الباب الثانى عشر

الحركة المدارية

(Orbital Motion)

بند ٩٩ – مقدمة :

سنعالج فى هذا الباب الحركة المستوية للجسيمات المتأثرة بمجالات القوى . فلو قذف جسيم فى مجال ما للقوى بسرعة ابتدائية معينة اتخذ لنفسه مدارا يتوقف شكله على أحوال بداية الحركة من ناحية وعلى شدة المجال فى النقط المختلفة التى يحتلها الجسيم أثناء حركته من ناحية أخرى .

وسنقصر بحثنا فى هذا الباب على مجالات القوى التى تصدر عن مركز أو أكثر كأن تتواجد فيها شحنات كهربائية أو أقطاب مغناطيسية مثلا ولما كنا فى حالتنا هذه حيال قوى نابعـــة من مركز للقوى أو أكثر فسنجد أن الطريقة الاحدائية المثلى لمعالجة مثل هذه الحالات هى طريقة الاحدائيات القطبية وفيها تحلل الحركة فى اتجاهين متعامدين أحدهما مركزى والآخر متعامد عليه ويدور هذان الاتجاهان مع حركة الجسيم فى مداره . ولقد سبق اشتقاق الصور القطبية لمركبات السرعة والعجلة فى الباب الخامس .

ولدراسة هذا النوع من الحركة طريقان :

١ ـ **الطريق الاول كينماتيكى :** وفيه يعطى شكل المسار ومعدل قطعه ويطلب إيجاد قانون القوة المسببة لهذه الحركة ويقصد بقانون القوة الدالة التى

تربط القوة بالموضع العام (r, θ) مثلا ويجرى فى هذه الحالة تفاضلان للمتغير r بالنسبة للزمن t ويعوض الناتج فى الصور القطبية لمركبات العجلة للحصول على تلك الأخيرة بدلالة الموضع . وبضرب العجلة فى كتلة الجسيم نحصل على القوة المؤثرة عليه حسب قانون نيوتن الأساسى للحركة .

٢ ـ الطريق الثانى ديناميكى : وفيه يعطى قانون القوة أى دالتهـــا بالنسبة للموضع وكذا أحوال بداية الحركة وهى الموضع الابتدائى والسرعة الابتدائية أى عندما تكون $(t = 0)$. وفى هذه الحالة يجرى التعويض فى الصور القطبية لمركبات العجلة فنحصل على معادلات تفاضلية بحلها نحصل على معادلة المسار . غير أن الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية (أى تحتوى مشتقات تفاضلية من الرتبة الثانية) سيحتوى على ثابتى تكامل يجرى تحديدها من أحوال البداية كما هو معروف فى الكينماتيكا .

بند ١٠٠ ـ الحركة المتأثرة بقوة مركزية فقط :

كثيرا ما تكون قوة المجال صادرة من منبع أو مركز معين بحيث تنعـــدم المركبة العمودية لقوة المجال وبالتالى تنعدم العجلة العمودية لحركة جسيم دائمـا وبتطبيق هذا الشرط نجد أن :

$$f_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

ومنها ينتج أن :

$$r^2\dot{\theta} = \text{const} \qquad \cdots \cdots (1)$$

يتضح من أخذ العزوم لمركبتى السرعة المركزية والمتعامدة حول O أن الكمية $(r^2\dot{\theta})$ تساوى بمجموع عزمى المركبتين المذكورتين . أى أن عـــزم

السرعة المحصلة حول مركز القوة O يساوى دائما مقدارا ثابتا حسب المعادلة (1) . ولما كانت كمية حركة جسيم تساوى حاصل ضرب كتلته فى سرعته كان ـ تبعا لما سبق ـ عزم كمية حركة الجسيم حول مركز القوة المركزية دائما ثابتا . ولهذه النتيجة أهمية ستظهر عند الكلام على قانون كمية الحركة الزاوية أو كمية الحركة الدورانية . وبناء على ثبات عزم السرعة المحصلة حول مركز الجذب فى هذه الحالة ينتج أنه باقتراب الجسيم من مركز الجذب تزداد سرعته وتقل كلما ابتعد عن مركز الجذب .

ومن ناحية أخرى إذا عرفنا **السرعة المساحية** بالمساحة التى يغطيها الشعاع الواصل بين مركز القوة والجسيم فى وحدة الزمن نجد أن السرعة المساحية تعطيها الكمية ($\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$) وهى ثابتة بحسب المعادلة (1) وليرمز لها بالرمز ($\frac{1}{2} h$) وعليه .

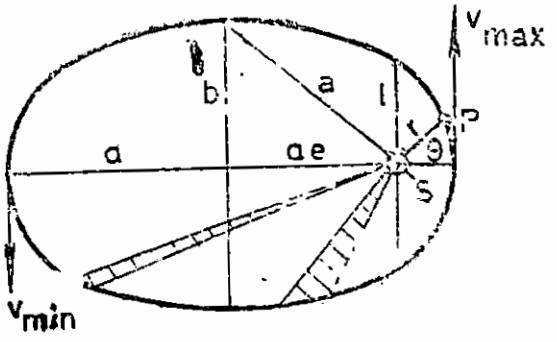
$$r^2 \dot{\theta} = h = \text{const} \qquad \cdots \cdots \quad (2)$$

ومن هنا يثبت **قانون المساحات** والذى ينص على أن السرعة المساحية دائما ثابتة فى حالة ما إذا كانت القوة مركزية دائما وقد أثبتت أرصاد « كبلر » صحة هذا القانون فى حركة الكواكب كما سيأتى بعد .

تطبيقات فلكية ـ حركة الكواكب

بند ١٠١ ـ قوانين كبلر لحركة الكواكب :

من أهم تطبيقات الحركة بالإحداثيات القطبية دراسة حركة الكواكب سواء أكانت طبيعية أو من صنع الإنسان ولقد قام « كبلر ١٥٧١ - ١٦٣٠ »



شكل (١٠٨)

وهو من معاصري جاليليو بأرصاد متعددة لحركة الكواكب خلص منها إلى القوانين الثلاثة الآتية المعروفة باسمه :

I — القانون الأول : تتحرك الكواكب فى مدارات على شكل قطاعات ناقصة تقع الشمس فى إحدى بؤرتيها شكل (١٠٨)

II — القانون الثانى : يمسح المستقيم الواصل بين الشمس والكوكب مساحات متساوية فى أزمنـــة متساوية . أى أن قانون المساحات قائم فى حالة حركة الكواكب . ويترتب على هذا تزايد سرعة الكوكب كلما اقترب من الشمس كما أوضحنا فى البند السابق .

