الباب الثالث

كينماتيكا الجسيم — الحركة فى خط مستقيم

بند (١٢) **الكينماتيكا** : هى فرع الميكانيكا المخصص لوصف الحركة ودراسة خصائصها دون التعرض للمؤثرات (القوى) التى تغير من حالة هذه الحركة . فالكينماتيكا تبحث فى تحديد مواضع الاجسام المتحركة ومساراتها وسرعتها وعجلاتها على مر الزمن .

والكينماتيكا تقوم على مدركى الفراغ والزمن وهما فى الميكانيكا الكلاسيكية مدركان مطلقان أى لا يتغيران بتغير الراصد كما سبق إيضاحه فى الباب الأول فلدراسة حركة جسيم يلزمنا شيئان :

(١) هيكل رصد مؤلف من ثلاثة محاور متماسكة وملتقية فى نقطة ويستحسن أن تكون متعامدة بعضها على بعض وينسب موضع الجسيم إلى هذا الهيكل .

(٢) ساعة أو مقياس زمنى لتسجيل الازمان التى يحتل فيها الجسم مواضع معينة منسوبة إلى هيكل الرصد . وكل حركة يجب أن تنسب لهيكل رصد مناسب فمثلا لدراسة حركة مقذوف من نقطة ما على سطح الارض بالنسبة للأرض نفسها يؤخذ هيكل رصد ثابت فى الكرة الارضية ويقع مركزه على نقطة إطلاق المقذوف . بينما فى حالة دراسة حركة الكواكب يمكن إتخاذ هيكل الرصد بحيث ينطبق مركزه على الشمس وذلك لدراسة حركة الكواكب بالنسبة للشمس .

بند (١٣) درجات حرية الجسيم : (Degrees of freedom)

إذا تحرك جسيم فى الفراغ حركة غير مقيدة بقيود ما لزم لتحديد موضعه فى أى لحظة ما يلزم لتحديد موضع النقطة الهندسية ثلاث إحداثيات كرتيزية (x , y , z) كما هو معروف فى الهندسة الفراغية ويقـــال أن لحرية الجسيم فى هذه الحالة ثلاث درجات هى إحداثيات موضعه الثلاثة .

وإذا وضعنا قيداً واحداً على حركة الجسيم أنقصنا درجات حريته درجة واحدة فلو تحرك جسيم فى مستوى ثابت معلوم بحيث لا يخرج عنـــه أبداً لزم لتحديد موضعه فى مستوى حركته بعدان اثنان هما (x , y) مثلا نظراً لإنعدام البعد الثالث العمودى على مستوى الحركة وفى هـذه الحالة يكون للجسيم درجتا حرية اثنتان .

وكلما زادت القيود قيداً نقصت درجات حرية الجسيم درجة . فحركة جسيم على خط ثابت معلوم كإنزلاق خرزة على سلك ثابت — ليس لها إلا درجة حرية واحدة . حتى لو أن السلك على هيئة منحنى ثابت الشكل والوضع فإن للجسيم المنزلق عليه درجة حرية واحدة هى المسافة المقاسة على المنحنى بين موضع الجسيم وبين نقطة ثابتة على السلك .

وخلاصة القول أن درجات حرية جسيم فى حركة ما هى أقل عـــدد من الإحداثيات تلزم وتكفى لتحديد موضع الجسيم فى أى لحظة . وقد تكون هذه الإحداثيات طولية أو زاوية .

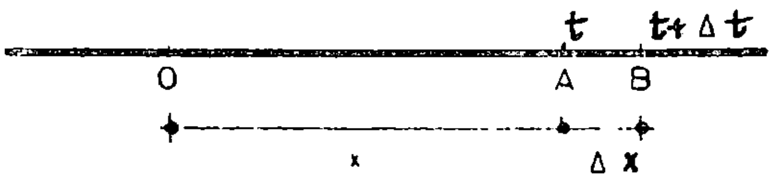
بند (١٤) مسار الجسيم : هو المحل الهندسى للمواضع المتتابعة التى يحتلها الجسيم المتحرك فى الفراغ فى لحظات متتابعة . ويكون المسار إما متواصلا فيسهل التعبير عنه بدوال رياضية وإما غير متواصل وعندئذ يعبر عن كل جزء متواصل منه على حدة .

الحركة فى خط مستقيم (Rectilinear motion)

بند (١٥) موضع الجسيم : إذا تحرك جسيم على خط مستقيم . وليكن المحور (x) مثلا — تعين موضعه فى لحظة ما (t) ببعده (x) عن نقطة أصل ثابتة O على الخط وللجسيم فى هذه الحركة درجة حرية واحـــدة كما سبق شرحه .

وإذا ربطنا بين الموضع (x) للجسيم وبين زمن حلوله فى هذا الموضع (t) بمعادلة رياضية كان ذلك تعبيراً كاملا لحركة الجسيم بحيث يمكن اشتقاق باقى أوصاف الحركة - من سرعة وعجلة فى أية لحظة أو فى أى موضع — من هذه المعادلة .

فاذا عبرت المعادلة : $x = \phi\ (t) \cdots \cdots (1)$



شكل (١)

عن هذه الحركة فإن سرعة الجسيم فى أية لحظة وكذا عجلته يمكن اشتقاقها على الوجه الآتى :

بند (١٦) سرعة الجسيم : لو احتل الجسيم نقطة A على بعد x من نقطة الأصل فى اللحظة t ثم احتل نقطة قريبة B تبعد $(x + \Delta x)$ عن نقطة الأصل فى اللحظة $(t + \Delta t)$ فإن متوسط سرعته فى قطع المسافة A B هو $\frac{\Delta x}{\Delta t}$
وإذا أردنا تعيين سرعة الجسيم عنـــد نقطـــة A نحسب قيمـــة $\frac{\Delta x}{\Delta t}$

عندما تقترب كل من Δx ، Δt من الصفر أى عندما تقترب B من A ويعبر عن ذلك رياضيا بما يلى :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \qquad \dots \dots \quad (2)$$

والرمز (lim) اختصار لكلمة Limit أى نهاية ما تصل اليه $\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)$ عند اقتراب Δt من الصفر . وترمز v إلى السرعة (Velocity) . وبذا تكون سرعة الجسيم فى زمن ما هى المعامل التفاضلى للمسافة بالنسبة للزمن أى المعدل الزمنى للانتقال وعلى هذا يمكن إيجاد دالة عامة للسرعة v بالنسبة للزمن t هكذا :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \varphi(t) = \dot{\varphi}(t) \qquad \dots \dots \quad (3)$$

ومن الآن فصاعدا سنستعمل النقطة فوق الحرف للدلالة على معامل التفاضل الأول بالنسبة للزمن والنقطتين للدلالة على معامل التفاضل الثانى بالنسبة للزمن :

