الباب الثالث عشر

مجالات القوى

بند ١٠٩ ـ مقدمة :

إذا وضع مغناطيس فى مكان ما أثر على الأجسام المغناطيسية من حوله بقوى تتوقف على أبعاد هذه الأجسام عنه وتسمى المنطقة المتأثرة بجذب المغناطيس بمجاله . ويمكن تخطيط هذا المجال أى رسم خطوط القوى فيه برش برادة الحديد على ورقة مقواة موضوعة فوق المغناطيس كما هو معروف فى علم الطبيعة ومن أهم أمثلة مجالات القوى عدا المجال المغناطيسى ما يأتى :

(١) المجال الكهربى للشحن الاستاتيكية والمجال المغناطيسى للتيارات الكهربية .

(٢) مجال الجذب النيوتونى الناشىء من تواجد كتل فى الفراغ وتتوقف شدته كما أثبتنا فى الباب السابق على مربع معكوس المسافة .

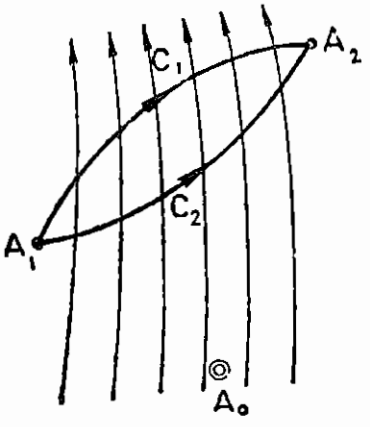
وفى أى مجال تكون القوة عند أى نقطة دالة فى موضع النقطة فإذا كانت (X , Y) هما مركبتا قوة المجال فى الاتجاهين (x , y) من مجال مستوى فان العلاقتين .

$$\left.\begin{aligned} X &= \phi (x , y) \\ Y &= \psi (x , y) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

تعطيان مجال القوى لأنهما تعينان قوة المجال فى أى موضع منه .
وبالاحداثيات القطبية تعطى مركبتا قوة المجال بما يأتى :

$$\left.\begin{aligned} F_r &= \phi(r, \theta) \\ F_\theta &= \psi(r, \theta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (2)$$

بند ١١٠ - المجال المحافظ وغير المحافظ :



(شكل ١١٦)

يعرف المجال المحافظ بأنه المجال الذى إذا انتقلنا من أى نقطة فيه A_1 إلى أى نقطة أخرى A_2 (شكل١١٦) كان شغل قوى المجال غير متوقف على المسار الذى سلكناه بين النقطتين بل على الموضعين A_1 ، A_2 فقط وعليه فالشغل المبذول فى المسار C_1 يساوى الشغل المبذول فى أى مسار آخر C_2 (شكل١١٦) فاذا رمزنا للشغل الذى تبذله قوى المجال بين الموضعين A_1 , A_2 بالرمز ($W(A_1\ A_2)$) كان تبعا للتعريف السابق .

$$W(A_1\ C_1\ A_2) = W(A_1\ C_2\ A_2) \quad \ldots\ \ldots\ (3)$$

وتعكس علامة الشغل إذا انعكس اتجاه السير أى أن

$$W(A_1\ C_2\ A_2) = -\ W(A_2\ C_2\ A_1)$$

وعلى هذا فانه تبعا للعلاقة (3) يكون الشغل المبذول فى قطع أى منحن مقفل فى مجال محافظ صفرا ويمكن اعتبار ذلك تعريفا آخر للمجال المحافظ

ومن الوجهة التحليلية تعطى العلاقة الآتية مقدار الشغل :

$$W\ (A_1\ A_2) = \int_{A_1}^{A_2} (X\ dx + Y\ dy) \qquad \cdots\ \cdots\ (4)$$

فإذا أمكن إجراء التكامل فى العلاقة (4) دون الحاجة إلى تعيين شكل المسار كان المجال محافظا ويكون ذلك ممكنا إذا كان المقدار $(X dx + Y dy)$ تفاضلا تاما كما فى المثالين الآتيين :

(١) إذا كان المجال معطى ب : $X = \phi\ (x)\ ,\ Y = \psi\ (y)$

فإن العلاقة (4) تعطى الشغل الآتى :

$$W\ (A_1\ A_2) = \int_{x_1}^{x_2} \phi\ (x)\ dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi\ (y)\ dy$$

ويمكن إجراء التكاملين كل على حدة دون الحاجة إلى تعيين مسار الانتقال وعليه فالمجال محافظ .

(٢) إذا كان المجال معطى ب : $X = ay\ ,\ Y = ax$

فإن العلاقة (4) تعطى الشغل الآتى :

$$W\ (A_1\ A_2) = a \int (y\ dx + x\ dy) = a \int d\ x\ y = a\ [x\ y]_{A_1}^{A_2}$$

$$= a\ (x_2\ y_2 - x_1\ y_1)$$

وعلى هذا فالمجال محافظ .

أما إذا لم يكن من الممكن إجراء التكامل إلا إذا عينا مسارا للانتقال فالمجال غير محافظ مثل $(X = 6y\ ,\ Y = 3x)$

وعموما أغلب المجالات الطبيعية محافظة إلا المجالات التى توجد بها مقاومات احتكاك تستنزف جانبا من طاقة حركة الأجسام فتعتبر مجالات غير محافظة .