III — القانون الثالث : يتناسب مكعب نصف القطر الأكبر لمسار الكوكب مع مربع زمنه الدورى . ومعـــامل التناسب ثابت لكل كواكب المجموعة الشمسية .

هذه هى نتائج الأرصاد ولقد جاء نيوتن بعد إعلان هذه المشاهدات بحوالى ستين عاما ليثبت على أساسها **قانون الجذب العام** الذى يعتبر من أكبر كشوف الإنسان .

بند ١٠٢ ـ قانون الجذب العام :

ينص قانون الجذب العام على أن « كل جسمين فى الكون يتجاذبان بقوة تتناسب طرديا مع حاصـــل ضرب كتلتيهما وعكسيا مع مربع المسافة بينهما

ويعرف هذا القانون أيضا باسم **قانون التربيع العكسى** واعتبر نيوتن فى وقتها أن اكتشاف هذا القانون لا يعادله إلا كشف كنوز المصريين القدماء . ولقد أصبح هذا القانون بحق أهم دستور للحركة الكوكبية .

ولإثبات هذا القانون يقتضى التسلسل التاريخى لهذه الإكتشافات أن نبدأ بقوانين كبلر وننتقل منها بالإستنتاج الرياضى لنثبت قانون الجذب العام وهذا هو الطريق الأول المنوه عنه بالبند (٩٩) وفيه يعطى المسار ومعدل قطعه ويطلب قانون القوة كما سبق شرحه .

ولنبدأ بصياغة قوانين كبلر فى صورها الرياضية :

القانون الأول : تمثل المعادلة

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \qquad \ldots\ldots (3)$$

قطعاً مخروطياً مسنداً إلى بؤرته كنقطة أصل . وفيها l هى نصف الوتر البؤرى العمودى ، e هى اختلافه المركزى (eccentricity) (أنظر شكل (١٠٨)

القانون الثانى : يقتضى ثبات السرعة المساحية أن تكون :

$$r^2 \dot{\theta} = h = \text{const} \qquad \ldots\ldots (4)$$

القانون الثالث وينص على أن

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const} \quad \ldots\ \ldots\ (5)$$

وهذه النسبة ثابتة لجميع الكواكب وفيها a هى نصف القطر الأكبر للقطع الناقص ، T هى الزمن الدورى للكوكب وهو الزمن الذى يتم فيه الكوكب دورة كاملة .

من قانون كبلر الثانى (المعادلة 4) الخاص بثبات السرعة المساحية نستنتج أن القوة المؤثرة على الكوكب قوة مركزية أى أن المركبة المتعامدة منعدمة وبذا يتبقى علينا إيجاد القوة المركزية فقط .

بمفاضلة المعادلة (3) بالنسبة الزمن والتعويض من المعادلة (4) نجد أن :

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{-l(-e\sin\theta)h}{(1+e\cos\theta)^2 r^2}$$

$$= \frac{hle}{l^3}\sin\theta = \frac{he}{l}\cdot\sin\theta$$

وبمفاضلة هذا المقدار مرة أخرى بالنسبة الزمن والتعويض من المعادلة (4) نحصل على :

$$\ddot{r} = \frac{he}{l}\cdot\cos\theta\cdot\dot{\theta} = \frac{h^2 e\cos\theta}{l r^2} \quad \ldots\ \ldots\ (6)$$

بالتعويض من (4) ، (6) فى الصورة القطبية للحركة المركزية (أنظر الباب الخامس) نحصل على :

$$f_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{h^2 e\cos\theta}{l r^2} - r\cdot\frac{h^2}{r^4}$$

$$= \frac{h}{r^2}\left[\frac{e\cos\theta}{l} - \frac{1}{r}\right]$$

$$\therefore \mu f_r = -\frac{(h^2/l)}{r^2} = -\frac{\mu}{r^2} \qquad \ldots\ldots (7)$$

وذلك بتعويض الثابت (h^2/l) بثابت آخر μ يعرف بمعامل العجلة المركزية

$$\mu = \frac{h^2}{l} \qquad \ldots\ldots (8)$$

بضرب لمعادلة (7) فى كتلة الكوكب m نجد أن القوة المركزية الجاذبة له F تعطيها العلاقة الآتية :

$$F = -\frac{\mu m}{r^2}$$

وهى قوة تتناسب عكسيا مع مربع المسافة r بين الكوكب والشمس وإشارتها السالبة تدل على أن القوة متجهة نحو المركز أى أنها قوة جذب .

ولما كانت قوة الجذب المتبادل بين الكوكب m والشمس M تخضع لقانون الفعل ورد الفعل (أنظر الباب السادس) أى أن جذب الشمس للكوكب مساو تماما لجذب الكوكب للشمس كان من المنطق ظهور كل من كتلتى الشمس M والكوكب m بشكل متماثل فى هذا القانون ولذا سنستبدل الثابت μ بثابت آخر γM فتأخذ قوة الجذب الصورة الآتية :

$$F = -\frac{\gamma Mm}{r^2} \qquad \ldots\ldots (9)$$

وهى ما يعبر عنه بقانون الجذب العام . والثابت الجديد γ يعرف بثابت التجاذب العام وسنثبت فيما يلى أنه ثابت لجميع مادة الكون .

باستخدام قانون كبلر الثالث وتعويض زمن الدورة الكاملة كخارج قسمة المساحة الكلية للقطع الناقص (πab) على السرعة المساحية ($\frac{1}{2}h$) نجد أن :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a^3}{\left(\frac{\pi a b}{\frac{1}{2}h}\right)^2} = \frac{a h^2}{4 \pi^2 b^2} = \frac{h^2}{4 \pi^2 l}$$

$$= \frac{\mu}{4 \pi^2} = \frac{\gamma M}{4 \pi^2} = \text{const} \qquad \cdots \cdots (10)$$

ولما كان الناتج ($\frac{\gamma M}{4 \pi^2}$) مقدارا ثابتا لجميع الكواكب كما وجد كبلر فى قانونه الثالث لزم أن تكون γ مقدارا ثابتا لجميع الكواكب مهما اختلفت مادة تكوينها وبالتالى يمكن القول أن ثابت التجـــاذب γ مقدار ثابت لمـــادة الكون على الاطلاق .

ويقاس الثابت γ بطرق مختلفة فى علم الطبيعة وقيمته حسب أدق القياسات هى :

$$\gamma = 6.66 \times 10^{-8} \text{ C. G. S. units}$$

أى أن كتلتين قيمة كل واحدة جرام واحد وعلى بعد سنتيمتر واحد عن بعضهما يتجاذبان بقوة قدرها ٦٫٦٦ × ١٠ $^{-٨}$ من الداين وهى قوة صغيرة جدا أى أن الجذب النيوتونى بين أجزاء المادة جذب ضعيف نوعا ما إلا أن قيمته تكبر بين الكتل الكبيرة كالأجرام السماوية .