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

بند (١٧) **عجلة الجسيم** : تعرف عجلة الجسيم المتحرك فى خط مستقيم بالمعدل الزمنى لتغير سرعته . فلو كانت v هى سرعة الجسيم فى النقطة A (شكل ١) وسرعته $(v + \Delta v)$ فى النقطة B فان متوسط تغير سرعته فى المسافة A B هو $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ وتكون عجلة الجسيم عند الموضع A هى نهاية المقدار $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ عندما تقترب Δt من الصفر أى عندما تقترب B من A قربا كافيا ويعبر عن ذلك رياضيا بما يلى :

$$f = \frac{d\,v}{d\,t} = \dot{v} = \ddot{x} \qquad \dots \quad \dots \quad (4)$$

وفيها f ترمز للعجلة (Acceleration) وبذا تكون عجلة الجسم فى لحظة ما هى المعامل التفاضلى الأول لدالة السرعة بالنسبة الزمن او المعامل التفاضلى الثانى للمسافة بالنسبة للزمن وذلك فى اللحظة المعنية وللعجلة تعبير آخر تدخل فيه المسافة بدل الزمن وتفيد فى حالة إعطاء العجلة كدالة فى المسافة .

$$f = \frac{d\,v}{d\,t} = \frac{d\,v}{d\,x} \cdot \frac{d\,x}{d\,t} = v\,\frac{d\,v}{d\,x} \qquad \dots \quad \dots \quad (5)$$

تطبيقات على الحركة فى خط مستقيم

بند (١٨) هناك نوعان أساسيان من المسائل يتميز كل منهما عن الاخر باختلاف المعلومات فى رأس المسألة .

النوع الأول : وتعطى فيه دالة الموضع بالمعادلة (1) وتطلب السرعة والعجلة كدوال فى الزمن . وواضح من المعادلتين (2) ، (4) أن السرعة والعجلة يمكن إيجادها بعمليتى تفاضـــل بالنسبة للزمن . وإذا أريد تعيين السرعة أو العجـلة عند لحظـة معينة عوضنـا هذه اللحظة فى دالتى السرعة والعجـلة بالنسبة للزمن .

النوع الثـانى : وتعطى فيه دالة العجـــلة وأحوال البداية (Initial conditions) ونقصد بهـا الموضع والسرعة الابتدائيتان أى عند ما تكون ($t = o$) — وفى هذه الحالة يستخدم الطريق العكسى أى طريق التـكامل للحصول على دالة السرعة . ويعين ثابت التكامل بتعويض السرعة الإبتـدائية . ثم تجرى خطوة تكامل أخرى للحصول على دالة الموضع ويعين ثابت التـكامل

الجديد بتعويض الموضع الابتدائى وهكذا يتضح أن أحوال البداية ضرورية لتعيين ثوابت التكامل فى النوع الثانى من المسائل .

تطبيقات النوع الأول

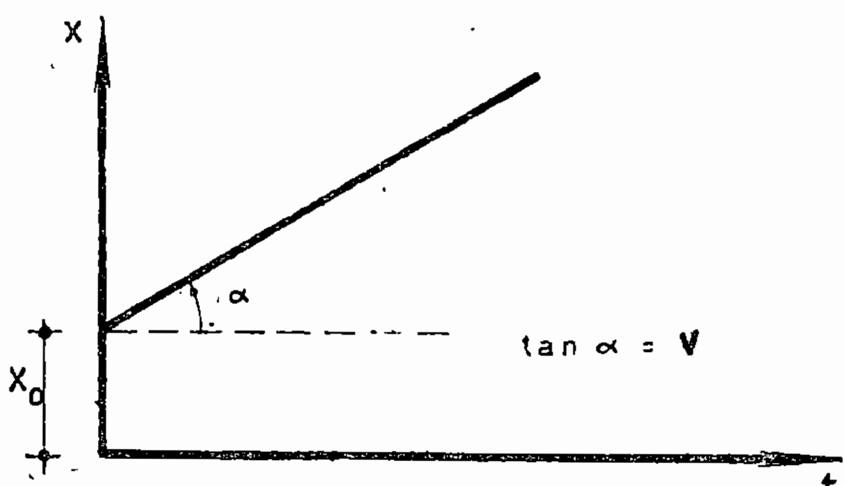
بند (١٩) الحركة بسرعة منتظمة : إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم تبعا لعلاقة خطية بين المسافة والزمن على الصورة

$$x = x_0 + V.\ t \qquad \dots \quad \dots \quad (6)$$

فيهـا x_0 ، V ثابتان فانه يمكن الحصول على دالة سرعته بمفاضلة هـذه العلاقة

$$v = \frac{d\,x}{d\,t} = V = \text{const} \qquad \dots \quad \dots \quad (7)$$

والمعادلة (7) تدل على أن الجسيم يتحرك بسرعة منتظمة V كما تدل المعادلة (6) عند تعويض t بالصفر فيها على أن موضع الجسيم الإبتدائى هو x_0 بمفاضلة المعادلة (7) بالنسبة للزمن نجد أن عجلة الحركة صفر باستمرار .



شكل (٢)

$$f = \frac{dv}{dt} = 0 \qquad \dots \quad \dots \quad (8)$$

وتمثل العلاقة $(x \,.\, t)$ الحركة بيانيا بخط مستقيم كما فى شكل (٢) .

بند ٢٠ ـ الحركة بعجلة منتظمة : إذا تحرك جسيم فى مستقيم بحيث كان موضعه x دالة من الدرجة الثانية فى الزمن t على الصورة

$$x = x_0 + v_0\, t + \tfrac{1}{2} f_0\, t^2 \qquad \dots \quad \dots \quad (9)$$

وفيها x_0 ، v_0 ، f_0 ثوابت معلومة فانه يمكن الحصول على دالة سرعته بمفاضلة هذه العلاقة بالنسبة للزمن

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + f_0\, t \qquad \dots \quad \dots \quad (10)$$

وهى تمثل العلاقة بين السرعة v والزمن t .

بمفاضلة المعادلة (10) بالنسبة للزمن نحصل على دالة العجلة والزمن :

$$f = \frac{dv}{dt} = f_0 = \text{const} \qquad \dots \quad \dots \quad (11)$$

والمعادله (11) تدل على أن الجسيم يتحرك بعجـــلة منتظمة f_0 . كما يدل تعويض t بالصفر فى كل من المعادلتين (9) ، (10) على أن الموضع الابتـدائى للجسيم كان x_0 وسرعته الابتدائية كانت v_0 ويمثل العلاقة (9) قطع مكافىء محوره رأسى (شكل ٣) .