بند ١١١ ـ الجهد فى نقطة ما من مجال محافظ :

يعرف الجهد فى نقطة ما A_1 من مجال محافظ بأنه الشغل الذى تبذله قوى المجال على وحدة الكتل إذا نقلت من الموضع A_1 إلى موضع قياسى A_0 (Standard position) ، وكثيرا ما يؤخذ هذا الموضع القياسى A_0 فى اللانهاية وذلك للحصول على جهود محدودة لبعض الحالات . ويرمز للجهد فى النقطة A_1 بالرمز V_1 وعلى هذا

$$V_1 = W\ (A_1\ A_0) \qquad \ldots\ \ldots\ (5)$$

وتبعا لتعريف المجال المحافظ يكون الجهد فى النقطة A_1 وحيد القيمة نظرا لأن الشغل المبذول فى الانتقال من الموضع A_1 إلى الموضع القياسى A_0 لا يتوقف فى حالة المجال المحافظ على المسار المتبع بين A_1 ، A_0 . ويستنتج من ذلك أيضا أن المجال الغير محافظ ليس لنقطه جهد أحادى القيمة وبالتالى فدالة الجهد موجودة فقط للمجال المحافظ . الجهد فى نقطة A_2 من مجال محافظ تعطيه :

$$V_2 = W\ (A_2\ A_0) \qquad \ldots\ \ldots\ (6)$$

ومن العلاقتين (5) ، (6) ومن خواص المجال المحافظ نحصل على :

$$V_2 - V_1 = W(A_2 A_0) - W(A_1 A_0)$$
$$= W(A_2 A_0) + W(A_0 A_1)$$
$$= W(A_2 A_1)$$
$$\therefore \quad V_2 - V_1 = -W(A_1 A_2) \qquad \ldots\ \ldots\ (7)$$

وباقتراب النقطة A_2 من النقطة A_1 قربا متناهيا تصبح المعادلة (7) :

$$\Delta V = -\Delta W \qquad \ldots\ \ldots\ (8)$$

بند ١١٢ ـ قوى المجال المحافظ بدلالة الجهد

إذا علم الجهد V كدالة فى الموضع (x , y) أو (r , θ) أمكن الحصول على مركبات القوى فى أى نقطة من المجال المحافظ على النحو الآتى :

$$\therefore \quad dW = (X\,dx + Y\,dy) \qquad \ldots\ \ldots\ (9)$$

ومن نظرية التفاضل تعطى العلاقة الآتية التفاضل الكلى (dV) بدلالة مشتقاته الجزئية :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy \qquad \ldots\ \ldots\ (10)$$

من العلاقات (8) ، (9) ، (10) نحصل على :

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy = -X\,dx - Y\,dy \qquad (11)$$

وبمساواة معامل dx فى طرفى العلاقة (11) وكذا معامل dy نحصل على مركبات القوة بدلالة الجهد .

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ Y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (12)$$

أى أن مركبات قوة المجال هى المشتقات التفاضلية الجزئية لدالة الجهد بإشارة سالبة . وقياسا على هذا تعطى العلاقات الآتية مركبات القوى بالاحداثيات القطبية :

$$\left.\begin{aligned} F_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\ F_\theta &= -\frac{\partial V}{r\partial\theta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (13)$$

وفيها يحل الانتقال المركزى (dr) محل (dx) ، الانتقال المتصامد ($r\,d\theta$) محل (dy) .

ولما كان حساب الجهد V أيسر من حساب قوى المجال نظرا لأن الجهد كمية قياسية كان من الأسهل اشتقاق قوى المجال من العلاقات (12) ، (13) بدلا من حسابه مباشرة .

بند ١١٣ — الشرط الرياضى للمجال المحافظ

إذا أعطى المجال بدلالة مركبتى قوته (X , Y) كما فى المعادلة (1) يمكن معرفة ما إذا كان هذا المجال محافظا أم لا عن طريق إجراء تكامل الشغل المعطى بالمعادلة (4) كما سبق شرحه . ويمكن كذلك تقرير ما إذا كان التكامل المذكور قابلا للاجراء دون الرجوع لمسار معين ودون إجراء التكامل بالفعل على الوجه الآتى :

إذا كان المجال محافظا كانت له دالة جهد V وحيدة القيمة عند كل نقطة من نقطه . ولما كانت المشتقة الجزئية الثانية للجهد V مأخوذة بالنسبة إلى x أولا ثم إلى y أو العكس واحدة فى الحالتين فإن :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \qquad \cdots \cdots (14)$$

من العلاقتين (12) ، (14) ينتج أن

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \qquad \cdots \cdots (15)$$

وتعتبر العلاقة (15) الشرط اللازم للمجال المحافظ وبتحققها يكون المقدار $X\,dx + Y\,dy$ ، تفاضلا تاما كما هو معروف فى حساب التفاضل والتكامل .

وبالاحداثيات القطبية لكى يكون المقدار $F_r\,dr + F_\theta\,r\,d\theta$ ، تفاضلا تاما يجب أن يحقق ما يأتى قياسا على العلاقة (15)

$$\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} = \frac{\partial F r}{\partial \theta} \qquad \cdots \cdots (16)$$

وهو الشرط اللازم للمجال المحافظ بالاحداثيات القطبية .

بند ١١٤ ـ قانون الطاقة

سبق اشتقاق قانون الطاقة فى صورته العامة فى الباب السابع وينص على أن « التغير فى طاقة حركة الجسيم بين موضعين 1 ، 2 يساوى شغل القوى المؤثرة عليه أثناء انتقاله بين الموضعين المذكورين » أى أن

$$T_2 - T_1 = W\,(1,2) \qquad \cdots \cdots (17)$$

وفيها T_1 , T_2 هما طاقة الحركة فى الوضعين 1 , 2 على الترتيب . ومن العلاقة (7) ينتج أن :

$$W(1,2) = V_1 - V_2 \qquad \ldots\ldots (18)$$

من (17) ، (18) ينتج أن :

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

$$\therefore\ (V_1 + T_1) = (V_2 + T_2) \qquad \ldots\ldots (19)$$

أى أن طاقة الحركة T مضافا اليها طاقة الوضع V «الجهد» تساوى مقدارا ثابتا لجميع مواضع المجال المحافظ .

