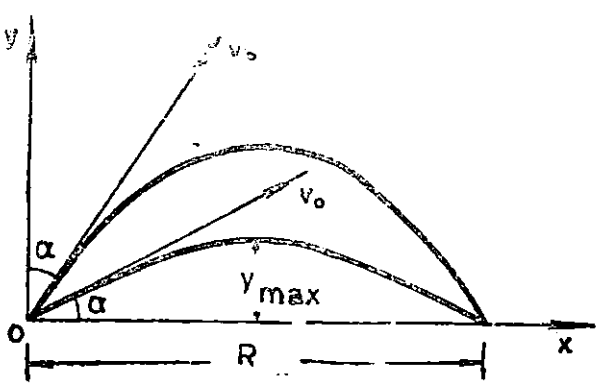
الباب العاشر

حركة المقذوفات ـــ الحركة فى وسط مقاوم

بند ٨٠ ـ حركة المقذوفات غير المعرضة لمقاومة :

سنعالج فيما يلى حركة القذائف الحرة الصغيرة المدى إبتداء من لحظة إطلاقها أى من لحظة خروجها من ماسورة المدفع إلى لحظة وصولها لأهدافها من المعلوم أن هذه القذائف تتعرض فى حركتها لجذب الأرض ـ مقاومة الهواء لسيرها وسنهمل مبدئيا مقاومة الهواء للحصول على صورة تقريبية للحركة ستلقى ضوءاً لا بأس به على الحركة الحقيقية ، وعليه ستعتبر القذيفة متحركة تحت تأثير وزنها فقط mg وهى قوة رأسية إلى أسفل ثابتة المقدار بالقرب من سطح الأرض ، ولتكن سرعة إطلاق القذيفة v_0 مائلة زاوية α مع الأفق .



شكل (٦٨)

من الواضح أن مسار القذيفة واقع فى مستوى رأسى يحوى المتجهين v_0 ، mg ولما كانت حركة القذيفة متأثرة بقوة رأسية mg ثابتة المقدار والاتجاه فإنه من المناسب فى حالتنا هذه استعمال الأحداثيات الكرتيزية ولتكن نقطة أصلها O مطابقة لنقطة إطلاق القذيفة .

باستعمال قانون نيوتن الأساسى للحركة كلا فى الاتجاهين الأفقى والرأسى نحصل على :

$$m\ddot{x} = 0 \quad , \quad m\ddot{y} = -mg \quad \cdots \cdots \quad (1)$$

وبتكامل المعادلتين (1) مرتين بالنسبة للزمن وتعيين ثوابت التكامل فى كل مرة بالاستعانة بأحوال البداية — كما سبق بالبند (٢٣) من الباب الرابع — نحصل على مركبتى السرعة :

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha \quad , \quad \dot{y} = v_0 \sin\alpha - gt \quad \cdots \cdots \quad (2)$$

وكذا إحداثيات الموضع فى أى لحظة t .

$$x = t\, v_0 \cos\alpha \quad , \quad y = t\, v_0 \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2 \quad \cdots \cdots \quad (3)$$

وأولى المعادلتين (2) تبين أن المركبة الأفقية للسرعة دائما ثابتة .

والمعادلتان (3) هما المعادلتان البارامتريتان لمسار القذيفة وبحذف البارامتر المشترك t بينهما نحصل على المسار فى صورته الكرتيزية الآتية:

$$y = x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha} \quad \cdots \cdots \quad (4)$$

وهى تمثل قطعا مكافئا محوره رأسى ومقلوب إلى أسفل ويمر بنقطة الأصل (بنقطة القذف) ويمثل الحد $\left(\frac{g x^2}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha}\right)$ مقدار الانحراف الرأسى للقذيفة عن مسارها الابتدائى وحساب هذه الكمية غاية فى الأهمية لدقة التصويب .

والمعادلات (2) ، (3) ، (4) كافية لتعيين أغلب ما يطلب تعيينه من خواص حركة المقذوفات .

أ ـ زمن تحليق القذيفة : (Time of flight) : وهو الزمن المنقضى بين لحظة إطلاق القذيفة ولحظة وصولها لهدفها ويرمز له بالرمز T فإذا كان هدف القذيفة واقع على محور x مثلا عوضنا ($y = 0$) فى المعادلة الثانية من (3) فنحصل على :

$$T = \frac{2\, v_0 \sin \alpha}{g} \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ (5)$$

ب ـ أقصى ارتفاع للقذيفة : عند أقصى ارتفاع للقذيفة تكون سرعتها أفقية أى تنعدم مركبتها الرأسية وبتعويض ($\dot{y} = 0$) فى ثانى المعادلتين (2) نحصل على الزمن المناظر لأعلى نقطة فى المسار :

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{T}{2}$$

وهو نصف الزمن الكلى لتحليق القذيفة (أنظر المعادلة (5)) . وبتعويض هذا الزمن الأخير فى ثانى المعادلتين (3) نحصل على أقصى إرتفاع .

$$y_{max.} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ (6)$$

جـ ـ مدى القذيفة (Range) : ويقصد به طول المستقيم الواصل بين نقطة القذف وبين الهدف فإن كان الهدف واقعا على المستوى الأفقى المار بنقطة القذف سمى المدى بمدى القذيفة على المستوى الأفقى وقد يطلب المدى على مستوى مائل مار بنقطة القذف كسفح جبل مثلا .

ولايجاد مدى القذيفة على مستوى أفقى يعوض زمن التحليق T فى المعادلة الأولى من (3) فنحصل على المدى R على الوجه الآتى :

$$R = \frac{2\, v_0 \sin \alpha}{g} \cdot v_0 \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad \cdots \cdots \quad (7)$$

ويلاحظ - بالتعويض فى المعادلة (7) - أن القذف بزاوية α مع الأفقى أو α مع الرأسى يعطيان نفس المدى على المستوى الافقى (أنظر شكل ٦٨) .

ولسلاح نارى معين ذى سرعة قذف معينة v_0 يمكن تغيير زاوية القذف α لإصابة هدف معين أو للحصول على أقصى مدى للقذيفة . وزاوية القذف α التى تعطى أقصى مدى على المستوى الأفقى هى ٤٥° كما يتضح من المعادلة (7) ويبلغ أقصى مدى المقدار الآتى :

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g} \quad \cdots \cdots \cdots \quad (8)$$

د - مدى القذيفة على مستوى مائل :

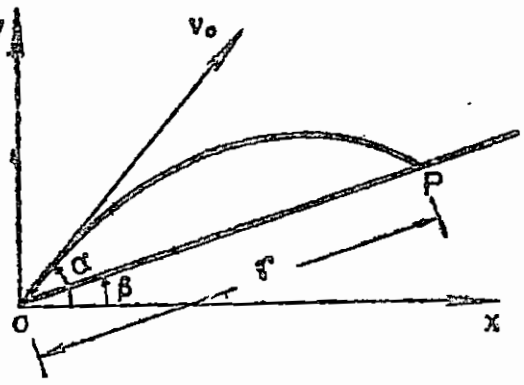
لايجاد مدى القذيفة على مستوى يميل زاوية β على الأفقى ويمر بنقطة القذف نعين نقط تقاطع معادلة المسار (4) بمعادلة المستوى المائل الآتية :

$$y = x \tan \beta \quad \cdots \cdots \cdots \quad (9)$$

وذلك بالتعويض من المعادلة (9) فى المعادلة (4)

$$x_p = \frac{2\, v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} (\tan \alpha - \tan \beta)$$

والمدى r على المستوى المائل بعد بعد العلاقة :



شكل (٦٩)

$$r = x_p \sec\beta = \frac{2v_0^2}{g}\cos^2\alpha\,(\tan\alpha\sec\beta - \tan\beta\sec\beta)$$

$$= \frac{2v_0^2}{g}\cos\alpha\sec^2\beta\,(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

$$= \frac{2v_0^2}{g}\cos\alpha.\sec^2\beta\sin(\alpha-\beta)$$

$$= \frac{v_0^2}{g}\sec^2\beta.(\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta) \quad \cdots\cdots \quad (10)$$

وتبين المعادلة (10) أنه لقيم معينة لكل من v_0 ، β يبلغ المدى r أقصاه عندما تكون :

$$(2\alpha - \beta) = \frac{\pi}{2}$$

أى عندما ينصف اتجاه القذف الزاوية التى يصنعها المستوى المائل مع الرأسى وفى هذه الحالة يبلغ أقصى مدى القيمة الآتية :

$$r_{max} = \frac{v_0^2}{g}\sec^2\beta\,(1-\sin\beta) = \frac{v_0^2/g}{1+\sin\beta}$$

ويمكن تعيين سرعة القـــذيفة فى أى وضع عن طريق مركباتها (المعادلتان 2) ومن المستحسن إستخدام قانون الطاقة لتعيين مقدار محصلة سرعة القذيفة بدلالة موضعها على الوجه الآتى :

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = - mgy \qquad \ldots - (12)$$

والحد الأيمن فى هذه المعادلة يمثل شغل وزن القذيفة أثناء إنتقالها من نقطة القذف إلى موضع ما على إرتفاع y فوق نقطة القذف .