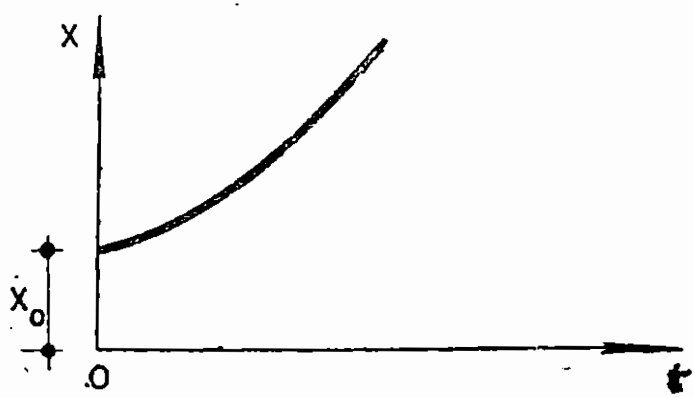
وبحذف t بين المعادلتين (9) ، (10) نحصل على السرعة كدالة فى المسافة

$$v^2 = v_0^2 + 2 f_0 (x - x_0) \qquad \dots \quad \dots \quad (12)$$

والملاقات (9) ، (10) ، (12) هى المعروفة للطالب فى دراسته الثانوية للحركة بعجلة منتظمة وتنطبق هذه النتائج على حالة سقوط الأجسام بالقرب من سطح الأرض إذا عوضنا عجلة الجاذبية g بدلا من f_0 .

$$(g = 32 \text{ ft/sec}^2 = 980 \text{ cm/sec}^2).$$

وجدير بالذكر أن العلاقات السابقة تسرى على الحركة بتقصير ثابت إذا عوضت f_0 بأشارة سالبة بدلا من موجبة .



شكل (٣)

بند (٢١) حركة تبعا للمعادلة

$$x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \qquad \cdots \quad \cdots \quad (13)$$

وفيها v_0 ، k ثابتان .

وبمفاضلة هذه المعادلة بالنسبة للزمن نحصل على دالة السرعة والزمن

$$v = v_0 \, . \, e^{-kt} \qquad \cdots \quad \cdots \quad (14)$$

ثم بمفاضلة المعادلة (14) بالنسبة للزمن نحصل على دالة العجلة والزمن

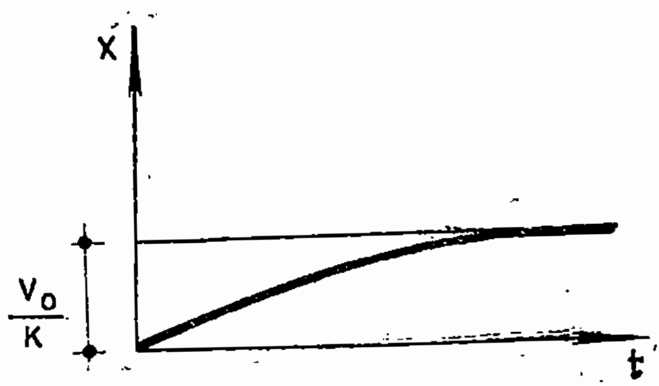
$$f = -k\, v_0\, e^{-kt} \qquad \dots\ \dots \quad (15)$$

وبحذف t بين المعادلتين (14) ، (15) نحصل على العلاقة الآتية بين العجلة والسرعة :

$$f = -k\, v \qquad \dots\ \dots \quad (16)$$

وهى تدل على أن العجلة تقصيرية ومناسبة للسرعة دائما . كما تدل المعادلة (14) على أن الجسم بدأ الحركة بسرعة إبتدائية v_0 ثم أخذت سرعته تتناقص أسياً بمرور الزمن t .

أما المعادلة (13) فيستدل من تعويض t بالصفر فيهـا على أن الجسم بدأ حركته من نقطة الأصل . ثم بتزايد الزمن t تتزايد المسافة x تبعا لهذه المعادلة غير أن المسافة تقترب من حد أعلى $\left(\frac{v_0}{k}\right)$ باقتراب الزمن t من اللانهاية والمنحنى المبين بشكلى (٤) يمثل معادلة المسافة والزمن (13) .



شكل (٤)

بند ٢٢ ـ حركة توافقية بسيطة :

إذا تحرك جسم فى خط مستقيم تبعا للمعادلة :

$$x = a \cos(\omega t) \qquad \cdots \cdots \quad (17)$$

وفيها a ، ω ثابتان فإن دالة سرعته تنتج من تفـاضل هذه العـلاقة بالنسبة للزمن .

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega a \sin(\omega t) \qquad \cdots \cdots \quad (18)$$

وكذلك دالة عجلته تنتج من تفاضل سرعته بالنسبة الزمن :

$$f = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 a \cos \omega t = -\omega^2 x \quad \cdots \cdots \quad (19)$$

أى أن $\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \cdots \cdots \quad (20)$

بتأمل دالة الوضع المعطاة بالمعـادلة (17) نجد أن موضع الجسيم محصور دائما بين $(x = +a)$ ، $(x = -a)$ أى بين النقطتـين A ، A' شكل (٥) المتساويتى البعد عن نقطة الأصل O وأنه يحتل النقطة A فى اللحظات المتتالية :

$$t = 0 , \frac{2\pi}{\omega} , \frac{4\pi}{\omega} , \frac{6\pi}{\omega} , \cdots , \cdots$$

كما يحتل النقطة A' فى اللحظات المتتالية :

$$t = \frac{\pi}{\omega} , \frac{3\pi}{\omega} , \frac{5\pi}{\omega} , \cdots , \cdots$$

أى أن الجسيم يتحرك حركة ترددية بين النقطتين A , A' وزمن انتقاله من A إلى A' ذهابا وإيابا هو $\frac{2\pi}{\omega}$ وتعرف هـذه الحركة بالحركة التوافقية البسيطة (Simple Harmonic Motion) وتعرف المسافة a بسعـة الذبذبة والزمن $\frac{2\pi}{\omega}$

بزمنها الدورى وتعرف النقطة O بمركز الذبذبة .

وبتأمل دالة السرعة المعطاة بالمعادلة (18) نجد أن لمقدار السرعة حدا أعلى هو $a\,\omega$ عندما يمر الجسيم بمركز الذبذبة O كما أنها تنعدم فى طرفى الذبذبة A , A′

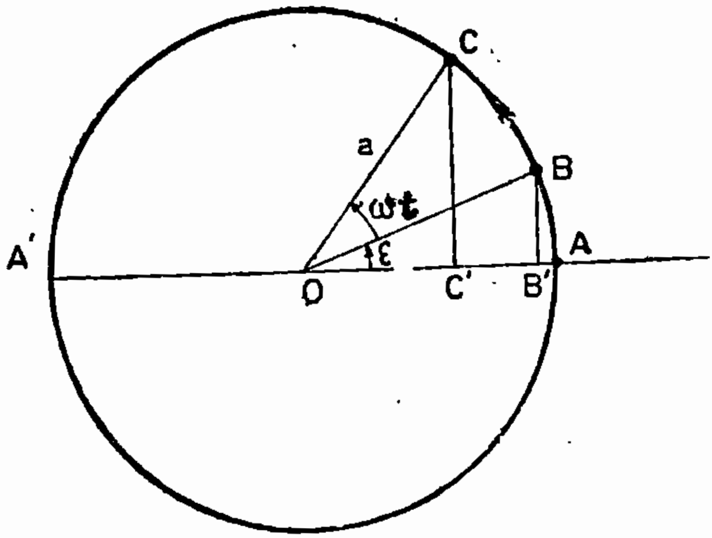
وبتأمل دالة العجلة المعطاة بالمعادلة (20) نجد أن للجسيم عجلة تتجه دائما نحو مركز الذبذبة (O) كما تدل الاشارة السالبة بالمعادلة . ويتناسب مقدار العجلة مع بعد الجسيم عن مركز الذبذبه كما تبلغ العجلة أقصى مقـــدار لها ($a\,\omega^2$) فى الأطراف (A , A′) .

