# الباب الحادى عشر

# الحركة الاهتزازية

**بند ٨٧ – قوى مناسبة للمسافة – الزنبرك :**

سنعالج فى هذا الباب حركة جسيمات متأثرة بقوة مرنة أى مناسبة لبعد الجسيم من مركز ثابت ومتجهة دائما نحو هذا المركز فهى نوع من الجذب المركزى يتناسب مقداره مع البعد عن مركز الجذب .

وينشأ هذا النوع من القوى من فعل زنبرك أو خيط مرن فإذا أردت أن تحدث استطالة $x$ فى زنبرك زيادة عن طوله الطبيعى $l_0$ لزم أن تشده بقوة $T$ مناسبة لهذه الاستطالة أى أن

$$T = k\,x \qquad \dots \dots (1)$$

ويعرف معامل التناسب $k$ بمعامل شد الزنبرك أو الثابت الزنبركى (Stiffness) وهو عبارة عن الشد اللازم لإحداث وحدة الاستطالات فى الزنبرك وهو يتوقف على الخواص الطبيعية لمادة الزنبرك وعلى طوله الطبيعى وقطر مقطعه وعدد لفاته إلى آخره .

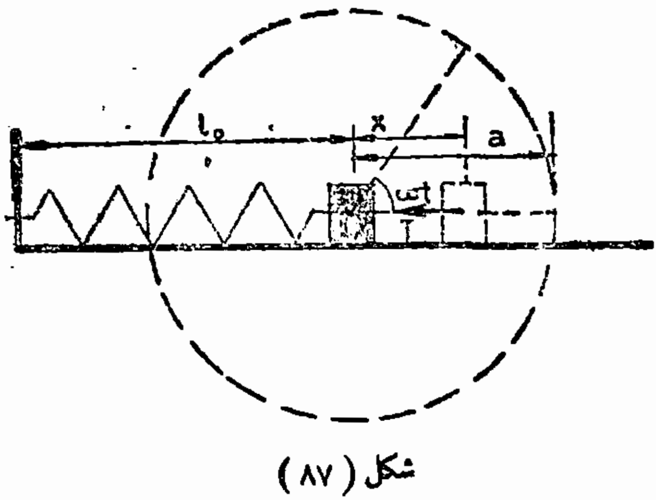
والمعادلة (1) معروفة بقانون هوك وقد جرت العادة فى علم الطبيعة أن يوضع هذا القانون بالصورة

$$T = \frac{\lambda}{l_0}\,x \qquad \dots \dots (2)$$

وفيها $\lambda$ تعرف بمعامل مرونة الزنبرك (Modulus) ، $l_0$ طوله الطبيعي والمعادلة (1) سارية على حالة ضغط الزنبرك كسريانها على حالة شده . وتبعا لقانون الفعل ورد الفعل يؤثر الزنبرك على الجسم المربوط بطرفه بناء على ما تقدم بقوة تتجه نحو نهاية الزنبرك الطبيعية والتي يمكن إعتبارها مركزا للجذب المناسب مقداره للبعد عنها .

وما يسرى على الزنبرك يسرى على الخيط المرن فى حالة الاستطالة فقط أما فى حالة الانضغاط فتختفي قوة الخيط خلافا لحالة الزنبرك وهذا فرق جوهرى بين حالتى الزنبرك والخيط المرن يجب عدم إغفاله عند دراسة الحركة المتأثرة بالخيوط المرنة.

**بند ٨٨ – حركة جسيم مربوط بزنبرك على مستوى أفقى أملس – الحركة التوافقية البسيطة :**




شكل ( ٨٧ )

إذا زحزح الجسم مسافة a إلى يمين النهاية الطبيعية للزنبرك O (شكل ٨٧)

ثم ترك فسيقع تحت تأثير شد الزنبرك المناسب للمسافة a والمتجه نحـــو O .

وبتطبيق قانون نيوتن الأساسى للحركة على الجسيم فى موضع عام له x نحصل على :

$$m\ddot{x} = -T = -kx$$

$$\therefore \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \qquad \dots \dots (3)$$

وهى على الصورة ( $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ) التى عالجنـــاها فى الباب الثالث بند (٢٦) ووجدنا أنها تعطى حركة دورية فى خط مستقيم زمنهـا الدورى ( $\frac{2\pi}{\omega}$ ) وأطلقنا عليها اسم **الحركة التوافقية البسيطة** وقد وجدنا فى الباب الثـــالث أن الحل العام المعادلة التفاضلية (3) يأخذ الصورة .

$$x = A\cos(\omega t + \varepsilon) \qquad \dots \dots (4)$$

وفيها ( $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ) وبتعويض أحوال البداية $(t = 0, x = a, \dot{x} = 0)$ فى المعـــادلة (4) ومشتقتها بالنسبة للزمن نحصـــل على ثابتى التكامل $A, \varepsilon$ $(\varepsilon = 0, A = a)$ وعليه فالحل الكامل للمعادلة (3) هو

$$x = a\cos(\omega t) \qquad \dots \dots (5)$$

وهى تعطى حركة توافقية بسيطة سعتها a وزمنها الدورى $\tau$ تعطيه العلاقة

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \dots \dots (6)$$

وهذه الحركة متى نشأت استمرت دون تغيير فى سعتها أو زمنها كما هو واضح وذلك على فرض إنعدام المقاومات تماما .

ويمكن إيجاد السرعة بدلالة الزمن من مفاضلة المعادلة (5) بالنسبة للزمن

$$v = \dot{x} = -a\,\omega \sin(\omega t) \qquad \dots \dots (7)$$

وبحذف t بين المعادلتين (5) ، (7) نحصل على السرعة v بدلالة الموضع x

$$\frac{v^2}{\omega^2 a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$\therefore v = \pm\,\omega \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \dots \dots (8)$$

ويمكن الحصول على السرعة بتطبيق قانون الطاقة على الموضع الابتدائى $(x = a)$ والذى كانت هذه السرعة تساوى صفرا والموضع العام x.

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - 0 = \int_a^x (-k x)\, dx = \tfrac{1}{2} k (a^2 - x^2)$$

ويمثل الطرف الأيمن من هذه المعادلة الشغل الذى يبذله شد الزنبرك فى الانتقال من الموضع a إلى الموضع x . وعليه :

$$v = \pm\,\omega \sqrt{a^2 - x^2}$$

وتبلغ السرعة حدها الأقصى $(a\,\omega)$ فى مركز الحركة وتنعدم فى الأطراف وتبلغ العجلة حدها الأقصى $(a\,\omega^2)$ فى الأطراف وتنعدم فى مركز الحركة كما يتضح من المعادلتين (8) ، (3) على الترتيب .

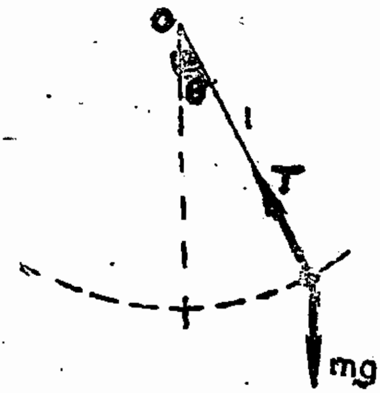
ولقد سبق تعريف هـــذه الحركة فى البـاب الثـالث عن طريق كينماتيكى بحت بأنهـا مسقط جسيم يدور فى دائرة بسرعة زاوية منتظمة ω إذا

أسقطت هذه الحركة على قطر الدائرة . وقد يفيد هذا التعريف فى تذكر بعض الكميات المتعلقة بهذه الحركة .