٥ـ منحنى أقصى المرمى لمدفع معين :

إذا كان لدينا سلاح نارى ذى سرعة قذف معينة v_0 وأردنا أن نعين حدود الفراغ الذى يستطيع هذا السلاح إصابة كل نقطه فعلينا أن نحدد المحل الهندسى لنهايات أقصى مدى للقذيفة على المستوى المائل عندما تتغير زاوية ميـــل هذا المستوى متخذة جميع القيم الممكنة أى المحل الهندسى للنقطة P (شكل٦٩) ويعرف هذا المحل الهندسى بمنحنى أقصى المرمى للمدفع وتعينه المعادلة القطبية التى تربط بين إحداثيات النقطة P وهى (r , β) المعطاة بمعادلة أقصى مدى (11) وهى تمثل قطعا مكافئا محوره رأسى ومقلوب إلى أسفل وبؤرته نقطة القذف ونصف وتره البؤرى العمودى يساوى $\frac{v_0^2}{g}$ وبذا يكون بعده البؤرى مساويا $\frac{v_0^2}{2g}$ ولنرمز له بالرمز H

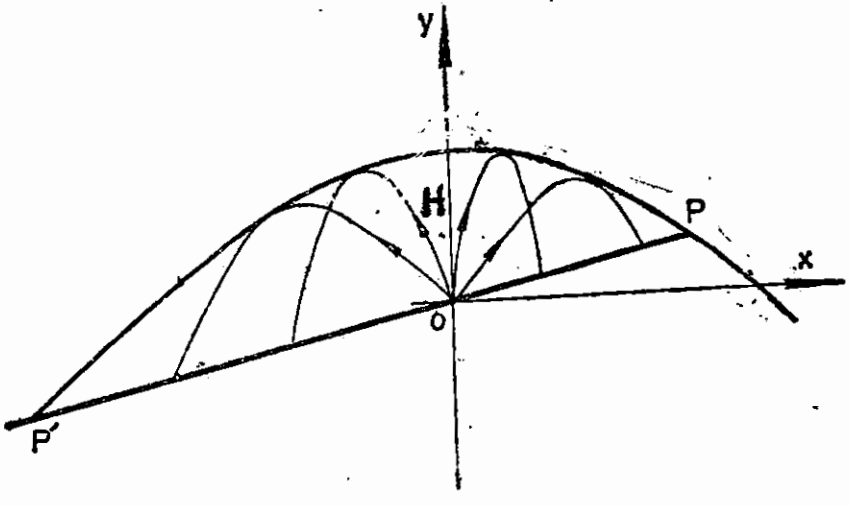
وبتحويل المعادلة القطبية (11) إلى الصورة الكرتيزية بالطرق المعروفة فى الهندسة التحليلية نحصل على المعادلة الآتية لمنحنى أقصى المرمى لمدفع ذى سرعة القذف v_0 .

$$Y = H - \frac{x^2}{4H} \qquad \ldots \ldots (13)$$

وفيها الكمية H المساوية ل ($\frac{v_0^2}{2g}$) هى عبارة عن أقصى ارتفاع يبلغه المقذوف إذا قذف رأسيا إلى أعلى بسرعة ابتدائية v_0 .

ومنحنى أقصى المرمى المدفع يمثل الغلاف الخارجى لجميع مسارات القذائف المقذوفة بسرعة v_0 (شكل ٧٠) وهذا الغلاف يزداد اتساعا كلما كبرت v_0 وتظهر فائدته فى تحديد امكانية الوصول لهدف معلوم الموضع بسرعة قذف معينة وذلك بتحديد ما إذا كان هذا الهدف أسفل منحنى مرمى المدفع أو أعلاه .

كما يمكن عن طريق منحنى أقصى المرمى تحديد أقل سرعة قذف تلزم لاصابة هدف معلوم الموضع وذلك عن طريق إمرار منحنى أقصى المرمى بهذا الهدف وتعيين سرعة القذف v_0 المناظرة لهذه المنحنى .



شكل (٧٠)

كما أنه بواسطة منحنى أقصى المرمى يمكن إيجاد أقصى مدى على مستوى مائل عن طريق تحديد نقطتى تقاطع هذا المستوى بمنحنى أقصى المرمى (شكل ٧٠) ويلاحظ فى هذه الحالة أن نقطة التقاطع العليا P تعطى مدى أقصر من المدى الذى تعطيه

نقطة التقاطع السفلى P' ويعنى هذا أن ضرب هدف يقع فى أعلى منحدر يكون أبعد منالا من ضرب هدف يقع أسفله .

ويمكن تحديد أقصى مدى للقذف إلى أسفل المنحـــدر من المعادلة (11) بتعويض $(\pi + \beta)$ بدلا من β فيها وبذا نحصل على :

$$r_{max} = \frac{v_0^2/g}{1 - \sin\beta} \qquad \ldots \ldots \quad (14)$$

والنسبة بين أقصى مدى للضرب إلى أعلى المستوى المائل والضرب إلى أسفله تنتج بقسمة المعادلة (11) على المعادلة (14) :

$$\frac{1 - \sin\beta}{1 + \sin\beta} \qquad \ldots \ldots \quad (15)$$

ومن المهم أن نلاحظ هنا أن سرعة وصول القذيفة إلى هدفها فى حالة الضرب إلى أعلى المنحنى أقل منها فى حالة الضرب إلى أسفله كما يتضح من معادلة الطاقة (12) .

ومن المعادلتين (11) ، (12) يمكن تحديد سرعة وصول القذيفة إلى نهاية مداها الأعظم فى أعلى المنحدر كما يأتى :

$$v^2 = v_0^2 - 2gy = v_0^2 - 2g.\, r.\, \sin\beta$$

$$= v_0^2 - 2g \sin\beta \frac{v_0^2}{g(1 + \sin\beta)}$$

$$\therefore \quad v^2 = v_0^2 . \frac{1 - \sin\beta}{1 + \sin\beta} \qquad \ldots \ldots \quad (16)$$

وبالمثل يمكن تحديد سرعة وصول القذيفة إلى نهاية مداها الأعظم فى أسفل المنحدر أو بطريقة أخرى بتعويض $(\pi + \beta)$ بدلا من β فى العلاقة (16) :

$$\therefore \quad v^2 = v_0^2 . \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \qquad \ldots\ldots (17)$$

والنسبة بين سرعتى الوصول هاتين هى :

$$\frac{1 - \sin \beta}{1 + \sin \beta} \qquad \ldots\ldots (18)$$

وهى نفس النسبة المستنتجة للمدى العلوى والمدى السفلى للقذيفة والمعطاة بالكمية (15).

وطول مدى القذف إلى أسفل المنحدرات وكبر سرع وصوله يجعلان الجيوش دائما تتسابق إلى إحتلال الربى والمرتفعات لكى تتمتع بالمناعة التى تمنحها لها هاتان الخاصيتان لحركة المقذوفات . ومنذ القدم والجيوش تشيد قلاعها على قمم الربى العالية لهذه الأسباب .

أمثلة محلولة :

مثال (١) رصدت حركة مقذوف فوجد أن أقصى ارتفاع بلغه هو ٩٠٠ قدم فوق نقطة القذف وأن مداه على المستوى الأفقى ٣٦٠٠ قدم . أوجد سرعة القذف مقدارا واتجاها .

أوجد أقصى مدى لقذيفة قذفت بنفس السرعة السابقة على مستوى مائل ظل زاوية ميله مع الأفقى $= \frac{3}{4}$ (اعدادى ١ هـ . سبتمبر سنة ١٩٤٩)

الحل

بالتعويض فى معادلة أقصى ارتفاع (9) ومعادلة المدى على المستوى الافقى (7) نحصل على :

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 900 \text{ ft}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 2400 \text{ ft}$$

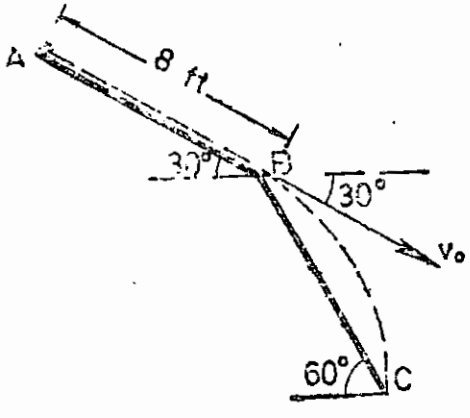
وبحل هاتين المعادلتين فى المجهولين v_0 ، α نحصل على :

$$\tan \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad , \quad v_0 = 80\sqrt{13} \text{ ft/sec}$$

للحصول على أقصى مدى على المستوى المائل المذكور فى السؤال نعوض فى المعادلة (11) فنحصل على :

$$r_{max} = \frac{v_0^2/g}{1 + \sin \beta} = \frac{80 \times 80 \times 13}{32\,(1 + \frac{3}{5})} = 1625$$

مثال (٢) : ينزلق جسيم على مستوى مائل أملس AB مسافة 8 أقدام بادئا من سكون ثم يواصل حركته بعد B كقذيفة حرة ثم يصطدم بمستوى مائل BC فى النقطة C . أوجد الطول BC وسرعة وصول الجسيم للنقطة C والزمن المنقضى فى الحركة بين A ، C .



شكل (٧١)

(اعدادى هـ ١٠ مايو سنة ١٩٥٦)

سرعة الجسيم عند B بتطبيق قانون الطاقة مطبقا بين النقطتين A , B

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{8 \times 32 \times 8 \sin 30} = 16 \text{ ft/sec.}$$

وهذه السرعة تميل ٣٠° مع الأفق وتعتبر سرعة قذف للقذيفة فى مسارها الحر التالى BC ، مدى القذيفة على المستوى المائل BC ، تعطيه المعادلة (10) على أن نعوض كل من α ، β باشارة سالبة :

$$\therefore \quad r = BC = \frac{v_0^2}{g} \sec^2 \beta \, (\sin (2\alpha - \beta) - \sin \beta)$$

$$= \frac{16 \times 16}{32} \sec^2 (-60^\circ) \, [\sin (-60^\circ + 60^\circ) - \sin (-60^\circ)]$$

$$= 8 \times 2 \times 2 \times \sqrt{\frac{3}{2}} = 16 \sqrt{3} \text{ ft}$$

سرعة وصول الجسيم للنقطة C بتطبيق قانون الطاقة بين النقطتين : A , C

$$v_c = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 32 (8 \sin 30^\circ + 16 \sqrt{3} \sin 60^\circ)} = 16 \sqrt{7} \text{ ft/sec}$$

لايجاد الزمن المنقضى فى الجزء AB يطبق قانون الحركة بعجلة منتظمة تساوى مركبة عجلة الجاذبية فى اتجاه المستوى المائل CA :

$$v_0 = g \sin 30^\circ \, . \, t_1 \quad , \quad t_1 = 1 \text{ sec.}$$

لإيجاد الزمن المنقضى فى الجزء BC نستعمل معادلات المركبة الأفقية للمقذوف الحر .

$$x = v_c \cos \alpha \, . \, t$$

$$16 \sqrt{3} \cos 60. = 16 \times \sqrt{\frac{3}{2}} \, t_2 \, , \, t_2 = 1 \text{ sec}$$

الزمن الكلى يساوى ثانيتين .