وبالجملة يمكن القول أن الجسيم يبدأ حركته من سكون فى الموضع A متأثرا بعجلة مركزية — متناسبة مع بعد الجسيم عن المركز — تجذبه نحو O فيبلغ أقصى سرعته عندها ويستمر تحت عجلة تقصيرية حتى يتوقف عند A′ ثم يكر عائدا مكررا نفس الحركة دون توقف .

ويمكن اتخاذ الصورة المعطاة بالمعادلة (17) أو الدالة $\sin(\omega t)$ بدلا منها أساسا لتعريف الحركة التوافقية البسيطة كما سيتضح فى أبواب الديناميكا . وعموما لو برزت أمامنا أى الصورتين لاستنتجنا أنها حركة توافقية بسيطة .

ويمكن تعريف الحركة التوافقية البسيطة بأنها مسقط لحركة نقطة تدور فى دائرة نصف قطرها a بسرعة زاوية منتظمة ω إذا أسقطت هذه الحركة على أحد أقطار الدائرة . فلو بدأ الجسيم دورانه على الدائرة من نقطة B واحتل بعد زمن t نقطة مثـــل C فان مسقطه على القطر الافقى يكون C′ وتكون دالة موضع المسقط C′ كالآتى :

$$x = a\cos(\omega t + \varepsilon) \qquad \cdots\cdots \quad (21)$$



شكل (٥)

وفيها الزاوية ε تعرف بزاوية الابتداء والتفاضل الزمني يعطى نفس النتائج السابقة (18) , (19) , (20) ، وإذا دار الجسم دورة كاملة على الدائرة قطع مسقطه القطر ذهابا وإيابا فى زمن قدره $\frac{2\pi}{\omega}$

بند ٢٣ ـ حركة على خط مستقيم تبعا للعلاقة :

$$x = a \cosh(\omega t) \qquad \dots \dots \quad (22)$$

وفيها a ، ω ثابتان بمفاضلة هذه العلاقة بالنسبة للزمن نحصل على دالة السرعة :

$$v = \dot{x} = \omega a \sinh(\omega t) \qquad \dots \dots \quad (23)$$

بمفاضلة العلاقة (23) بالنسبة للزمن نحصل على دالة العجلة

$$f = \ddot{x} = \omega^2 a \cosh(\omega t)$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = + \omega^2 \cdot x \qquad \ldots \quad .. \quad (24)$$

المعـــادلة (22) تدل على تزايد المسافة x تزايـدا مستمرا بتزايد الزمن t أى أن الحركة ليست ترددية كما فى الحركة التوافقية البسيطة و يبدو ذلك جليـا من معادلة العجلة (24) إذ أن الاشارة الموجبة للعجلة تجعلها تطارد الجسم بعيدا عن المركز (O) نحو اللانهاية .

$$x = a \sinh(\omega t) \qquad \ldots \quad \ldots \quad (25)$$

تعطى حركة جسم مطرود إلى الخارج كالمعادلة (22) أيضا.

وكل من المعادلتين (24) فى حالتنا هذه و (20) فى حالة الحركة التوافقيـــة البسيطة تعرف بالمعادلة التفاضلية للحركة إذ أنهـــا تربط المسافة x بالزمن t ومعاملاتها التفاضلية . وحل أى من هاتين المعادلتين يستلزم إجـــراء خطوتى تكامل يظهر فى كل خطوة منها ثابت تكامل ولذا يمكن القـول أن الحل العـام للمعادلة التفاضلية

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x} = + \omega^2 x \\ x = A \cosh \omega t + B \sinh \omega t \text{ هو} \end{array}\right\} \qquad \ldots \quad \ldots \quad (26)$$

وفيها A ، B ثابتان اختياريان للتكامل يمكن تعيينهما عن طريق أحـوال بداية الحركة . والمعادلتان (26) تمثلان حـــركة مطرودة من المركز (O) إلى اللانهـاية .

وكذلك الحل العـام للمعادلة التفاضلية

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x} = - \omega^2 x \\ x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \text{ هو} \end{array}\right\} \qquad \ldots \quad \ldots \quad (27)$$

والمعادلتان (27) تمثلان حركة توافقية بسيطة فى صورتها العامة .

ويجدر بنا تذكر النتائج (26) ، (27) لكثرة ورودهما فى الديناميكا كما سيأتى بعد .

تطبيقات النوع الثانى

بند ٢٤ — حركة بعجلة جذب خاضعة لقانون التربيع العكسى للمسافة :

من المعروف أن الجاذبية الأرضية تتناقص كلما ابتعدنا عن الأرض خاضعة فى ذلك لقانون التربيع العكسى المسافة كما سنثبته عند الكلام عن ديناميكا الجسيم وعلى ذلك فعجلة الجاذبية فى موضع ما تتناسب عكسيا مع مربع بعده عن مركز الأرض وتتجه الى هذا المركز .

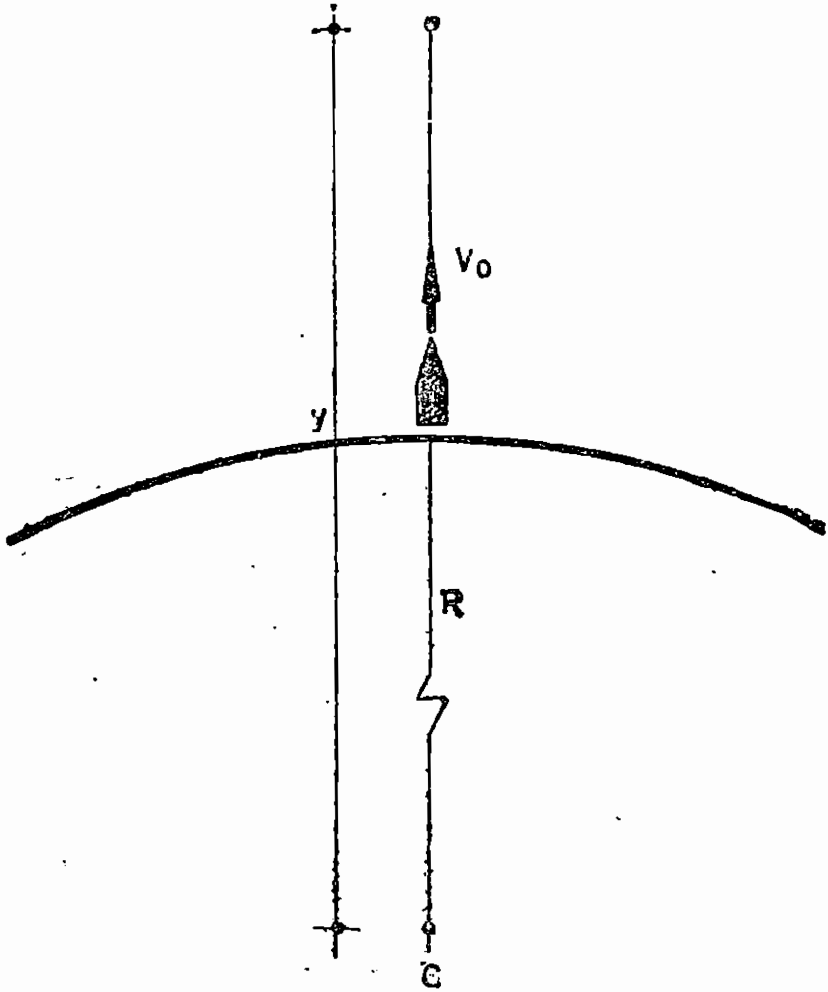
فلو أطلق مقذوف من سطح الأرض رأسيا الى أعلى بسرعة ابتدائية v_0 وأهملنا مقاومة الهواء له فيمكن دراسة حركته على النحو الآتى :