أما تعريفها الديناميكى فهى كما سبق حركة جسيم فى خط مستقيم متأثر بجذب مركزى يتناسب مقداره مع البعد عن مركز الجذب .

**بند ٨٩ — البندول البسيط :**

إذا علقت كرة صغيرة فى طرف خيط خفيف غير مرن مثبت طرفه الآخر O عرف هذا الجهاز بالبندول البسيط شكل ( ٨٨ ) . لو زحزحت كرة البندول جانبا ثم تركت لأخذت فى التذبذب بفعل الجاذبية فى قوس من دائرة مركزها نقطة التعليق O ونصف قطرها طول الخيط $l$ .




شكل ( ٨٨ )

يتعين موضع الجسيم فى هذه الحالة بزاوية ميل البندول θ مع وضع الاتزان الرأسى والجسيم فى حركته واقع تحت تأثير قوتين وزنه $mg$ ، شد الخيط $T$ .

باستعمال قانون نيوتن محللا فى اتجاه المماس للمسار الدائرى فى موضع عام θ نحصل على :

$$m\,l\,\ddot{\theta} = -\,m\,g\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \cdot \sin\theta$$

وإذا كانت زاوية الاهتزاز $\theta$ صغيرة فانه يمكن تقريب المعادلة السابقة إلى

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \cdot \theta \qquad \cdots \cdots (9)$$

وهى تمثل حركة توافقية بسيطة من النوع المعطى بالمعادلة (3) بالبند السابق ومسار الحركة فى هذه الحالة قوس صغير من دائرة يمكن تقريبه إلى خط مستقيم فى حالة صغر $\theta$ والثابت $\left(\frac{g}{l}\right)$ يقابل $\omega^2$ فى الصورة العامة لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة وعليه فزمن ذبذبة البندول :

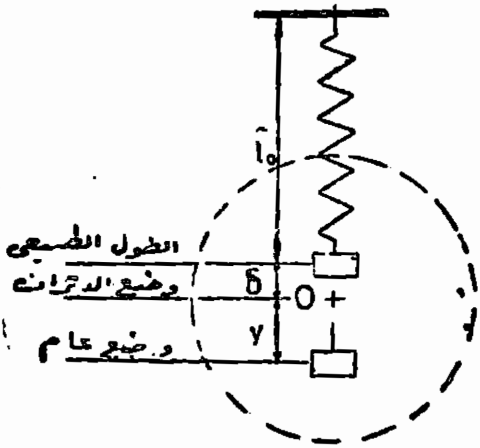
$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \cdots \cdots (10)$$

والعلاقة الأخيرة تستخدم فى علم الطبيعة لتعيين عجلة الجاذبية الأرضية $g$ وذلك عن طريق قياس زمن ذبذبة بندول ذى طول معلوم $l$ .

والبنـــدول الذى تستغرق ذبذبته ثانيتين أى يسجل ثانية واحدة فى المشوار الواحد يعرف « ببنـدول الثـوانى » وطوله بالحساب من المعادلة (10) يساوى ٩٩ سم تقريبا . ولما كان زمن ذبذبة البندول متوقفا على طوله دون سعته فى حالة الذبذبات الصغيرة أستعمل البندول فى ساعات الحائط مع عمل الاحتياط اللازم للمحافظة على طوله ثابتا فى درجات الحرارة المختلفة

**بند ٩٠ – اهتزاز جسيم معلق فى زنبرك راسى :**

إذا علق جسيم كتلته m فى زنبرك رأسى طوله الطبيعى $l_0$ ومعامل شده k ثم ترك شيئاً فشيئاً حتى يسكن فى موضع ينخفض مسافة δ مثلا عن الطول الطبيعى للزنبرك فإن القوى المؤثرة على الجسيم وهى وزنه m g إلى أسفل وشد




شكل (٨٩)

الزنبرك k δ إلى أعلى تكون متزنة فى هذا الموضع وعليه :

$$k\,\delta = m\,g \qquad \cdots \cdots (11)$$

ولو شد الجسيم بعد ذلك مسافة a مثلا إلى أسفل ثم ترك ليتذبذب فإن المعادلة العامة لحركته تنتج من تطبيق قانون نيوتن على الجسيم فى موضع عام y،

$$m\,\ddot{y} = m\,g - k\,(\delta + y) \qquad \cdots - (12)$$

والمعادلتان (11) (12) تعطيان :

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}\,y \qquad \cdots \cdots (13)$$

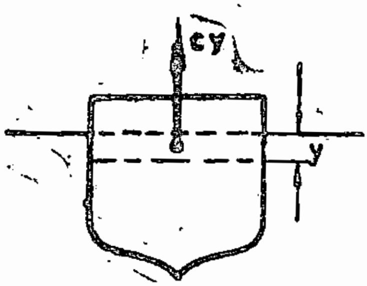
وهى تمثل حركة توافقية بسيطة زمن ذبذبتها :

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}} \qquad \cdots \cdots (14)$$

ولكن مركز الذبذبة فى هذه الحالة لا يقع فى نهاية الطول الطبيعى للزنبرك كما سبق فى حالة ذبذبة الزنبرك الافقى على مستوى أملس بل ينتقل إلى موضع الاتزان الجديد الذى ينخفض مسافة $\delta$ عن الطول الطبيعى بفعل قوة الجاذبية $m\,g$ أى أن الحركة تحت تأثير قوة مرنة وقوة ثابتة تكون حركة توافقية بسيطة مركزها هو موضع اتزان القوتين وليس نهاية الزنبرك .

بند ٩١ — الاهتزاز الرأسى لجسم طاف على سطح سائل :

إذا طفا جسم متزن على سطح سائل كان وزنه إلى أسفل مساويا لدفع الماء إلى أعلى . ولو ضغط هذا الجسم إلى أسفل مسافة $y$ لتعرض لقوة دفع جديدة إلى أعلى تساوى وزن السائل



شكل ( ٩٠ )

المزاح علاوة على القوى الاولى المتزنة وبفرض أن جوانب الجسم الطافى رأسية كان قوة الدفع الجديد تتناسب مع مقدار الانغماس الجديد $y$ وعلى هذا تعطينا مركبة قانون نيوتن فى الاتجاه الرأسى ما يأتى :

$$m\ddot{y} = -c\,y$$

$$\therefore \ddot{y} = -\frac{c}{m}y \qquad \dots\ \dots\ (15)$$

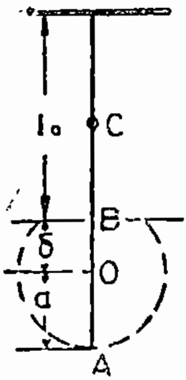
وهى تمثل حركة توافقية بسيطة وهذه الحركة ليست خطرة على السفن .

بند ٩٢ — اهتزاز جسيم معلق فى خيط رأسى مرن :

هذه الحالة أصعب من اهتزاز الزنبرك الرأسى إذ أنها تنقسم إلى مرحلتين

مختلفتين من حيث القوى العاملة فى كل .

١ — المرحلة الأولى وهى ماتحت الطول الطبيعى للخيط ( ما تحت النقطة B شكل ٩١ ) . وفى هذه المرحلة يعمل الخيط ويكون شده خاضعا لقانون هوك وتسرى عليه قواعد الحركة التوافقية البسيطة السابقة ومنها يمكن إيجاد سرعة الجسيم عند النقطة B وهى نهاية هذه المرحلة .

