الباب الثاني

بعض المعادلات التفاضلية الهامة

بند ٨ — مقدمة :

سنورد فيما يلي حلول بعض المعادلات التفاضلية التي تصادف الطالب كثيراً في دراسته الديناميكية خصوصاً وأن دراسة هذا الموضوع الرياضي تأتي متأخرة إلى السنة الثانية . وجمع هذه المعادلات في باب واحد ييسر الرجوع اليها عند الضرورة .

تعريف :

المعادلة التفاضلية هي علاقة بين متغير مستقل t مثلا ومتغير تابع x وبعض المشتقات التفاضلية لـ x بالنسبة إلى t وتسميتها معادلة تفاضلية راجع إلى ظهور المشتقات التفاضلية بها .

ورتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى معامل تفاضلي بها . وحل المعادلة التفاضلية هو أي علاقة بين x , t تحقق المعادلة . غير أن الحل العام لأي معادلة تفاضلية هو الحل المشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مساو لرتبة المعادلة فان كانت المعادلة من الرتبة الأولى وجب أن يكون حلها العام مشتملا على ثابت اختياري واحد هو ثابت التكامل الذي يظهر عند إجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الأولى . أما إذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب اشتمال حلها العام

على ثابتى تكامل نظراً لإجراء خطوتى تكامل عند حل معادلة الرتبة الثانية وهكذا :

فعلى سبيل المثال

$$\frac{dx}{dt} - 5x = 0 \qquad \dots \dots (1)$$

تعتبر معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى ويحققها الحل الخاص ($x = e^{5t}$) كما يبدو من التعويض فى المعادلة إلا أن حلها العام يجب أن يشتمل على ثابت اختيارى واحد C مثلا فيكون ($x = Ce^{5t}$)

المعادلة الآتية تعتبر معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \qquad \dots \dots (2)$$

وتحققها الحلول الخاصة الآتية :

$$x = \sin t \quad \& \quad x = \cos t$$

غير أن حلها العام يجب أن يشتمل على ثابتى تكامل اختياريين كما أسلفنا على الصورة :

$$x = A \sin t + B \cos t$$

حيث A ، B هما الثابتان الاختياريان .

بند ٩ — معادلات الرتبة الاولى :

ا — حالة إمكان فصل المتغيرين :

يمكن فصل متغيرى معادلات الرتبة الأولى على الصورة الاتية :

$$\varphi(x)\frac{dx}{dt} = \psi(t) \qquad \dots\dots \quad (3)$$

حيث $\varphi(x)$ دالة فى x فقط أو ثابت ، $\varphi(t)$ دالة فى t فقط أو ثابت . بفصل المتغيرين كل فى طرف ثم تكامل الطرفين نحصل على الحل العام الآتى :

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \psi(t)\,dt + C \qquad \dots\dots \quad (4)$$

حيث C هو ثابت التكامل الاختيارى

مثال : حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$x\frac{dx}{dt} = g - k x^2 \qquad \dots\dots \quad (5)$$

وفيها g ، k ثابتان معلومان . وتظهر هذه المعادلة عند دراسة الحركة فى وسط مقاوم . بفصل المتغيرين ومكاملة الطرفين نحصل على :

$$\int \frac{x\,dx}{g - k x^2} = \int dt$$

$$\therefore -\frac{1}{2k}\log(g - k x^2) = t + C \qquad \dots\dots \quad (6)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية (5)

ب ــ معادلة الرتبة الأولى الخطية .

تسمى المعادلة التفاضلية خطية إذا لم تشتمل على أس أو حواصل ضرب للمتغير التابع x ومشتقاته التفاضلية . وعلى هذا تكون الصورة العامة لمعادلة الرتبة الأولى الخطية هى :

$$\frac{dx}{dt} + \varphi(t) \cdot x = \psi(t) \qquad \ldots\ \ldots \quad (7)$$

حيث $\varphi(t)$ ، $\psi(t)$ دالتان فى t فقط أو ثابتان .

وقد وجد بالتجربة أن طرفى هذه المعادلة قابلان للتكامل إذا ضربت المعادلة فى المعامل المكامل الآتى :

$$e^{\int \varphi(t)\, dt} \qquad \ldots\ \ldots \quad (8)$$

$$\therefore \int \left\{ \frac{dx}{dt} + \varphi(t) \cdot x \right\} e^{\int \varphi(t)\, dt} . dt = \int \psi(t)\, e^{\int \varphi(t)\, dt} . dt$$

وتكاملات الطرف الأيمن لهـــذه المعادلة قابلة للأجراء كما يعطى الطرف الأيسر عند تكامله المقدار :

$$x\, e^{\int \varphi(t)\, dt} \qquad \ldots\ \ldots \quad (9)$$

ويمكن التحقق من ذلك باعادة تفاضل المقدار (9) بالنسبة للزمن فنحصل على

$$\left\{ \frac{dx}{dt} + x \cdot \varphi(t) \right\} e^{\int \varphi(t)\, dt}$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية الخطية الآتية :

$$\frac{dx}{dt} + k\, x = gt$$

وفيها k ، g ثابتان .