بند ١٠٣ — بعض الظواهر الطبيعية الخاضعة لقانون التربيع العكسى للمسافة :

يستمد قانون التربيع العكسى للمسافة أهميته من انطباقه على كثير من الظواهر الطبيعية نعرض منها على سبيل المثال لا الحصر ما يأتى :

١ — التجاذب النيوتونى بين أجزاء المادة كما سبق شرحه .

٢ — التجاذب بين الكترونات الذرة ونواتها .

٣ — التجاذب الكهربى والمغناطيسى إذا تواجدت شحنتان كهربيتان e ، e' مختلفتان فى النوع على مسافة r نشأت بينهما قوة تجاذب خاضعة لقانون التربيع العكسى ويعرف القانون فى هذه الحالة بقانون « كولومب » .

$$\frac{ee'}{r^2}$$

٤ — ظاهرة انتشار الضوء والصوت : شدة الضوء أو الصوت فى نقطة ما تتناسب عكسيا مع مربع بعدها عن مصدر الضوء أو الصوت .

بند ١٠٤ — ايجاد مسار الكوكب اذا علم قانون القوة وأحوال بداية الحركة :

إذا أعطينا قانون التربيع العكسى كقانون للقـــوة وكذا الموضع الابتدائى والسرعة الابتدائية لحركة كوكب فاننا سنسير فى الطريق العكسى للحالة السابقة (بند ١٠٢) أى طريق التكامل للحصول على المعادلة القطبية للمسار .

ولنبدأ بوضع الأشياء المعطاة فى صورة معادلات :

العجلة المركزية الخاضعة لقانون التربيع العكسى تعطيها العلاقة الآتية :

$$f_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad \ldots\ldots (11)$$

كما أن انعدام العجلة المتعامدة يجعل السرعة المساحية ثابتة أى أن :

$$r^2\dot{\theta} = h \quad \ldots\ldots (12)$$

والمعادلتان (11) ، (12) هما المعادلتان التفاضليتان لحركة الكوكب وبحذف $\dot{\theta}$ بينهما نحصل على :

$$f_r = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2} \quad \ldots\ldots (13)$$

ويمكن تكامل المعادلة (13) بالتعويض ($r = \frac{1}{u}$) وبحذف t منها

$$\therefore \dot{r} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{h}{r^2} = -h \cdot \frac{du}{d\theta}$$

$$\& \quad \ddot{r} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2} \cdot \dot{\theta} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

وبتعويض هذه النتائج فى المعادلة (13) نحصل على :

$$f_r = -h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$= -\mu u^2$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \left(\frac{\mu}{h^2}\right) \quad \ldots\ldots (14)$$

وهى المعادلة التفاضلية للمسار إذ أنها تربط θ ، u (مقلوب r) .

وصورة المعادلة (14) صادفتنا فى الحركة الاهتزازية البسيطة (الباب الحادى عشر) وحلها العام قياسا على ذلك هو :

$$u = A \cos(\theta + \varepsilon) + \frac{\mu}{h^2} \qquad \ldots\ldots (15)$$

وفيها A, ε هما ثابتا التكامل اللذان تعينهما أحوال البداية . ويمكن التحقق من أن المعادلة (15) هى حل المعادلة (14) بتفاضل (15) مرتين والتعويض فى الثانية .

بتعويض ($u = \frac{1}{r}$) فى المعادلة (15) نحصل على الصورة القطبية لمعادلة المسار:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + \frac{A h^2}{\mu} \cos(\theta + \varepsilon)} \qquad \ldots\ldots (16)$$

وهى معادلة قطع مخروطى تمثل الكمية (h^2/μ) نصف وتره البؤرى العمودى l وتمثل الكمية (Ah^2/μ) اختلافه المركزى e .

لإيجاد الثابتين المجهولين A , ε تعوض أحوال البداية وهى على سبيل الفرض : بدأ الكوكب من الموضع الابتدائى $(r_0 , 0)$ بسرعة متعامدة v_0 وبذا تنعدم المركبة المركزية للسرعة الابتدائية $(\dot{r} , 0)$. بتعويض الموضع الابتدائى نحصل على :

$$r_0 = \frac{l}{1 + A\, l \cos\varepsilon} \qquad \ldots\ldots (17)$$

بتفاضل المعادلة (16) بالنسبة للزمن نحصل على :

$$\dot{r} = \frac{A\, l^2 \sin(\theta + \varepsilon)\,.\,\dot{\theta}}{[1 + A\, l \cos(\theta + \varepsilon)]^2}$$

وبتعويض الشرط الابتدائي ($\dot{r}_0 = 0$) فيها نحصل على :

$$\frac{A\, l \sin \varepsilon\, \dot{\theta}_0}{1 + A\, l \cos \varepsilon} = 0 \qquad \ldots\ldots (18)$$

المعادلتان (17) ، (18) تعطيان الثابتين A , ε :

$$\varepsilon = 0 \,,\, A = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{l}\right)$$

وبذا تؤول المعادلة القطبية للمدار إلى الصورة الآتية :

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \qquad \ldots\ldots (19)$$

حيث l , e تعطيهما العلاقتان :

$$l = \frac{h^2}{\mu} \,,\, e = A\, l = \left(\frac{h^2}{\mu\, r_0} - 1\right) \qquad \ldots\ldots (20)$$

بند ١٠٥ ـ شكل المدار :

الشكل العام لمدارات الكواكب هو قطـــاعات مخروطية ويتوقف تحديد نوع هذا القطاع المخروطي على قيمة اختلافه المركزي e وهذا يتوقف بدوره على الموضع الابتدائي والسرعة الابتدائية . بتعويض ($h = r_0\, v_0$) في ثاني

العلاقتين (20) نحصل على :

$$e = \left(\frac{r_0 v_0^2}{\mu} - 1\right) \qquad \cdots\cdots (21)$$

ومنها يمكن الحصول على السرعة الابتدائية v_0 لكل من المسارات الآتية :

١ — فى حالة المسار الدائرى تكون ($e = 0$) وتعطى المعادلة (21) السرعة الإبتدائية الآتية :

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \qquad \cdots\cdots (22a)$$

٢ — وإذا كان المسار قطعا ناقصا ($0 < e < 1$) فإن المعادلة (21) تعطى السرعة الإبتدائية بما يأتى :