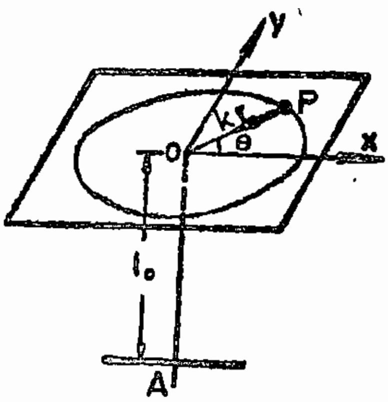


شكل (٩١)

٢ — المرحلة الثانية : وهى ما فوق النقطة B (نهاية الطول الطبيعى للخيط) وفيها تكون حركة الجسيم حرة تحت تأثير وزنه فقط نظرا لارتخاء الخيط وانعدام أثره على الجسيم . ويتحرك الجسيم تحت تأثير وزنه مبتدئا من B بالسرعة التى اكتسبها عند هذه النقطة من حركته الأولى .

**بند ٩٣ — حركة مستوية تحت جذب مركزى متناسب مع المسافة من مركز الجذب :**

هب أن خيطا مرنا ثبت أحد طرفيه A ويمر طرفه الآخر خلال ثقب صغيرة O فى منضدة أفقية ملساء بحيث كانت المسافة OA مساوية لطول الخيط الطبيعى ( شكل ٩٢ ) . ولو شددنا الطرف الحر للخيط وربطنا به جسيما كتلته m مثلا وقابل للحركة



شكل ( ٩٢ )

فوق المنضدة فإنه يتحرك تحت جذب متجه نحو القطب O ومتناسب مع الاستطالة في الخيط OP .

بتطبيق قانون نيوتن الأساسى للحركة على الجسيم فى موضع عام له مع التحليل فى الاتجاهين الكرتيزيين المتعامدين (x,y) نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k\, r \cos\theta = -kx \\ m\ddot{y} &= -k\, r \sin\theta = -ky \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad (16)$$

وفيها k هى معامل شد الخيط وبوضع الثابت $\omega^2$ بدلا من $\left(\frac{k}{m}\right)$ فى المعادلتين (16) نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 x \\ \& \ \ddot{y} &= -\omega^2 y \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad (17)$$

ويمكن تكامل كل من المعادلتين التفاضليتين (17) على حدة كما سبق فى حالة الحركة التوافقية البسيطة فنحصل على الحل العام الآتى :

$$\left.\begin{aligned} x &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ \& \ y &= C \cos \omega t + D \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad (18)$$

وبتعيين ثوابت التكامل الأربعة A , B , C , D من أحوال البداية وهى أن الجسيم قذف بسرعة V متعامدة مع المسافة الابتدائية a المطابقة لمحور x

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos \omega t \\ y &= \frac{V}{\omega} \sin \omega t \end{aligned}\right\} \qquad \dots \dots (19)$$

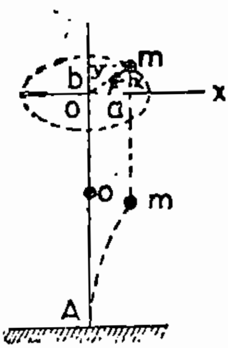
وهما لمعادلتان البارامتريتان للمسار وبحذف $t$ بينهما نحصل على المعادلة الكرتيزية للمسار .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{V^2 / \omega^2} = 1 \qquad \dots \dots (20)$$

وهى معادلة قطع ناقص طول محوره الأفقى $2a$ ومحوره الرأسى $\left(\frac{2V}{\omega}\right)$ ولذا تسمى هذه الحركة بالحركة التوافقية فى قطع ناقص كما سبق شرحه فى البند (٣٢) والزمن الدورى لهذى الحركة هو $\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$

فى شكل (٩٣) نموذج يعطى حركة توافقية فى قطع ناقص والنموذج عبارة عن جسيم $m$ مثبت فى الطرف العلوى لسلك أسطوانى رفيع مثبت طرفه الأسفل $A$ تثبيتا تاما .

لدراسة حركة الجسيم $m$ فى المستوى الأفقى نختار محورين للاحداثيات $x , y$ ونقطة الأصل $O$ منطبقة على موضع إتزان الجسيم .




شكل (٩٣)

إذا أزحنا الجسيم إزاحة إبتدائية صغيرة أو أكسبناه سرعة إبتدائية فى إتجاه محور $x$ ثم تركناه فإنه يتحرك حركة توافقية بسيطة فى الإتجاه $x$ . أما إذا أزحنا الجسيم إزاحة إبتدائية $x_0$ ثم أطلقناه بسرعة إبتدائية $\dot{y}_0$ فإنه يتحرك

حركة توافقية فى قطع ناقص مستواه أفقى (شكل ٩٣) كالحالة السابق شرحها .

**بند ٩٤ ـ تركيب حركتين توافقيتين متعامدتين ومختلفتى الزمن الدورى :**

إذا كان مقطع السلك الرأسى المثبت فيه الجسيم بشكل (٩٣) مستطيلا كانت له صلابتا انثناء مختلفتين فى مستويين رئيسيين وإذا أخذنا المحورين الرئيسيين لمقطع السلك كمحورى $(x , y)$ تصير معادلتا الحركة

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ m\ddot{y} &= -k_1 y \end{aligned}\right\} \qquad \dots \dots (21)$$

حيث $k , k_1$ ثابتان زنبركيان مختلفان يناظران صلابتى الانثناء المختلفتين للسلك بإجراء تكامل لهاتين المعادلتين كما سبق وإستعمال نفس أحوال البداية نحصل على

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos \omega t \\ y &= b \sin \omega_1 t \end{aligned}\right\} \qquad \dots \dots (22)$$

حيث

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} , \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} , a = x_0 , b = \frac{\dot{y}_0}{\omega_1}$$

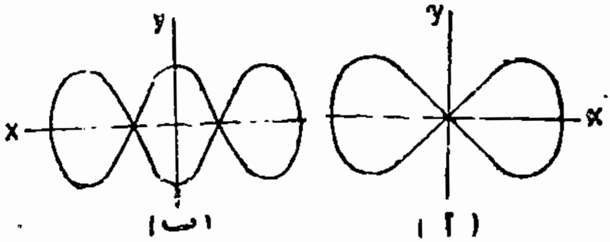
فى هذه الحالة يزداد شكل المسار تعقيدا ويتوقف شكله على العلاقة بين الترددين الزاويين $\omega_1 , \omega$ .

