الباب الخامس

الاحداثيات الطبيعية ـــ الاحداثيات القطبية

بند ٣٩ – مقدمة : تناولنا فى الباب الرابع الحركة المستوية والفراغية بالطريقة الكرتيزية وفيها يجرى التحليل فى اتجاهات محاور ثابتة (x , y , z) ولذا كانت نتائج التحليل صور بسيطة متشابهة لمركبات السرعة والعجلة .

وسنتناول فى هذا الباب حالتين من حالات الحركة المستوية يجرى التحليل فيهما فى اتجاهين متعامدين دائما غير أنهما يدوران تبعا لحركة الجسيم فى مساره محتفظين بتعامدهما على بعض .

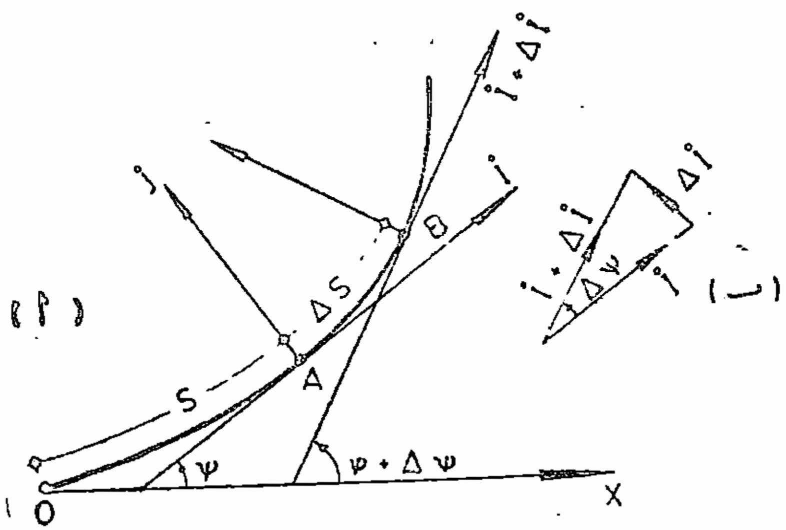
وسنستخدم فى اشتقاق صور مركبات السرعة والعجلة التعريف الاتجاهى لكل منهما بند (٣٥) ، (٣٦) وكذا طريقة الوحدات المتجهة المنوه عنها بكتاب الاستاتيكا الهندسية للمؤلف وذلك تيسيرا للبراهين .

الاحداثيات الطبيعية

بند ٤٠ – السرعة والعجلة : إذا تحرك جسيم فى مستوى حركة مقيدة بمسار معين كانزلاق حلقة على سلك منحنى ثابت الشكل والوضع كانت الاتجاهات الطبيعية للتحليل هى اتجاهى المماس لمنحنى المسار المعلوم واتجاه العمودى عليه وبديهى أن اتجاهى التحليل هذين يدوران بحركة الجسيم فى مساره غير أنهما يحتفظان بتعامدهما على بعض ويعرفان بالاحداثيات الطبيعية . لحركة جسيم مقيد بمسار مستوى معلوم درجة حرية واحدة هى المسافة s المقاسة على المسار ابتداء من نقطة أصل ثابتة 0 على هذا المسار .

والصورة الذاتية لمعادلة المسار (Intrinsic eqn) تلائم هذه الحالة وهى تربط بين المسافة s لنقطة ما A على المنحنى وزاوية ميل المماس ψ عند هـــذه النقطة على الوجه الآتى :

$$s = \phi(\psi) \qquad \dots \dots \quad (1)$$



شكل (١٦)

أثبتنا فى البند (٢٨) من الباب الرابع أن سرعة الجسيم v عند نقطة ما A على المسار تكون مماسة للمسار عند A وتعطى مقدارها العلاقة :

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \dots \dots \quad (2)$$

باستخدام وحدتين متجهتين أساسيتين i ، j فى اتجاه المماس والعمودى عند A على الترتيب (شكل ١٦) يمكن التعبير عن متجـــه السرعة v بما يأتى :