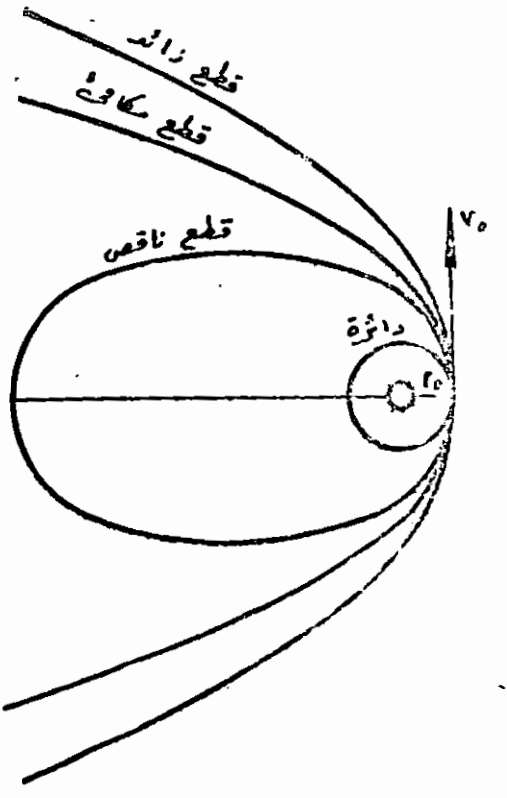
$$\sqrt{\frac{\mu}{r_0}} < v_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} \qquad \cdots\cdots (22.b)$$

٣ — وإذا كان المسار قطعا مكافئا ($e = 1$) فإن المعادلة (21) تعطى السرعة الابتدائية .

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} \qquad \cdots\cdots (22.c)$$

٤ — وإذا كان المسار قطعا زائدا ($e > 1$) فإن المعادلة (21) تعطى السرعة الإبتدائية بما يأتى :

$$v_0 > \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} \qquad \cdots\cdots (22.d)$$



شكل (١٠٩)

ويوضح شكل (١٠٩) المدارات الأربعة السابقة

مثال : يدور إلكترون فى مدار دائرى حول نواة ذرته بسرعة ثابتة المقدار v أثر على الاليكترون بدفع مماس لمداره أوجد المقدار الذى يجب أن تبلغه سرعة الإلكترون من أثر الدفع حتى ينفصل عن ذرته .

الحل

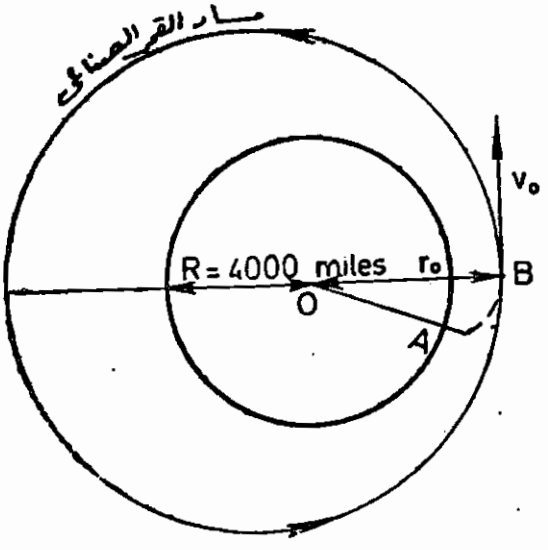
يلاحظ فيما سبق أن سرعة القذف v_0 التى تعطى مسارا دائريا هى $\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ وأن الجسيم يسير بعد ذلك فى مساره الدائرى بسرعة ثابتة المقدار

كما أن سرعة القذف v_0 التى تعطى مسارا على شكل قطع مكافىء هى $\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$

والجسيم الذى يسير فى قطع مكافىء سيسعى إلى اللانهاية نظرا لوقوع إحدى نقط القطع المكافىء فى اللانهاية . أى أن الجسيم سيهرب نهائيا من النواة الجاذبة له إذا سار فى قطع مكافىء ومن هذا يتضح أن النسبة بين السرعة

الجديدة والسرعة الاصلية $\sqrt{2}$ أى أن السرعة الأصلية يجب أن تزيد من أثر الدفع بمقدار ٤١ فى المائة من قيمتها حتى ينفصل الإلكترون عن ذرته .

بند ١٠٦ ـ سرع أطلاق الأقمار الصناعية :



شكل (١١٠)

يحمل القمر الصناعى صاروخ متعدد المراحل يسير بدفع غازات الاحتراق المنبعثة من مؤخرته . ويبدأ الصاروخ حركته من نقطة A عموديا على سطح الأرض (شكل ١١٠) دافعا أمامه القمر الصناعى ثم ينحرف مساره شيئا فشيئا إلى أن يصل نقطة B مثلا تكاد تنعدم عندها كثافة الهواء فوظيفة الصاروخ هى إيصال القمر الصناعى إلى النقطة B وهى أو مداره الحر بسرعة ابتدائية v_o متعامدة على الخط BO ويكفى مقدارها لإتمام دوران القمر الصناعى فى أحد القطاعات المخروطية السابق ذكرها عند الكلام عن مدارات الكوكب.

وحركة الصاروخ فى مساره AB المبين بخط متقطع بشكل (١١٠) معقدة نوعا ما وتخرج عن نطاق هذا الكتاب .

أما الحركة المدارية الحرة التى يجريها القمر الصناعى ابتداء من النقطة B فى جو يكاد يكون خاليا من الهواء فينطبق عليها جميع الحسابات التى سبق أجراؤها لكوا كب الطبيعية وسنعين سرعة القذف v_0 المناسبة لكل مدار من القطاعات الهذروطية . تعطى المعادلة (a — 22) السرعة الإبتدائية للمدار الدائرى . ويمكن تعيين معامل عجلة الجاذبية الأرضية μ بمعلومية مقدار هذه العجلة بالقرب من سطح الأرض

$$\frac{\mu}{R^2} = g = 32 \text{ ft/sec}^2$$

وبالتعويض فى المعادلة (a — 22) نحصل على

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} = \sqrt{\frac{g R^2}{r_0}} \qquad \ldots\ldots (23)$$

وإذا كانت r_0 تساوى بالتقريب نصف قطر الأرض فان السرعة الإبتدائية للسار الدائرى تصير :

