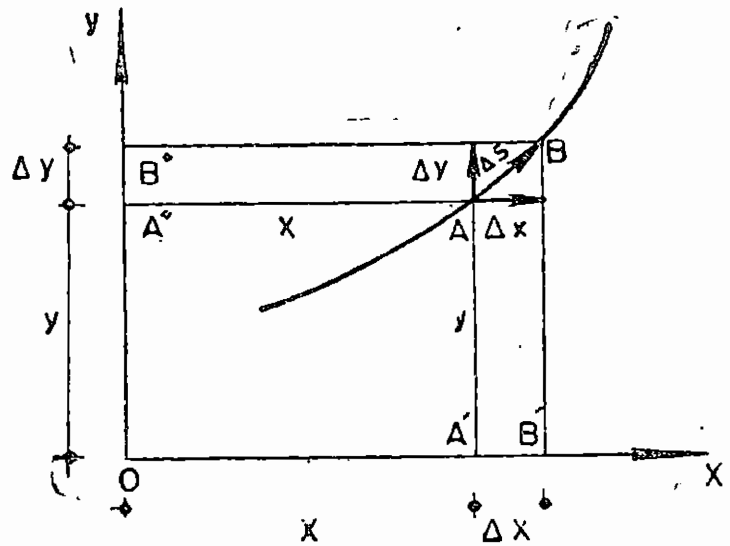
الباب الرابع

الحركة المستوية ـــ الطريقة الكرتيزية

بند ٢٨ ـ الموضع والسرعة والعجلة :

لحركة الجسيم فى مستوى درجتا حرية هما الاحداثيان اللازمان لتحديد موضعه كالاحداثى الافقى x والرأسى y عند استعمال الاحداثيات الكرتيزية وإذا تحرك جسيم على منحنى مستوى تحرك تبعا لذلك مسقطـــاه على المحورين الكرتيزيين (x , y) بحيث يكون كل من هذين الاحداثيين دالة فى الزمن t على الصورة العامة :



شكل (٨)

$$\left.\begin{aligned} x &= \phi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \qquad \dots\ \dots \quad (1)$$

وكل من المعادلتين (1) تعبر عن حركة جسيم فى خط مستقيم وبذا يمكن اعتبار حركة الجسيم على منحنى مستوى محصلة لحركتين على مستقيمين هما محورا الاحداثيات .

وإذا انتقل الجسيم من نقطة ما A فى مساره الى نقطة قريبة B فان محصلة انتقاله على المنحنى القصير AB هو المتجه AB ومقداره Δs وينتقل تبعا لذلك مسقطاه الأفقى والرأسى انتقالين صغيرين Δx , Δy على الترتيب والسرعة المتوسطة لقطع المسافة AB هى $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ومركبتاها الافقية والرأسية هما $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، $\frac{\Delta y}{\Delta t}$

ولإيجاد سرعة الجسيم عند A نؤخذ نهاية المقادير السالفة عندما تقترب Δt من الصفر وفى هذه الحالة يقترب الوتر AB شيئا فشيئا من المماس عند A وتعطى العلاقة (2) السرعة عند A وهى مماسة للمسار عندها :

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \qquad \ldots \quad (2)$$

ومركبتاها فى الاتجاهين الأفقى والرأسى هما :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\ ,\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \qquad \ldots \ldots \quad (3)$$

وإذا عرفت العجلة بأنها معدل تغير السرعة فينتج تبعا لما سبق مركبتا العجلة الكرتيزيتان :

$$f_x = \frac{d}{dt} v_x = \ddot{x}\ ,\ f_y = \frac{d}{dt} v_y = \ddot{y} \qquad \ldots \ldots \quad (4)$$

وبذا يكون مقدار

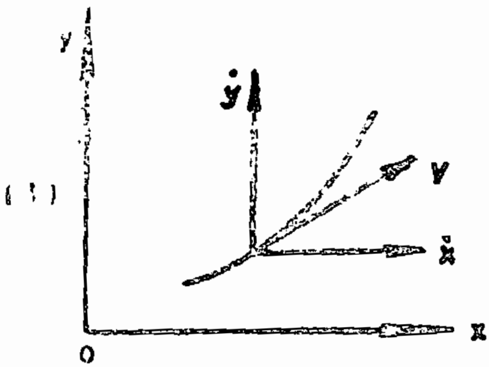
العجلة المحصلة :

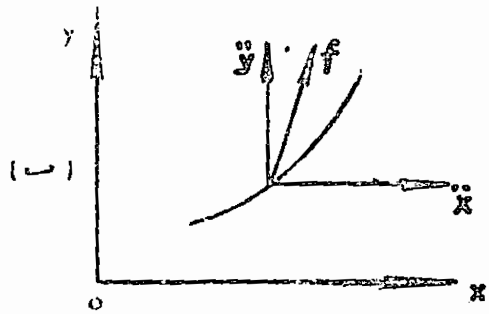
$$f = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

وميلها على الأفق :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right)$$

وخلاصـــة القول أن الحركة المستوية هى محصلة حركتين فى خطين مستقيمين هما محورا الاحداثيات كما يتضح من المعـــادلات (1)،(3)، (4) ويمكن علاج كل من هاتين الحركتين علاجا مستقلا كما سبق فى الباب





أ ـ مركبات السرعة　　　ب ـ مركبات العجلة

الثالث ثم تركب النتـائج للحصول على محصلة سرعة أو عجلة الجسيم فى أى لحظـــة .