لنفرض أولا أن $\omega_1 = 2\omega$ وباجراء هذا التعويض فى ثانية المعادلتين (22) وحذف $t$ بينهما نحصل على معادلة المسار

$$y = \pm \frac{2bx}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad \dots \dots (23)$$

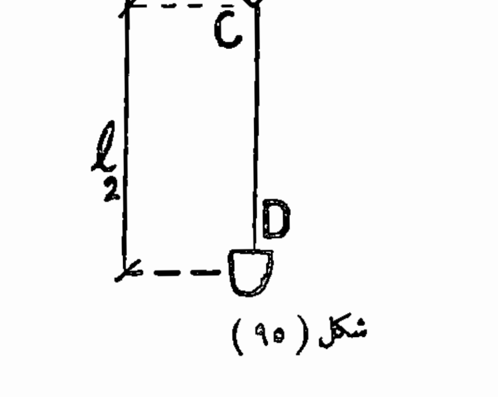
وهى معادلة المنحنى المبين فى شكل ( ٩٤ - ا ) وحيث أن الزمن الدورى $\frac{2\pi}{\omega} = \tau_x$ ضعف الزمن الدورى $\frac{2\pi}{\omega_1} = \tau_y$ فإنه يكون لدينا ذبذبتان كاملتان فى الاتجاه y لكل ذبذبة واحدة فى الاتجاه x

كذلك إذا كانت $\omega_1 = 3\omega$ فإنه يصبح لدينا ٣ ذبذبات كاملة فى الاتجاه y لكل ذبذبة واحدة فى الاتجاه x ونحصل على المسار المبين فى شكل ( ٩٤ - ب )




شكل ( ٩٤ )

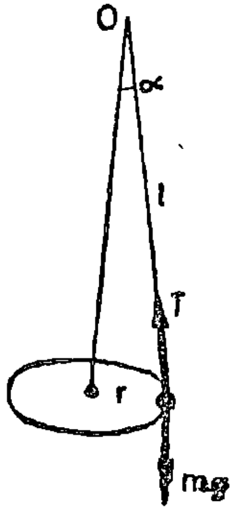
وتسمى الأشكال المبينة بشكل ( ٩٤ ) بأشكال « ليساجو » ويمكن رسمها بطريقة أخرى غير التى بيناها بشكل (٩٣) وذلك بتعليق وعاء صغير مملوء برمل ناعم بواسطة خيطين كما فى شكل (٩٥) عندما يتأرجح الوعاء فى مستوى الورقة يتناظر الزمن الدورى مع طول البندول $l_2$ وفى حالة الأرجحة فى مستوى عمودى على الورقة يتناظر الزمن الدورى مع طول البندول $(l_1 + l_2)$ . وإذا أعطينا هذا البندول كلا الحركتين فى نفس الوقت فإنه يرسم مسارات كالمبينة بشكل




شكل ( ٩٥ )

(٩٤)إذا كانت $\omega_1 = 2\omega$ أو $\omega_1 = 3\omega$ . وإذا ما تساقط الرمل ببطء من ثقب بقاع الوعاء على نضد أفقى فإنه يعطى تخطيطا لأشكال المسار على النضد.

**بند ٩٥ — البندول المخروطى :**




شكل (٩٦)

لو علق جسم m فى طرف خيط غير مرن مثبت طرفه الاخر O فمن الممكن أن يدور الخيط دورانا منتظما راسما سطحا مخروطيا قائما محوره رأسى ذلك إذا قذف الجسم بسرعة أفقية متعامدة مع الخيط وذات مقدار معين يتوقف على طول الخيط وزاوية رأس المخروط (شكل ٩٦) .

فى هذه الحالة يدور الجسم دورانا منتظما فى دائرة أفقية تحت تأثير قوتين: وزنه $m\,g$ وشد الخيط $T$ .

بالتحليل فى الاتجاه الرأسى يعطى قانون نيوتن ما يأتى :

$$T \cos \alpha - m\,g = 0 \qquad \dots \dots (24)$$

وبالتحليل أفقيا فى إتجاه مركز الدائرة نحصل على :

$$T \sin \alpha = \frac{m\,v^2}{l \sin \alpha} \qquad \dots \dots (25)$$

وفيها $v$ هى سرعة الجسم الثابتة المقدار و $(l \sin \alpha)$ هى نصف قطر الدائرة .

والمعادلتان (24) ، (25) تعينـــان المجهولين T ، v إذا علمت α ، $l$ وقد تعينـــان أى مجهولين آخرين إذا علمت باقى القيم . وبحذف T بينهما نحصل على :

$$v^2 = g\, l \sin \alpha \tan \alpha \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

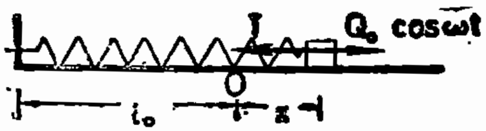
ويمكن بهذا الجهاز نفسه الحصول على حركة توافقيـة فى قطع ناقص إذا أعطى الجسيم سرعة ابتدائية تختلف عن قيمة v المعطاة بالمعادلة (26) وبشرط أن تتخذ زاوية ميل الخيط قيما صغيرة دائما حتى يتسنى اعتبار مسار الجسيم منحنيا مستويا على وجه التقريب . وفى هذه الحالة تؤول المعادلة (24) على وجه التقريب إلى .

$$( T = m\, g )$$

وتؤول مركبة الشد T فى الاتجاه الأفقى نحو مركز الدائرة إلى :

$$T \sin \alpha = m\, g . \frac{r}{l} = \left( \frac{mg}{l} \right) . r$$

وهو قوة جذب مركزى يتناسب مقداره مع البعد عن المركز r . وهى تعطى كما وجدنا فى البند ( ٩٣ ) حركة توافقية فى قطع ناقص على وجـــه العموم وتكون الحركة الدائرية المنتظمة حالة خاصة منها إذا إتخـــذت السرعة الابتدائية للجسيم قيمة معينة تعطيها المعادلة (26) هذا إذا كانت أفقية ومتعامدة مع الخيط .




شكل ( ٩٧ )

بند ٩٦ — الاهتزاز القسرى :

إذا أثرت على الجسيم للبين شكل ( ٩٧ ) قوة قاسرة دورية ( $Q_0 \cos \omega t$ ) علاوة على شد الزنرك ($-kx$) فان المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم تصبح حسب قانون نيوتن :

$$m\ddot{x} = -kx + Q_0 \cos \omega t$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{Q_0}{m} \cos \omega t \qquad \dots \dots (27)$$

وبوضع ( $q_0 = \frac{Q_0}{m}$ , $\frac{k}{m} = p^2$ ) فى المعادلة (27) نحصل على :

$$\ddot{x} + p^2 x = q_0 \cos \omega t \qquad \dots \dots (28)$$

ويحل هذه المعادلة التفاضلية للاهتزاز القسرى نجرب الحل :

$$x = C \cos \omega t \qquad \dots \dots (29)$$

وفيها $C$ ثابت بالتعويض من (29) فى (28) نحصل على :

$$C = \frac{q_0}{p^2 - \omega^2}$$

وبذا نحصل على الحل الخاص الآتى للمعادلة التفاضلية (28) :

$$x = \frac{q_0}{p^2} \left( \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \right) \cos \omega t \qquad \dots \dots (30)$$

وللحصول على الحل العام للمعادلة (28) يضاف إلى الحل الخاص (30) حل

المعادلة $(\ddot{x} + p^2x = 0)$ كما هو معروف فى نظريات المعادلات التفاضلية وعليه فالحل العام هو :

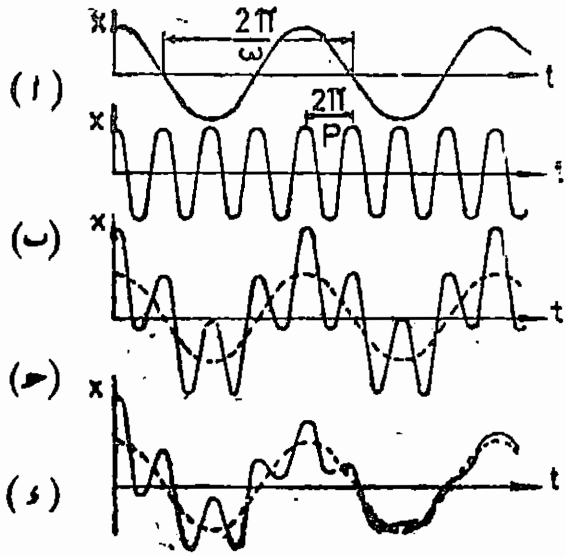
$$x = A \cos pt + B \sin pt + \frac{q_0 \cos \omega t}{p^2(1-\frac{\omega^2}{p^2})} \qquad \dots \dots (31)$$

وفيها B ، A ثابتا تكامل تعينها أحوال البداية . ويمكن بالتعويض التحقق من أن العلاقة (31) تحقق المعادلة التفاضلية للحركة (28) .