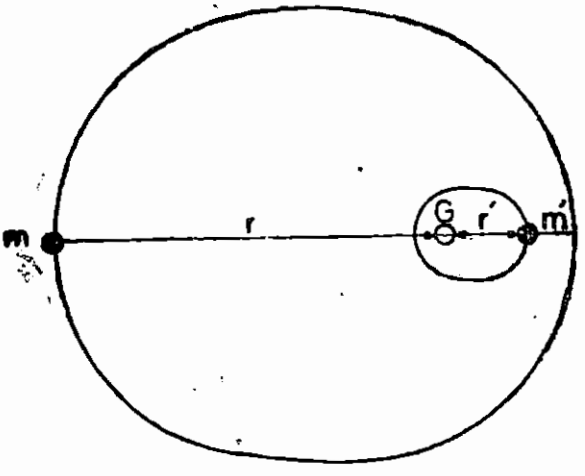
$$v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{32 \times 4000}{3 \times 1760}} = 5\ 0 \text{ miles/sec} \quad (24 - a)$$

والسرعة الإبتدائية للمدار الذى على شكل قطاع مكافىء تكون

$$v_0 = \sqrt{2} \times 5.0 = 7.0 \text{ miles/sec.} \qquad \ldots\ldots (24 - b)$$

وسرع الاطلاق الواقعة بين (a — 24) ، (b — 24) تعطى مدارات على أشكال قطاعات ناقصة أما سرع الاطلاق فوق (b — 24) فتعطى مدارات على أشكال قطاعات زائدة .

بند ١٠٧ — مسألة الكوكبين :



شكل (١١١)

تبلغ النسبة بين كتلة الشمس وكتلة أكبر كواكبها مئات الآلاف من المرات مما جعلنا نهمل فيما سبق حركة الشمس نتيجة جذب الكواكب لها غير أن النسبة بين بعض الكواكب وأقمارها تكون أصغر من ذلك بكثير فالنسبة بين كتلتى الأرض والقمر تبلغ ٧٥ مرة فقط مما يجعل لجـــذب القمر على الأرض أثرا محسوسا نلمسه فى ظاهرتى المد والجذر . وسنعالج فيما يلى حركة كل من جسمين سماويين نتيجة للجذب المتبادل بينهما .

لنفرض أن الجسمين هما m , m' وأن مركز كتلتيهما هو G (شكل ١١١) تيسيراً للمسألة سنفرض أن الجسمين بعيـــدان عن أى جـــذب خارجى ولذا فإن مركـز كتلتيهما G إما أن يكون متحركا حركة منتظمة فى خـــط مستقيم وأما أن يكون ساكنا حسب أحـــوال البداية وسنفرض للتيسير أن G ثابتة .

قوة الجذب بين الجسمين F أعطيها العلاقة :

$$F = \frac{\gamma\, mm'}{(r + r')^2} \qquad \cdots\cdots (25)$$

ومن قاعدة مركز الكتل نحصل على

$$\frac{m}{r'} = \frac{m'}{r} = \frac{m + m'}{r + r'} \qquad \cdots\cdots (26)$$

وبحذف r' بين (25) ، (26) نحصل على

$$F = \frac{\gamma m\, m'^3}{(m+m')^2 r^2} = \frac{\gamma . m . \dfrac{m'^3}{(m + m')^2}}{r^2} \qquad \cdots\cdots (27)$$

أى أن الجسيم m مجذوب إلى المركز G بقوة تتناسب عكسيا مع مربع المسافة بينهما وعلى هذا فالجسيم m يدور حول G فى قطع ناقص بؤرته G كما لو كانت تجذبه كتلة وهمية $\frac{m'^3}{(m + m')^2}$ واقعة فى G (أنظر المعادلة (27))

وبحذف r بين المعادلتين (25) ، (26) نحصل على :

$$F = \frac{\gamma m' \dfrac{m^3}{(m+m')^2}}{r'^2} \qquad \cdots\cdots (28)$$

وهى تدلى على أن الجسيم m يدور فى قطع ناقص بؤرته G كما لو كانت تجذبه كتلة وهمية مقدارها $\frac{m^3}{(m + m')^2}$ واقعة فى G

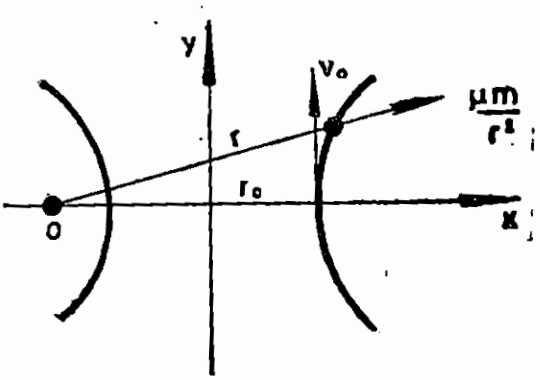
وعلى هذا فالجسمان يدوران حول G فى قطعين ناقصين ومن الواضح أن الجسيم الأصغر يدور فى القطع الأكبر بينما يدور الجسيم الأكبر فى القطع الأصغر وكلما كبرت كتلة الأكبر انكمش مساره وهذا ما حدا بنا إلى إهمال حركة الشمس نتيجة لجذب كواكبها .

امثلة محلولة :

(١) يتحرك جسيم كتلته m متأثرا بقوة مركزية طاردة ($\frac{\mu m^2}{r^2}$) مبتدئا من نقطة $(r_0 , 0)$ بسرعة متعامدة v_0 . أوجد مسار الجسيم :

الحل

سبق حل هذه المسألة لجسيم متأثر بقوة مركزية جاذبة $\frac{-\mu m}{r^2}$ فى البند (١٠٤) وباتباع نفس الخطوات المتبعة فى البند المشار إليه نحصل على المسار المطلوب ويمكن الحصول مباشرة على معادلة المسار فى حالتنا هذه بتعويض μ بدلا من « μ — » فى العلاقات (19) , (20) بند ١٠٤ وعلى هذا



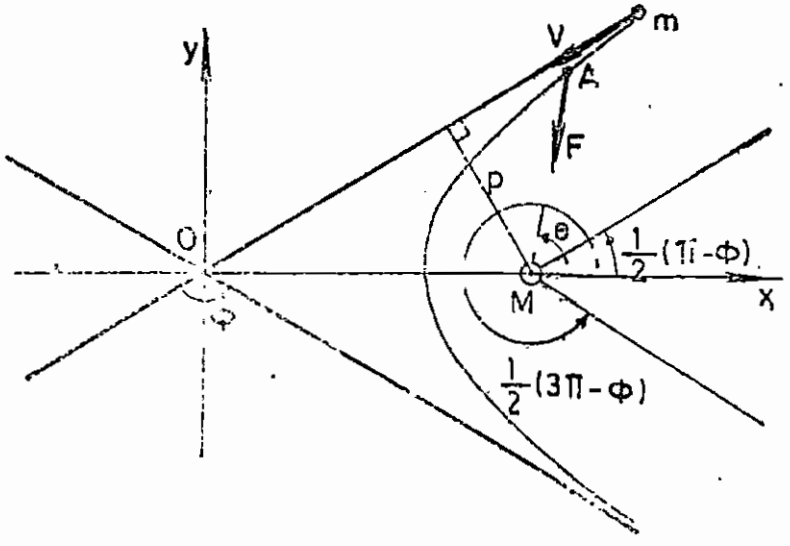
شكل (١١٢)

$$r = \frac{-h^2/\mu}{1+\left(-1-\frac{h^2}{\mu r_0}\right)\cos\theta} = \frac{-h^2/\mu}{1-\left(1+\frac{h^2}{\mu r_0}\right)\cos\theta}$$