بند ١١٥ ـ الطاقة الكلية لحركة الكوكب :

سنرى فى البند ١٢٠ أن الجهد النيوتونى لكرة كتلتها M عند نقطة على بعد r من مركزها يساوى $\left(\frac{-\gamma M}{r}\right)$ وفى مجال الشمس تكون الطاقة الكلية لكوكب كتلته m فى أى موضع من مداره حولها ثابتة ومساوية للمقدار الآتى:

$$\left(\frac{1}{2} m v^2 - \frac{\gamma M m}{r}\right) = \left(\frac{1}{2} m v^2 - \frac{\mu m}{r}\right)$$

وبمساواة هذا المقدار بالطاقة الكلية فى رأس القطع المخروطى القريبة من الشمس نحصل على :

$$\left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r}\right) = \left(\frac{1}{2} v_0^2 - \frac{\mu}{r_0}\right) = \text{const} \qquad \ldots\ldots (20)$$

وإذا كان المدار قطعا مكافئا وعوضنا فى المعادلة السابقة بقيمة v_0 المطلقة

بالمعادلة (c — 22) من الباب السابق وجدنا أن الطاقة الكلية للكوكب منعدمة أى

$$\left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (21)$$

وإذا كان المدار قطعا ناقصا وعوضنا فى المعادلة (20) العلاقة الآتية المستنتجة فى الباب السابق لحركة الكواكب (معادلات (4) ، (8) وخواص القطع) :

$$v_0 r_0 = h \, , \; \mu = \frac{h^2}{l} \, , \; r_0 = a - a e$$

ويعطى التعويض فى (20) الطاقة الكلية للكوكب كتلته واحد صحيح بالمقدار الآتى :

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = - \frac{\mu}{2a} = \text{Const} \qquad \ldots\ldots\ldots (22)$$

إذا كان المدار قطعا زائدا نعوض ($r_0 = ae - a$) فى المعادلة (20) فنحصل على الطاقة الكلية للكوكب كتلته واحد صحيح بالمقدار الآتى :

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = + \frac{\mu}{2a} = \text{Const} \qquad \ldots\ldots\ldots (23)$$

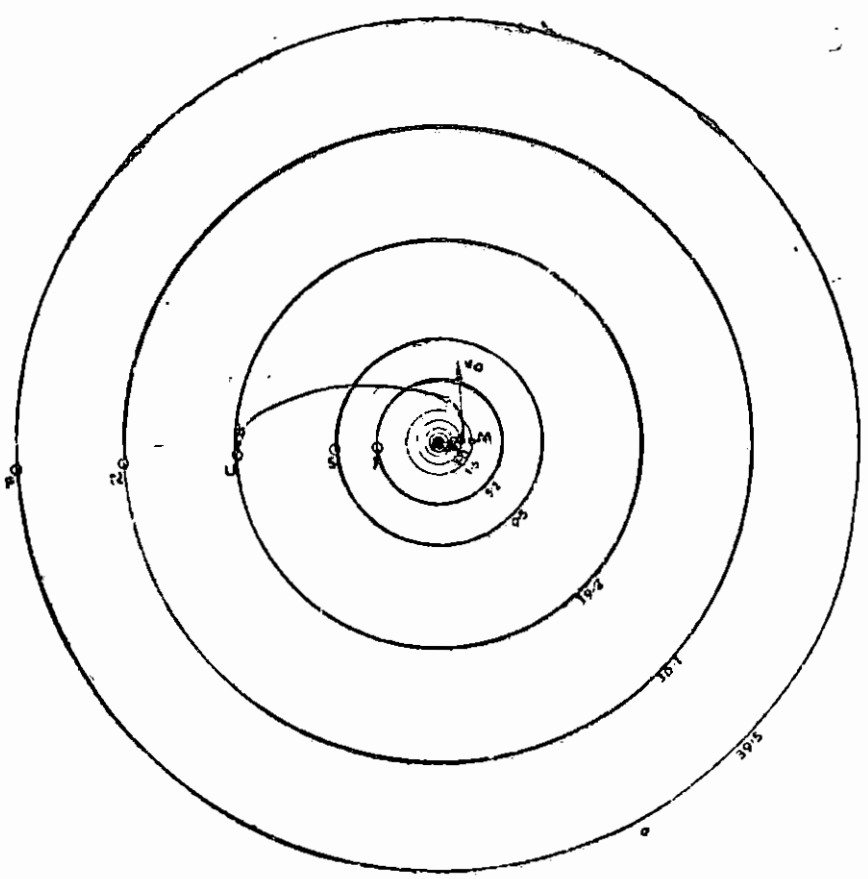
وتفيد العلاقات (21) (22) (23) فى تعيين مقدار سرعة الكوكب v عند أى موضع r من مداره .

بند ١١٦ ـ السفر بين الكواكب :

لقد حظى موضوع استكشاف كواكب المجموعة الشمسية الأخرى غير الأرض باهتمام الغرب والشرق على السواء فأرسلت فى أواخر الستينيات سفن الفضاء لاستكشاف كوكبى المريخ والزهرة وهما أقرب كواكب المجموعة

الشمسية إلى الأرض والبحوث جارية لتحليل نتائج هذه الرحلات الاستكشافية تمهيدا لاستكشاف غيرها من كواكب المجموعة .

إن الرحلة عبر المجموعة الشمسية حتى حافتها الخارجية طولها مئات الملايين من الكيلومترات وتستغرق عدة سنوات وتحتاج إلى دقة بالغة فى حساب مسارات سفن الاستكشاف التى سوف تتحرك حركة حرة فى الجزء الأكبر من مسارها منقادة فقط بجذب الشمس والكواكب لها . وسنعطى فيما يلى فكرة تقريبية عن إمكانية هذه الرحلة الكونية بادئين بعرض الخصائص الأساسية للكواكب (أنظر شكل ١١٧ والجدول التالى) .



