسطه ٦٥ ، ع له ١٥ . ما هى الدرجات التى تحد بينها من التوزيع النسبة :

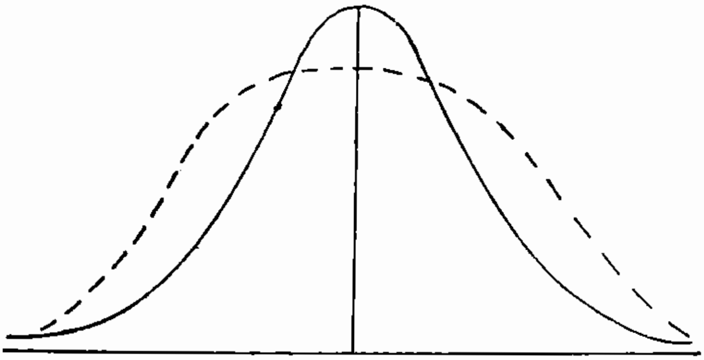
(ا) ٢٥,١٤ ٪ العليا .
(ب) ٣٠,٣٤ ٪ المتوسطة .
(حـ) ٢٠ ٪ الدنيا .

٤ – افترض توزيعاً اعتدالياً لمعاملات الذكاء متوسطه ١٠٠ ، وانحرافه المعيارى ١٥ :

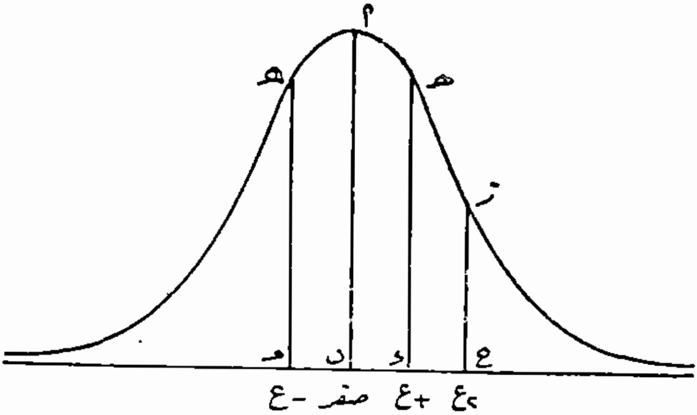
(ا) ما هى النسبة المئوية التى تقع أعلى من معامل الذكاء ١١٠ .
(حـ) ما هما معاملا الذكاء اللذان يحدان نسبة ٤٠ ٪ المتوسطة .

تأثير التشتت

رغم أن المنحنى الاعتدالى متماثل دائماً . إلا أنه يختلف فى شكله ، فقد يكون منضغطاً أو متسعاً ، ويتوقف هذا على تشتت الدرجات . ويبين الشكل ٢٠ منحنيين اعتداليين لهما نفس المتوسط ، ولكن تشتيتيهما يختلفان ، وقد يمثل هذان التوزيعان . على سبيل المثال ، توزيع الذكاء لعدد متساو من البنين والبنات ، يظهر أن تشتت معاملات الذكاء للأولاد أوسع منه للبنات .



شكل (٢٠)



شكل (٢١)

رسم المنحنى الاعتدالى

الخطوة الأولى فى رسم منحنى اعتدالى هى تحديد الارتفاع الأقصى للمنحنى (ا ب فى الشكل). وتسمى الأعمدة المرسومة من أى نقطة على المنحنى والساقطة على خط القاعدة بالإحداثيات ، ويرمز للإحداثى ا ب بالرمز ص صفر ، وهو الإحداثى المتوسط .