الحركة فى وسط مقاوم

بند ٨١ ـ مقدمة : إذا تحرك جسم فى وسط مائع كالماء أو الهواء أو على طريق خشن فإنه يواجه قدرا معينا من المقاومة تعمل على إيقافه إذا لم تكن هناك قوة أخرى فالسفينة أو القطار الذى يوقف آلاته عند أقصى سرعة يصل بالتدريج إلى حالة السكون تأثير مقاومات متنوعة

ويحدث فى بعض الحالات أن تكون المقاومات صغيرة بحيث يمكن إهمالها بالنسبة لغيرها من القوى وفى حالات أخرى يكون للمقاومات أهمية وأثر واضح فى الحركة فلا تهمل ومن الأمثلة التى يكون فيها للمقاومات تأثير كبير حركة السفن فى المياه والطائرات والمقذوفات فى الهواء والترسيب البطىء لحبيبات الطمى داخل حجم هادىء من الماء وهبوط ذرات التراب فى الجو الخ .

إن دراسة طبيعة المقاومة التى تواجه جسما متحركا فى وسط مائع من المسائل المعقدة لاشتمالها على عدة ظواهر متنوعة إلا أنه على وجه العموم يمكن تقسيم المقاومة إلى أربعة أنواع :

١ ـ المقاومة الاحتكاكية الناشئة بين الأسطح الخشنة الجافة وهذه ثابتة .

٢ ـ المقاومة اللزجة الناتجة من لزوجة الوسط المائع الذى يتحرك فيه الجسم وهى عبارة عن قوى احتكاك ماسة للسطح .

٣ ـ مقاومة المخور (wake resistance) الناتجة عن زيادة الضغط على مقدمة الجسم ونقص الضغط على مؤخرته نتيجة لحدوث تخلخل فى الوسط المائع خلف الجسم حيث تظهر الدوامات الخلفية . وعلى ذلك توجد قوة محصلة للضغوط تقاوم حركة الجسم .

٤ — المقاومة الموجية الناتجة من تكون موجات تشع من الجسم داخل الوسط المحيط به . وهذا النوع من المقاومة يظهر فى حركة السفن كما يظهر فى حركة المقذوفات فى الهواء بسرع تزيد على سرعة الصوت .

وبينما تختلف المصادر المختلفة لهذه المقاومات المعتدة فى طبيعتها إلا أنه يمكن القول أنها تشترك فى خاصية واحدة وهى أنها تمثل صورا مختلفة لانتقال الطاقة من الجسم المتحرك إلى الوسط المحيط به حيث تتحول إلى حرارة لذلك تعرف المقاومات بأنها قوى مبددة .

بند ٨٢ — قانون المقاومة : محصلة المقاومات على جسم دورانى يسير فى اتجاه محور تماثله تكون منطبقة على اتجاه الحركة ومضادة له .

أما مقدار محصلة المقاومات فيتوقف على بضعة عوامل يتعلق بعضها بخواص الجسم والبعض بخواص الوسط ونجملها فيما يلى :

١ — شكل الجسم وحجمه وبخاصة مساحة مقطع الجسم المتعامد على اتجاه الحركة إذ المعروف أن القذائف المدببة الطويلة أيسر حركة فى الهواء من القذائف الكروية مثلا .

٢ — درجة خشونة السطح فالأسطح الخشنة تزيد المقاومة لحركتها عن الأسطح الملساء .

٣ — سرعة الجسم : تزداد المقاومة بزيادة سرعة الجسم .

٤ — خواص الوسط المقاوم من كثافة ولزوجة وقابلية الانضغاط .

وفى حالة جسم معين يتحرك فى وسط معين تثبت هذه العوامل جميعاً ما عدا سرعة الجسم v فقط وتعرف العلاقة بين R , v بقانون المقاومة ويمكن

وضعه فى الصورة الآتية بوجه عام

$$R = - k v^n \qquad \cdots \cdots \cdots (19)$$

وفيها k معامل ثابت يتوقف على خواص الجسم والوسط كما بينا ، n أس يختلف مقداره بمدى اختلاف v ويمكن تقسيم هذا إلى ما يأتى :

١ ـ المقاومة ثابتة (n = 0) :

فى كثير من الأحيان حيث يغلب تأثير المقاومة الإحتكاكية بين أجسام صلبة جافة تنزلق على بعضها البعض تكون الصورة المناسبة لقانون المقاومة هى قانون « كولومب » للاحتكاك الجاف :

$$R = - \mu N = const \qquad \cdots \cdots \cdots (19-a)$$

٢ ـ المقاومة مناسبة للسرعة (n = 1) :

إذا فصل بين السطحين المنزلقين بهلام رقيق من مادة تشحيم وكانت السرعات ليست جد كبيرة وإن مقاومة اللزوجة هى المسيطرة وتؤكد النتائج النظرية والعملية أن المقاومة تتناسب مع السرعة

$$R = - kv \qquad \cdots \cdots \cdots (19-b)$$

وهذا القانون ينطبق أيضاً على حركة الجسيمات الكروية الصغيرة جدا فى وسط مقاوم مثل الماء أو الهواء كحركة رسوب حبيبات الطمى فى خزان مياه أو ذرات التراب فى الجو . فاذا كان d قطر الكرة ، μ لزوجة الوسط فان المعادلة (19 b) تأخذ الصورة الآتية :

$$R = - 3 \pi \mu d v \quad \cdots \cdots \cdots (19-b')$$

وهى المعروفة بقانون « ستوكس » وهذا القانون صحيح لأعداد « رينولدز » التى تقل عن واحد صحيح (عدد رينولدز عدد لابعدى $= \frac{\rho dv}{\mu}$) حيث ρ كثافة الوسط والحركة فى هذه الحالة بطيئة جدا .

٣ — المقاومة مناسبة لمربع السرعة $(n = 2)$:

للسرع العملية للأجسام حتى ٢٥٠ مترا فى الثانية (٨٠٠ قدم فى الثانية تقريبا) أثبتت أبحاث ديناميكا الموائع أن المقاومة تتناسب مع مربع السرعة

$$R = - k v^2 \qquad \cdots \cdots \quad (19 - c)$$

يسرى هذا القانون على الأجسام القصيرة غير الإنسيابية حيث تسيطر مقاومة المخور كما يسرى بدرجة طيبة من الدقة على الأجسام الطولية الخشنة جدا مثل القاطرة أو القذيفة ذات المقدمة غير الإنسيابية ويوضع هذا القانون عادة فى علم ديناميكا الموائع على الصورة

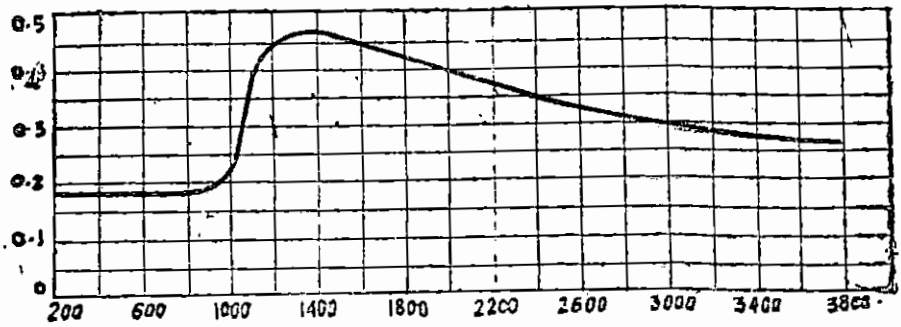
$$R = - C_D \tfrac{1}{2} \rho A v^2 \qquad \cdots \cdots \quad (19 - c')$$

حيث ρ كثافة الوسط المائع ، A مساحة المقطع المتعرض للجسم عموديا على اتجاه الحركة ، C_D معامل المقاومة (drag coefficient) وهو ثابت للسرعات تحت الصوتية حتى ٢٥٠ متر فى الثانية كما تتغير سرعة الصوت فى الهواء $c = ٣٣٢$ مترا فى الثانية $= ١٠٧٠$ قدم فى الثانية) .

٤ — المقاومة للسرع فوق الصوتية :

للسرع المقتربة من سرعة الصوت يتعقد القانون نوعا ما وتتزايد المقاومة بصورة عامة حيث تسيطر المقاومة الموجية ويمكن تمثيل معامل المقاومة C_D فى المعادلة (c' — 19) كدالة فى السرعة ويمثل شكل (٧٢) منحنيا نموذجيا لقذيفة

مدفع وذلك للعلاقة بين معامل المقاومة C فى المعادلة (c'—19) والسرعة v.
عندما ننتقل من السرع تحت الصوتية إلى السرع فوق الصوتية نلاحظ إرتفاعا ملحوظا فى معامل المقاومة C الذى يؤول ثانية إلى قيمة ثابتة للسرع الكبيرة



شكل (٧٢)

جدا . وعلى هذا فمقاومة الوسط للأجسام المتحركة بسرعة الصوت أو بسرع قريبة منها كبيرة جدا وتعرف هذه الظاهرة فى علم ديناميكا الطيران بالحاجز الصوتى (sound barrier) إذ يصعب على الطائرات ـ إلا المجهز منها تجهيزا خاصا ـ إجتياز الحاجز الصوتى.

والقانون المناسب لحالات الحركة فى وسط مقاوم هو قانون نيوتن الأساسى للحركة إذ أن قانون الطاقة لا يمكن إستخدامه لإستحالة إيجاد شغل قوى المقاومة لأنها دوال فى السرعة المتغيرة وليست دوال فى الموضع .