شكل (١١٧)

الكوكب	عطارد Mercury	الزهرة Venus	الأرض Earth	المريخ Mars	المشترى Jupiter	زحل Saturn	أورانوس Uranus	نبتون Neptune	بلوتو Pluto
المسافة بينه وبين الشمس بالوحدات الفلكية A.U.	٠ر٤	٠ر٧٢	١ر٠٠	١ر٥٢	٥ر٢	٩ر٥	١٩ر٢	٣٠ر١	٣٩ر٥
زمن الدورة بالسنين	٠ر٢٤	٠ر٦١	١ر٠٠	١ر٩	١١ر٩	٢٩ر٥	٨٦ر٠	١٦٤ر٨	
الاختلاف المركزى لقطع المسار	٠ر٢٠٦	٠ر٠٠٧	٠ر٠١٧	٠ر٠٩٣	٠ر٠٤٨	٠ر٠٥٦	٠ر٠٤٧	٠ر٠٠٩	
نصف القطر الاستوائى (الأرض = ١)	٠ر٣٨	٠ر٩٥	١ر٠	٠ر٥٣	١١ر٢	٩ر٥	٣ر٧	٣ر٩	
الكثافة المتوسطة	٥ر٠	٥ر١	٥ر٥٢	٣ر٩	١ر٣٣	٠ر٧٠	١ر٧	١ر٦	

من هذا الجدول يتضح أن الكواكب الأربعة القريبة من الشمس ذات كثافة عالية تقارب كثافة الأرض ويمكن تسميتها بالكواكب الأرضية بينما باقى الكواكب البعيدة نسبيا أخف كثافة بكثير .

يبلغ الاختلاف المركزى لقطع مسار الأرض حول الشمس ٠٫٠١٧ فقط مما يمكن معه تقريب هذا المسار إلى دائرة للحسابات المبدئية للرحلة إلى الكواكب الأخرى ولما كان متوسط سرعة الأرض فى دورانها حول الشمس ٣٠ كم / ث فإن سرعة الهروب من الشمس تباع $= \sqrt{٢} \times ٣٠ = ٤٢$ كم / ث إذا كان الإطلاق فى إتجاه دوران الأرض حول الشمس . والسفينة المطلقة بهذه السرعة سوف تسير فى قطع مكافىء بؤرته الشمس ورأسه الأرض .

للسفر إلى أحد الكواكب يجب أن تقع السرعة الكلية لإطلاق السفينة بين ٣٠ ، ٤٢ كم / ث والسرعة الكلية للاطلاق تساوى سرعة الأرض (٣٠ كم/ث) مضافا اليها سرعة الاطلاق بالنسبة للأرض وهى ما زاد عن الـ ٣٠ كم /ث فللسفر من الأرض إلى الكواكب أورانوس مثلا يمكن إتمامه فى قطع ناقص رأس منه فى الأرض والرأس الاخر فى كوكب الهدف أورانوس (أنظر شكل ١١٧) تطبق المعادلة (22) للطاقة الكلية لحركة كوكب يتحرك فى قطع ناقص .

ولقطع ناقص رأسه القريب من الشمس واقع فى الأرض أى على بعد وحدة فلكية من الشمس ورأسه البعيد فى أورانوس أى على بعد ١٩٫٢ وحدة فلكية منها (أنظر الجدول السابق) نجد أن

$$2a = 1.0 + 19.2 = 20.2 \quad \text{A.U.}$$

$$r_0 = 1 \text{ A.U.}$$

ولكن متوسط سرعة الأرض V_E تعطيها المعادلة الآتية على اعتبار أن مسارها دائرى

$$V_E = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \quad \cdots \cdots \quad (24)$$

بالتعويض فى المعادلة (22) نحصل على

$$v_0^2 = V_E^2 \left(2 - \frac{r_0}{a}\right) \quad \cdots \cdots \quad (25)$$

وبالتعويض لحالة الرحلة إلى أورانوس نحصل على

$$v_0 = V_E \sqrt{2 - \frac{1}{10.1}} = 30 \times 1.38 = 41.4 \text{ km / sec.}$$

أى أن سرعة الاطلاق بالنسبة للارض = ٤ر١١ كم/ث .

والزمن اللازم لاتمام هذه الرحلة يمكن حسابه من قانون كبلر الثالث ومؤداه أن زمن اتمام الدورة T يتناسب مع $a^{3/2}$. وإذا نسبنا زمن دورة سفينة الرحلة إلى أورانوس إلى زمن دورة الأرض حصلنا على

$$\frac{T}{1} = \left(\frac{10.1}{1}\right)^{3/2} = 31.6 \text{ years}$$

وبهذا يكون زمن رحلة الذهاب ٨ر١٥ سنة وهو نصف زمن الدورة الكاملة.

وللسفر إلى كوكب قريب كالمريخ تعطى المعادلة (25)

$$v_0 = V_E \sqrt{2 - \frac{1.0}{1.20}}$$

$$= 30 \times 1.1$$

$$= 33 \text{ km/sec.}$$

وزمن الرحلة ٧ر٠ سنة أى ٤ر٨ شهرا

بند ١١٧ ـ خطوط القوى وخطوط الجهد المتساوى

يعرف خط القوة بأنه المنحنى الذى يحقق الشرط الآتى : متجه قوة المجال عند نقطة ما منه يمس خط القوة المار بتلك النقطة . وبنـــاء على هذا يمكن كتابة معادلة خط القوة من شرط تساوى مبلى القوة والمماس لخط القوة على الوجه الآتى :

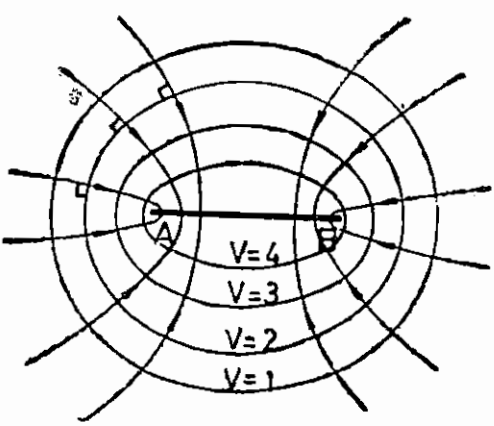
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$$

$$\therefore \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \qquad \ldots \ldots \ldots (26)$$

ويعرف خط الجهد المتساوى بأنه الخط الذى يتساوى الجهـد فى جميع نقطه وعلى هذا تكون معادلته :

$$V(x, y) = C \text{ (const.)} \quad \ldots \ldots \ldots (27)$$

ومن تعريف خط الجهد المتساوى ومن العلاقة (7) يتضح أن الانتقـال على خط جهد واحد لايستلزم بذل أى شغل . وينتج من ذلك أن خطوط القوة لابد أن تتعامد على خط الجهد المتساوى حتى ينعدم الشغل المبذول فى الانتقـال من نقطة إلى أخرى على خط جهد واحد .