نفرض أن بعد المقذوف عن مركز الأرض فى لحظة ما هو y فتكون عجلته رأسية إلى أسفل ومعطاة بالعلاقة :

$$f = -\frac{c}{y^2} \qquad \cdots \quad \cdots \quad (28)$$

وتسمى العجلة فى هذه الحالة تقصيرا لأن سهمها يضاد الحركة . والثابت c فى المعادلة (28) هو ثابت التناسب ويمكن تعيينه بمعلومية قيمة العجلة عند سطح الأرض $(g = 32 \text{ ft/sec}^2)$

من المعلوم أن العجلة تعطيها إحدى الصورتين :



شكل (٦)

$$f = \frac{dv}{dt} = v\,\frac{dv}{dy} \qquad \dots \quad \dots \quad (29)$$

والصورة الثانية أنسب لحالتنا هذه نظرا لأن العجلة معطاة كدالة فى الموضع y . من المعادلتين (28) ، (29) :

$$v\,\frac{dv}{dy} = -\,\frac{c}{y^2}$$

وبضرب الطرفين فى dy ينفصـــل المتغيران ويمكن تكامل الطرفين كل على حدة :

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{R}^{y} -\frac{c}{y^2}\,dy$$

والحدود السفلى للتكاملات تخص الموضع الابتدائى للقذوف والحدود العليا لها تخص أى موضع y .

$$\therefore \quad \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{c}{y} - \frac{c}{R}$$

$$\therefore \quad v^2 = v_0^2 - 2c\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{y}\right) \qquad \dots \dots \quad (30)$$

والعلاقة (30) تعطى السرعة v عند أى بعد y من مركز الأرض .

ولإيجاد الثابت c نعوض العجلة عند سطح الأرض فى العلاقة (28) حيث $(y = R = 4000 \text{ miles})$

$$\therefore \frac{c}{4000 \times 4000} = \frac{32}{3 \times 1760} \qquad \dots \dots \quad (31)$$

ولإيجاد السرعة الإبتدائية v_0 التى تدفع المقذوف إلى غير رجعة نعوض فى المعادلة (30) v بالصفر عندما تبلغ y اللانهاية

$$v_0 = \sqrt{\frac{2c}{R}} = \sqrt{\frac{2 \times 32 \times 4000}{3 \times 1760}} \begin{array}{l} = 7.0 \ \text{mile/sec.} \\ = 11.2 \ \text{km/sec.} \end{array}$$

وتعرف هـــذه السرعة (بسرعة الهروب) من الجاذبية الأرضية أو

(بالسرعة الكونية الثانية) . وهذه السرعة تختلف من كوكب لآخر حسب شدة جذبه كما سيأتى عند الكلام على الحركة المداية .

بند ٢٥ ـ الحركة بعجلة طاردة $\frac{c}{y^2}$:

تخضع قوى التجاذب والتنافر الكهربى بين شحنتين لقانون التربيع العكسى ولذا فإن عجلة جسيم مشحون بشحنة مماثلة فى النوع لشحنة جسيم آخر يبعد عن الأول مسافة ما y تكون $\left(+\frac{c}{y^2}\right)$.

يمكن الحصول على حل هذه الحالة بتعويض (c +) بدلا من (c —) فى نتائج الحالة السابقة (بند ٢٤) . فمن المعادلة (30) تعطى السرعة فى حالتنا الجديدة ب :

$$v^2 = v_0^2 + 2c\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{y}\right) \qquad \cdots \quad \cdots \quad (32)$$

وفى هذه الحالة يصل الجسيم إلى اللانهاية بسرعة تعطيها :

$$v_\infty^2 = v_0^2 + \frac{2c}{R}$$

ولو بدأ الجسيم من سكون لوصل اللانهاية بسرعة $\sqrt{\frac{2c}{R}}$

بند ٢٦ ـ الحركة بتقصير يتناسب مع السرعة :

تؤدى حركة الأجسام فى أوساط مقاومة كالهواء والماء إلى وقوعها تحت تقصير يتوقف على سرعتها كما سيأتى بعد فى ديناميكا الجسيم .

ولنفرض أن التقصير متناسب مع السرعة :

$$f = -k\,v \qquad \dots \quad \dots \quad (33)$$

بتعويض ($f = v\,\dfrac{dv}{dx}$) فى المادلة (33) وفصل المتغيرين ومكاملة الطرفين نحصل على :

$$v\,\frac{dv}{dx} = -\,kv$$

$$\therefore \int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{x} -\,k\,d\,x$$

$$\therefore \quad (v - v_0) = -\,kx \qquad \dots \quad \dots \quad (34)$$

وبتعويض ($v = \dfrac{dx}{dt}$) فى المادلة (34) وفصل المتغيرين x , t ومكاملة الطرفين نحصل على :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - kx$$

$$\int_{0}^{x} \frac{dx}{v_0 - kx} = \int_{0}^{t} dt$$

$$\therefore \quad \log \frac{v_0 - kx}{v_0} = -\,kt$$

$$\therefore \left(1 - \frac{k}{v_0}\,x\right) = e^{-kt}$$

$$\therefore x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \qquad \dots \quad \dots \quad (35)$$

والعلاقة (35) ممثلة بمنحنى فى شكل (٤) .

والمسافة حد أقصى ($x_{max} = \frac{v_0}{k}$) يبلغه الجسيم بعد زمن لا نهائى كما يتضح من المعادلة (35) .

وقد يكون التقصير متناسبا مع مربع السرعة أو أس آخر لها وسنرجىء هذه الحالة إلى ديناميكا الجسيم (الحركة فى وسط مقاوم) .