المعامل المكامل لهذه الحالة هو (e^{kt}) وبضربه فى طرفى المعادلة ومكاملتها بالنسبة للمتغير (t) ينتج أن :

$$\int \left(\frac{dx}{dt} + kx\right) \cdot e^{kt}\, dt = \int g\, t\, e^{kt} . dt$$

$$\therefore\ xe^{kt} = g \int t\, e^{kt}\, dt + C$$

وبإجراء تكامل الطرف الأيمن بطريقة التجزىء كما هو معروف نحصل على النتيجة الآتية :

$$x\, e^{kt} = ge^{kt} \left(\frac{t}{k} - \frac{1}{k^2} \right) + C$$

$$\therefore\ x = \frac{g}{k} \left(t - \frac{1}{k} \right) + Ce^{-kt}$$

بند ١٠ ـ معادلات الرتبة الثانية :

عند تطبيق قانون (نيوتن) الأساسى للحركة نحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية إذ أن عجلة الحركة تشتمل على معامل تفاضلى ثان بالنسبة للزمن.

والصورة العامة لمعادلة الرتبة الثانية الخطية هى

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + bx = 0 \qquad \cdots\ \cdots\ (10)$$

حيث a ، b ثابتان

يمكن التحقق بالتعويض فى المعادلة (10) أن ($x = e^{mt}$) يمكن أن يكون حلا لهذه المعادلة بشرط تحقيق m للمعادلة الجبرية الآتية

$$m^2 + 2am + b = 0 \qquad \cdots\ \cdots\ (11)$$

وتسمى المعادلة (11) بالمعادلة المساعدة وتعطى عند حلها جبريا جذرين للمجهول m هما m_1 ، m_2 ؛ وعلى هذا فالحل العام للمعادلة التفاضلية (10) هو

$$x = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t} \qquad \dots \dots (12)$$

حيث A , B ثابتان إختياريان .

والجذرى المعادلة المساعدة (11) ثلاث حالات :

١ — أن يكون الجذران حقيقيان مختلفان والحل العام فى هذه الحالة هو المعادلة (12) .

٢ — أن يكون الجذران حقيقيان متساويان ويساوى كل منهما ($-a$). بالتعويض فى المعادلة (12) نحصل على

$$x = e^{-at} (A + B)$$

وهو لا يعتبر حلا عاما لأن مجموع الثابتين ($A + B$) يعتبر ثابتا إختياريا واحدا ولما كان الحل العام لمعادلات الرتبة الثانية يجب أن يشتمل على ثابتى تكامل اختياريين لذلك فالحل العام فى حالة تساوى الجذرين هو :

$$x = e^{-at}(C + Dt) \qquad \dots \dots (13)$$

ويمكن التحقق من ذلك بالتعويض من المعادلة (13) فى المعادلة التفاضلية (10).

٣ — أن يكون الجذران تخيليان على الصورة ($-a \pm in$) مثلا حيث ($i = \sqrt{-1}$)

فى هذه الحالة يأخذ الحل العام (12) الصورة الآتية :

$$x = e^{-at}(Ae^{int} + Be^{-int}) \qquad \dots \dots (14)$$

وباستخدام العلاقة الرياضية

$$e^{int} = \cos nt + i \sin nt$$

تؤول المعادلة (14) إلى ما يأتى :

$$x = e^{-at} (C \cos nt + D \sin nt) \qquad \dots \quad (15)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية (١٥) وفيهـا C ، D ثابتان اختياريان حقيقيان أو تخيليان .

بند (١١) حالات خاصة هامة لمعادلة الرتبة الثانية :

فى حالة إنعدام معامل الحد الثانى a فى المعادلة التفاضليـة (10) نحصل على حالتين هامتين كثيرا ما تصادفان الطالب فى دراسته الديناميكية عند بحث حركة الجسيمات المتأثرة بجذب أو طرد مركزى تتناسب قوته مع البعد عن مركز ثابت.

الحالة الأولى : معادلة الرتبة الثانية التى على الصورة

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \dots \quad \dots \quad (16)$$

حيث ω معامل ثابت . وجذرا المعادلة المساعدة لهـا تخيليان ($\pm i \omega$) ولذلك فحلها العام يأخذ صورة المعادلة (15) كما سبق إيضاحه فى البند (٩) :

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \qquad \dots \quad \dots \quad (17)$$

ويمكن باستخدام حساب المثلثات وضع هذه المعادلة على الصورة الآتية

$$x = C \cos (\omega t + \varepsilon) \qquad \dots \quad \dots \quad (18)$$

حيث C ، ε هما ثابتا التكامل الاختياريان . وعلى هذا فالحل العام للمعادلة التفاضلية (16) هو إما (17) وإما (18) فكل منهما يحقق المعادلة التفاضلية ويحتوى على ثابتين اختياريين .

الحالة الثانية : معادلة الرتبة الثانية التى على الصورة

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x = 0 \qquad \dots \quad \dots \quad (19)$$

وجذرا المعادلة المساعدة لها حقيقيان ($\pm\ \omega$) ولذلك لحلها العام يأخذ صورة المعادلة (12)

$$\therefore\ x = A\, e^{\omega t} + B e^{-\omega t} \qquad \dots \quad \dots \quad (20)$$

ويمكن باستخدام خواص الدوال الزائدية وضع الحل الأخير على الصورة

$$x = C \cosh \omega t + D \sinh \omega t \qquad \dots \quad \dots \quad (21)$$

ومن السهل التحقق من أن المعادلة (21) تحقق المعادلة التفاضلية (19) وذلك بالتعويض فيها مباشرة .

تمرينات

حل المعادلات التفاضلية الآتية :

(1) $\frac{dx}{dt} = 5 - 4x^2\ ,\ \frac{dx}{dt} = 5 + 5x^2$

(2) $\frac{dx}{dt} + 5x = \sin t$

(3) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0$

(4) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$

(5) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 13x = 0$

(6) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$

(7) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$