شكل (١١٨)

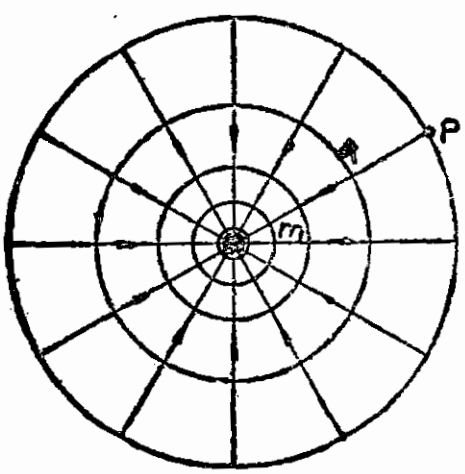
بإعطاء قيم مختلفة لثابت المعادلة (27) نحصل على مجموعة من خطوط الجهـد يناظر كل خط منها قيمة معينة للثابت C وكذلك بمكاملة المعـادلة (26) وإعطاء ثابت التكامل قـــيم مختلفة نحصل على مجموعـة من

خطوط القوى الذى يناظر كل منها قيمة معينة للثابت المذكور . وتتقاطع بمجموعتا خطوط القوى وخطوط الجهد على التعامد كما أسلفنا (شكل ١١٨) . وحيث تتقارب خطوط الجهد فى الشكل تزداد قوة المجال نظراً لأن قوة المجال هى المعامل التفاضلى للجهد بالنسبة للمسافة.

المجال النيوتونى

بند ١١٨ – الجهد النيوتونى

وجدنا فى الباب السابق أنه إذا تواجدت كتلة مركزة m فى مكان ما جذبت إليها غيرها من الكتل بقوى مركزية تتناسب عكسيا مع مربع المسافة حسب قانون الجذب العام لنيوتن ورأينا أن هذا الجذب النيوتونى خاصية من خواص الكتلة وله ثابت جذب



شكل (١١٩)

γ لا يتوقف على الخواص الطبيعية أو الكيميائية لتلك الكتل .

ولجسيم كتلته m كالمبين بشكل (١١٩) مجال خطوط قوته مستقيمة ملتقية فى موضع الجسيم كما فى الشكل .

وقوة هذا المجال المؤثرة على وحدة الكتل فى أى نقطة P منه يعطيها قانون الجذب العام بما يأتى :

$$F_r = \frac{-\gamma m}{r^2} \quad \ldots\ldots (28)$$

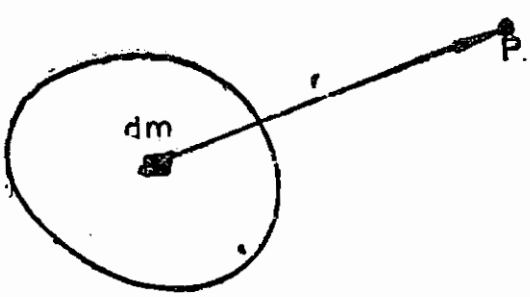
ولما كانت مجموعة خطوط الجهد متعامدة على مجموعة خطوط القوى فانه يمكن إستنتاج أن خطوط الجهد تمثلها مجموعة من الدوائر المتحدة المركز أو بعبارة أصح مجموعة من الكرات المتحدة المركز . ولما كانت خطوط القوى متكاثفة بالقرب من الكتلة m متخلخلة كلما ابتعدنا عنها فان شدة المجال أى قوته تقل كلما ابتعدنا عن الكتلة m وإذا اعتبرنا أن شدة المجال فى أى موضع تتناسب مع عدد خطوط القوى المارة بوحدة السطوح المتعامدة عليها أمكننا إثبات قانون التربيع العكسى وذلك باعتبار كرتين من كرات الجهد إحداهما نصف قطرها واحد صحيح والأخرى نصف قطرها r . ونظرا لتناسب مساحة سطح الكرة مع مربع نصف قطرها r ولتساوى عدد خطوط القوى المخترقة لكلتا الكرتين فان عدد خطوط القوى المخترقة لوحدة سطوح الكرة التى نصف قطرها r يتناسب عكسيا مع r^2 وهو ما يثبت قانون التربيع العكسى للمسافة .

ويعرف الجهد النيوتونى بأنه الجهد الناشىء عن مجال جذب نيوتونى ولحسابه فى نقطة ما P يحسب شغل قوة المجال المعطاة بالمعادلة (28) بين الموضع P والموضع اللانهائى متخذا كموضع قياسى حتى يكون الجهد كمية محدودة :

$$\therefore V_P = \int F_r \, dr = \int \frac{-\gamma m}{r^2} \, dr = \frac{\gamma m}{\infty} - \frac{\gamma m}{r}$$

$$\therefore V_P = \frac{-\gamma m}{r} \quad \ldots\ldots (29)$$

وهى تعطى الجهد الناشىء من كتلة مركزة m فى نقطة تبعد عنها مسافة r وواضح من المعادلة (29) أن خطوط الجهد المتساوى تعطيها العلاقة ($r = \text{cons}$) وهى مجموعة من الدوائر المتحدة المركز كما أسلفنا .