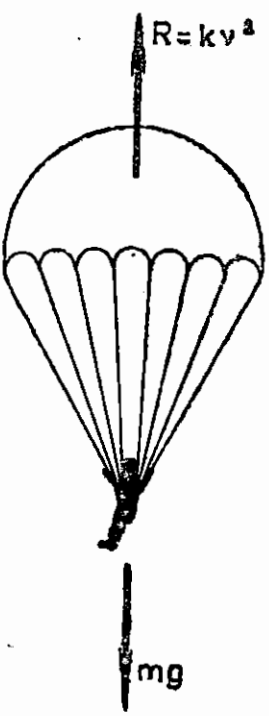
بند ٨٣ ـ حركة فى خط مستقيم متأثرة بمقاومة متناسبة مع مربع السرعة ـ هبوط الجنود بالمظلات :

عندما يقفز الجندى من الطائرة يكون مكتسبا سرعتها وهو لا يفتح المظلة فى المرحلة الأولى من رحلته فى الجو مما يجعل حركته فى تلك المرحلة كحركة

القذيفة المنطلقة بسرعة تقذف مساوية لسرعة الطائرة فيتخذ مسارا شكله قطع مكافىء على وجه التقريب وسرعان ما تتلاشى المركبة الأفقية لسرعته أو تكاد بفعل مقاومة الهواء أما المركبة الرأسية لسرعته فتى ازدياد بفعل الجاذبية وعندما يبلغ الجندى مسافة معينة من سطح الأرض يفتح المظلة مبتدئا مرحلة جديدة من الرحلة تأخذ فيها مقاومة الهواء فى العمل رأسيا إلى أعلى أى ضد حركته وسنفرض أن حركة الجندى فى هذه المرحلة رأسية وستكون تحت تأثير قوتين: وزن الجندى والمظلة رأسيا إلى أسفل ومقاومة الهواء على المظلة رأسيا إلى أعلى كما فى شكل (٧٣) .

باستخدام مركبة قانون نيوتن الأساسى للحركة فى الاتجاه الرأسى نحصل على:

$$m g - k v^2 = mv \frac{dv}{dy} \quad \cdots\cdots (20)$$



شكل (٧٣)

وذلك باعتبار المحور y متجها إلى أسفل وبفصل متغيرى المعادلة (20) ومكاملة طرفيها نحصل على :

$$\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{g - k' v^a} = \int_{0}^{y} dy \quad \cdots (21)$$

وفيها ($k' = \frac{k}{m}$) وأن المرحلة الثانية من هبوط الجندى بدأت بسرعة v_0 وهى المكتسبة فى نهاية المرحلة الأولى عندما كانت المظلة مقفولة . يعطى تكامل طرفى المعادلة (21) وتعويض نهايتى التكامل ما يأتى :

$$\log \left(\frac{g - k' v^2}{g - k' v_0^2} \right) = -2k' y$$

$$\left(\frac{g - k' v^2}{g - k' v_0^2} \right) = e^{-2k' y}$$

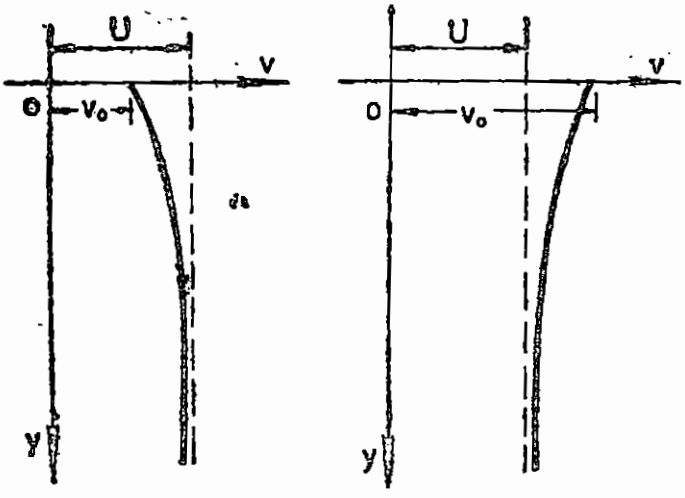
والطرف الأيمن لهذه المعادلة يقترب من الصفر باقتراب y من اللانهاية وعليه تبلغ السرعة v بعد سقوط كبير المقدار الآتى :

$$U = \sqrt{\frac{g}{k'}} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \qquad \ldots\ \ldots\ (22)$$

وتعرف هذه السرعة «بالسرعة النهائية» أو «السرعة الانزانية» إذ لو سار الجسيم بها لاتزنت قوة وزنه مع مقاومة الهواء المضادة له . وشكل (٧٤) يمثل سرعة الهبوط v مع السقوط y فى حالة ما إذا كانت السرعة الابتدائية v_0 أكبر أو أصغر من السرعة الانزانية U وفى الحالات العملية تقترب سرعة الجسم الهابط سريعا من سرعته الانزانية بحيث يمكن القول أن الجسم يصل الأرض بهذه السرعة الانزانية على وجه التقريب .

وللحصول على السرعة v بدلالة الزمن نعوض العجلة فى المعادلة (20) بصورتها ($\frac{dv}{dt}$) ونفصل المتغيرين وتكامل الطرفين فنحصل على

$$\frac{dv}{dt} = g - k' v^2$$



شكل (٢٤)

$$\therefore \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g - k' v^2} = \int_0^t dt$$

وبإجراء التكامل وتعويض نهايتيه نحصل على :

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t + \tanh^{-1} \sqrt{\frac{k}{mg}} v_0 \right) \cdots (23)$$

وهى تعطى v بدلالة الزمن t ويلاحظ أنه إذا اقتربت t من اللانهاية اقترب المعامل (tanh) من الواحد الصحيح واقتربت معها v من نهايتها العظمى

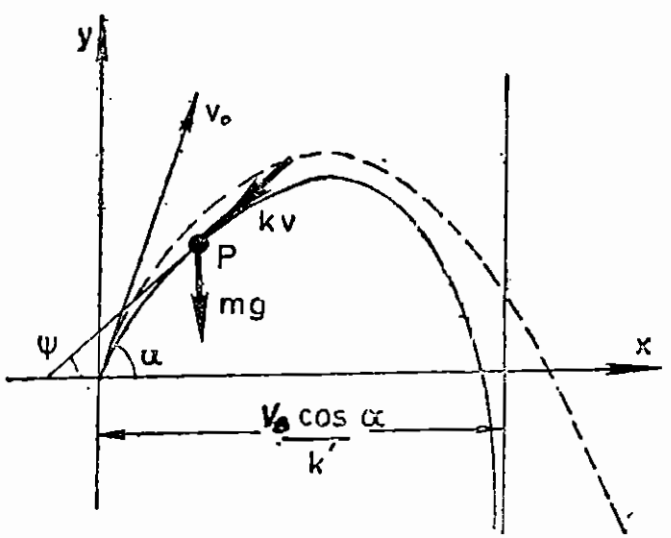
$$U = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

كما سبق إيجاده بالمعادلة (22) .

بند ٨٤ — المقذوفات المتأثرة بمقاومة تتناسب مع السرعة :

عالجنا فى البند ٨٠ المقذوفات غير المتأثرة بمقاومة كخطوة أولى لحل مسألة المقذوفات بوجه عام وسنعالج فى هذا الباب أثر المقاومات الخفيفة المتناسبة مع السرعة فقط وذلك لإلقاء بعض الضوء على أثر المقاومات فى حركة المقذوفات .

ويوضح شكل (٧٥) القوى المؤثرة على القذيفة فى أى موضع P وهى وزن الجسم mg رأسى إلى أسفل ومقاومة الهواء kv مماسة للمسار وفى اتجاه مضاد للحركة .



شكل (٧٥)

باستخدام قانون نيوتن الأساسى للحركة محللا فى الاتجاهين الأفقى والرأسى نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kv\cos\psi = -k\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -kv\sin\psi - mg = -k\dot{y} - mg \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ \ldots \quad (24)$$

وبقسمة طرفى المعادلتين على m نحصل على المعادلتين التفاضليتين لحركة القذيفة فى المستوى الرأسى :

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -k'\dot{x} \\ \ddot{y} &= -k'\dot{y} - g \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ \ldots \quad (25)$$

بتكامل هاتين المعادلتين بالنسبة للزمن نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -k'x + A \\ \dot{y} &= -k'y - gt + B \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ \ldots \quad (26)$$

ويتعين ثابتا التكامل A , B بتعويض مركبتى السرعة الابتدائية فى المعادلتين وعليه نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -k'x + v_0\cos\alpha \\ \dot{y} &= -k'y - gt + v_0\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ \ldots \quad (27)$$

والمعادلتان (27) يمكن تكاملها بالضرب فى المعامل $(e^{k't})$ وعليه :

$$\left.\begin{aligned} (\dot{x} + k'x)\,e^{k't} &= v_0\cos\alpha\, e^{k't} \\ (\dot{y} + k'y)\,e^{k't} &= v_0\sin\alpha\, e^{k't} - g\,t\,e^{k't} \end{aligned}\right\}$$

أى أن

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(xe^{k't}\right) &= v_0 \cos\alpha \cdot e^{k't}\\ \frac{d}{dt}\left(ye^{k't}\right) &= v_0 \sin\alpha \cdot e^{k't} - g\,t\,e^{k't}\end{aligned}\right\}$$

وبتكامل طرفى المعادلتين السابقتين وإستعمال التكامل بالتجزىء لمكاملة الحد الأخير من المعادلة الثانية نحصل على :

$$\left.\begin{aligned}xe^{k't} &= \frac{v_0 \cos\alpha}{k'} \cdot e^{k't} + C\\ ye^{k't} &= \frac{v_0 \sin\alpha}{k'} e^{k't} - \frac{gt}{k'} e^{k't} + \frac{g}{k'^2} e^{k't} + D\end{aligned}\right\}$$

وبإيجاد ثابتى التكامل C , D بتعويض الموضع الابتـــدائى فى المعادلتين السابقتين نحصل بعد شىء من الاختزال على :

$$\left.\begin{aligned}x &= \frac{v_0 \cos\alpha}{k'}\left(1 - e^{-k't}\right)\\ y &= \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{k'}\right)\left(1 - e^{-k't}\right) - \frac{g}{k'}\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

والمعادلتان (28) هما معادلتا المسار البارامتريتان وبحذف t بينهما نحصل على المعادلة الكرتيزية للمسار .