ويمثل الحدان الأولان فى المعادلة (31) ذبذبة حرة زمنها الدورى $(\frac{2\pi}{p})$ ولا أثر للقوة القاسرة عليها . بينما يمثل الحد الأخير الذبذبة القسرية وزمنها الدورى $\frac{2\pi}{\omega}$ مساو للزمن الدورى للقوة القاسرة وعليه فالمعادلة (31) تمثل مجموع حركتين إهتزازيتين مختلفتى الزمن الدورى ويمثل شكل ( ٩٨ ) هذه الحركة . ويمثل الجزء ( أ ) من الشكل الذبذبة القسرية ويمثل (ب) الذبذبة الحرة ويمثل (حـ) مجموع الذبذبتين .

ونتيجة لفعل المقاومات التى لم ندخلها فى اعتبارنا بعد ـ تنمحى الذبذبة الحرة تدريجيا وتبقى الذبذبة القسرية لأن القوة القاسرة تدعمها وتحافظ على بقائها . ( شكل ٩٨ — د ) .

ولندرس إذا بشىء من التفصيل الذبذبة القسرية المعطاة بالمعـــادلة (31) . تتوقف سعة هذه الذبذبة على الكمية .




شكل (٩٨)

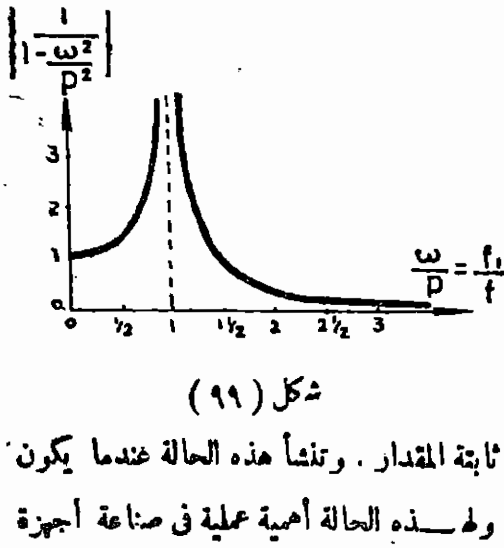
$$\left|\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{p^2}}\right| \quad \dots (32)$$

المسماة بمعامل التكبير . الواضح أن هذا المعامل يتوقف فقط على النسبة $\left(\frac{\omega}{p}\right)$ أى على النسبة بين تردد القوة القاسرة $f_1$ حيث $\left(f_1 = \frac{\omega}{2\pi}\right)$

والتردد الحر لحركة الجسم $f$ حيث $\left(f = \frac{p}{2\pi}\right)$

ويمثل شكل (٩٩) تغير معامل التكبير بتغير النسبة $\left(\frac{\omega}{p}\right)$ أو $\left(\frac{f_1}{f}\right)$

ومنه تتضح الحالات الثلاث الآتية :




شكل (٩٩)

١ — إذا كانت $\omega$ صغيرة بالنسبة إلى $p$ أى إذا كان الترددالقسرى $f_1$ صغيراً بالنسبة إلى التردد الحر $f$ فان معامل التكبير يكون قريباً من الواحد الصحيح ويكون أثر القوة القاسرة على الذبذبة كما لو كانت ثابتة المقدار . وتنشأ هذه الحالة عندما يكون معامل شد الزنبرك كبيراً جداً . ولهـــذه الحالة أهمية عملية فى صناعة أجهزة

تسجيل الضغط فى اسطوانات الآلات ( Pressure indicator ).

٢ – باقتراب $\omega$ من $p$ أى باقتراب التردد القسرى $f_1$ من التردد الحر $f$ يقترب معامل التكبير ( شكل ٩٩ ) من اللانهاية . وتعرف هذه الحالة بالرنين (Resonance) ويمكن تصور هذه الحالة عمليا بحركة بندول يتذبذب تذبذبا حراً وكلما أشرف على نهاية ذبذبته من اليمين أعطيناه دفعة فى إتجـــاه حركته وكلما أشرف على نهاية ذبذبته من اليسار أعطيناه دفعة فى إتجاه حركته كذلك فتزداد سعة ذبذبته فى كل مرة عن المرة السابقة لها وتستمر هذه الزيادة فى سعة الذبذبة إلى ما لا نهاية لولا المقاومات التى تكبح هذه الزيادة نوعا ما . ولحالة الرنين آثار سيئة على المنشآت الهندسية المعرضة لقوى دورية فالكبارى عند مرور القطار عليها تتعرض لقوى دورية يتوقف ترددها على سرعة القطار ويجب تحديد سرعة مرور القطارات على الكبارى بما يلاقى حالة الرنين . كذلك عند مرور فرقة من الجند على كوبرى يطلب اليها قائدها السير بخطوة غير منتظمة تلافيا لحالة الرنين . إلى غير ذلك من الأمثلة المتعلقة بتصميم أساسات الماكينات .

٣ – بزيادة $\omega$ عن $p$ أى بزيادة التردد القسرى عن التردد الحر يأخذ معامل التكبير فى النقصان ( شكل ٩٩ ) وهو يقترب من الصفر كلما اقتربت ( $\frac{\omega}{p}$ ) من اللانهاية ويعنى هذا إنعدام الذبذبة القسرية وتنشأ هذه الحالة عند ما يكون معامل شد الزنبرك $k$ صغيرا ولهذه الحالة أهمية عملية فى عزل الاهتزاز عن الأجهزة الدقيقة وذلك بتحميلها على زنبركات ضعيفة نوعا كما تستخدم هذه الخاصية فى صناعة أجهزة تسجيل الزلازل المسماه « بالسيسموجراف » .

وعلى العموم عندما تكون $\omega$ أكبر من $p$ تكون علامة معامل التكبير

سالبة ويعنى هذا أن حركة الجسم تكون ضد اتجاه القوة القاسرة .