وهى تمثل قطعا مخروطيا اختلافه المركزى $\left(1+\frac{h^2}{\mu r_0}\right)$ وهو أكبر من الواحد الصحيح. وعليه فالمسار هو الفرع من قطع زائد البعيد عن مركز الطرد.

(٢) نيزك كتلته m آت من بعيد بسرعة v طول العمود الساقط عليها من الشمس M يساوى p (شكل ١١٣) فإذا علمت أن النيزك بمروره حول الشمس مبتعدا إلى ما نهاية من الناحية الأخرى انحرف مساره زاوية ϕ نتيجة لجذب الشمس أثبت أن :

$$M = \frac{v^2 p}{\gamma} \tan\frac{\phi}{2}$$



شكل (١١٣)

يمكن الإستنتاج أن مدار النيزك m قطع زائد يكون خطاه التقريبيان هما اتجاها السرعتين البعيدتين V حيث أن القطع الزائد هو القطع المخروطى الذى له خطان تقريبان .

نستخدم قانون الدفع مطبقاً على الموضعين اللانهائيين ومحللا فى الإتجاه الأفقى مركبة دفع قوة الجذب F فى الاتجاه الأفقى فى الموضعين اللانهائيين تعطيها الكمية الآتية :

$$\overset{\blacktriangle}{F}_x = \int \frac{-\gamma\, m\, M \cos\theta\, dt}{r^2} = \int \frac{-\gamma\, m\, M \cos\theta}{r^2\dot{\theta}}\, \dot{\theta}\, dt$$

$$\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$= \int \frac{-\gamma\, m\, M \cos\theta}{h}\, d\theta$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}$$

$$= \frac{2\gamma\, m\, M}{h} \cos\frac{\phi}{2} = \frac{2\gamma\, m\, M}{V p} \cos\frac{\phi}{2} \qquad \ldots\ldots (30)$$

والتغير بين كميتى حركة النيزك فى الموضعين اللانهائيين محللا فى الإتجـــاه الأفقى هو :

$$m\, V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}\right) - \left[-\, m\, V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}\right)\right]$$

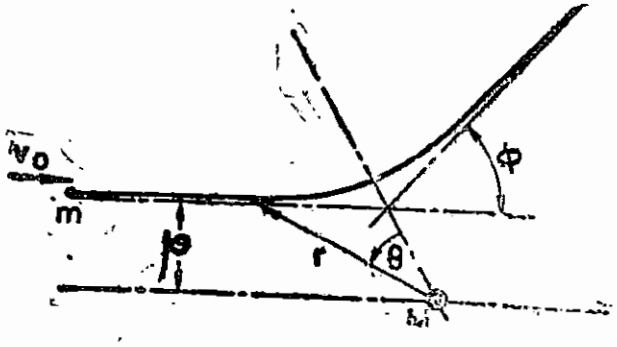
$$= 2\, m\, V \sin\frac{\phi}{2} \qquad \ldots\ldots (31)$$

بمساواة الكميتين (30) ، (31) تبعاً لقانون الدفع نحصل على :

$$M = \frac{V^2 p}{\gamma} \tan\frac{\phi}{2} \qquad \ldots\ldots (32)$$

بند ١٠٨ — تشتت الجسيمات :

لقد اكتسبت مسألة تصادم الجسيمات الذرية أهمية خاصة فى الآونة الأخيرة فعلى سبيل المثال لو أطلقت جسيمة ذرية خفيفة كجسيمة α كتلتها m وشحنتها الكهربية q_1 موجبة نحو جسيمة ذرية ثقيلة نسبيا كنواة ذرة كتلتها M وشحنتها q_2 موجبة كذلك كما هو مبين بشكل (١١٤) . فإن القوى التى تحكم الحركة فى هذه الحالة هي قوة كولوم الخاضعة لقانون التربيع العكسى للمسافة كقوة الجذب النيوتونى غير أنها قوة طرد مركزى فى حالتنا هذه .



شكل (١١٤)

$$F_r = + \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{m \mu}{r^5}$$

وباعتبار M أكبر كثيرا من m سوف نفرض أن M ثابتة وأن الجسيمة الصغيرة m تتحرك نحو M من مسافة بعيدة بسرعة v طول العمود الساقط عليها من M يساوى p ويسمى بمعتبر التصادم .

والمسألة بهذه الصورة يغطيها المثالان المحلولان السابقان فمن المثال الأول

يتضح أن مسار الجسيم المعرض لطرد مركزى خاضع لقانون التربيع العكسى للمسافة هو قطع زائد معادلته العامة يمكن وضعها على الصورة .

$$r = \frac{l}{1 - e \cos \theta} \qquad \cdots\cdots (33)$$

حيث e أكبر من الواحد الصحيح ويمكن ربطها بزاوية الانحراف ϕ بتعريض المواضع اللانهائية فى هذه المعادلة

$$\text{as } r \to \infty \ , \ (1 - e \cos \theta) \to 0$$

$$\therefore \ \theta \to \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right)$$

$$\therefore \ 1 - e \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right) = 0$$

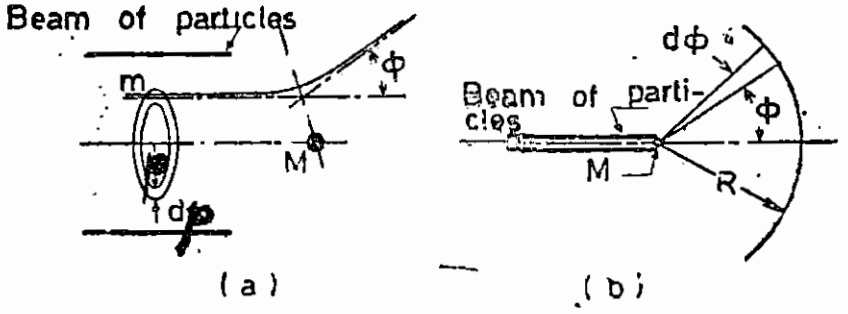
$$\therefore \ \sin \frac{\phi}{2} = \frac{1}{e}$$

أما المثال المحلول الثانى فيربط زاوية الانحراف ϕ بمتغيرات التصادم الأخرى لحالة جذب مركزى خاضع لقانون التربيع العكسى للمسافة ويمكن تعديل نتيجة هذا المثال لحالة الطرد المركزى فى مسألتنا هذه فنحصل على

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{q_1 \, q_2}{mpV^2} \qquad \cdots\cdots (32)$$

وذلك لأن معامل العجلة μ يساوى γM فى حالة الجذب النيوتونى ويساوى $\frac{q_1 \, q_2}{m}$ فى حالة الطرد الكهربى . وتعطى المعادلة الأخيرة زاوية الانحراف أو زاوية التشتت ϕ بدلالة أحوال بداية الحركة فى المسألة .