ومن أولى المعادلتين (28) يتضح أنه باقتراب t من اللانهاية تقترب x من حد أعلى قيمته $\left(\frac{v_0 \cos\alpha}{k'}\right)$ أى أنه مسار القـــذيفة سيقترب شيئاً فشيئاً من خط تقربى رأسى كالمبين بشكل (٧٥) وذلك على خلاف المقذوف غير المعرض لمقاومة (بند ٣٠) والذى وجـــدنا أن مساره قطع مكافىء يتزايد

إحداثية الافقى x تزايدا منتظما غير محدود بحد أعلى كما فى حالة المقذوف المعرض لمقاومة ومساره موضح بمنحنى مجزأ بشكل (٧٥) المقارنة بمسار المقـــذوف المعرض لمقاومة.

ويلاحظ أيضا فى حالتنا هذه أن مركبة سرعة المقذوف فى الاتجاه الافقى (أولى المعادلتين (27)) تتناقص بزيادة x وقد رأينا أنها ثابتة فى حالة المقذوف غير المعرض لمقاومة (أولى المعادلتين (2)) .

بند ٨٥ ـ المقذوفات الثائرة بمقاومة متناسبة مع مربع السرعة :

تتعرض المقذوفات فى مدى السرع العملية لمقاومة تتناسب مع مربع السرعة غير أن هذه الحالة ليست قابلة للحل فى الصور الكرتيزية ولذا سنستخدم الطريقة الذاتية (Intrinsic forms) .

وسنطبق قانون نيوتن الأساسى للحركة محللا فى الاتجاه الافقى ثم فى الاتجاه العمودى على المسار بدلا من المماس والعمودى كما اعتدنا فى مثل هذه الحالات من الاحداثيات الطبيعية .

وبالتحليل فى الاتجاه الأفقى نحصل من شكل (٧٦) على المعادلة الآتية :

$$m v \frac{dv}{ds} \cos\psi + \frac{m v^2}{\rho} \sin\psi = - k v^2 \cos\psi \qquad \cdots (29)$$

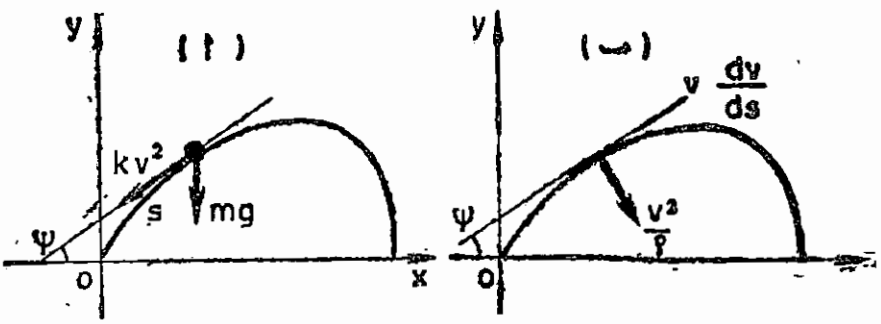
ولما كانت s متزايدة بتناقص ψ فان ($\rho = - \frac{ds}{d\psi}$)

وبالتعويض فى المعادلة (29) وفصل المتغيرات نحصل على :

$$\frac{dv}{v} - \tan\psi \, d\psi = - k' \, ds \qquad \cdots\cdots (30)$$

وبمكاملة طرفى هذه المعادلة بين الموضع الابتدائى o والموضع العام نحصل على

$$v \cos \psi = v_0 \cos \psi_0 \cdot e^{-k's} \qquad \ldots\ldots (31)$$



شكل (٧٦)

وتبين هذه المعادلة أن المركبة الأفقية لسرعة المقذوف ($v \cos \psi$) تتناقص تناقصا أسيا بزيادة المسافة المقاومة s وهى تقترب من العدم كلما اقتربت s من اللانهاية .

أما التحليل فى الاتجاه العمودى على المسار فيعطينا شكل (٧٦) ما يأتى :

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cos \psi \qquad \ldots\ldots (32)$$

وبالتعويض من المعادلة (31) نحصل على :

$$\frac{-v_0^2 \cos \psi_0 \cdot e^{-2k's}}{\cos^2 \psi} \frac{d\psi}{ds} = g \cos \psi$$

وبفصل المتغيرين ومكاملة الطرفين نحصل على :

$$\int e^{2k's}\,ds = -\frac{v_0^2\cos^2\psi_0}{g}\int \sec^3\psi\,d\psi$$

$$\frac{-ge^{2k's}}{k'v_0^2\cos\psi_0} = \sec\psi.\tan\psi + \log(\sec\psi+\tan\psi) + C \quad \cdots (33)$$

وثابت التكامل C يعينه الموضع الابتدائى ($s = 0 , \psi = \psi_0$) والمعادلة (33) عبارة عن المعادلة الذاتية لمسار القذيفة و يصعب الحصول منها على نتائج مفيدة كالمدى أو زمن التحليق مثلا . ولذا يلجأ المختصون بمسائل المقذوف إلى الطرق الأولية لتشكيل مسارات القذائف وتحديد مداها إلى غير ذلك من الأمور المتعلقة بحركة القذائف . فيأخذ فترة زمنية قصيرة جدا ولتكن Δt وبمعلومية السرعة الابتدائية والعجلة الابتدائية التى هى دالة فى السرعة الابتدائية يمكن حساب السرعة فالموضع فى نهاية الفترة المفروضة Δt وبتكرار هذه العملية يمكن الحصول على السرع والمواضع فى نهاية الفترات $2\Delta t , 3\Delta t , 4\Delta t , \ldots \ldots \ldots$ وبالاستمرار فى هذه العملية حتى يلتقى مسار القذيفة بالأرض أو بهدفه يمكن الحصول على بعض الكميات المتعلقة بحركة القذائف لا كلها إذ أن هذه الطريقة تعتمد على معلومية سرعة القذف واتجاهه وقانون المقاومة . أما مسألة تعيين زاوية القذف لإصابة هدف معين فغير قابلة للحل بهذه الطريقة . وللموضوع دراسات مستفيضة فى الصناعات الحربية ليس المجال مقسما هنا للتعرض لكل نواحيها .

بند ٨٦ ـ تقريب « برنولى » للمقذوفات المتأثرة بمقاومة مناسبة لمربع السرعة :

فى حالة مسار مفرطح قريب من الاستقامة كالذى تتخذه رصاصة بندقية يمكن الوصول إلى حل على درجة طيبة من التقريب بإحلال x محل s فى المعادلات التفاضلية فالمعادلة (31) فى البند السابق الناتجة من تطبيق قانون

نيوتن فى الاتجاه الأفقى تؤول إلى

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \, e^{-k'x} \qquad \ldots\ldots\ (34)$$

ثم بالتعويض فى المعادلة (32) بالبند السابق الناتجة عن التحليل عموديا على المسار نحصل على

$$\frac{v^2}{\rho} = g \cos \psi \qquad \ldots\ldots\ (35)$$

حيث ρ نصف قطر التقوس وتعطيه العلاقة الرياضية

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+\tan^2\psi]^{3/2}}$$

$$= \frac{d^2y/dx^2}{\sec^3\psi} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \cos^3 \psi$$

وبالتعويض فى المعادلة (35) ينتج أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v^2 \cos^2 \psi} = -\frac{g}{\dot{x}^2} \qquad \ldots\ldots\ (36)$$

والاشارة السالبة راجعة لأن المنحنى مقلوب إلى أسفل. بالتعويض فى المعادلة (36) نحصل على

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g e^{2k'x}}{\dot{x}_0^2} \qquad \ldots\ldots\ (37)$$

وهذه المعادلة يمكن مكاملتها مرتين بالنسبة إلى x بدون صعوبة . وتعطى خطوة التكامل الأولى ما يأتى :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g e^{2k'x}}{2k'\dot{x}_0^2} + C_1$$

وبتعيين ثابت التكامل C_1 من أحوال البداية ($x = 0 , \frac{dy}{dx} = \tan \alpha$)

$$\therefore \quad C_1 = \tan \alpha + \frac{g}{2k' \dot{x}_0^2}$$

وبإجراء ثانى عملية تكامل نحصل على

$$y = - \frac{g e^{2k'x}}{4 k'^2 \dot{x}_0^2} + C_1 x + C_2$$

وتتعين C_2 بتعويض الوضع الابتدائى

$$C_2 = \frac{g}{4 k'^2 \dot{x}_0^2}$$

فتصير معادلة المسار

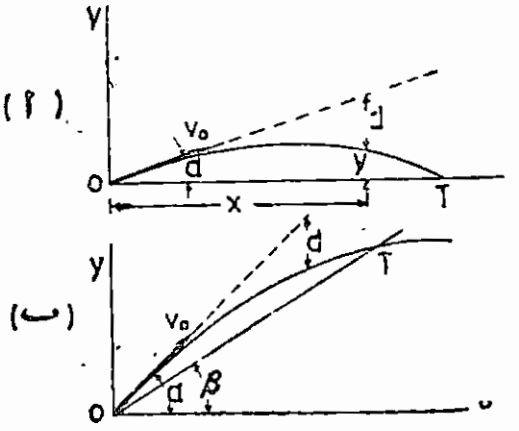
$$y = \frac{g}{4 k'^2 \dot{x}_0^2} \left(1 - e^{2k'x} \right) + \left(\tan \alpha + \frac{g}{2k' \dot{x}_0^2} \right) x$$

ويمكن كتابتها على الصورة

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{e^z - z - 1}{\frac{1}{2} z^2} \right) \quad \cdots (38)$$

حيث $z = 2 k' x$.

بمقارنة المعادلة (38) للمقذوف المتأثر بمقاومة مناسبة لمربع السرعة بالمعادلة (4) للمقذوف الغير معرض لمقاومة نجد أن معادلة المسار التقريبية (38) عبارة عن قطع مكافىء معدل ويرجع الاختلاف بين المعادلتين إلى ظهور الكمية .