كما يمكن الحصول على المعادلة الكرتيزية المسار إذا اعتبرنا أن المعادلتين (1) هما معادلتان بارامتريتان له وفيهما t هو البارامتر بحيث لو حذف بينهما لنتجت المعادلة الكرتيزية للمسار .

والطريقة الكرتيزية تيسر حل الحالات التى تتخذ فيها عجلة الحركة اتجاها

ثابتا كحركة المقذوفات بالقرب من سطح الأرض مثلا .

بند ٢٩ – حركة المقذوفات :

تتحرك المقذوفات قريبا من سطح الأرض بعجلة ثابتة g تتجه رأسيا إلى أسفل وعليه يمكن كتابة العلاقتين الآتيتين لهذه الحركة :

$$\ddot{x} = 0 \,,\; \ddot{y} = -g \qquad \dots \; \dots \qquad (5)$$

وفيها إشارة g سالبة لأنها رأسية إلى أسفل أى ضد اتجاه $(+y)$. بتكامل العلاقتين (5) بالنسبة للزمن ينتج :

$$\dot{x} = A \,,\; \dot{y} = -gt + B$$

وفيها A , B ثابتا تكامل تعينهما القيم الابتدائية لمركبات السرعة . فاذا قذف الجسم من نقطة الأصل بسرعة قذف v_0 تميل α على الأفق نتج أن :

$$v_0 \cos \alpha = A \,,\; v_0 \sin \alpha = B$$

وعليه

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha \,,\; \dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt \qquad \dots \; \dots \qquad (6)$$

بتكامل العلاقتين (6) مرة أخرى بالنسبة للزمن وإيجاد ثابتى التكامل بتعويض الموضع الابتدائى كما سبق ينتج أن

$$x = (v_0 \cos \alpha) \,.\, t \,,\; y = (v_0 \sin \alpha)\, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad \dots \qquad (7)$$

والمعادلتان (7) هما المعادلتان البارامتريتان للمسار وبحذف t بينهما نحصل على معادلته الكرتيزية الآتية :

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2 (1 + \tan^2 \alpha)}{2 v_0^2} \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

وهى تمثل قطعاً مكافئاً محوره رأسى ومقلوب إلى أسفل ويمر بنقطة الأصل وسيأتى تفصيل أشمل لحركة المقذوفات فى باب مستقل عند الكلام على ديناميكا الجسيم .

بند ٣٠ ـ حركة جسيم على دائرة بسرعة منتظمة :

إذا تحرك جسيم على دائرة كان لحركته درجة حرية واحدة إذ أن موضعه يتعين بزاوية ميل نصف القطر الواصل بين موضع الجسيم ومركز الدائرة ويرمز لهذه الزاوية بالرمز θ والزاوية التى يقطعها نصف القطر بين موضعين للجسيم بالانتقال الزاوى .

ويسمى معدل تغير الانتقال الزاوى θ بالسرعة الزاوية للجسيم ويرمز لها بالرمز ω ($\dot{\theta} = \omega$) كما يسمى معدل تغير السرعة الزاوية بالعجلة الزاوية ويرمز لها بالرمز $\dot{\omega}$ ($\ddot{\theta} = \dot{\omega}$) .

وإذا تحرك جسيم على دائرة بسرعة زاوية منتظمة قدرها ω فإن موضعه θ عند أى لحظة t يتعين بالعلاقة الآتية :

$$\theta = \omega t + \varepsilon \quad \dots \quad \dots \quad (9)$$

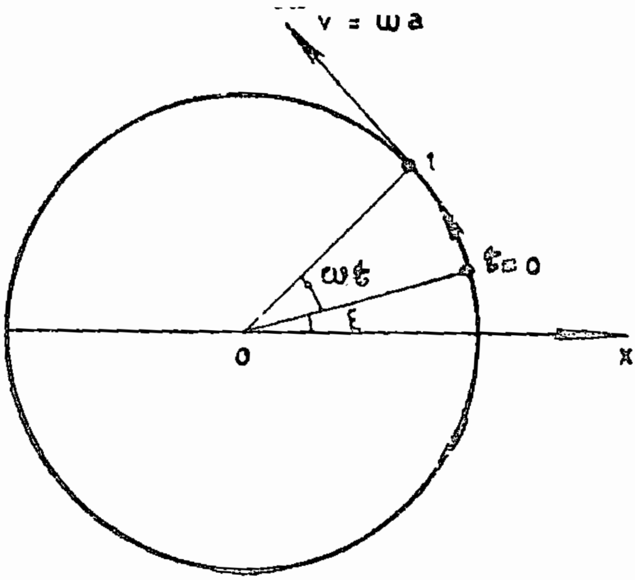
وفيها ε هى زاوية الابتداء (شكل ١) .

وبتفاضل المعادلة (9) نحصل على السرعة الزاوية

$$\dot{\theta} = \omega \quad \dots \quad \dots \quad (10)$$

وترتبط سرعة الجسيم v على الدائرة بسرعته الزاوية بالعلاقة :

$$v = \omega a \qquad \dots \quad \dots \quad (11)$$



شكل (١٠)

وفيها a هى نصف قطر الدائرة وذلك لأن قوس الدائرة يساوى حاصل ضرب الزاوية المقابلة له بالتقدير الدائرى فى نصف قطر الدائرة .