وجميع الإحداثيات الأخرى نسب ثابتة من الإحداثى ص صفر ، فمثلا الإحداثى حـ د على بعد + ع من المتوسط ، والذى يرمز له بالرمز صع يبلغ طوله ٦١ ٪ من ص صفر ، والإحداثى هـ و على بعد ــ ع من المتوسط ، ويرمز له بالرمز ص ــ ع ، له نفس الطول. بينما الاحداثى زح على بعد + ٢ ع من المتوسط ، يرمز له بالرمز ص ٢ ع يبلغ طوله حوالى ١٣,٥ ٪ من طول الإحداثى ص صفر .

ويرسم عدد كاف من الإحداثيات . يمكن رسم المنحنى بسهولة، خاصة إذا استعمل ورق رسم بيانى ، وفى هذه الحالة لاداعى لرسم الإحداثيات، بل يكفى رسم النقط عند قمم الإحداثيات التى تقع على المنحنى .

وتكفى ثلاثة عشرة نقطة لإعطاء فكرة جيدة عن المنحنى ، وهذه النقط هى (بافتراض أن المتوسط ١٠٠) .

ص صفر	= ١٠٠
عند ٥,ع (ص ٥ و ع)	= ٨٨,٢٥
عند ع (ص ع)	= ٦٠,٦٥
عند ١,٥ ع (ص ١,٥ ع)	= ٣٢,٤٧
عند ٢ ع (ص ٢ ع)	= ١٣,٥٣
عند ٢,٥ ع (ص ٢,٥ ع)	= ٤,٣٩
عند ٣ ع (ص ٣ ع)	= ١,١١

والإحداثيات عند القيم السالبة للانحراف المعيارى ، تماثل مثيلاتها ذات القيم الموجبة :

وارتفاعات الإحداثيات لجميع قيم ع معطاة فى ملحق ٣ .

وعلى سبيل المثال ، فإن الإحداثى عند ١,٢٦ ع يبلغ ٤٥٢١, ص صفر والإحداثى الذى يبلغ طوله ١٣, ص صفر يقع عند ٢,٠٢ ع ، وتحسب القيم المتوسطة بالنسب،فمثلا الإحداثى الذى يبلغ ٢٥, ص صفر يقع عند ١,٦٦٥ ع لأن :

٠,٢٥٢١	يقع عند ١,٦٦ ع
، ٠,٢٤٨٠	يقع عند ١,٦٧ ع
∴ ٠,٠٠٤١	يتسبب فى — ٠,٠١ ع
∴ ٠,٠٠٢١	يتسبب فى — ٠,٠٠٥ ع
∴ ٠,٢٥٠٠	تقع عند ١,٦٦٥ ع

تمرينات :

١ — ما هى نسبة الإحداثى المتوسط أسفل منحنى اعتدالى عند :

(١) ١,٢٢ ع   (٢) — ٠,٥ ع

(٣) ٢,٨٥ ع   (٤) ١,٣٢٥ ع

٢ — ما هى الانحرافات المعيارية عن المتوسط التى تقع عندها الإحداثيات التى تبلغ أطوالها النسب التالية من الإحداثى المتوسط .

٨٢٪   ٦٥,٥٪   ٤٠,٢٪

٢٠٪   ٣,٥٥٪

رسم منحنى اعتدالى بمعلومية انحرافه المعيارى

(١) باستخدام التوزيع التكرارى للدرجات المفردة :

تعطى المعادلة التالية ارتفاع الإحداثى المتوسط

$$ص_{صفر} = \frac{ن}{ع \sqrt{٢ ط}}$$

حيث ن عدد الحالات

، ع الانحراف المعيارى

، $\sqrt{٢ ط} = ٢,٥١$

افترض أن هناك ١٠٠ حالة . وأن ع = ١٠

$$\therefore \quad ص_{صفر} = \frac{١٠٠}{١٠ \times ٢,٥١} = ٣,٩٨$$

وبهذا فإن :