تجربة « وذرفورد » : لما كان متغير التصادم p غير قابل للقياس المباشر بينما زاوية التشتت ϕ يمكن رصدها فمن المستحسن وضع المعادلة السابقة فى صور لا تظهر فيها p .



شكل (١١٥)

نفرض أننا صوبنا حزمة من الجسيمات الخفيفة نحو جسيم ثقيل نسبيا كتلته M كما هو مبين تفضيلا بشكل (١١٥ - أ) ويبين الجزء (ب) من الشكل مصغر العملية ومنه يتضح أن المنطقة التى يحدث فيها التشتت صغيرة بحيث يمكن اعتبار أن الجسيمات الخفيفة المشتتة تسقط على سطح كرة مركزها الجسيم الثقيل M ونصف قطرها R كبير بالنسبة لمتغير التصادم p .

وبالرجوع إلى شكل (١١٥ — أ) نجد أن جميع الجسيمات الخفيفة المارة فى الحلقة الواقعة بين نصف قطر p ونصف قطر (p+dp) تنحرف بزاوية واقعة بين ϕ ، $(\phi + d\phi)$. فلو كان عدد الجسيمات التى تخترق وحدة المساحات عموديا عليها فى وحدة الزمن هى N فإن العدد الذى يخترق الحلقة المشار إليها هو

$$dN = N2\,\pi\,p\,dp \qquad \ldots - (35)$$

وهذا هو نفس العدد الذى ينحرف فى وحدة الزمن خلال الزاوية المحصورة بين ϕ ، $(\phi + d\phi)$.

ومن المعادلة (34) التى تربط المتغيرين p ، ϕ نحصل بالتفاضل على

$$dp = -\frac{q_1 q_2}{2 m V^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} d\phi \qquad \cdots\cdots (36)$$

وبحذف p بين المعادلات الثلاث (34) ، (35) ، (36) نحصل على

$$dN = N . 2\pi \left(\frac{q_1 q_2}{m V^2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\phi}{2}}\right)\left(-\frac{q_1 q_2}{2mV^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} d\phi\right)$$

$$\therefore \quad |dN| = N \pi \left(\frac{q_1 q_2}{m V^2}\right)^2 \frac{\cos \phi/2}{\sin^3 \phi/2} |d\phi|$$

وهذا العـــدد من الجسيمات سوف يسقط بعد تشتته على المنطقة الكروية المبينة بشكل (١١٥ — ب) والتى مساحتها

$$dA = 2\pi R \sin\phi \, R \, d\phi = 4\pi R^2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} d\phi$$

وعلى هذا فعدد الجسيمات الساقطة فى وحدة الزمن على وحدة المساحة من تلك الكرة الكبيرة يساوى بقسمة المقدارين السابقين

$$\frac{dN}{dA} = \frac{N}{R^2} \left(\frac{q_1 q_2}{2mV^2}\right) \cdot \frac{1}{\sin^4 (\phi/2)} \qquad \cdots\cdots (37)$$

وهذا هو قانون « رذرفورد » الشهير فى تشتت الجسيمات الذرية وهو يربط

بين متغيرات يمكن قياسها فى عملية التشتت ومنه يتضح أن عدد الجسيمات الساقطة على وحدة المساحة من السطح الكروى الكبير يتناسب عكسيا مع $\left(\sin^4 \frac{\phi}{2}\right)$ وتنبنى هذه النتيجة على طبيعة القوى المتبادلة بين الجسيمات وخضوع هذه القوى لقانون التربيع العكسى للمسافة .

وقد أثبت « رذرفورد » صحة هذا القانون عمليا بدراسته لتشتت جسيمات α إثر اصطدامها بالذرات وذلك لزوايا تبلغ ϕ وتناظر قيما لمتغير التصادم p تقل عن $١٠^{-١٢}$ سم وبهذا ثبت عمليا أن كتلة الذرة مركزة فى منطقة صغيرة للغاية عند المركز وهو ما أدى إلى اكتشاف نواة الذرة وإلى تقدير حجمها الصغير بالنسبة لحجم الذرة البالغ حوالى $١٠^{-٨}$ سم ومنه يتضح أن أغلب حجم الذرة فراغ .

خلاصة البـــاب

١) إذا أعطى مسار الجسيم ومعدل قطعه أمكن الحصول على قانون القوة عن طريق التفاضل بالنسبة للزمن والتعويض فى الصور القطبية لمركبات العجلة .

٢) إذا أعطى قانون القوة وأحوال البداية عوضنا فى الصور القطبية للعجلة وكاملنا المعادلات التفاضلية الناتجة للحصول على المسار وتعين أحـــوال البداية ثوابت التكامل فى كل مرة .

٣) ينطبق قانون المساحات ($r^2 \dot{\theta} = h = \text{const.}$) على حركة الجسيمات المتأثرة بقوة مركزية فقط .

٤) قوانين كبلر لحركة الكواكب :

I — تتحرك الكواكب فى قطاعات ناقصة تقع الشمس فى إحدى بؤرتيها $\left(r = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \right)$.

II — قانون المساحات المذكور فى (٣) سار على حركة الكواكب . ويسرع الكوكب فى حركته كلما اقترب من الشمس .

III — المقدار $\left(\frac{a^3}{T^2} \right)$ ثابت لجميع الكواكب وتعطى المعادلة (0.) الزمن الدورى لأى كوكب بما يأتى :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}$$

٥) قانون نيوتن للجذب العام بين مادة الكون :

$$F = - \frac{\gamma M m}{r^2}$$

٦) سرعة إطلاق الأقمار الصناعية هى $\left(\sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \right)$ للمدار الدائرى ، $\left(\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} \right)$ للقطع المكافىء . وتقع بين السرعتين المذكورتين للقطع الناقص وهى أكبر من السرعة الثانية للقطع الزائد .