وبتفاضل العلاقة (11) بالنسبة للزمن نجد أن العجلة المماسة صفرا .

وبالطريقة الكرتيزية تعبر العلاقتان الآتيتان عن موضع الجسيم شكل(١٠)

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos (\omega t + \varepsilon) \\ y &= a \sin (\omega t + \varepsilon) \end{aligned}\right\} \qquad \dots \quad \dots \quad (12)$$

ومركبات السرعة تنتج من تفاضلهما بالنسبة للزمن :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= - \omega a \sin (\omega t + \varepsilon) \\ \dot{y} &= \omega a \cos (\omega t + \varepsilon) \end{aligned}\right\} \qquad \dots \quad \dots \quad (13)$$

وبتربيع العلاقتين (13) نحصل على مقدار محصلة السرعة

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega a$$

وأما اتجاهها فتعطيه الكمية

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \tan^{-1}\Big(-\cot(\omega t + \varepsilon)\Big)$$

$$\therefore \quad \tan\theta = -\cot(\omega t + \varepsilon)$$

والنتيجة الأخيرة تفيد تعامد السرعة على نصف القطر الواصل من الجسيم إلى الدائرة أى أن السرعة مماسة للمسار .

بتفاضل المعادلتين (13) بالنسبة للزمن نحصل على مركبات العجلة :

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 a \cos(\omega t + \varepsilon) = -\omega^2 x \\ \ddot{y} &= -\omega^2 a \sin(\omega t + \varepsilon) = -\omega^2 y \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad \dots \quad (14)$$

وبالتربيع والجمع نحصل على مقدار العجلة

$$\sqrt{\ddot{y}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2 a$$

وأما إتجاهها فتعطيه الكميه

$$\theta' = \tan^{-1}\left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right) = \tan^{-1}\Big(\tan(\omega t + \varepsilon)\Big)$$

$$\therefore \quad \tan\theta' = \tan(\omega t + \varepsilon)$$

وهذا يفيد أن اتجاه العجلة هو نحو مركز الدائرة

بند ٣١ – حركة جسيم على دائرة بعجلة منتظمة α :

فى هذه الحالة نكتب :

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \alpha \quad \cdots \quad \cdots \quad (15)$$

بضرب كل من الطرفين فى dt وتكاملهما نحصل على

$$\dot{\theta} = \alpha\, t + A$$

وفيها A ثابت تكامل تعينه السرعة الزاوية الابتدائية $\dot{\theta}_0$

$$\therefore\ \dot{\theta} = \alpha\, t + \dot{\theta}_0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (16)$$

بتكامل العلاقة (16) بالنسبة للزمن نحصل على

$$\theta = \tfrac{1}{2}\,\alpha\, t^2 + \dot{\theta}_0\,.\, t + B$$

وفيها B ثابت تكامل يعينه الموضع الابتدائى ε :

$$\theta = \tfrac{1}{2}\,\alpha\, t^2 + \dot{\theta}_0\,.\, t + \varepsilon \quad \cdots \quad \cdots \quad (17)$$

بند ٣٢ – حركة توافقية على قطع ناقص : (Elliptic harmonic motion)

يمكن تعريف هذه الحركة بأنها مسقط لحركة جسيم يدور بانتظام على دائرة مساعدة لقطع ناقص إذا أسقطت هذه الحركة على القطع الناقص نفسه (شكل١١)

لنفرض أن الجسيم بدأ من A وأن سرعته الزاوية المنتظمة ω فبعد زمن t يحتل الجسيم المتحرك على الدائرة النقطة B ذات الاحداثيات .

$$x = a\cos(\omega\, t) \qquad\qquad y = a\sin(\omega\, t)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega a \sin(\omega t) \\ \dot{y} &= +\omega b \cos(\omega t) \end{aligned}\right\} \qquad \dots \dots \quad (20)$$

بتفاضل المعادلتين (20) بالنسبة للزمن نحصل على مركبتى العجلة على الوجه الآتى :

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 a \cos(\omega t) = -\omega^2 x \\ \ddot{y} &= -\omega^2 b \sin(\omega t) = -\omega^2 y \end{aligned}\right\} \qquad \dots \dots \quad (21)$$

والمعادلة الأولى من (21) تمثل حركة توافقية بسيطة على المحور الأفقى سعتها a وزمنها ($\frac{2\pi}{\omega}$) . بينما تمثل المعادلة الثانية من (21) حركة توافقية بسيطة على المحور الرأسى بسعة b مختلفة عن الأولى وبزمن دورى مساو لزمن الأولى ومن هذا يتضح أن الحركة التوافقية على قطع ناقص هى مجموع حركتين توافقيتين بسيطتين كما تقدم

بجمع مركبات العجلة نحصل على المحصلة .

$$f = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{\omega^4 x^2 + \omega^4 y^2} = \omega^2 r \qquad \dots \dots \quad (22)$$

وميلها :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}\right) = \theta \qquad \dots \dots \quad (23)$$

أى أنها متجهه نحو مركز الدائرة شكل (١١) كما يتبين من الإشارات السالبة فى المعادلتين (21)

ويمكن إتخاذ هذه العجلة المركزية المتناسبة مع البعد عن المركز الثابت 0 أساساً آخر لتعريف الحركة التوافقية على قطع ناقص . وتنشأ مثل هذه العجلة على الجسيمات من أثر شد زنبرك أو خيط مرن لها كما سيأتى عند الكلام على ديناميكا الجسيم (باب الحركة الاهتزازية)

الحركة الأراغيسة

بند ٣٣ — تعميم نتائج الحركة المستوية على الحركة الفراغية بالاحداثيات الكرتيزية .