شكل (٧٧)

$$F(z) = \frac{z_{e-z-1}}{\frac{1}{2}z^2}$$

ومفكوكها بالطرق الرياضية يعطى

$$F(z) = 1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3\times4} + \frac{z^3}{5\times4\times3} + \cdots\cdots$$

ويلاحظ فى شكل (٧٧ — أ) أن الحد الأخير فى المعادلة (38) يمثل هبوط القذيفة d عن مماسها الابتدائى وحساب هذا الهبـــوط غاية فى الأهمية لعملية التصويب وعلى ذلك يمكن استعمال الصيغة

$$d = \frac{gV^2}{2\,v_0^3\cos^2\alpha}\,F(z) \qquad \cdots\cdots (39)$$

لحساب هذه النكية الهامة .

وإن كنا قد فرضنا فى الوصول إلى المعادلتين (38) ، (39) أن المسار مفرطح إلا أنه يمكن استعمالها أيضا للحالة المبينة بشكل (٧٧ — ب) بأخذ

$$z = 2\,k'x\sec\beta$$

أمثلة محلولة :

(١) أطلقت قذيفة إلى أعلى بسرعة ابتدائية V . أوجد السرعة التى تعود بها إلى الأرض إذا علمت أن مقاومة الهواء تتناسب مع مربع سرعة القذيفة $(R = kv^2)$.

الحـــل

بتطبيق قانون نيوتن الأساسى للحركة على القذيفـــة فى حالة صعودها نحصل على :

$$-mg - kv^2 = m\frac{v\,dv}{dy}$$

بفصل المتغيرين وتكامل الطرفين نحصل على :

$$\int_V^0 \frac{v\,dv}{g + k'v^2} = -\int_0^H dy$$

وفيها H هو أقصى ارتفاع للقذيفة

$$\therefore \log\left(\frac{g + k'V^2}{g}\right) = 2k'H \qquad \cdots\cdots \text{(a)}$$

بتطبيق قانون نيوتن على القذيفة فى حالة الهبوط نحصل على :

$$mg - kv^2 = mv\frac{dv}{dy}$$

وبفصل المتغيرين وتكامل الطرفين نحصل على :

$$\int_0^{V'} \frac{v\,dv}{g - k' v^2} = \int_0^{H} dy$$

وفيها V' هى سرعة وصول القذيفة إلى الأرض ثانية .

$$\therefore \quad \log \frac{g - k' V'^2}{g} = -2kH \qquad \ldots\ \ldots\ (b)$$

وبجمع المعادلتين (a) ، (b) نحصل على :

$$\log \left(1 + \frac{k'}{g} V^2\right)\left(1 - \frac{k'}{g} V'^2\right) = 0$$

$$\therefore 1 + \frac{k'}{g} V^2 - \frac{k'}{g} V'^2 - \frac{k'^2}{g^2} V^2 V'^2 = 1$$

وعليه فسرعة العودة V' تعطيها العلاقة :

$$\frac{1}{V'^2} = \frac{1}{V^2} + \frac{k'}{g}$$

وتبعاً لهذه العلاقة تقل سرعة العودة V' عن سرعة القذف الأولى V نظراً لأن الحركة فى وسط مقاوم تفقد الجسم جانبا من طاقة حركته .

(٢) تتحرك قذيفة متأثرة بمقاومة مناسبة للسرعة أثبت أن لعجلة القذيفة اتجاها ثابتا دائما مقدارها تعطيه العلاقة ($f = f_0 e^{-K't}$) وفيها f_0 هى العجلة الابتدائية أوجد هودوجراف الحركة .

الحـــل

توصلنا فى البند (٨٤) عند معالجة المقذوفات المعرضة لمقاومة مناسبة للسرعة

إلى ايجاد موضع المقذوف (x , y) بدلالة الزمن t (المعادلتان (28)) .

بمفاضلة هاتين المعادلتين مرتين بالنسبة للزمن نحصل على مركبتى العجلة بدلالة الزمن :

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= k' v_0 \cos\alpha\, e^{-k't} \\ \ddot{y} &= (k' v_0 \sin\alpha + g)\, e^{-k't} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ \ldots\ (a)$$

ومنها نحصل على ميل العجلة المحصلة بالكمية الآتية :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{k' v_0 \sin\alpha + g}{k' v_0 \cos\alpha}\right) = \text{const} ;$$

ولما كانت العجلة تمس دائما منحنى الهودجراف كان هذا المنحنى فى حالتنا هذه خطا مستقيما وأما مقدار العجلة المحصلة فمن المعادلتين (a) نحصل على

$$f = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = [k'^2 v_0^2 \cos^2\alpha + (k' v_0 \sin\alpha + g)^2]^{\frac{1}{2}}\, e^{-k't}$$
$$= f_0\, e^{-k't}$$

حيث القوس الكبير يمثل مقدار العجلة الابتدائية .

خلاصة الباب

١) تعتبر حركة المقذوفات تطبيقا على قانون نيوتن وعلى قواعد التكامل ولذا نرى عدم استظهار أى من نتائج هذا الباب بل استنتاجها من المبادىء الأولية

على الوجه المبين فى كل حالة مع العناية بتعويض أحوال النهاية من مواضع وسرع. ويعتمد حل مسائل المقذوفات الغير معرضة لمقاومة على المعادلات (1) ، (2) ، (3) ، (4) ، (13)

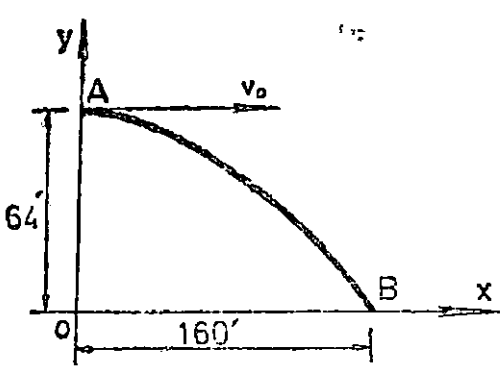
٢) يمكن فى حالة المقذوفات غير المعرضة لمقاومة استخدام قانون الطاقة لايجاد السرعة فى أى موضع من المسار .

٣) يتعذر فى حالة الحركة فى وسط مقاوم استخدام قانون الطاقة لتعذر حساب شغل المقاومات إذ تفقد الأجسام جانبا من طاقتها عند الحركة فى وسط مقاوم كما رأينا فى المثال (١) . ويجب فى هذه الحالة استخدام قانون نيوتن الأساسى للحركة ومكاملة المعادلات الناتجة من تطبيقه للحصول على المطلوب .

تمرينات

المقذوفات غير المعرضة لمقاومة

(١) أطلقت قذيفة أفقيا من نقطة A بسرعة v_0 فأصابت هدفا B (شكل ٧٨) ولو أطلقت القذيفة من النقطة O بنفس سرعة القذف v_0 لتصيب الهدف B فأوجد زوايا القذف الممكنة



شكل (٧٨)

[عجلة الجاذبية = ٣٢ قدما/ث^2] [إعدادى هـ . ١ . مايو سنة ١٩٥١]

[الجواب : السرعة الابتدائية = ٨٠ قدم/ث وظل إتجاهها = $\frac{1}{2}$ أ ، ٢]

(٢) أوجد سرعة قذف قذيفة مقدارا وإتجاها إذا علمت أن مداها على المستوى الأفقى المار بنقطة القذف كان ١٧ قدما . وأن أقصى إرتفاع لها عن هذا المستوى كان أيضا ١٧ قدما . أوجد كذلك زمن التحليق . أوجد زاوية القذف الأخرى التى تعطى نفس المدى .

أوجد زاوية القذف التى تعطى أكبر مدى لنفس القذيفة على مستوى مائل ظل زاوية ميله على الأفق = $\frac{3}{4}$ وأوجد هذا المدى .

[اعدادى هـ . ١ . يونيه سنة ١٩٥٠]

الجواب : سرعة القذف = ٢٤ قدما/ث وظل ميلها = ٠,٤ زمن التحليق = $\frac{1}{2}\sqrt{17}$ ثانية والزاوية الأخرى ظلها = $\frac{1}{4}$. ظل زاوية القذف لأكبر مدى = ٢ أكبر مدى = ٢٢٥٥٨ قدم

٣) أوجد أقل سرعة يقذف بها مقذوف من سطح الأرض ليجتاز حائطا رأسيا ارتفاعه ٦ أقدام ويبعد ٨ أقدام أفقيا عن نقطة القذف .

أين ومتى يصل المقذوف الأرض بعد إجتيازه الحائط ؟

الجواب : السرعة الابتدائية = ٦ $\sqrt{}$. قدما مدى القذيفة ٨,٢ وزمن تحليقها $\sqrt{\frac{2}{5}}$ ثانية

٤) قذيفة مطلوقة من نقطة الأصل O وجد أنها تمر بالنقطتين (2 , 8) ، (0 , 12) والابعاد بالقدم . أوجد سرعة القذف مقدارا وإتجاها وأوجد الزمن الذى تمر فيه القذيفة بكل من الموضعين المذكورين وسرعة القذيفة فى كل منهـــا . [إعدادى هـ ١ . سبتمبر سنة ١٩٥٢]

الجواب : السرعة الابتدائية ٢٠ قدما / ثانية . وظل ميلها $\frac{\pi}{4}$
الازمنة المطلوبة $\frac{1}{2}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ثانية السرع المطلوبة $\sqrt{٢٧٢}$ ، ٢٠ قدما/الثانية

٥) قذيفة مطلوقة من نقطة الأصل O وجد أنها تمر بالنقطتين (12′ , 12′) (30′ , 12′) أوجد سرعة القذف مقدارا واتجاها ، ثم أوجد زمن التحليق والمدى على المستوى الافقى .

[إعدادى هـ ١ سبتمبر سنة ١٩٥١]

الجواب : السرعة الابتدائية ٤٠ قدما/ث وظل
ميلها $\frac{\pi}{4}$ الزمن ٢ قدما . والمدى ٤٨ قدماً

٦) أطلق مقذوف من قمة جبل إرتفاعه ٣٢٠ قدما فأصاب بعد ١٠ ثوان هدفاً أرضياً يبعد عن موضع القذف مسافة ٩٦٠ قدماً . أوجد سرعة القذف مقداراً واتجاهاً .