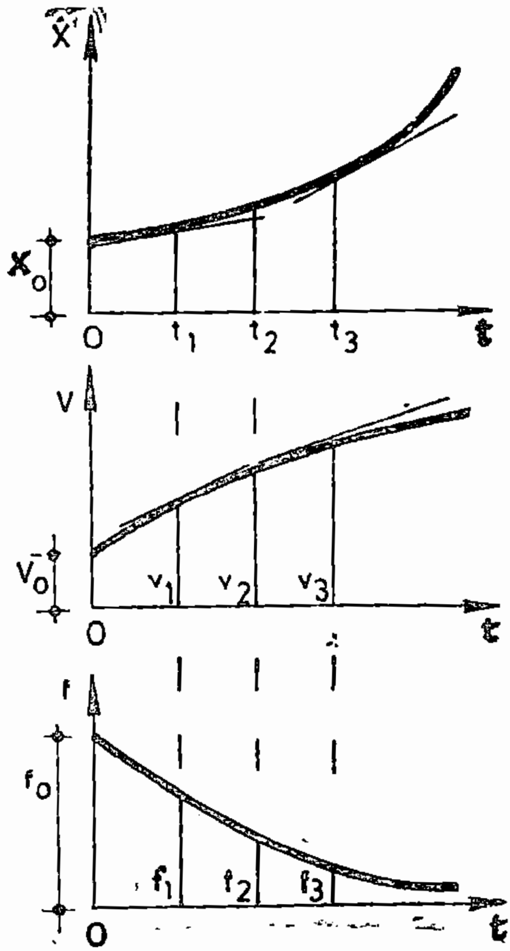
بند ٢٧ ـ الحلول البيانية :

إذا مثلت العلاقة (x , t) بمنحنى أمكن استنتاج المنحنى (v , t) منها بيانيا كما يأتى

لما كانت السرعة عند أى لحظة t هى المعامل التفاضلى للمسافة بالنسبة للزمن ($v = \frac{dx}{dt}$) وبالتالى ميل المماس للمنحنى (x , t) عند هذه اللحظة فلو أخذت لحظات $(t_1 , t_2 , t_3 , \dots)$ ورسمت مماسات المنحنى (x , t) عند هذه اللحظات كانت ميولها مساوية للسرع $(v_1 , v_2 , v_3 , \dots)$ عند هذه اللحظات ويمكن توقيعها على منحنى يمثل العلاقة (v , t) كما فى شكل (٧) وبالمثل يستنتج منحنى العلاقة (f , t) من ميول المماسات للمنحنى (v , t) نظرا لأن العجلة f هى المعامل التفاضلى للسرعة بالنسبة للزمن .

أما إذا أعطيت العجلة f كدالة للزمن أمكن بالطريق العكسى وهو طريق التكامل إيجاد العلاقة (v , t) والعلاقة (x , t) وذلك إذا أعطيت أحوال بداية الحركة أى الموضع الإبتدائى x_0 والسرعة الإبتدائية v_0 فمثلا تعطى السرعة v عند أى لحظة t بالعلاقة

$$v = v_0 + \int_0^t f\,dt \qquad \dots \dots (36)$$



شكل (٧)

وفيها الحد التكاملي يمثل أثر العجلة في زيادة السرعه وتمثله المساحه الواقعه تحت المنحنى (f , t) والمحددة بالرأسيين المناظرين للخطين صفر، t والمحور الأفقى وبذا نحصل على المنحنى (v , t) من المنحنى (f , t) بيانيا .

وبالمثل يمكن إيجاد المنحنى (x , t) بناء على العلاقة :

$$x = x_0 + \int_0^t v\,dt \qquad \dots \dots (37)$$

وعلى العموم لو أعطينا جدولا للقيم المتناظرة لمتغيرين من المتغيرات الأربعة (x , t , v , f) فمن الممكن إيجاد المتغيرين الاخرين برسم منحنيــــات مناسبة مبنية على العلاقتين

$$v = \frac{dx}{dt} \; , \; f = \frac{dv}{dt} = v\,\frac{dv}{dx} \qquad \cdots \cdots \quad (38)$$

مثــال : لو أعطينا جدولا للقيم المتناظرة المتغيرين f , v فيمكن إيجاد دوال المتغيرات الباقية على النحو التالى :

$$\therefore \quad f = \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \quad dt = \frac{dv}{f}$$

$$\therefore \quad t = \int \frac{1}{f} \, . \, dv \qquad \cdots \cdots \quad (39)$$

وعليه لو رسم منحنى إحداثياته الأفقية هى قيم (v) من الجـدول المعطى وإحداثياته الرأسية هى قيم ($\frac{1}{f}$) من الجدول فإن المساحة الواقعـة تحت هذا المنحنى حتى أى نقطة منه تمثل الزمن t كما يتضح من العلاقة (39)

ودالة المسافة x يمكن ايجادها من العلاقة :

$$f = v\,\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore dx = \frac{v\,dv}{f}$$

$$\therefore \quad x = \int \frac{v}{f} \, dv \qquad \cdots \cdots \quad (40)$$

وعليه لو رسم منحنى إحداثياته الأفقية هى قيم (v) وإحداثيــــاته الرأسية

هى قيم ($\frac{v}{g}$) من الجدول فإن المساحة الواقعة تحت هـذا المنحنى حتى أى نقطة منه تمثل المسافة x كما يتضح من العلاقة (40)

ويمكن من طريق آخر إيجاد x من العلاقة :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \quad x = \int v\, dt$$

إذا سجلنا قيم t الناتجة من العلاقة (39) أمام قيم v المناظرة فى الجدول ورسمنا المنحنى (v, t) فإن المساحة تحته تعطى x كما سبق .

خلاصة الباب الثالث

١ — الكينماتيكا هى فرع الميكانيكا المخصص لوصف الحركة دون التعرض للقوى المسببة لها .

٢ — هيكل رصد الحركة هو هيكل متماسك من ثلاث محاور متعامدة وملتقية فى نقطة .

٣ — درجات حرية الجسم هى أقل عدد من الاحداثيات ـ طولية كانت أو زاوية ـ يلزم ويكفى لتحديد موضع الجسم .

٤ — يتحدد موضع جسم متحرك على خط مستقيم ببعده x عن نقطة أصل ثابتة على طول الخط .

٥ — سرعة جسم متحرك على خط مستقيم تعطيها العلاقة

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

٦ — عجلة جسم متحرك على خط مستقيم تعطيها إحدى العلاقتين :

$$f = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}$$

$$f = v\,\frac{dv}{dx}$$

٧ — فى التطبيقات تستخدم النتائج الواردة فى ٥ ، ٦ مع أحـــوال بداية الحركة وكذا القواعد الأساسية فى علم التفاضل والتكامل للوصول إلى النتـائج المطلوبة .