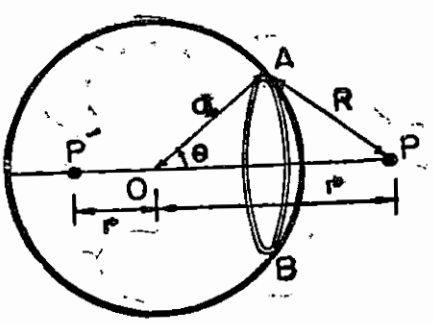


شكل (١٢٠)

ولمادة منتشرة تتبع طرق التكامل لتجميع الجهد الناشىء من جزئياتها . فتبعا للعلاقة (29) الجهد الناشىء من جزء صغير من المادة d m عند النقطة P يكون $\left(-\frac{\gamma\, d\, m}{r}\right)$ وللمادة كلها يجرى التكامل ليشمل باقى أجزاء المادة

$$\therefore\ V_p = \int \frac{-\gamma\, d\, m}{r} = -\gamma \int \frac{dm}{r} \qquad \ldots\ \ldots\ (30)$$

بند ١١٩ ـ جهد قشرة كروية :



شكل (١٢١)

لما كانت أشكال الكواكب كروية تقريبا فمن المناسب فى هذه المرحلة أن نقوم بحساب جهد الكرة ومنه يستنتج قوة جذب الكرة عن طريق التفاضل الجزئى كما سبق

ولإيجاد جهد القشرة الكروية المبينة بشكل (١٢١) عند أى نقطة خارجة عنها p نقسم القشرة الكروية إلى شرائح بواسطة مستويات متعامدة على المستقيم OP جميع نقط أى شريحة من هذه الشرائح متساوية البعد عن النقطة P وعليه فجهدها عند P تعطيه العلاقة :

$$V = -\gamma \int \frac{dm}{R} = -\gamma \int \frac{\rho \cdot a\,d\theta \cdot 2\pi a \sin\theta}{R} \quad \dots \quad (31)$$

وفيها ρ هى كتلة واحدة المساحة من السطح الكروى . فى المثلث OAB (شكل ١٢١) يعطى حساب المثلثات ما يأتى :

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$$

بمفاضلة الطرفين نحصل على :

$$2R\,dR = 2ar\sin\theta\,d\theta \quad \dots \quad (32)$$

بالتعويض من (32) فى (31) نحصل على الجهد عند P :

$$V_p = -2\pi\rho\gamma\frac{a}{r}\int_{(r-a)}^{(a+r)} dR = \frac{-4\pi a^2\rho\gamma}{r} \quad \dots \quad (33)$$

$$\therefore V_p = \frac{-\gamma M}{r} \quad \dots \quad (34)$$

وفيها M هى كتلة القشرة الكروية كلها والعلاقة (34) تبين أن الجهد الناشىء من القشرة الكروية فى النقط الخارجية عنها يساوى جهد جسيم مساو لها فى الكتلة وموضوع فى مركز الكرة .

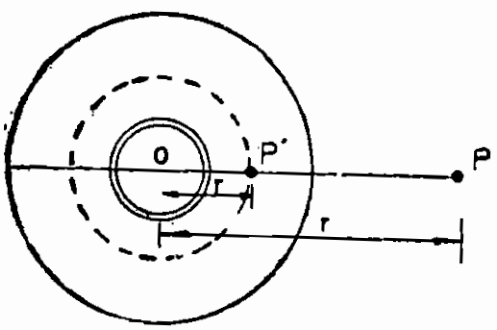
ولإيجاد الجهد عند أى نقطة P داخل الكرة تغير حدود التكامل فى المعادلة (33) كالآتى :

$$V_{p'} = -2\pi\rho\gamma\frac{a}{r}\int_{(a-r)}^{(a+r)} dR = -4\pi\rho\gamma a$$

$$\therefore\ V_{P'} = -\frac{\gamma M}{a} = \text{Const} \qquad \cdots\ \cdots\ (35)$$

بند ١٢٠ ـ جهد كرة مصمتة :

تقسم الكرة المصمتة إلى مجموعة من القشر الكروية (شكل ١٢٢) وتستخدم نتائج البند السابق .



شكل (١٢٢)

فعند أى نقطة خارجة عن الكرة P تؤثر الشرائح الكروية كما لو ركزت كتلتها فى مركزها كما سبق إيجاده بالمعادلة (34) وعلى هذا فإن الجهد الناشىء من كرة مصمتة كتلتها M عند أى نقطة خارجة p تعطيه العلاقة :

$$V_p = -\frac{\gamma M}{r} \qquad \cdots\ \cdots\ (36)$$

ولأى نقطة p' داخل الكرة هناك مجموعة من الشرائح الكروية تقل أنصاف أقطارها عن OP' وتخضع تبعا لذلك للعلاقة (34) وهناك أيضا مجموعة من الشرائح الكروية تزيد أنصاف أقطارها عن OP' وتخضع تبعا لذلك العلاقة (35) وعليه فالجهد عند P تعطيه :

$$V_p = -\gamma\rho\frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{r} - \gamma\rho\int_r^a \frac{4\pi r^2\,dr}{r}$$

وفيها ρ هى كثافة الكرة وهى معتبرة منتظمة بإجراء التكامل نحصل على :

$$V_{p'} = -2\pi\gamma\rho\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right) \quad \ldots\ \ldots\ (37)$$

بند ١٢١ – جذب كرة مصمتة :

حصلنا فى البند السابق على الجهد عند أى نقطة من مجال كرة مصمتة بدلالة البعد r عن مركز الكرة . ولإيجاد قوة جذب هذه الكرة فى أى نقطة تفاضل دوال الجهد جزئيا على النحو التالى :

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\ ,\ F_\theta = -\frac{\partial V}{r\partial\theta}$$