**بند ٩٧ ـ الاهتزاز المخمد ( Damped Oscillations ) :**

لو تعرض الجسيم المتذبذب فى خط مستقيم بفعل زنبرك مثلا لمقاومة تتناسب مع السرعة فان معادلة حركته حسب قانون نيوتن تكون :

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (33)$$

وفيها ($\mu\dot{x}$) هى مقدار المقاومة بقسمة الطرفين على m نحصل على :

$$\ddot{x} + \mu'\dot{x} + k'x = 0 \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (34)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية ( Linear diff . eqn. ) بمعاملات ثابتة وتحققها حلول من النوع ($x = e^{\lambda t}$) حيث $\lambda$ مقدار ثابت . وبتعويض هذا الحل فى المعادلة (34) نحصل على المعادلة الآتية المسماة بالمعادلة المساعدة :

$$\lambda^2 + \mu'\lambda + k' = 0 \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (35)$$

وهى معادلة من الدرجة الثانية فى $\lambda$ جذراها هما

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\left(-\mu' \pm \sqrt{\mu'^2 - 4k'}\right) \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (36)$$

والجذران يعطيان حلين للمعادلة التفاضلية يحويان ثابتى تكامل على الصورة العامة :

$$x = A\,e^{\lambda_1 t} + B\,e^{\lambda_2 t} \qquad \cdots\ \cdots\ \cdots\ (37)$$

غير أن الحل العام يأخذ صورا معينة فى حالتى الجذور المتساوية أو الجذور التخيلية :

١ — الجذران $\lambda_1$ ، $\lambda_2$ حقيقيان مختلفان وذلك عندما تكون $(\mu'^2 > 4k')$ أى أن المقاومة كبيرة نوعا ما ولا يعطى الحـــل (37) حركة اهتزازية فى هذه الحالة.

٢ — الجذران $\lambda_1$ ، $\lambda_2$ متساويان كل منهما $\left(-\frac{\mu'}{2}\right)$ ويأخذ الحل (37) الصورة الآتية فى هذه الحالة :

$$x = e^{\frac{-\mu' t}{2}} (A + Bt) \quad \dots\dots\dots (38)$$

وهى تمثل حركة اهتزازية كذلك

٣ — عندما يكون الجذران تخيليان $(\mu'^2 < 4k')$ فان الحـل (37) يأخـذ الصورة :

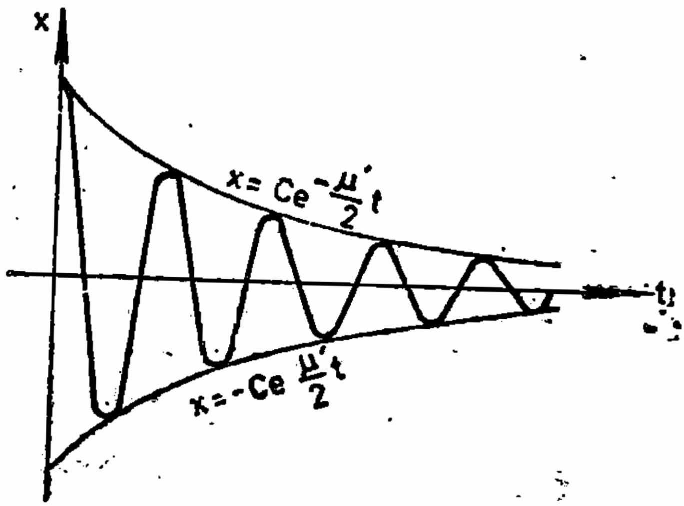
$$x = e^{\frac{-\mu' t}{2}} (A \cos nt + B \sin nt) \dots (39)$$

وفيها $\left(n = \frac{1}{2}\sqrt{\mu'^2 - 4k'}\right)$ (أنظر العلاقة (36)) ويمكن وضع المعادلة (39) على الصـورة :

$$x = Ce^{\frac{-\mu' t}{2}} \cos(nt + \varepsilon) \quad \dots\dots (40)$$

وفيها C ، $\varepsilon$ ثابتان وهى حركة توافقية سعتها فى أى لحظة $Ce^{\frac{-\mu' t}{2}}$ وهى متناقصة بمرور الزمن ويمثلها شكل ( ١٠٠ ) غير أن الزمن الدورى لها $\frac{2\pi}{n}$ ثابت المقدار . وتقترب سعة الذبذبة من العـــدم باقتراب الزمن من

اللانهاية . وتحدث هذه الذبذبة فى حالة المقاومات الضعيفة كالمقاومات الناشئة عن الهواء مثلا :




شكل (١٠٠)

**بند ٩٨ — الاهتزاز القسرى المخمد :**

**Damped forced oscillation**

هو مجموع الحالتين السابقتين ( بند ٩٦ ، ٩٧ ) والمعادلة التفاضلية للحركة هى :

$$\ddot{x} + \mu'\dot{x} + k'x = q \cos \omega t \qquad \dots \text{—} \quad (41)$$

ويتألف الحل العام لهذه المعادلة من حل خاص على الصورة $(x = D\cos(\omega t + \varepsilon'))$ مضافا اليه حل المعادلة (34) كما هو معروف فى نظرية المعادلات التفاضلية ويتعين الثابتان D , ε للحل الخاص من التعويض فى المعادلة (41) وعلى هذا فالحل العام للمعادلة (41) فى حالة التخميد الضعيف وهى الحالة الهامة من الوجهة العملية يكون :

$$x = Ce^{\frac{-\mu t}{2}} \cos(nt + \varepsilon) + D\cos(\omega t + \varepsilon') \quad (42)$$

وهى مجموع ذبذبتين . ذبذبة مخمدة يعطيها الحد الأول من المعادلة وذبذبة قسرية يعطيها الحد الثانى وهى الجزء الهام من الحركة إذ سرعان ما تقترب الذبذبة المخمدة من التلاشى بفعل المقاومة وتقتصر الحركة على الذبذبة القسرية كما سبق أن أشرنا إليه فى البند (٩٦) — ويمثل شكل (٩٨ — ى) هذه الحركة الامتزازية .

## خلاصة الباب

١ ) يعتبر هذا الباب تطبيقا على الحركة المتأثرة بقوى مرنة أى متناسبة مع المسافة أو قوى دورية أو مقاومات صغيرة أى متناسبة مع السرعة ونرى حل أى حالة من هذه الحالات من مبادئها الاولية أى بتطبيق قانون نيوتن الأساسى للحركة مع العناية بصورة المعادلات التفاضلية الناتجة والحل العام لكل منها .

٢ ) يعنى بصورة المعادلة التفاضلية (3) وحلها العام (4) والزمن الدورى للحركة المعطى بالمعادلة (6) وذلك فى حالة الحركة التوافقية البسيطة كما يعنى بتعريف هذا النوع من الحركة كمسقط لحركة جسيم يدور على دائرة بسرعة زاوية منتظمة إذا أسقطت هذه الحركة على قطر من أقطار الدائرة ويساعد هذا التعريف على إيجاد بعض القيم الهامة كالسرع والازمنة المناظرة لمواضع معينة من المسار .

٣ ) زمن ذبذبة بندول بسيط يساوى( $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ) وزمن ذبذبة جسيم

معلق فى زنبرك يساوى $2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}}$ حيث $\delta$ هى مقـــدار الاستطالة الاستاتيكية للزنبرك .

(٤) الجسيم المتحرك فى مستوى تحت جذب مركزى مناسب لبعده عن المركز يرسم قطعا ناقصا مركزه مركز الجذب .

(٥) إذا أثرت قوة دورية وقوة مرنة على جسيم إنتجا به إهتزازا قسريا يتألف من : (i) ذبذبة قسرية يساوى ترددها ترددالقوة الدورية ومركب عليها (ii) ذبذبة حرة يساوى ترددها التردد الحر للجسيم . إذا تساوى الترددان نشأت حالة الرنين وفيها تبلغ سعة الذبذبة حدودا لا نهائية من الوجهة النظرية ويجب تلافى حدوث هذه الحالة فى المنشآت الهندسية .