٧ — الكوكبان المتجاذبان يدوران فى قطعين ناقصين حول مركز ثقلهما كمركز للجذب .

تمرينات

(١) المعادلة القطبية لمدار جسيم متأثر بقوة جذب مركزى هى ($r^3 = a^3 \cos 2\theta$) . ومقدار السرعة المتعامدة للجسيم هو u عندما تكون θ صفرا . أوجد مركبتى السرعة فى الاتجاهين المركزى والمتعامد وكذا السرعة

المحصلة بدلالة r . أوجد قوة الجذب بدلالة r (أولى هـ . ا . يونية سنة ١٩٤٧)

الجواب السرعة $v_r = \frac{u a}{r} = \sqrt{\frac{a^4}{r^2} - 1}, v_\theta = \frac{u a}{r}, \gamma = \frac{u a^3}{r^3}$

قوة الجذب : $\frac{3 u a^6}{r^7}$

(٢) يدور جسيم في المسار ($r = a \cos\theta$) متأثرا بقوة جذب مركزى فإذا كانت سرعته الإبتدائية في (a,0) هي ($\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}$) عمودية على الاتجاه المركزى وفيها μ مقدار ثابت . أوجد قوة الجذب بدلالة r .

(أولى هـ . ا . فبراير سنة ١٩٥٥)

الجواب : ($\frac{\mu m}{r^5}$)

(٣) جسيم كتلته m يتحرك في مجال القوى بحيث يدور الخط الواصل بين الجسيم ومركز المجال بسرعة زاوية ثابتة ω وكانت قوة المجال المؤثرة على الجسيم دائما متعامدة على الاتجاه المركزى أوجد قوة المجال بدلالة r ثم أوجد مسار الجسيم إذا علمت أنه بدأ من النقطة (a,0) بسرعة متعامدة v_0 .

(أولى هـ . ا . يناير سنة ١٩٥٦)

[الجواب : قوة المجال متعامدة ومقدارها ($f_\theta = 2\omega^2\sqrt{r^2 - a^2}$) المسار ($r = a\cosh\theta$)]

(٤) يتحرك جسيم كتلته m متأثرا بجذب مركزى ($\frac{\mu m}{r^3}$) فإذا قذف الجسيم من النقطة (a,0) بسرعة ($\frac{\sqrt{2\mu}}{a}$) تميل ٤٥° على الخط الواصل لمركز

الجذب أوجد مسار الجسيم (الجواب . $r = a\, e^{-\theta}$)

(٥) يتحرك جسيم m متأثرا بجذب مركزى ($\frac{\mu m}{r^3}$) أوجد مسار الجسيم إذا علمت أنه قذف من النقطة (a,0) بسرعة متعامدة :

(i) فى حالة ما إذا كانت سرعة القذف $\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}$

(ii) فى حالة ما إذا كانت $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$. ، الجواب : $r = a$ ، $r = a\cos\theta$ ،

(٦) يتحرك كوكب كتلته m فى قطع مكافىء حول الشمس متأثرا بجذب نيوتونى ($\frac{\gamma m M}{r^2}$) أوجد أقصى سرعة للكوكب بدلالة γ ، m ، بعد الكوكب فى الموضع الخاص بأقصى سرعة .

[الجواب : أقصى سرعة هى ($\sqrt{\frac{2\gamma M}{a}}$) عندما يكون الكوكب أقرب ما يكون من الشمس]

(٧) أصغر وأكبر سرعة لكوكب يدور حول الشمس هما على الترتيب ٣٠ ، ٢٩٫٢ كم/ث .

أوجد الاختلاف المركزى e لمدار الكوكب [الجواب : $\frac{1}{31}$] .

(٨) الاختلاف المركزى لمدار الأرض حول الشمس $= \frac{1}{60}$. أثبت أن بعد الأرض عن الشمس يزيد عن نصف القطر الأكبر لمدارها لفترة تساوى نصف السنة زائدا يومين .

(٩) يتحرك جسيم متأثراً بقوة جذب نيوتونى . وكانت عجلته على بعد قدم واحد من مركز الجذب تساوى ٣٢ قدم/ث٢ . قذف الجسيم بسرعة ٨قدم/ث متعامدة على الاتجاه المركزى ومن نقطة تبعد عنه بمقدار ٠٫٧٥ قدم أوجد القطر الأكبر والاختلاف المركزى لمدار الجسيم . ما مقدار السرعة الإبتدائية التى تجعل المدار قطعا مكافئا ؟ [الجواب : ٣ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{16}{3\sqrt{7}}$ قدم / ث] .

(١٠) جسيم كتلته m مربوط فى طرف خيط مرن معامل مرونته λ ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من نضـــد أفقى . شد الخيط لطوله الطبيعى l_0 وقذف الجسيم عموديا عليه بسرعة v فى مستوى النضد أوجد أقصى استطالة للخيط وسرعة الجسيم عندئذ .

[الجواب: أقصى استطالة $\frac{2mv^2}{\lambda}$. السرعة تعطيها العلاقة $V^2 = (v^2 - \frac{4mv^4}{\lambda l_0})$]

(١١) وضع جسيم كتلته m داخل أنبوبة دقيقة ملساء طولها 2a تدور فى مستوى أفقى حول محور رأسى مار باحدى نهايتيها بسرعة زاوية منتظمة ω . فإذا بدأ الجسيم الحركة من سكون نسبى فى منتصف الأنبوبة أوجد :

(١) سرعة الجسيم المطلقة عند خروجه من الأنبوبة. (٢) الزمن اللازم لذلك (٣) ضغط الجسيم على الأنبوبة . (٤) مسار الجسيم المطلق .

الجواب : (١) سرعة الخروج ($\omega a \sqrt{7}$)

(٢) الزمن $T = \frac{1}{\omega} \cosh^{-1}(7)$

(٣) الضغط فى مستوى الحركة $(N = 2m\omega^2 a \sinh \omega t)$

(٤) المسار المطلق معادلته $(r = a \cosh \theta)$

(١٢) مسار كوكب تعطيه المعادلة القطبية الآتية :

$$r = \frac{l}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta}$$

ومقدار أقصى سرعة له هو V أنفجر الكوكب فى موضع سرعته القصوى بحيث انشطر شطرين متساويين تماما وتلاشت سرعة أحد النصفين عقب الانفجار مباشرة . أوجد معادلة المسار الجديد للنصف الاخر وأقل سرعة يصل إليها .

[هـ ١٠ يناير سنة ١٩٦٢]