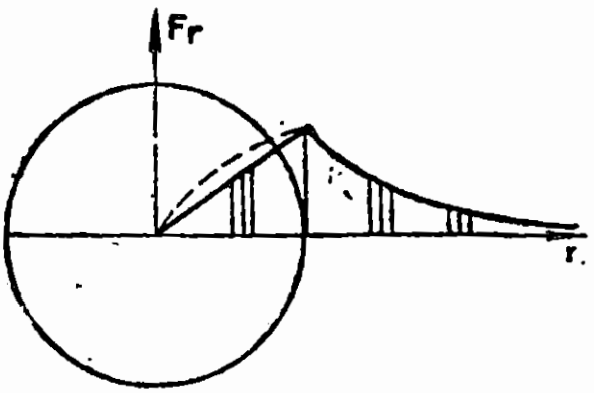
فللنقطة الداخلة P تعطى (36) الجذب الآتى :

$$F_r = -\frac{\gamma M}{r^2} \quad \ldots\ \ldots\ (38)$$

وللنقطة الخارجة P' تعطى العلاقة (37) الجذب الآتى :

$$Fr = 2\pi\rho\gamma.\left(-\frac{2r}{3}\right) = -\frac{\gamma M}{a^3}.r \quad \ldots\ \ldots\ (39)$$

وأما F_θ فصفر فى الحالتين . ومما يجدر ذكره أن العلاقتين (38) ، (39) تعطيان نفس قيمة الجذب عند سطح كرة أى عندما تكون (r = a) . ويمثل شكل (١٢٣) تغير الجذب مع البعد عن مركز الكرة هذا على أساس أن الكرة متجانسة غير أن القياسات العملية أثبتت أن الجذب داخل الكرة الأرضية أكبر نوعا ما عن الجذب المحسوب من العلاقة (39) وهو مبين بخط متقطع فى شكل (١٢٣) وهذا يدل على أن كثافة الأرض تزداد باقترابنا من مركزها خلافا لفرض التجانس الذى أقنا عليه حسابنا .



شكل (١٢٣)

أما جذب القشرة الكروية فصفر فى جميع النقط الداخلة (من مفاضلة المعادلة (35) جزئيا) أما الجذب فى النقط الخارجة عنها فهو $\left(\frac{-\gamma M}{r^2}\right)$ من مفاضلة المعادلة (34) جزئيا .

بند ١٢٢ ـ معادلتا « بواسون » و « لابلاس » :

يمكن تعريف فيض قوى المجال (Flux) الذى يخترق سطحا معينا بحاصل ضرب مركبة قوة المجال العمودية على السطح فى مساحة السطح نفسه أى

$$\int F_n \, dS \qquad \cdots\cdots (40)$$

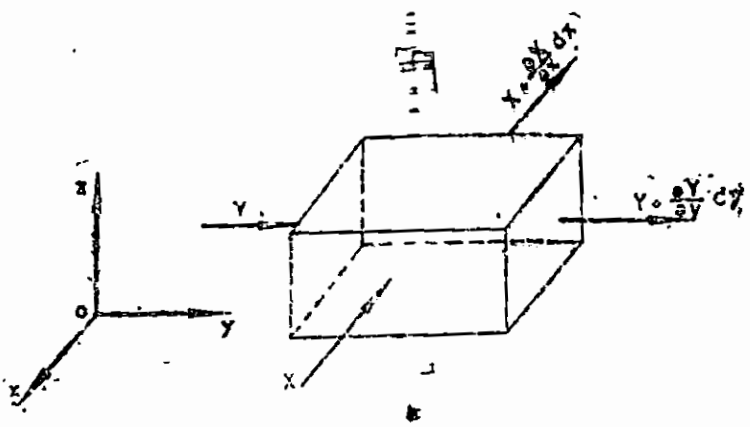
حيث F_n المركبة العمودية لقوة المجال ، dS مساحة صغيرة من السطح . وهذا يشبه حالة تدفق المياه إذ باستبدال F_n بالمركبة العمودية لسرعة التدفق تعطى الكمية (40) فيض المياه أو معدل تدفقها فى وحدة الزمن .

بحساب الفيض لكتلة مركزة m (شكل ٩٠) الذى يخترق سطحا كرويا مركزه m ونصف قطره r منتهيا إلى الكتلة ذاتها نحصل على

$$\int F_n \, ds = \frac{-\gamma m}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = -4\pi\gamma m \quad \ldots\ldots (41)$$

وفى حالة خلو الكرة من المادة ($m = \rho$) تؤول هذه المعادلة إلى

$$\int F_n \, dS = 0 \quad \ldots\ldots (42)$$



شكل (١٢٤)

بحساب الفيض الذى يخترق خرجه الستة لمتوازى مستطيلات صغير أبعاده (dx , dy , dz) مملوء بمادة متجانسة كثافتها ρ نجد أن الفرق بين ما يخترق الوجهين المتقابلين والعموديين على محور x يعطيه

$$\left[X - \left(X + \frac{\partial X}{\partial x} dx \right) \right] dy\, dz = -\frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

وكذلك الفرق بين ما يخترق الوجهين المتقابلين والعموديين على محور y يعطيه

$$-\frac{\partial Y}{\partial y} dx\, dy\, dz$$

والفرق بين ما يخترق الوجهين المتقابلين والعموديين على محور z يعطيه

$$-\frac{\partial Z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

ويجمع هذه الكميات الثلاث تعطى المعادلة (41) ما يأتى :

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=4\,\pi\,\gamma\,\rho \qquad \cdots\cdots (43)$$

وبالتعويض فيها من المعادلة (2) نحصل على معادلة « بواسون » التفاضلية لدالة الجهد V وهى

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-4\pi\,\gamma\,\rho \qquad \cdots\cdots (44)$$

وفى حالة تلاشى المادة تؤول هذه المعادلة إلى معادلة «لابلاس» الشهيرة فى المجالات الكهربية والمغناطيسية ومجالات تدفق المياه :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad \cdots\cdots (4)$$

خلاصة الباب

(١) يكون المجال محافظا إذا كان شغل قوته فى الانتقال بين أى موضعين فيه يتوقف على احداثيات الموضعين فقط ولا يتوقف على مسار الانتقال بينهما والشرط الرياضى للمجال المحافظ هو :

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}$$

(٢) الجهد V فى نقطة ما من مجال محافظ هو الشغل الذى تبذله قوى المجال

عند نقل وحدة الكتل من الوضع المذكور إلى موضع قياسى (يؤخذ أحيانا فى اللانهاية) .