( ٦ ) إذا أثرت على الجسيم فى الحالة (٥) مقاومة صغيرة متناسبة مع سرعته عملت شيئا فشيئا على خمد الذبذبة الحرة وبذا تبقى فقط الذبذبة القسرية بعد وقت كاف من بداية الحركة : وللمقاومة أثر فى تهدئة حالة الرنين المشار اليها فى (٥) .

## تمرينات

(١) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة زمنها الدورى ١٤ر٣ ثانية وسرعتها القصوى ١٠ سم / ث . أوجد : ١ ) سعة الذبذبة ٢ ) أقصى عجلة ٣ ) الزمن اللازم لقطع النصف الأول من سعة الذبذبة ٤ ) الزمن اللازم لقطع النصف الثانى منها (إعدادى ١٠ يونية سنة ١٩٤٩ )

[ الجواب : ١) $a = 5$ cm   ٢) $f$ max. $= 20$ cm/sec$^2$
٣) $t_1 = \frac{\pi}{6}$ sec.   ٤) $t_2 = \frac{\pi}{12}$ sec. ]

(٢) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة سعتها ٥ سم وزمنها الدورى ٤ ثوان أوجد الزمن المنقضى فى الحركة من نقطة على بعد ٤ سم من مركز الذبذبة إلى نقطة على بعد ٣ سم على الجانب الآخر منه ثم أوجد السرعة والعجلة عند النقطة الأولى (اعدادى هـ ١ سبتمبر سنة ١٩٤٩)

[ الجواب : $t = 1$ sec , $v = \frac{3\pi}{2}$ cm/sec , $f = \pi^2$ cm/sec$^2$ ]

(٣) يتحرك جسيم كتلته ١ باوند حركة توافقية بسيطة . أقصى قوة تؤثر عليه هى وزن باوند واحد وأقصى سرعة له ٨ أقدام / ث كم ذبذبة يؤديها الجسيم فى الدقيقة ؟ أوجد العلاقة $(x,t)$ إذا علمت أنه بدأ الحركة على بعد ١ قدم من مركز الذبذبة . أوجد سرعته الابتدائية .

[ أولى هـ ١ : يونيه سنة ١٩٥١ ]

[ الجواب : $n = \frac{120}{\pi}$ / min
$v = \pm 4\sqrt{3}$ ft/sec ; $x = 2\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$ ]

(٤) ربط جسيم كتلته ٩٨٠ جم فى زنبرك معامل شده $k$ جم / سم وأخذ يتذبذب . وجد أن الجسيم يقطع المسافة بين منتصف السعة على أحد جانبى مركز الحركة إلى منتصفها على الجانب الاخر فى ثانية واحدة . أوجد

معامل الشد k وزمن الذبذبة . أوجد أقصى سرعة وأقصى عجلة إذا علمت أن سعة الذبذبة ٣ سم

[ أولى هـ ١٠ سبتمبر سنة ١٩٤٧ ]

الجواب : $V_{max} = \pi$ cm/sec. ، $k = \left(\frac{\pi^2}{9}\right)$ gm/cm

$f_{max} = \frac{\pi^2}{3}$ cm/sec$^2$

٥ ) علق جسيم وزنه ½ كج في زنبرك رأسي وأخذ يتذبذب في خط رأسي سعة الذبذبة ٥ سم وزمنها الدوري $\frac{\pi}{١٠}$ ثانية . أوجد معامل شد الزنبرك وأقصى شد فيه وأقصى سرعة الجسيم .

( أولى هـ ١٠ سبتمبر ١٩٤٨ )

الجواب : ، $k = \left(\frac{1}{5}\right)$ kg/cm

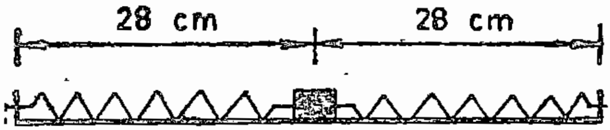
$V_{max} = 100$ cm/sec, $T_{max} = \frac{3}{4}$ kg

٦ ) يتذبذب جسيم وزنه ١ باوند معلق في زنبرك رأسي . سعة الذبذبة ١ قدم وزمنها الدوري $\frac{\pi}{٤}$ أوجد معامل شد الزنبرك وأقصى سرعة للجسيم أوجد أقل وأكبر قوة في الزنبرك . أوجد سرعة الجسيم عندما ينعدم شد الزنبرك .

( إعدادى هـ ١٠ يونيه سنة ١٩٥٨ )

[ : $V_{max} = 8$ ft/sec. , $k = 2$ lb/ft

$v = 4$ ft/sec. , ( $T_{min} = -3$ , $T_{max} = 1$ lb ]




شكل (١٠١)

(٧) ربط جسيم وزنه ١ كج فى زنبركين متساويين طول كل منهما ٢٨ سم ومعامل شده ١٠٠ جم / سم . والمجموعة موضوعة على نضد أفقى أملس ثبت فيه طرفا الزنبركين على مسافة ٥٦ سم من بعضها ( شكل ١٠١ ) . دفع الجسيم بدفع قدره ١٠٠ جم ث فى اتجاه الزنبركين . أثبت أن الجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة وأوجد سعتها وزمنها الدورى .

وإذا أثر نفس الدفع عموديا على الزنبركين أوجد أبعد مسافة يتحركها الجسيم قبل أن يقف « أولى هـ . أ . يونية سنة ١٩٤٩ »

$$\left[ \quad a_1 = 21 \text{ cm} \; , \; a = 7 \text{ cm} \; , \; \tau = \frac{\pi}{7} \quad \right]$$

( ٨ ) خيط مرن طوله الطبيعى ٢ متر معلق فى السقف ويحمل جسيما وزنه W كج . يحدث وزن الجسيم استطالة ١٠ سم فى الخيط .

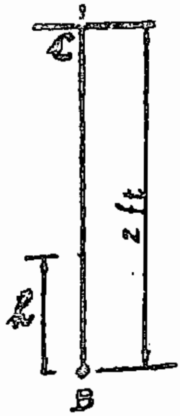
أ — أوجد أبعد مسافة يشد اليها الجسيم إلى أسفل لكى تكون حركته الناتجة حركة توافقية بسيطة . أوجد زمنها الدورى .

ب — أوجد أقل مسافة يشد اليها الجسيم إلى أسفل لكى يصل السقف بعد تركه . (أولى هـ . أ . أكتوبر سنة ١٩٤٦)

[ الجواب : (أ) 10 cm , $\tau = 0.64$ sec ، (ب) 64 cm ]

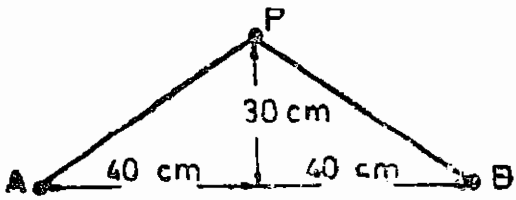
(٩) جسيم وزنه ١ باوند معلق فى خيط مرن BC طوله الطبيعى ٢ قدم ومعامل شدة ٥ر١ باوند/قدم . رفع الجسيم مسافة h فوق B وترك ليسقط فبلغ أقصى هبوطه أسفل B مسافة ٢ قدم . أوجد h وصف الحركة الناشئة وأوجد زمنها الدورى .