يتعين موضع جسيم فى الفراغ باحداثياته الثلاثة (x , y , z) بالنسبة لمحاور ثلاثة ملتقية فى نقطة أصل ومتعامدة. وبذا يمكن تعميم نتائج السرعه والعجله فى حالة الحركه المستوية على الحركه الفراغيه باسقاط الأخيرة على ثلاثة محاور متعامدة (x , y , z) بدلا من اثنين فى حالة الحركه المستويه ، وقياساً على انطلاقات 3 ، 4 نجد أن مركبات السرعة الثلاثه فى اتجاه المحاور هى :

$$v_x = \dot{x} \; ; \; v_y = \dot{y} \; ; \; v_z = \dot{z} \qquad \ldots \ldots \ldots (24)$$

ومقدار محصلتها هو : $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

وجيوب تمام ميلها على محاور الاحداثيات المتعامدة هى $\left(\frac{\dot{x}}{v} , \frac{\dot{y}}{v} , \frac{\dot{z}}{v} \right)$ على الترتيب

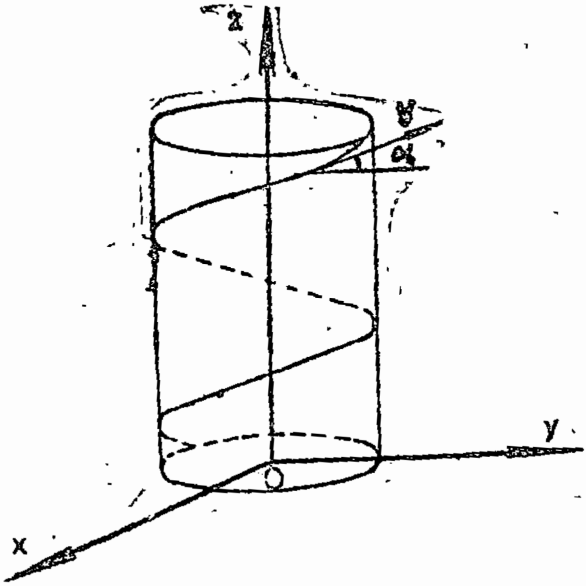
وكذلك مركبات العجله :

$$f_x = \ddot{x} , f_y = \ddot{y} ; f_z = \ddot{z} \quad \dots \quad \dots \quad (25)$$

ومقدار محصلتها هو $f = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

وجيوب تمام ميلها على محاور الاحداثيات المتعامدة هى $\left(\frac{\ddot{x}}{f} ، \frac{\ddot{y}}{f} ، \frac{\ddot{z}}{f} \right)$

مثال : يتحرك جسيم بسرعه منتظمه v على لولب اسطوانى رأسى ميل مماسه α على المستوى الافقى ونصف قطره a . أوجد عجلة حركته .



شكل (١٢)

باسقاط السرعه على المحور الرأسى z وعلى المستوى الافقى (x , y) نحصل على ما يلى :

مركبه السرعة فى إتجاه z هى

$$v_z = V \sin \alpha$$

وهى كمية ثابتة ولذا تنعدم مركبة العجلة فى الاتجاه z .

ومركبة السرعة فى المستوى الأفقى هى ($V \cos \alpha$) وهى مماسة لمسقط اللولب على المستوى الأفقى .

ولما كان هذا المسقط دائرة بنصف قطر a وحركة مسقط الجسيم عليها بسرعة منتظمة ($V \cos \alpha$) فإن عجلة الجسيم الكلية تكون :

$$\frac{V^2 \cos^2 \alpha}{a}$$

وهى أفقية ومتجهة نحو محور اللولب .

الحركة الفراغية بطريقة المتجهات

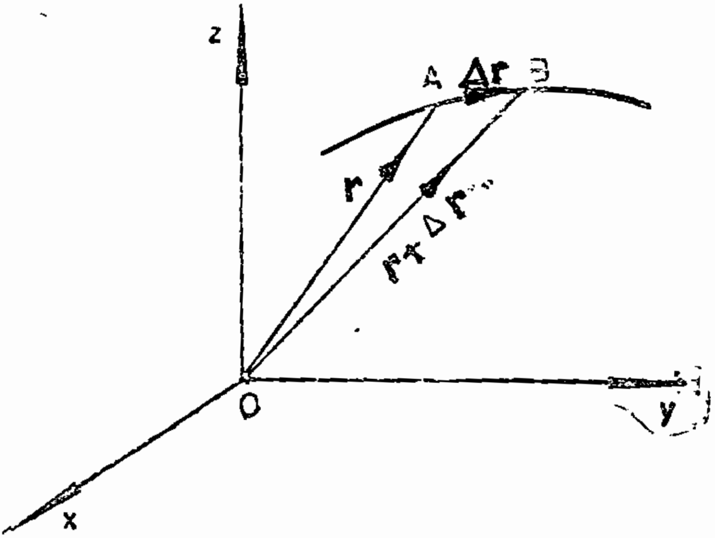
بند ٣٤ — موضع الجسيم وانتقاله :

يمكن تعيين الموضع A لجسيم بواسطة المتجه $\overline{OA}$ بدلا من الاحداثيات الكرتيزية الثلاثة (x , y , z) ويسمى المتجه $\overline{OA}$ بمتجه الموضع ويرمز له بالرمز r ويعينه فى الفراغ ٣ مقادير قياسية هى احداثيات النقطة A .