(٣) مركبات قوى المجال تعطيها المشتقات الجزئية للجهد بالنسبة للمسافة

$$(X = -\frac{\partial V}{\partial x}, Y = -\frac{\partial V}{\partial y}) \text{ و } (F_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, F_\theta = -\frac{\partial V}{r\partial\theta})$$

(٤) معادلة مجموعة خطوط الجهد المتساوى هى : $(V(x, y) = C)$

ومعادلة مجموعة خطوط القوى تعطيها $(\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y})$

(٥) قانون بقاء الطاقة فى المجال المحافظ : مجموع طاقة الحركة $(\frac{1}{2} m v^2)$ وطاقة الوضع أو الجهد V يساوى مقدارا ثابتا فى جميع نقط المجال .

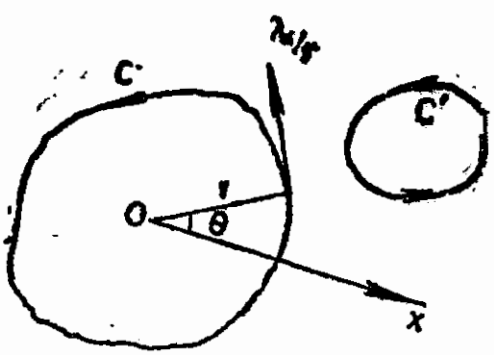
(٦) الجهد النيوتونى لجسيم m أو لكرة عند نقطة خارجة عنها وعلى بعد r من مركزها مقداره $\frac{-\gamma m}{r}$

تمرينات

(١) قوة المجال المغناطيسى الناشىء من تيار مار فى سلك عمودى على مستوى الورقة فى O تعطيها العلاقتان:

$$F_r = 0 \text{ و } F_\theta = \frac{\lambda}{r}$$

فيها λ مقدار ثابت أوجد الشغل المبذول فى رسم منحن مقفل C' لا يحتوى مركز المجال O والشغل المبذول فى رسم منحن مقفل C يحتوى المركز O ومن ثم أثبت أن المجال محافظ خارج المركز O شكل «١٢٥».



شكل (١٢٥)

(٢) أثبت رياضيا أى المجالات الآتية محافظا وأيها غير محافظ وأوجد دالة الجهد للمجالات المحافظة وإرسم خطوط القوى وخطوط الجهد لها .

ا — $X = a\,y$ و $Y = a\,x$

ب — $X = -ay$ و $Y = a\,x$

ح — $X = \frac{-a\,y}{x^2+y^2}$ و $Y = \frac{a\,x}{x^2+y^2}$

د — $X = \left(\frac{y}{y+x}\right)^2$ و $Y = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2$

هـ — مجال قوته مركزية ومقدارها دالة فى البعد r عن مركز المجال

الجواب : ا — المجال محافظ وجهده $(V = -a\,x\,y + C)$
وخطوط الجهد قطاعات زائدة وخطوط القوى
قطاعات زائدة متعامدة عليها .

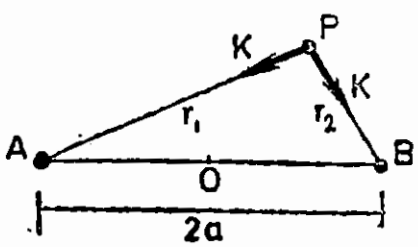
ب — المجال غير محافظ .

ح — المجال محافظ وجهده بالأحداثيات القطبية
$(V = a\,\theta + C)$ خطوط الجهد خطوط مستقيمة
ملتقية فى نقطة الأصل وخطوط القوى دوائر
متحدة المركز .

د — المجال محافظ وجهده $(V = \frac{-x\,y}{x+y} + C)$
خطوط الجهد قطاعات زائدة .

هـ — المجال محافظ .

(٣) مجال له قوتان ثابتتان فى المقدار وتساوى كل منهما K وتتجه إحداهما إلى نقطة ثابتة A والأخرى إلى نقطة ثابتة B (شكل ١٢٦)



شكل (١٢٦)

بين أن المجال محافظ وأوجد دالة جهده ثم ارسم خطوط القوى وخطوط الجهد له .

$$V = K (r_1 + r_2) + C$$

خطوط الجهد المتساوى عبارة عن قطاعات

الجواب: ناقصة محدة البؤرتين فى A , B خطوط القوى عبرة عن قطاعات زائدة متحدة البؤرتين A , B

(٤) أوجد دالة الجهد التوزنى لقضيب منتظم طوله a ثم استنتج شكل خطوط الجهد المتساوى وخطوط القوى لمجال هذا القضيب .

الجواب $V = \gamma \rho \log \frac{r_2 - r_1 + a}{r_2 - r_1 - a}$ حيث r_1 ، r_2 بعد النقطة عن طرفى القضيب خطوط الجهد قطاعات ناقصة متحدة البؤرتين وبؤرتاها طرفا القضيب .

(٥) أوجد الجهد النيوتونى لقـــرص منتظم نصف قطره a فى نقطة على المحور العمودى عليه والمار بمركزه .

[الجواب : $V = 2\pi\gamma\rho\left[\sqrt{a^2 + p^2} - p\right]$
حيث p هو بعد النقطة عن مركز القوس ، ρ كثافته السطحية]