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{i} \qquad \dots \dots \quad (3)$$

ونعنى بالعلاقة (3) أن للسرعة مقدارا v تعطيه العلاقة (2) ولها اتجاه i أى المماس للمنحنى وبهذا تكون المعادلة (3) تعبير بسيط عن فكرة مقدار المتجه واتجاهه كحاصل ضرب كمية قياسية v فى كمية متجهة i

لايجاد عجلة الجسيم نستخدم التعريف الاتجاهى لها الوارد بالبند (٣٦) فنحصل على ما يأتى بتفاضل طرفى المعادلة (3) بالنسبة للزمن .

$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} i + v \frac{di}{dt} \qquad \cdots \cdots \quad (4)$$

ولإيجاد الكمية المتجهة ($\frac{di}{dt}$) نلاحظ أنه عندما ينتقل الجسيم انتقالا صغيرا Δs الى نقطة قريبة B (شكل ١٦ - ا) يدور المتجه i زاوية صغيرة $\Delta\psi$ ليطابق المماس الجديد عند B محتفظا بمقداره واحد صحيح حسب تعريف الوحدة المتجهة . وشكل (١٦ - ب) يبين المتجه i عندما يكون الجسيم فى A والمتجه $(i + \Delta i)$ عندما يكون الجسيم فى B وكل من المتجهين مقداره الواحد الصحيح حسب تعريف الوحدة المتجهة والضلع الثالث فى المثلث يبين التغير Δi ومقداره ($1 \, \Delta \psi$) واتجاهه مطابق للمتجه العمودى j . وعلى هذا يمكن القول أن :

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{\Delta \psi}{\Delta t} j$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما تقترب Δt من الصفر نحصل على :

$$\frac{di}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \cdot j \qquad \cdots \cdots \quad (5)$$

وبالتعويض من (5) فى (4) نحصل على :

$$f = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} i + v \frac{d\psi}{dt} \cdot j = \frac{dv}{dt} i + v \frac{d\psi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} j$$

وبتعويض ($v = \frac{ds}{dt}$) ، ($\rho = \frac{ds}{d\psi}$) حيث ρ نصف قطر تقوس المنحنى عند A نحصل على :

$$f = \frac{dv}{dt}.i + \frac{v^2}{\rho}j \qquad \dots\dots \quad (6)$$

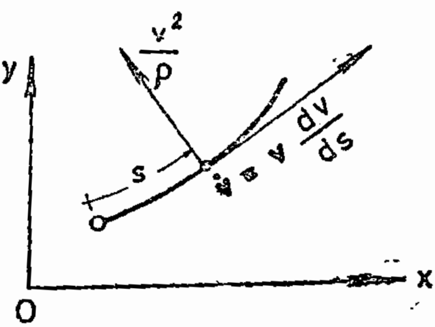
والمعادله الاتجاهيه (6) تفيد أن لعجلة الجسيم مركبتين : الأولى مماسه لمنحنى المسار ومقدارها ($\frac{dv}{dt}$) ويرمز لها بالرمز f_t والثانيه عموديه عليه والى الداخل ومقدارها ($\frac{v^2}{\rho}$) ويرمز لها بالرمز f_n أى أن :

$$\left.\begin{aligned} f_t &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} \\ \& \ f_n &= \frac{v^2}{\rho} \end{aligned}\right\} \qquad \dots\dots \quad (7)$$

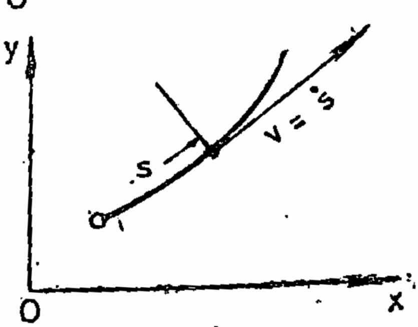
وشكل (١٧) يوضح مركبات السرعه والعجلة فى الاتجاهات الطبيعية أى المماس والعمودى للمسار .