إذا انتقل جسيم من موضع A فى مساره إلى موضع آخر B عبر عن ذلك بالمتجه $\overline{AB}$ وهو محصلة انتقال الجسم على القوس AB بانتقاله من النقطة A إلى النقطة B (شكل ١٣) . ويسمى المتجه AB بمتجه الانتقال (displacement vector) وهو يساوى فرق متجهى الموضع للنقطتين A , B كما يتضح من المثلث O A B (شكل ١٣) . أى أن :

$$d_{\overline{AB}} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

أو
$$d_{AB} = r_B - r_A \quad \dots \dots (26)$$



شكل (١٣)

بند ٣٥ ـ السرعة :

إذا انتقل جسيم انتقالا صغيرا ($\overline{AB} = \Delta r$) فى زمن قدره Δt (شكل ١٣) كان متوسط سرعته فى هذا الانتقال مساويا $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ وبأخذ نهاية هذا المقدار عندما تقترب Δt من الصفر وبالتالى تقترب B من A قربا متناهيا نحصل على السرعة عند A على الصورة الاتجاهية الآتية :

$$v = \frac{dr}{dt} \quad \dots \dots (27)$$

أى أن متجه السرعة هو المعدل الزمنى لتغير متجه الوضع . والوضع النهائى للوتر AB عند اقتراب B من A هو المماس لمنحنى المسار عند A . وعلى

هذا فالسرعة دائما مماسة لمسار الجسيم :

والمعادلة الاتجاهية (27) تعطى عند تحليل طرفيها فى الإتجاهات الكرتيزية الثلاثة (x , y , z) مركبات السرعة فى هذه الإتجاهات :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \; ; \; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \; ; \; v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

وهى نفس النتائج المعطاة بالمعادلات (24) وعلى هذا فتعتبر طريقة المتجهات بمثابة طريقة الإختزال فى الكتابة إذ أنها تجمع ثلاث علاقات تحليلية فى علاقة إتجاهية واحدة تشتق منها العلاقات الأولى بالتحليل فى الإتجاهات الكرتيزية

بند ٣٦ ـ العجلة

تعرف عجلة جسيم فى حركة ما بأنها المعدل الزمنى لتغير سرعته

وعلى الصورة الإتجاهية السابقة فى بند (٣٥) تكون العجلة تبعا لهذا التعريف :

$$f = \frac{dv}{dt} \qquad \dots \dots (28)$$

وبتحليلها فى الإتجاهات الكرتيزية الثلاثة نحصل على صور المركبات :

$$f_x = \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} \; ; \; f_y = \frac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y} \; ; \; f_z = \frac{d\dot{z}}{dt} = \ddot{z}$$

وهى نفس النتائج المعطاة بالمعادلات (25) وعليه فالعلاقة الإتجاهية (28) تحل محل ثلاث علاقات تحليلية .

بند ٣٧ — مسار الجسيم :

يمكن التعبير عن موضع الجسيم r بدلالة الزمن t بمعادلة إتجاهية ثوابتها كميات متجهة على الصورة :

$$r = \phi (a , b , \cdots t) \qquad \ldots \ldots (29)$$

وفيها a , b متجهات ثابتة معطاة وهذه المعادلة الإتجاهية يمكن إعتبارها معادلة المسار وبتحليلها فى الاتجاهات الكرتيزية نحصل على المعادلات البارامترية للمسار . وبحذف البارامتر t بين المعادلات الأخيرة نحصل على المعادلة الكرتيزية للمسار .

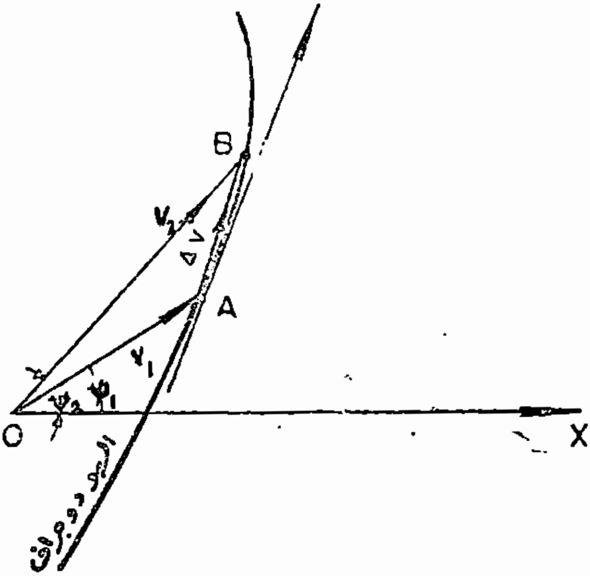
كما أن تفاضل المعادلة (29) بالنسبة للزمن يعطى دالة متجه السرعة والعجلة كما سبق شرحه .