$ص_{٠,٥ع}$ = ,٨٨٢٥ × ٣,٩٨ = ٣,٥١

$ص_{ع}$ = ,٦٠٦٥ × ٣,٩٨ = ٢,٤١

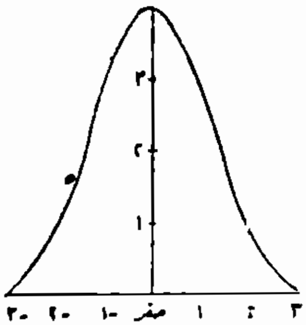
$ص_{١,٥ع}$ = ,٣٢٤٧ × ٣,٩٨ = ١,٢٩

$ص_{٢ع}$ = ,١٣٥٣ × ٣,٩٨ = ,٥٤

$ص_{٢,٥ع}$ = ,٠٤٣٩ × ٣,٩٨ = ,١٧

$ص_{٣ع}$ = ,٠١١١ × ٣,٩٨ = ,٠٤

ويمكن رسم المنحنى الاعتدالى كما فى شكل ٢٢ .



شكل (٢٢)

(ب) استخدام التوزيع التكرارى للبيانات المجمعة:

يعطى ارتفاع الإحداثى المتوسط فى هذه الحالة بالمعادلة :

$$\text{ص صفر} = \frac{\text{ن ف}}{\text{ع}\sqrt{\text{٢ ط}}}$$

حيث

ن عدد الحالات

ف سعة الفئة

ع الانحراف المعيارى

$\sqrt{\text{٢ ط}}$ يساوى ٢,٥١

ويرسم المنحنى الاعتدالى للتوزيع التكرارى المبين فى الجدول ٨ كما يلى :

جدول ٨

الفئة	التكرار	الفئة	التكرار
٩٠ — ٩٤	١	٦٠ — ٦٤	١٢
٨٥ — ٨٩	٢	٥٥ — ٥٩	١٠
٨٠ — ٨٤	٣	٥٠ — ٥٤	٩
٧٥ — ٧٩	٥	٤٥ — ٤٩	٥
٧٠ — ٧٤	٨	٤٠ — ٤٤	٣
٦٥ — ٦٩	١١	٣٥ — ٣٩	١
		المجموع	٧٠

يبلغ متوسط هذا التوزيع ٦٢,٧١ ، ويبلغ انحرافه المعيارى ١١,٧ والخطوات اللازمة لإيجاد الإحداثيات المناسبة مبينة فى جدول ٩ :

جدول ٩

الفئة (١)	مركز الفئة (٢)	الانحراف المعيارى عن المتوسط (٣)	النسبة من الإحداثى المتوسط (٤)	التكرار النظرى (٥)	التكرار الملاحظ (٦)
٩٠ — ٩٤	٩٢	+ ٢.٥٠٣	٠٤٣٩	.٥٢٣	١
٨٥ — ٨٩	٨٧	+ ٢.٠٧٦	.١١٥٠	١.٣٧	٢
٨٠ — ٨٤	٨٢	+ ١.٦٤٨	٢٥٦٣	٣.٠٥٥	٣
٧٥ — ٧٩	٧٧	+ ١.٢٢١	.٤٧٥١	٥.٦٦٢	٥
٧٠ — ٧٤	٧٢	+ .٧٩٤	.٧٣١٩	٨.٧٢٣	٨
٦٥ — ٦٩	٦٧	+ .٣٦٧	.٩٣٣٨	١١,١٣	١١
٦٠ — ٦٤	٦٢	+ .٠٠٣	١.٠٠٠	١١.٩١٨	١٢
٥٥ — ٥٩	٥٧	— .٤٨٨	.٨٨٦٩	١٠.٥٧٠	١٠
٥٠ — ٥٤	٥٢	— .٩١٥	.٦٥٥	٧.٨١	٩
٤٥ — ٤٩	٤٧	— ١.٣٤٣	.٤٠٧٥	٤.٨٥٧	٥
٤٠ — ٤٤	٤٢	— ١.٧٧	.٢٠٨٨	٢.٤٨٩	٣
٣٥ — ٣٩	٣٧	— ٢.١٩٧	.٠٨٨٩	١.٠٦	١