ومما تجدر ملاحظته أن الحركة المقيدة بمسار منحنى أعطت عند تحليلها فى اتجاه المماس للمنحنى صورا من السرع والعجلات مشابهه تماما لنظيرتها فى حالة الحركة فى خط مستقيم وأنظر الباب

(ب)



(أ)



شكل (١٧) : أ ــ مركبات السرعة
ب ــ مركبات العجلة

الثالث ، إذا استبدلت المسافة s المقاســـة على المنحنى بالمسافة x على المستقيم ، قارن المعادلة (2) والمعادلة الأولى من (7) بالمعادلات (2) ، (4) ، (5) بالباب الثالث ، غير أن هناك فارق واحد وهو أن الجسيم المتحرك فى خط مستقيم ليست له عجلة عمودية على المسار فى حين أن الجسيم المتحرك فى منحنى له عجلة عمودية على مساره تعمل دائبة على تغيير اتجاه حركته ومقدارها متناسب طرديا مع مربع السرعة وعكسياً مع نصف قطر تقوس المنحنى كما يتضح من المعادلة (7) .

وعلى هذا يمكن دراسة الحركة الماسة ، ربط المسافة s والســـرعة v والعجلة الماسة $\dot{v}$ كدراسة الحركة على خط مستقيم . كما يمكن استعمال الطرق البيانيه السابق استعمالها فى حالة الحركة على خط مستقيم إذا أخـــذت المسافه s على المنحنى بدل المسافة x على المستقيم .

الاحداثيات القطبية

بند ٤١ — **السرعة والعجلة** : تستعمل هذه الطريقه فى التحليل لدراسة الحركة المستوية الحرة عندما تنشأ عجلة الجسيم من مركز أو قطب ثابت ويختار هذا القطب نقطة أصل لاحداثيات قطبيه (r ، θ) ويجـــرى تحليـــل الحركه فى الاتجاهين المتعامدين الاتيين :

١ — الاتجاه المركزى . أى اتجاه الشعاع الصادر من قطب الاحداثيات إلى موضع الجسيم .

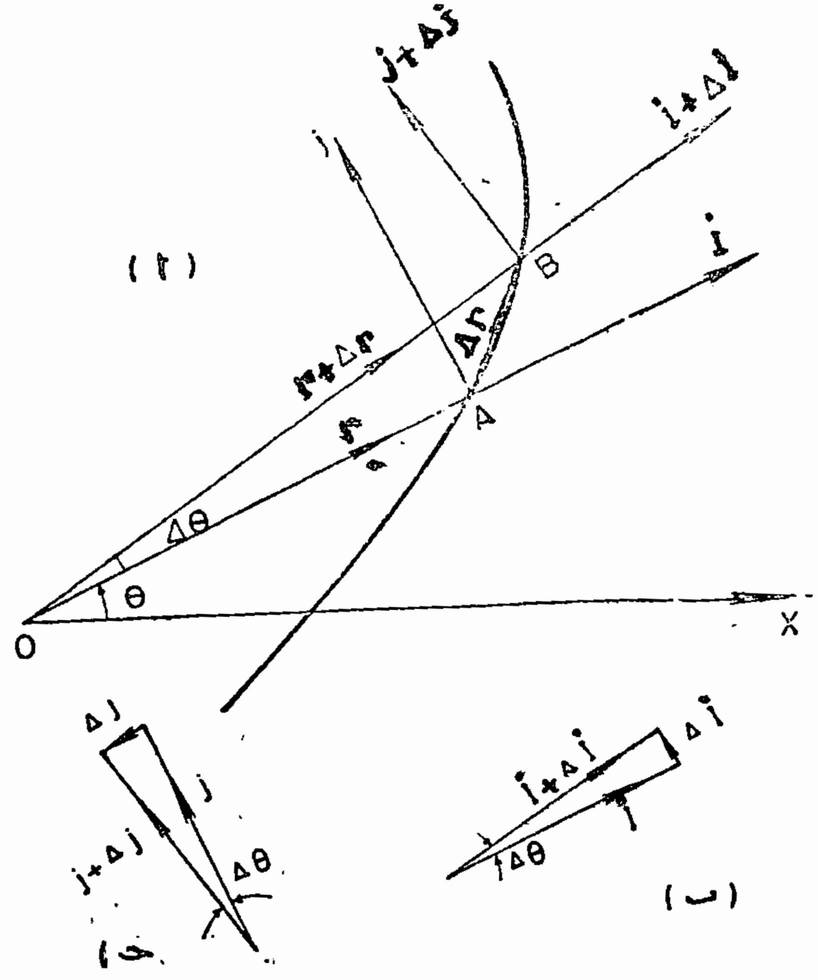
٢ — الاتجاه المتعامد مع الاتجاه الأول (شكل ١٨)