تمرينـات

(١) يتحرك جسيم على خط مستقيم تبعاً للعلاقة

$$x = k\,(1 - e^{-ct})$$

وفيها x هى المسافة من نقطة أصل ثابتة على المستقيم ، t هى الزمن ، k ، c ثابتان ، e هى أساس اللوغاريتم النابييرى . أوجد العلاقات الاتية :

$$(v, t), (f, t), (v, x), (f, x), (f, v)$$

ثم أوجد أقصى قيمة لكل من x ، v ، f ومتى تحدث كل منها .

$$v = kce^{-ct}, \quad f = -kc^2e^{-ct}$$

$$x = \left(k - \frac{v}{c}\right), \quad x = k + \frac{f}{c^2}, \quad f = -cv$$

الجواب $(x_{max} = k,\ t = \infty)$

القيم القصوى $(v_{max} = kc,\ |f_{max}| = kc^2,\ t = 0)$

٢ — يتحرك جسيم فى خط مستقيم تبعا للعلاقة

$$x = a\cos(kt) + b\sin(kt)$$

وفيها x هى المسافة ، t هى الزمن ، كل من a ، b ، k ثابت أوجد عجلة

الجسيم كدالة فى المسافة x أوجد الوضع الابتدائى والسرعة الابتدائية للجسيم أثبت أن للمسافة x حد أقصى وأوجده [أعدادى ه ا سبتمبر سنة ١٩٤٨]*

الوضع والسرعة الابتدائية : $x_0 = a, v_0 = kb$

أقصى مسافة : $x_{max} = \sqrt{a^2 + b^2}$

(٣) يتحرك جسيم فى خط مستقيم تبعا للعلاقة

$$x = a - a \cos (kt)$$

وفيها a , k ثابتان . أرسم منحنيا للمتغيرين (x,t) وأوجد أقصى بعد للجسيم عن نقطة الأصل . أوجد العلاقات الاتية :

(١) السرعة كدالة فى الزمن
(٢) العجلة كدالة فى الزمن
(٣) العجلة كدالة فى المسافة

أوجد السرعة القصوى وأين ومتى تحدث [اعدادى ه ا . نوفبر سنة ١٩٤٦]

$$x_{max} = 2a$$

دوال السرعة والعجلة $v = ka \sin (kt), f = k^2 a \cos (kt).$

الجواب $f = k^2 (a - x)$

والسرعة القصوى وزمان ومكان حدوثها

$$v = ka, \ t = \frac{\pi}{2k}, x = a$$

(٤) يتحرك جسيم من سكون فى خط مستقيم تبعا للعلاقة

* ه ا . = هندسة الاسكندرية

$$f = \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{240}}$$

وفيها t هى الزمن بالثانية ، f العجلة بالقـــدم فى الثانية ، e هى أساس اللوغاريتم النابيرى أوجد الحـد الأقصى للسرعة والزمن اللازم لبلوغ سرعة الجسيم ٩٩ ٪ من حدها الأقصى . أوجد المسافة التى يقطعها الجسيم فى العشرين دقيقة الأولى . [اعدادى هـ . ا . يونية ١٩٤٥] .

الجواب : أقصى سرعـة = ٨٠ر٠٠ قدما فى الثانية
الزمن المطلوب = ١١٠٥ر٢٤ ثانية
المسافة المطلوبة = ٧٦٩٣٩ر٤ قدما

(٥) يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة تبعا للعلاقة :

$$x = a \sin (kt)$$

وفيها k ، a ثابتان . أثبت أن العـلاقة x ، v يمثلها قطع ناقص وأوجد السرعة عندما تكون $(x = \frac{a}{2})$. أوجـــد الزمن المنقضى حتى تكون $(x = - \frac{a}{2})$ وأوجد العجلة فى الوضع الأخير [اعدادى هـ . ا . يولية سنة ١٩٥٢] .

الجواب :

علاقة السرعة والمسافة : $\frac{v^2}{a^2 k^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$

السرعـة المطلوبة : $\frac{\sqrt{3}}{2} a k$

الزمن المطلوب : $\frac{7 \pi}{6 k}$

العجـلة المطلوبة : $\frac{1}{2} k^2 a$

(٦) يتحرك جسيم فى خط مستقيم بتقصير يتناسب عكسيا مع مربع المسافة :

$$f = -\frac{k}{x^2}$$

وكانت أحوال بداية الحركة هى :

$$x_0 = 20 \text{ metres}, \ v_0 = 10 \text{ m/sec.}$$

أوجد العلاقات (v, x) ، (x, t) إذا علمت أن الجسيم انتهى إلى سكون على مسافة لا نهائية .   [إعدادى هـ . ا . مايو سنة ١٩٥١]

[الجواب : العلاقات المطلوبة هى :

$$v\sqrt{x} = 20\sqrt{5} \ \& \ x^{3/2} = 10\sqrt{5}\,(3t + 4)$$]

(٧) تتناقص سرعة جسيم متحـــرك فى خط مستقيم من v_0 إلى الصفر تبعا للعلاقة :

$$v = v_0 - k\,x$$

وفيها k ثابت . أوجد :

« ا » المسافة والسرعة والتقصير بدلالة الزمن

« ب » التقصير بدلالة المسافة .

أين ومتى يسكن الجسيم .   [إعدادى هـ . ا . أكتوبر سنة ١٩٤٦]

الجواب :

$$x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$$v = k\ v_0\ e^{-kt}. \qquad «ا»$$

$$-f = k^2 v_0 e^{-kt}$$

$$-f = k^2 (v_0 - kt) \qquad «ب»$$

الجسيم يسكن بعد زمن لا نهائى وتكون المسافة

$$\left(\frac{v_0}{k}\right)$$

(٨) يتحرك جسيم فى خط مستقيم تبعا للعلاقة الاتية بين السرعة والمسافة

$$v = v_0 + kx$$

وفيها v_0 هى السرعة الإبتدائية ، k ثابت . أوجد :

(ا) العجلة بدلالة المسافة . (ب) العجلة بدلالة السرعة .

(ح) المسافة بدلالة الزمن . (ى) السرعة بدلالة الزمن .

(ﻫ) العجلة بدلالة الزمن . [اعدادى ﻫ . ا . يونية سنة ١٩٤٨]

الجواب :

المطلوب على الترتيب من اليسار إلى اليمين :

$$f = k(v_0 + kv),$$

$$f = kv,\ x = \frac{v_0}{k}\left(e^{kt} - 1\right)$$

$$v = v_0 . e^{kt},\ f = k v_0 e^{kt}$$

(٩) يتحرك جسيم فى خط مستقيم تبعا للعلاقة الاتية بين السرعة والمسافة :

$$v = v_0 . e^{-x}$$

أوجد العجلة بدلالة المسافة ثم بدلالة الزمن ثم أوجـــد كلا من المسافة والسرعة بدلالة الزمن . أوجـــد الزمن اللازم لقطع أول متر وثانى متر من مساره إذا علمت أن سرعته الإبتدائية v_0 قيمتها ١ متر فى الثانية

[إعدادى هـ . ١ يونيه سنة ١٩٥٤]