ما هى زاوية القـــذف التى تعطى أكبر مدى على المستوى الأفقى لنفس المقذوف . [اعدادى هـ ١ سبتمبر سنة ١٩٤٨]

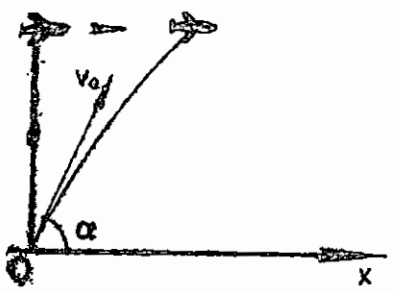
الجواب : السرعة الابتدائية ١٦٠ قدما / ث وظل
ميلها $\frac{\pi}{4}$ ظل زاوية القذف المطلوب $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

(٧) تطير طائرة أفقيا على ارتفاع ١٦٠٠ متر بسرعة منتظمة مقـــدارها ٢٦٠ كم / ساعة وفى لحظة ما مرت الطائرة فوق مدفع مضاد يضرب باتجاه

فأصابها بعد ٨ ثوان من لحظة مرورها فوقه أوجد سرعة وزاوية قذف المدفع بأى سرعة تصيب القذيفة الطائرة (اعتبر عجلة الجاذبة ١٠ متر / ث٢) .

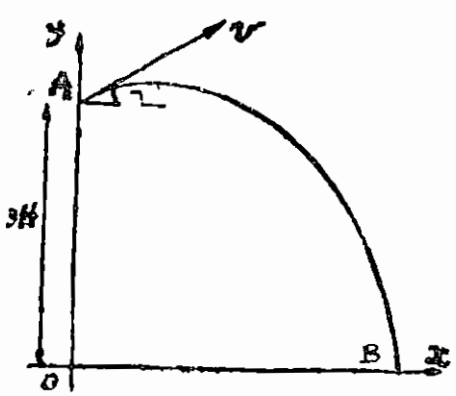
(اعدادى ٣ ١٠ يونيه سنة ١٩٥٤)

الجواب : السرعة الابتدائية ٢٦٠ مترا / ث وظل ميلها $\frac{٤}{٣}$
سرعة اصابتها للطائرة ١٨٩ مترا / ث



شكل (٧٩)

(٨) مدفع سرعة قذفه ٢٠٠ متر/ث يطلق قذائفه على طائرة تطير طيرانا أفقيا على ارتفاع ٩٠٠ مترا أوجد أطول مسافة أفقية تصاب بعدها الطائرة وزاوية القذف المناظرة لذلك . ما الزمن المنقضى بين لحظة مرور الطائرة فوق المدفع ولحظة إصابتها .



شكل (٨٠)

٩) أطلقت قذيفة بسرعة v من قمة جبل A ارتفاعه 3H حيث ($H = \frac{v^2}{2g}$) أوجد أقصى مدى القذيفة على الأفقى OB وزاوية القذف α فى هذه الحالة.

إذ أطلق مقذوف من B ليصيب A فأوجد أقل سرعة قذف تلزم لذلك وزاوية القذف أثبت أن مسار القذيفة الثانية مطابق لمسار القذيفة الأولى وأوجد أقصى ارتفاع تصله القذيفتان .

[اعدادى هـ.١. مايو سنة ١٩٥٨]

الجواب : أكبر مدى $4H$ وظل زاوية الميل $\frac{1}{2}$. أقل سرعة $2\sqrt{2gH}$. وظل زاوية الميل - ٢ أقصى ارتفاع $\frac{16}{5}H$ فوق B

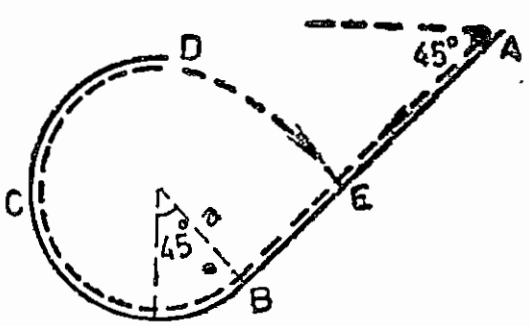
١٠) جسيم كتلته m ينزلق من سكون تحت تأثير وزنه على مستقيم أملس AB ثم طرق دائرى أملس B C D نصف قطره a كما فى شكل (٨١) وعند أعلى نقطة D يترك الجسيم الدائرة ويكمل حركته كمقذوف حر ليصده AB عموديا فى النقطة E . أوجد ارتفاع A عن D وأكبر وأقل ضغط للجسيم على الطوق .

[اعدادى هـ.١. يونيه ١٩٥٧]

الجواب :

$$h = a\,\frac{(1+\sqrt{2})}{3}$$

$$N_{min} = \frac{m}{3}(2\sqrt{2}-1)\,,\quad N_{max} = \frac{mg}{3}(17+2\sqrt{2})$$

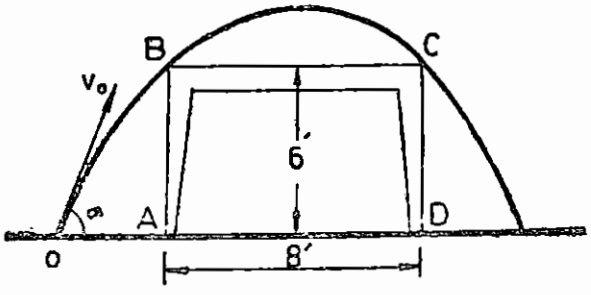


شكل (٨١)

١١) أقصى مدى لقذيفة ما على مستوى يميل ٣٠° مع الأفقى هو ٦٤ قدما إذا كان الضرب إلى أعلى المستوى . أوجد سرعة القذف ومن ثم أوجد أقصى مدى لنفس القذيفة إذا كان الضرب إلى أسفل المستوى نفسه .

أوجد زاوية القذف فى الحالتين (عجلة الجاذبية = ٣٢ قدما / ث٢)

[الجواب : $(\alpha = 60, 150)\ ,\ R_{max} = 64ft\ ,\ v_0 = 32ft/sec$]



شكل (٨٢)

١٢) أوجد سرعة القذف وزاويته لقذيفة تطلق من مستوى الارض عند O لكى تجتاز نضدا بالارتفاع والعرض المبين بشكل (٨٢) مارة بأحرفه : أين ومتى تصل القذيفة الأرض ؟

الجواب : $(t = \sqrt{2}\ sec\ ,\ R = 16\ ft\ ,\ \tan\alpha = 2,\ v_0 = 8\sqrt{10}\ ft/sec$

١٣) أطلقت قذيفة أفقية من قمة جبل فأصابت هدفا يبعد أفقيا مسافة D ورأسيا مسافة H أسفل نقطة القذف . أوجد سرعة القذف وبين أنه يمكن إصابة نفس الهدف بزاوية قذف أخرى وعينها . أوجد النسبة بين زمنى التحليق فى الحالتين . أوجد أقصى ارتفاع تصيبه هذه القذيفة .

الجواب :

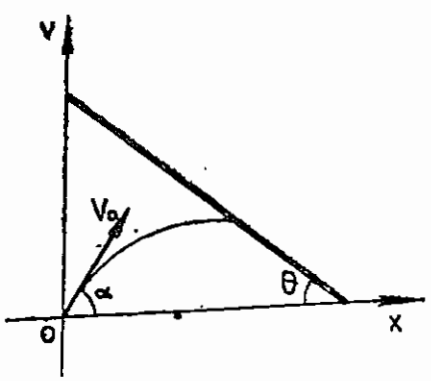
$$\tan \alpha_2 = \frac{D}{H} \ , \ v_0 = D \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

$$y_{max} = \left(\frac{D^4}{4H(D^2+H^2)} \right) \ , \ \frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{D^2+H^2}{H^2}}$$

١٤) أطلقت قذيفة بسرعة ٥٠ قدما / ثانية فأصابت هدفا على المستوى الأفقى المار بنقطة القذف ويبعد عنها ٧٥ قدما . أوجد زوايا القذف الممكنة وأقصى ارتفاع وزمن التحليق لكل حالة .

$$\left(y_1 = \frac{225}{16} \text{ ft} \ , \ y_2 = 25 \text{ ft} \right) \ , \ \left(\tan \alpha_1 = \frac{3}{4} \ , \ \tan \alpha_2 = \frac{4}{3} \right) \ , \ t_1 = \frac{15}{8} \text{ sec} \ , \ t_2 = \frac{5}{2} \text{ sec}$$

١٥) أطلقت قذيفة من نقطة O بسرعة V_0 لتصدم مستوى كالمبين بشكل (٨٣) ، أوجد ميل القذف الذى يجعل القذيفة تصيب المستوى فى أقصر زمن ممكن :



شكل (٨٣)

[الجواب : $\tan \alpha = \cot \theta$]

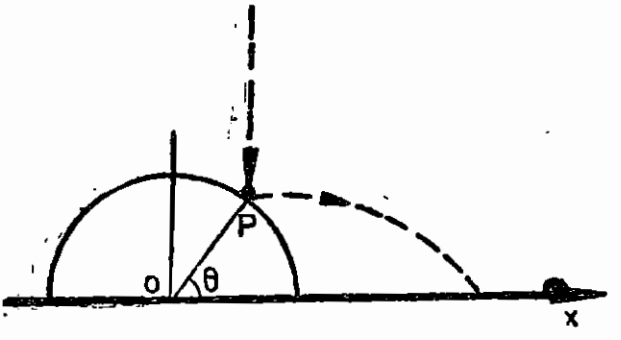
١٩) خيط طوله ٢ قدم ثبت أحد طرفيه O وعلق فى طرفه الآخر جسيم وزنه ٢ باوند ترك الجسيم ليسقط من سكون عندما كان الخيط مشدوداً فى وضع أفقى فاذا علمت أن أقصى شد يتحمله الخيط هو ٣ باوند أوجد ميله