طريقة الحساب :

الخطوة ١ : اكتب مركز كل فئة . . مثلا

(العمود ١) ٩٢ ، ٨٧ . ٠٠٠٠

الخطوة ٢ : احسب المسافات المعيارية عن المتوسط لكل مركز فئة

(العمود ٣) مثلا ٩٢ تقع على بعد من المتوسط .

$$= \frac{٩٢ - ٦٢.٧١}{١١.٧} = ٢.٥٠٣ \text{ ع}$$

الخطوة ٣ : أوجد من الملحق ٣ نسبة كل إحداثى من الإحداثى المتوسط عند المسافة المعيارية

(العمود ٤) فى العمود ٣ عن المتوسط مثلا ٢.٥٠٣ ع تساوى ٠٤٣٩.

الخطوة ٤ : أوجد ارتفاع الإحداثى المتوسط .

$$\text{ص}_{\text{صفر}} = \frac{\text{ن ف}}{\text{ع} \sqrt{\text{٢ ط}}} = \frac{\text{٧٠} \times \text{٥}}{\text{١١,٧} \times \text{٢,٥١}} = \text{١١,٩٢}$$

الخطوة ٥ : احسب ارتفاع كل إحداثى . مثلا

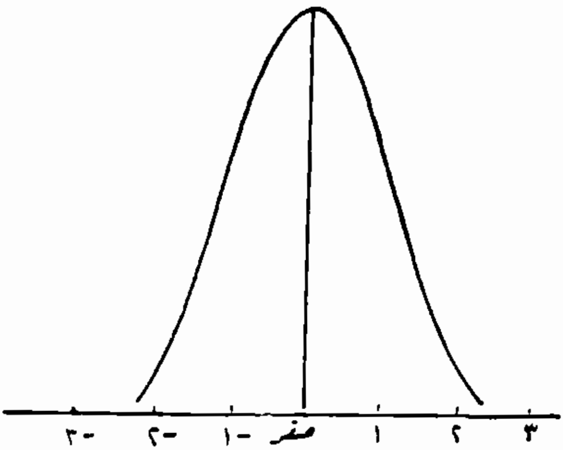
(العمود ٥) ص٢,٥٠٣ = ٠٤٣٩,٠ ص صفر

= ٠٤٣٩,٠ × ١١,٩٢

= ٥٢٣.

الخطوة ٦ : ارسم على ورقة رسم بيانى ، خطاً متوسطه عند ب ، وعند المسافات المعيارية ٢,٥٠٣ ؛ ٢,٠٧٦ .. إلخ من المتوسط ، ارسم النقط ٥٢٣, ، ١,٣٧٠ .. إلخ .: فوق للمسافات المعيارية المناسبة . ثم ارسم المنحنى (الشكل ٢٣) .

وتعطى المقارنة بين التكرارات فى العمودين ٥ ؛ ٦ ، دلالة على مدى اقتراب التكرار الملاحظ من التوزيع الاعتدالى .



شكل (٢٣)

تمارين :

١ ـ ارسم على رسم بيانى واحد ، المنحنيات الاعتدالية التالية :

(أ) ع = ٢٠ ، ﻫ = ١٠٠ (ب) ع = ١٠ ، ﻫ = ١٠٠

٢ ـ احسب التكرارات النظرية التى تعطى منحنى اعتدالياً من التوزيع التالى :

ف	ت
٦٥ ـ ٦٩	١
٦٠ ـ ٦٤	٢
٥٥ ـ ٥٩	٢
٥٠ ـ ٥٤	٥
٤٥ ـ ٤٩	١١
٤٠ ـ ٤٤	٧
٣٥ ـ ٣٩	٦
٣٠ ـ ٣٤	٣
٢٥ ـ ٢٩	١
٢٠ ـ ٢٤	١
١٥ ـ ١٩	١