بند ٣٨ — هودجراف الحركة :

هو المحل الهندسى لنهايات متجهات السرعة إذا رسمت جميعها من نقطة الأصل 0 فى اللحظات المتتابعة لحركة الجسيم . فلو رسم من 0 مواز ومساو لكل من سرع الجسيم v_1 ، v_2 ، ... عند نقط متتابعة من المسار A ، B ، ... فإن نهاياتها A' ، B' ، ... تقع على هودوجراف الحركة . من ذلك نستنتج أن لكل نقطة على المسار نظير على الهودوجراف يعينه متجه السرعة كمتجه موضع .

والعلاقة بين مقدار السرعة v وميلها ψ تعتبر معادلة قطبية للهودوجراف فى حالة الحركة المستوية .

ولما كان المتجه $\overline{A'B'}$ شكل (١٤) يمثل التغير Δv فى متجه السرعة ونهاية المتجه $\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ عندما تقترب Δt من الصفر ستكون مماسة للهودوجراف

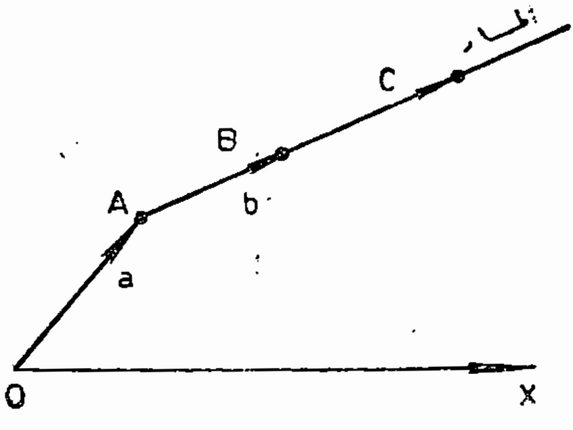


شكل (١٤)

عند A' فمن ذلك نستنتج أن عجلة الحركة عند نقطة A من المسار تكون مماسة للهودوجراف عند نظيرتها A' .

مثال (١) . دالة متجه الوضع لحركة جسيم هى

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\, t \qquad \dots \dots \quad (30)$$



شكل (١٥)

وفيها a ، b متجهان معلومان . أوجد مسار الجسم وسرعته وعجلته .

انفرض أن المتجه a يمثله $\overline{OA}$ والمتجه b يمثله $\overline{AB}$. باعطاء الزمن t المقادير صفر ، ١ ، ٢ ، ... فى المعادلة (30) نجد أن الجسيم يحتل النقط A ، B ، C ، ... فى الأزمنة المذكورة على الترتيب . وعليه فيمكن القول أن مسار الجسيم هو ABC (شكل ١٥)

بمفاضلة المعادلة (30) بالنسبة للزمن نحصل على دالة السرعة

$$v = \frac{dr}{dt} = b \qquad \dots \dots \quad (31)$$

ومنها نستنتج أن سرعة الجسيم هى المتجه b فى الاتجاه AB ، كما أن المتجه a يمثل موضعه الابتدائى

بمفاضلة لمعادلة (31) بالنسبة الزمن نحصل على دالة العجلة :

$$f = \frac{dv}{dt} = 0$$

وعلى هذا فالحركة المعطاه عبارة عن حركة جسيم فى خط مستقيم AB بسرعة منتظمة قدرها b .

ويمكن بتحليل المعادلة (0) فى الاتجاهين الأفقى والرأسى الحصول على معادلات المسار البارامترية .

$$\left.\begin{aligned} x &= a' + b'\, t \\ y &= a'' + b''\, t \end{aligned}\right\} \qquad \dots \dots \quad (32)$$

وفيها (a' ، b') هما المركبتان الأفقيتان ، (a'' ، b'') هما المركبتان الرأسيتان

للمتجهين (b, a) . بحذف t بين المعادلتين (32) نحصـــل على المعادلة الكرتيزية المسار :

$$y = a' + \frac{b''}{b'}(x - a')$$

وهى تمثل خطاً مستقيما .

خلاصة الباب الرابع

١) ا ـــ فى الحركة المستوية لجسيم بالطريقة الكرتيزية يتعـــين موضعه بمعلومية احداثييه (x, y) كدوال فى الزمن t وتعرف هاتان العلاقتان بالمعادلتين البارامتريتين للمسار .

ب ـــ ولسرعة الجسيم فى أى نقطة من مساره مركبتان فى الاتجاهين (y, x) هما $\dot{x}$, $\dot{y}$ على الترتيب . والسرعة المحصلة مماسة لمنحنى المسار دائما .

حـ ـــ ولعجلة الجسيم فى أى نقطة من مساره مركبتان فى الاتجاهين y , x هما $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ والعجلة المحصلة ليست على العمـــوم مماسة لمنحنى المسار كما فى حالة السرعة .

٢) ا ـ قياساً على ما سبق يكون للجسيم المتحرك حركة فراغيـة عامة مركبات سرعة $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ فى اتجاه المحاور $(x, y ; z)$ على الترتيب . والسرعة كذلك مماسة للمسار دائما .