عندما ينقطع وإذا واصل الجسيم بعد ذلك حركته كمقذوف حر أوجد أين ومتى يقع على نضد أفقى ينخفض عن نقطة تعليق الخيط بمقدار قدمين :

[الجواب $\theta = 30$ ، $x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$ ، $t = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$]

١٧) أوجد هودوجراف حركة مقذوف حر سرعة قذفه v_0

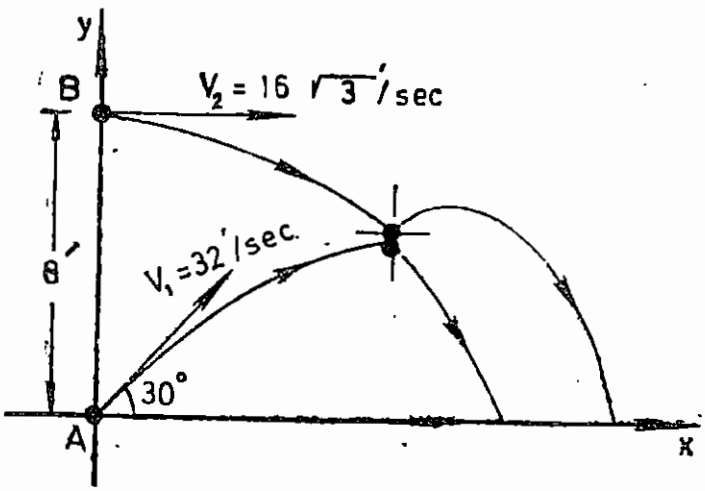
(الجواب : مستقيم رأسى يمر بنهاية المتجه v_0) .



شكل (٨٤)

١٨) كرة صغيرة وزنها ١ كج سقطت من سكون من إرتفاع ٢٠ مترا فصدمت فى P نصف اسطوانة مثبتة ملساء ونصف قطرها ٥٠ سم كما فى شكل (٨٤) أوجد الحركة التالية للاصطدام إذا علمت أن معامل الارتداد $= \frac{1}{2}$ وأن ظل الزاوية θ يساوى $\frac{4}{3}$ ، أين ومتى تصل الأرض؟ أوجد الطاقة المفقودة فى الاصطدام . اعتبر عجلة الجاذبية $= ١٠$ م / ث^2

[الجواب : تصل الأرض على بعد ٤٫٥٤٢ متر من O بعد زمن قدره ٥٥٣ ثانية والطاقة المفقودة ٥٫١٨ كج متر]



شكل (٨٥)

١٩) كرتان صغيرتان متساويتا الكتلة قذفت أحـــداهما من نقطة A وقذفت الأخرى فى نفس اللحظة من B فوقها بالسرع المبينة بشكل (٨٥) أثبت أن الكرتين ستصطدمان فى نقطة ما D أوجد موضع الاصطدام وسرع كل من الكرتين قبل وبعد التصادم وحركتهما التالية له إذ علمت أن التصادم تام المرونة وأن خط المركزين عند التصادم كان رأسيا .

(الجواب : احداثيات $D = (80\sqrt{3}, 4)$. السرع قبل التصادم :

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 16\sqrt{3}\ ,\ \dot{y}_1 = 0\ ,\ \dot{y}_2 = -16$$

السرع بعد التصادم $(\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 16\sqrt{3}\ ,\ \dot{y}_1 = -16\ ,\ \dot{y}_2 = 0)$

٢٠) قذف جسيم كتلته $\frac{1}{2}$ باوند من سطح الأرض بزاوية ظلها ٢ فأصاب نقطة فى حائط رأسى أملس تبعد أفقيـــا ١٦ قدما ورأسيا ١٦ قدما عن نقطة القذف وارتد الجسيم فأصاب الأرض فى نقطة تبعد ٨ أقـدام من نقطة القذف الأولى وكانت الحركة كلها فى مستوى عمودى على الحائط . أوجد سرعة

القذف ومعامل الارتداد ورد الفعل الدفعى للحائط على الجسيم .

(أولى هـ ١٠ يونيه سنة ١٩٤٧)

[الجواب: سرعة القذف ٢٥٫٨ قدم/ث معامل الارتداد $\frac{1}{2}$ رد فعل الحائط $\frac{1}{4}$ باوند ثانية] .

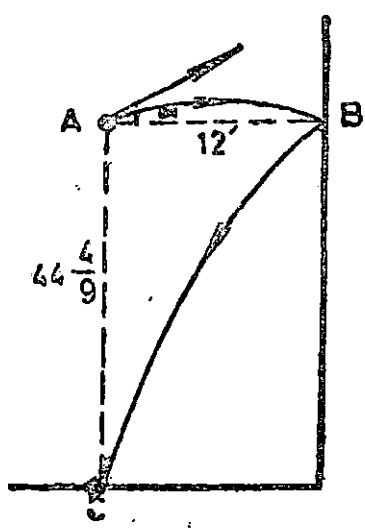
(٢) قذفت كرة صغيرة كتلتها $\frac{1}{2}$ باوند من نقطة تبعد ١٠ أقدام عن حائط رأسى أملس . وكانت المركبة الأفقية لسرعة القذف ١٠ أقدام / ث عموديا على الحائط والمركبة الرأسية لها ٣٦ قدما/ث إلى أعلى . وأصابت الكرة الحائط ثم ارتدت إلى نفس نقطة القذف الأولى . أوجد معامل الارتداد والضغط الدفعى على الحائط .

(أولى هـ ١٠ أكتوبر سنة ١٩٤٦)

[الجواب : معامل الارتداد $\frac{4}{5}$ ، دفع الحائط $\frac{1}{2}$ باوند ثانية] .

٢٢) قذف جسيم من نقطة A بسرعة قدرها ٢٠ قدما/ث تميل زاوية على الأفق ظلها $\frac{3}{4}$ فأصاب حائطا رأسيا فى نقطة B فى نفس المستوى الأفقى المار بالنقطة A وعلى بعد ١٢ قدما منها ثم ارتد عن الحائط مارا بالنقطة C الواقعة على الخط الرأسى المار بالنقطة A وتبعد عنها $44\frac{4}{9}$ قدما (شكل ٨٦) أوجد معامل الارتداد والضغط الدفعى على الحائط عند B وزمن قطع المسار ABC

[إعدادى هـ ١ سنة ١٩٥٩]



شكل (٨٦)

(الجواب : معامل الارتداد $\frac{٣}{٢٢}$. دفع الحائط = 25 m = الزمن = $\frac{٢٥}{٢٢}$ ثانية) .

الحركة فى وسط مقاوم

٢٣) عند تشغيل الفرامل على سيارة وجد أن مجموع المقاومات المؤثرة عليها تساوى ($0.08\ v^2$ + 1000) ثقل باوند لكل طن من وزن السيارة حيث v سرعة السيارة فى أى لحظة بالميل فى الساعة . أثبت أن السيارة تقف بعد ٧٥ ياردة تقريبا إذا بدأ تشغيل الفرامل عندما كانت سرعة السيارة ٥٠ ميلا فى الساعة .

٢٤) تتناسب مقاومة الهواء لحركة رصاصة مع حاصل ضرب مربع قطرها فى مربع سرعتها . ولرصاصة قطرها ٠٫٣ بوصة تسير بسرعة ٢٠٠٠ قدم / ث وجد أن مقاومة الهواء لحركتها تساوى ٤٠ مرة وزن الرصاصة . لرصاصة مساوية للأولى فى الكتلة ولكن قطرها ٠٫٥ بوصة أثبت أن سرعتها تهبط من ٢٠٠٠ قدم/ث إلى ٥٠٠ قدم/ث فى مسافة قدرها ٥٠٠ ياردة تقريبا معتبرا أن مسارها أفقى.

٢٥) مجموع المقاومات لحركة طائرة أثناء جريها على أرض المطار تساوى ($a + bv^2$) وحدات مطلقة لكل وحدة من كتلتها حيث v هى السرعة ، a , b ثابتان ولطائرة معينة وجد أن : ($b = 10^{-3}$ f t /lb sec units) وأنه إذا هبطت الطائرة أرض المطار بسرعة ٥٠ ميلا فى الساعة فانها تقف بعد مسيرة ١٥٠ ياردة . أحسب الثابت a .

(الجواب : $a = 3.68$) .

٢٦) تعبر العلاقة الآتية عن مجموع المقاومات لحركة طائرة $R = av^2 + \frac{b}{v^2}$

وفيها v هى سرعة الطائرة بالنسبة للهواء a ، b ثابتان . أثبت أن القـــدرة المستهلكة فى مقاومة الهواء لها حد أدنى H_0 عندما تكون سرعتها $= V_0$ حيث

$$H_0 = 4\,(ab^3/27)^{\frac{1}{4}} \quad \text{و} \quad V_0^4 = \frac{b}{3a}$$

٢٧) يهبط جندى من طائرة على ارتفاع ٢٥٠٠ قدم من سطح الارض وبعد مرور ١٢ ثانية من ترك الطائرة فتح مظلة تبلغ مقاومة الهواء لها $\frac{m\,v^2}{18}$ باوندال حيث m هى كتلة الجندى والمظلة بالباوند و v سرعة هبوطه فى أى لحظة بالقدم فى الثانية . أوجد سرعة وصوله إلى الارض مهملا مقاومة الهواء فى الجزء من الرحلة الذى لم تفتح فيه المظلة .

[الجواب : ٢٤ قدم/ث تقريبا]

٢٨) أطلقت قذيفة كتلتها m راسيا إلى أعلى بسرعة ابتدائية V وكانت مقاومة الهواء لحركتها $(m\,k\,v^3)$ حيث k ثابت و v سرعة القذيفة فى أى لحظة. أوجد أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة والزمن اللازم لذلك مهملا مربع الكمية $(\frac{kV}{g})$

الجواب : أقصى ارتفاع $(\frac{V^2}{2g} - \frac{k\,V^4}{4\,g^3})$

الزمن $(\frac{V}{g} - \frac{k\,V^3}{3\,g^3})$