( أولى هـ . ١٠ يناير سنة ١٩٥٦ )



شكل (١٠٢)

[ الجواب : $h = 1\text{ ft}$, $\tau = \left(\frac{16\sqrt{3}\,\pi}{3} + \frac{1}{2}\right)\sec$ ]



شكل (١٠٣)

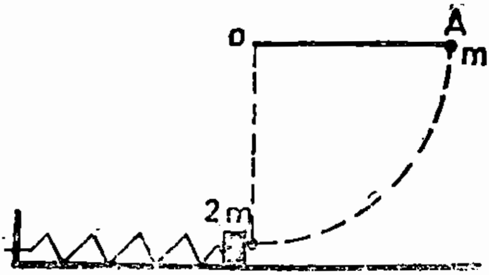
(١٠) ربط جسيم كتلته ½ كج فى خيطين مرنين متساويين PA , PB الطول الطبيعى لكل منهما ٣٠ سم ومعامل شدة ١ر٠ كج / سم : المجموعة موضوعة على نضد أفقى أملس مثبت فيه الطرفان A , B كما فى الشكل (١٠٣) .

ا — فإذا ترك الجسيم من الوضع المبين بالشكل أوجد سرعته عندما يصل الخط AB .

ب — لو زحزح الجسيم قليلا عموديا على الخط AB ثم ترك أوجد زمن ذبذبته

( أولى هـ . ١ يونيه سنة ١٩٤٨ )

[ الجواب : $140\sqrt{6}\ \text{cm/sec}$ ، $\tau = 2\pi\sqrt{10}\ \sec$ ]




شكل (١٠٤)

(١١) قضيب خفيف OA طوله قدم واحد مثبت طرفه O ويحمل فى طرفه الآخر كتلة m مقدارها باوند . ترك القضيب ليسقط من وضع أفقى وعندما صار وضعه رأسيا صدمت الكتلة m التى فى طرفه كتلة أخرى 2m مربوطة فى طرف زنبرك معامل شده ٤ ثقل باوند / قدم وموضوعة على نضد أفقى أملس (شكل ١٠٤) .

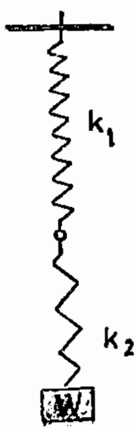
أوجد سرعتى الكتلتين بعد التصادم إذا علمت أن معامل الإرتداد يساوى $\frac{1}{2}$

أوجد أقصى أنضغاط فى الزنبرك (أولى هـ . م. فبراير سنة ١٩٥٥)

الجواب : سرعة الكتلة الصغرى = صفر .
سرعة الكتلة الكبرى = ٤ قدم/ث
أقصى انضغاط = $\frac{1}{2}$ قدم

(١٢) علق جسيم وزنه W فى زنبركين معاملا شدهما $k_1$ ، $k_2$ كما فى شكل (١٠٥) أوجد معامل الشد المكافىء لهذين الزنبركين .

(يقصد بمعامل الشد المكافىء معامل شد زنبرك واحد لو علق فيه الجسيم لأعطى نفس الذبذبة) .

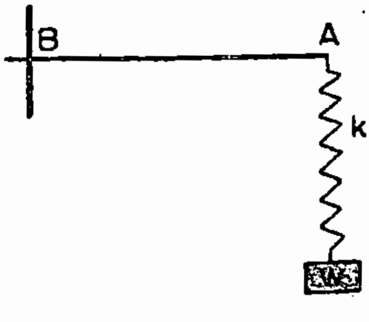



شكل (١٠٥)

[ الجواب : $k = \frac{k_2\ k_1}{k_1 + k_2}$ ]

١٣) جسيم W وزنه ٨ باوند معلق فى زنبرك معامل شده ٨ باوند / بوصة ومعلق طرفه الآخر فى النهاية A لكابولى A B وجد بالتجربة أن النقطة A من الكابولى تنخفض إلى أسفل مسافة ٢ بوصة إذا شدت رأسيا بقوة ٢٤ باوند .

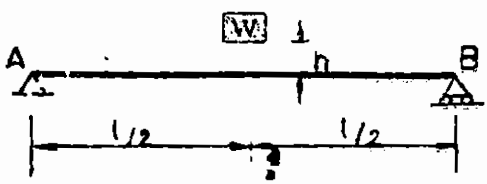
أوجد تردد الجسيم W فى اهتزازه الرأسي الحر . ( إرشاد : يمكن تشبيه الكابولى المثبت طرفه B فى حائط بزنبرك ويعين معامل شده من مقدار انخفاض النقطة A بتأثير قوة معينة )




شكل (١٠٦)

[ الجواب : التردد = ٩٩ر٠ ذبذبة فى الثانية ]

١٤) وجد أن منتصف كمرة بسيطة AB ينخفض مسافة قدرها ١٥ر٠ بوصة بتأثير حمل رأسي في المنتصف قدره ١٥٠ باوند .




شكل (١٠٧)

لو ترك وزن W وقدره ٢٠٠ باوند ليسقط من ارتفاع h قدره بوصة واحدة فوق منتصف هذه الكمرة . أوجد أقصى انخفاض لمنتصف الكمرة والزمن الدورى للذبذبة الناشئة ( أهمل وزن الكمرة واعتبر الجسيم ملامسا لها دائما )

[ الجواب : أقصى انخفاض = ٨٦٢ر٠ بوصة . التردد = ٩٩ر٦ ذبذبة في الثانية ]

١٥) مقدار غاطس سفينة h ومساحة مقطعها بمستوى سطح الماء = A أثبت أنه إذا ضغطت السفينة قليلا إلى أسفل ثم تركت فإنها تتذبذب في حركة توافقية بسيطة . أوجد زمنها الدورى .

$$\left( \text{الجواب :} \quad 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \right)$$

١٦) تنزلق حلقة صغيرة كتلتها m على سلك مستقيم أملس متأثرة بجذب متجه نحو مركز ثابت O يبعد مسافة a عن السلك . ومقدار الجذب متناسب مع بعد الحلقة عن المركز O ومعامل التناسب k أثبت أن حركة الحلقة توافقية بسيطة وأوجد زمنها الدورى . أوجد أقصى سرعة للحلقة إذا علمت أنها بدأت على بعد 2a عن المركز O أوجد كذلك رد فعل السلك .

( أولى هـ . م . سبتمبر سنة ١٩٥٢ )

$$\left[ \text{الجواب :} \quad \begin{array}{l} \ddot{x} = -kx \,,\ \tau = 2\pi/\sqrt{k} \\ V_{max} = a\sqrt{3k} \,,\ N = ka \end{array} \right]$$

١٧) علق جسيم كتلته m في منتصف خيط مرن O مثبت طرفاه في نقطتين A ، B يقعان في مستوى أفقي واحد وفي وضع اتزان الجسيم يصنع كل من جزئي الخيط OA ، OB زاوية ٦٠° مع الرأسي ويكون طول كل منهما l معامل مرونة الخيط = mg . زحزح الجسيم مسافة صغيرة في اتجاه رأسي وترك ليتذبذب أوجد زمن ذبذبته .

$$\left[ \text{الجواب :} \quad 2\pi\sqrt{2l/5g} \right]$$

١٨) علق جسيم كتلته m فى زنبرك رأسى معامل شده k والزنبرك معلق من طرفه الآخر O وجذب الجسيم رأسيا إلى أسفل وترك ليتذبذب وفى نفس الوقت أخذت النقطة تعليق الزنبرك O تتذبذب رأسيا فى حركة توافقية بسيطة ترددها $\frac{\omega}{2\pi}$ أثبت أن الجسيم يهتز اهتزازا قسريا .