العلاقات المطلوبة على الترتيب من اليسار :

$$f = -v_0 e^{-2x} , f = -\left(\frac{v_0}{v_0 + 1}\right)^2$$

الجواب : $x = \log_e (v_0 t + 1) , v = v_0/(v_0 t + 1)$

الأزمنة المطلوبة هى : ١٫٧١٨ ثانية ، ٤٫٦٧٠ ثانية

(١٠) يتحرك جسيم فى خط مستقيم تبعا للعلاقة الاتية بين المسافة والسرعة :

$$x = A \sqrt{v} - B$$

وفيها A ، B ثابتان . وأحوال بداية الحركة كانت $(t = 0 , x = 0)$ أوجد الزمن المنقضى حتى تبلـــغ السرعة ضعف قيمتها الإبتدائية . أوجد العجلة بدلالة السرعة

[إعدادى هـ . ١ مايو سنة ١٩٥٦]

الجواب : الزمن : $\frac{0.293 \ A^2}{B}$ ،

العلاقة المطلوبة هى $f = \frac{2}{A} v^{3/2}$

(١١) نقصت سرعة جسيم متحرك فى خط مستقيم من مترين فى الثانية إلى متر واحد فى الثانية فى مسافة قدرها نصف متر . فإذا كان التقصير إما :

« ١ » ثابتا أو « ب » متناسبا مع السرعة

أوجد فى كل من الحالتين ا ، ب الملاقات الاتية :

السرعة بدلالة المسافة ثم السرعة بدلالة الزمن وأرسم منحنيات تمثل هذه العلاقات [إعدادى هـ . ا . سبتمبر سنة ١٩٤٤]

الجواب :

$$v = \sqrt{4 - 6x}\ ,\ v = 2 - 3t \qquad (ا)$$

$$y = 2(1 - x)\ ,\ v = 2e^{2t} \qquad (ب)$$

(١٢) بدأت سيارة الحركة فى خط مستقيم بسرعة ١٨ كم فى الساعة وأخذت تتزايد سرعتها تزايدا متناسبا مع المسافة المقطوعة إلى أن بلغت ٢٧ كم فى الساعة فقطعت السيارة بذلك مسافة ١٥٠ مترا . أوجد الزمن المنقضى فى هذه الحركة والعجلة فى نهاية الفترة ارسم المنحنيات الاتية لهذه الحركة :

$$(v, x)\ ,\ (f, x)\ ,\ (x, t)$$

[إعداد هـ . ا سبتمبر سنة ١٩٥٥]

الجواب :

الزمن المطلوب = ١٠٫٩٨٦ ثانية ،

العجلة المطلوبة = ٢٥٩٢٠ ك / ساعة / ساعة

$$v = 18\,(20x + 1)\ ,\ f = 6480\,(20x + 1)$$

العلاقات : $t = \frac{1}{300} \log_e (20x + 1)$

(١٣) بدأ قطار حركته من سكون واكتسب سرعة قدرها ٧٢ كم فى الساعة بعد قطعه مسافة ٣ كم . وكانت العجلة ثابتة خلال الكيلو متر الاول ثم تزايدت خطيا (linearly) مع المسافة فى الكيلو مترين الباقيين إلى ضعف قيمتها الاصلية . ارسم المنحنيات (f, x) ، (v, t) بمقياس رسم مناسب ومنها أوجد زمن قطع المسافة كلها . [إعدادى [illegible] يونية سنة ١٩٤٤]

الجواب : الزمن = ٦ر٥ دقيقة .
العجلة الأصلية = ٦٤٨ كم / ساعة / ساعة

(١٤) بدأ قطار الحركة من محطة A بعجلة ابتدائية قدرها ٨ر٠ قدم فى الثانية فى الثانية وتناقصت هذه العجلة خطيا مع الزمن لمدة دقيقتين وصل القطار فى نهايتهما إلى سرعته الكاملة ثم سار بها بانتظام لدقيقتين أخريين . ثم استخدمت الفرامل فسار القطار بتقصير منتظم قدره ٥ر٣ قدم فى الثانية² إلى أن وقف فى المحطة B ارسم المنحنى (f,t) ومنه استنتج بيانيا المنحنى (v,t) أوجد السرعة القصوى والمسافة بين المحطتين .

الجواب : السرعة القصوى = ٤٨ فى الثانية
والمسافة = ٩٩٢٩ قدما

(١٥) باستخدام وحدات مناسبة وجد أن المنحنى (f,t) لحركة قطار كهربائى هو ربع دائرة مركزها نقطة الأصل فإذا علمت أن العجلة الإبتدائية ٥ر٢ قدم فى الثانية وأن العجلة تنخفض إلى الصفر فى مدة ٢٠ ثانية فأوجد السرعة والمسافة فى نهاية هذه الفترة

الجواب : ٢٩ر٢٧ قدما فى الثانية ،
٤٥٢ قدما

(١٦) يتحرك جسيم فى خط مستقيم بتقصير يتناسب مع مكعب سرعته ($k\,v^3$) أثبت صحة العلاقات الاتية لحركته :

$$v = v_0 / (1 + k\,x\,v_0) \; ; \; t = \left(\tfrac{1}{2}\,k\,x^2 + \frac{x}{v_0} \right)$$

وفيها v_0 هى السرعة الابتدائية ، k ثابت

أجريت تجربة على بندقية فوجد أن سرعة انطلاق الرصاصة من فوهتها تبلغ ٢٤٠٠ قدما فى الثانية وأن هذه السرعة انخفضت إلى ٢٣٥٠ قدما فى الثانية بعد سيرها ١٠٠ ياردة أحسب الزمن اللازم لقطع ١٠٠٠ ياردة معتبرا أن التقصير الناشىء من مقاومة الهواء متناسب مع مكعب السرعة وأهمل عجلة الجاذبية الأرضية [الجواب : ١ر٣٨ ثانية]

(١٧) الجدول الآتى يعطى العلاقة بين العجلة والمسافة فى حركة سيارة :

المسافة (قدم)	صفر	١٠٠	٢٠٠	٤٠٠	٦٠٠	٨٠٠	١٠٠٠
العجلة : (قدم / ث٢)	٢	١ر٧	١ر٤	٠ر٥	٠ر٢	٠ر –	صفر

ارسم منحنى العجلة مع المسافة ومنه استنتج بيانيا منحنى السرعة مع المسافة

(١٧) قطع جسم مسافة متر واحد فى ثانية واحدة مبتدئا من سكون ومنتهيا إلى سكون أثبت أن عجلته لابد أن تبلغ القيمة ٤ متر فى الثانية فى لحظة ما من حركته « ارشاد : استخدم الطريقة البيانية »

(١٩) يتحرك جسم فى خط مستقيم تبعا للعلاقة الآتية بين السرعة والزمن والمسافة :

$$v = (1 + x^2)t$$

أوجد المسافة x بدلالة الزمن t إذا علمت أن $(x = 0)$ عندما تكون $(t = 0)$

$$\left[\text{الجواب : } x = \tan \frac{t^2}{2}\right]$$