ب ـــ ويكون له مركبات عجلة $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ فى اتجاه المحاور (x, y, z) والعجلة ليست مماسة لمنحنى المسار على وجه العموم .

٣) يمكن جمع النتائج الكرتيزية السابقة فى صورة مختصرة إذا استعملنا طريقة المتجهات .

أ — يعبر عن موضوع جسيم بمتجه الموضع r ويعبر عن حركة الجسيم بالمعادلة الاتجاهية : $r = \varphi\,(t)$

ب — تعرف سرعة جسيم بمعدل تغير متجه الموضع r أى أن :

$$v = \frac{dr}{dt}$$

حـ — تعرف عجلة جسيم بمعدل تغير متجه السرعة v أى أن :

$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

٤) تستخدم الطريقة الكرتيزية لدراسة الحركة الحرة لجسيم متأثر بعجلات ثابتة الاتجاه مثلا .

تمارين

(١) المعادلتان البارامتريتان للحركة المستوية لجسيم هما :

$$x = 5\,t \qquad : \qquad y = 20 - 5t^2$$

وفيها t هى الزمن بالثانية ، (x , y) إحداثيات موضع الجسيم بالمتر أوجد معادلة المسار وارسمه . أوجد سرعة الجسيم عند بدء الحركة وعند التقاء الجسيم بمحور x أوجد عجلة الجسيم [إعدادى هـ . أ . يولية سنة ١٩٤٧]

[الجواب : $y = 20 - \frac{x^2}{5}$; $v_0 = 5$ m/sec.
$\sqrt{425}$, $f =$ m/sec^2]

(٢) المعادلتان البارامتريتان للحركة المستوية لجسيم هما :

$$x = a \cos (c t) ; y = b \sin (c t)$$

وفيها (a , b , c) ثوابت معلومة . أوجـــد المعادلة الكرتيزية للمسار .
أوجد سرعة عجلة الجسيم مقدارا واتجاها عندما تكون :

$$x = 0 \; , \; x = a \; ; \; x = \frac{a}{2}$$

أثبت أن عجلة الجسيم تتجه دائما نحو نقطة الأصل .

[اعدادى هـ . ا . يونيه سنة ١٩٤٥]

[الجواب : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; ac, bc, $\frac{c}{2} \sqrt{3a^2 + b^2}$
$b c^2$, $a c^2$, $\frac{c^2}{2} \sqrt{a^2 + 3 b^2}$]

(٣) يتحـرك جسيم على القطع المكافىء $(y = 2x^2)$ حيث كل من x , y بالقدم . والمركبة الأفقية لسرعته ثابتة وتساوى قدما واحدا فى الثانية . أوجد عجلة الجسيم فى المقدار والاتجاه . ثم أوجد سرعته مقداراً واتجاها عندما يكون الاحداثى الرأسى له ٨ أقدام [اعدادى هـ . ا . سبتمبر سنة ١٩٤٨]

[الجواب $f = 4$ ft/sec^2 , $v = \sqrt{65}$ ft/sec]

(٤) يتحرك مقـذوف تحت عجلة الجاذبية $(g = 32 \text{ ft / sec}^2)$ على

قطع مكافىء معادلته :

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{x^2}{64}$$

وفيها x , y بالقدم . أوجد مقدار واتجاه سرعته الابتدائية . أوجد أقصى ارتفاع للقذيفة ومداها على محور x وزمن وصولها اليه .

[اعدادى ه . ا . يولية سنة ١٩٥٢]

[الجواب : ($v = 40$ ft/sec , $\tan \alpha = \frac{3}{4}$
9 ft , 48 ft , 1.5 sec]

(٥) المعادلتان البارامتريتان للحركة المستوية لجسيم هما

$$x = 20\,t - 3\,t^2 \quad , \quad y = 16\,t - 4\,t^2$$

وفيها x ,y بالقدم ، t بالثانية . أوجد عجلة الحركة وأقصى ارتفاع للجسيم فوق محور x وسرعته فى هذا الموضع متى وأين يقع الجسيم على المحور الأفقى

[اعدادى ه ا. سبتمبر سنة ١٩٥٠]

[الجواب : ($\ddot{x} = -6$, $\ddot{y} = -8$ ft/sec^2) ;
16 ft , 8 ft/sec , 4 sec , 32 ft]

(٦) أطلق مقذوف أفقيا بسرعة ١٢٠ قدما فى الثانية . أوجد موضعه وسرعته بعد مضى ٥ ثوان . أوجد معادلة مساره

[اعدادى ه . ا . سبتمبر سنة ١٩٤٥]

الجواب :

$$\left[\begin{array}{l}(600\ ,\ -400\ \text{ft})\\ (\dot{x}=120\ ,\ \dot{y}=-160\ \text{ft/sec})\ ,\\ y=-\dfrac{x^2}{900}\end{array}\right]$$

(٧) يتحرك جسيم على دائرة نصف قطرها ٢ قدم بعجلة مماسة ثابتة مقدارها ١ قدم فى الثانية فى الثانية ومبتدئا من سكون عند نقطة A على الدائرة أوجد سرعته عند عودته للنقطة A والزمن اللازم لذلك . أوجد محصلة عجلته فى المقدار والاتجاه عند عودته للنقطة A .

[إعدادى هـ . ا . نوفبر سنة ١٩٤٦]

الجواب :

$$\left[\begin{array}{l}v_A = 2\sqrt{2\pi}\ \text{ft/sec.}\ ;\\ t_A = 2\sqrt{2\pi}\ \text{sec,}\\ (f_t = 1\ ,\ f_n = 4\pi\ \text{ft/sec}^2)\end{array}\right]$$

(٨) يتحرك جسيم فى دائرة نصف قطرها ٢٠ سم بعجلة زاوية منتظمة قدرها (π rad/sec^2). أوجد سرعته وعجلته فى المقدار والاتجاه عند ما يقطع ربع محيط الدائرة ونصف وثلاثة أرباعه والمحيط الكامل وكذا الزمن اللازم لقطع هذه المسافات على الترتيب .

[إعدادى هـ . ا . سبتمبر سنة ١٩٤٧]

الجواب :

$$\left[\begin{array}{l}v = 20\pi\ ,\ 20\pi\sqrt{2}\ ,\ 20\pi\sqrt{3}\\ \qquad 40\pi\ \text{cm/sec}\\ f_n = 20\pi^2\ ,\ 40\pi^2\ ,\ 60\pi^2\ ,\ 80\pi^2\ \text{cm/sec}^2\\ t = 1\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ 2\ \text{sec}\end{array}\right]$$

(٩) يتحرك جسيم مبتدئا من نقطة الأصل على مسار معادلته :

$$y = a \sin (p x)$$

وفيها a ، p ثابتان وكانت سرعته الأفقيـة ثابتة ومقدارها u . أوجـد عجلة الجسيم بدلالة الزمن t وبدلالة y . ما أقصى قيمة للعجلة وأين تحدث

[إعدادى هـ.ا. سبتمبر سنة ١٩٤٤]

الجواب :

$$\ddot{x} = 0 \; ; \; \ddot{y} = - a p^2 u^2 \sin (p u t)$$
$$= - p^2 u^2 \, . \, y$$
$$\ddot{y}_{max} = - p^2 u^2 a \, , \, y = a$$

(١٠) بدأ جسيم حركته من سكون عند (a , b) على مسار شكله قطـع مكافىء معادلته ($y^2 = \frac{b^2}{a} x$) وكانت المركبة الرأسية لعجلته معطاة :

$$\ddot{y} = - k^2 \, . \, y$$

أوجد المركبة الأفقية للعجلة كدالة فى x ثم أوجد x , y , v كدوال فى الزمن t صف الحركة عموما وأوجد الفترة الزمنية بين نقطتى سكون على المسار .

[إعدادى هـ.ا. مايو سنة ١٩٥٦]

الجواب :

$$\ddot{x} = - 4k^2 x + 2 k^2 a \, ,$$
$$(\dot{x} = - 2k a \sin 2kt \; , \; \dot{y} = - kb \sin kt)$$
$$(x = a \cos^2 kt \; , \; y = b \cos kt)$$

الحركة عبـــارة عن ذبذبة على قطع مكافىء بين النقطتين (a , b) ، (a , − b)

والزمن المطلوب $= \frac{\pi}{k}$

(١١) مركبتا العجلة لحركة جسيم فى مستوى تعطيها العلاقتان :

$$\ddot{x} = k^2 x \, , \ \ddot{y} = k^2 y$$

وفيها k ثابت وأحوال بداية الحركة هى :

$$t = 0 \, ; (x = a \, , y = a) \quad , \quad (\dot{x}_0 = k a \, , \dot{y}_0 = - k a)$$

أوجد مسار الحركة بالصورة البارامترية والصورة الكرتيزية . أوجد السرعة v بدلالة المسافة r من مركز الاحداثيات وأثبت أن المساحة التى يقطعها متجه الموضع r فى وحدة الزمن ثابتة .

[إعدادى هـ ١. يونيه سنة ١٩٥٧]

الجواب :

$$\begin{cases} x = a (\cosh k t + \sinh k t) \\ y = a (\cosh k t - \sinh k t) \end{cases}$$

الصورة الكرتيزية للمسار $(xy = a^2)$

وهو قطع زائد . السرعة $(v = k r)$

(١٢) تنزلق حلقة صغيرة تحت تأثير وزنها على لولب أملس محوره رأسى ونصف قطره a وميل مماسه على المستوى الافقى α أوجد سرعة الحلقة مقدارا واتجاها بعد نزولها خطوة واحدة من خطوات اللولب .

[الجواب $v = \sqrt{2 \pi g a \tan \alpha}$]

(١٣) دالة متجه الموضع لحركة جسيم هى

$$r = a + b t + c t^2$$

وفيها a ، b ، c متجهات معلومة ، t هى الزمن . أوجد مسار الجسيم ودوال سرعته وعجلته ثم صف حركته بوجه عام وأوجد هودجراف الحركة .

[الجواب : يتحرك الجسيم حركة حرة تحت عجلة ثابتة المقدار والاتجاه $2c$
مسار الجسيم قطع مكافىء . $f = 2c$. $v = b + 2ct$
هودجراف الحركة خط مستقيم معادلته $v = b + 2ct$]