ويلاحظ أن اتجاهى التحليل فى هذه الحاله ليسا ثابتين كما كان الحال فى الطريقه الكرتيزيه بل يدوران بحركة الجسيم فى مساره . ولذا كان من المتوقع

أن تختلف مركبات الحركة فى صورتها القطبية عن الصور الكرتيزية البسيطة .

باستخدام وحدتين متجهتين أساسيتين i فى الاتجـــاه المركزى ، j فى الاتجاه المتعـامد (شكل ١٨) يمكن التعبير عن موضع ما للجسيم A بالعلاقة الاتية :

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{i} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (8)$$



شكل (١٨) اتجاهات التحليل

لإيجاد سرعة وعجلة الجسيم نستخدم التعريف الإتجاهى لهما الوارد بالبند (٣٥ ، ٣٦) فنحصل على متجه السرعة بمفاضلة متجه الموضع بالنسبة للزمن :

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt}\, i + r\,\frac{di}{dt} \qquad \dots \quad (9)$$

ولإيجاد الكمية المتجهة ($\frac{di}{dt}$) نلاحظ أنه عندما ينتقل الجسيم إنتقالا صغيرا Δs إلى نقطة قريبة B (شكل ١٨ - أ) يدور المتجه i زاوية صغيرة $\Delta \theta$ محتفظا بمقداره واحد صحيح حسب تعريف الوحدة المتجهة .

وشكل (١٨ — ب) يبين المتجه i عندما يكون الجسيم فى A والمتجه ($i + \Delta i$) عندما يكون الجسيم فى B القريبة من A ومقدار كل من المتجهين واحد صحيح والضلع الثالث فى المثلث يمثل التغير Δi ومقداره ($1.\ \Delta\theta$) واتجاهه مطابق للمتجه العمودى j . وعلى هذا يمكن القول أن :

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \cdot j$$

ونهايتها عندما تقترب Δt من الصفر تعطى

$$\frac{di}{dt} = \dot{\theta}\, j \qquad \dots \quad (10)$$

بتعويض العلاقة (10) فى (9) نحصل على :

$$v = \dot{r}\, i + r\,\dot{\theta}\, j \qquad \dots \quad (11)$$

والمعادلة الاتجاهية (11) تفيد أن لسرعة الجسيم مركبتين ، الأولى مركزية

ومقدارها $(\dot{r})$ وسنرمز لها بالرمز v_r والثانية متعامدة على الأولى مقدارها $(r\dot{\theta})$ وسنرمز لها بالرمز v_θ . أى أن :

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\,\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \qquad \dots \dots \quad (12)$$

بمفاضلة معادلة متجه السرعة (11) بالنسبة للزمن نحصل على متجه العجلة :

$$f = \frac{dv}{dt} = (\ddot{r}\,i + \dot{r}\,\frac{di}{dt}) + r\,\ddot{\theta}\,j + \dot{r}\,\dot{\theta}\,j + r\,\dot{\theta}\,\frac{dj}{dt} \quad \dots \quad (13)$$

لإيجاد الكمية المتجهة $\left(\frac{dj}{dt}\right)$ نتبع نفس طريقة ايجاد $\left(\frac{di}{dt}\right)$ فنحصل على:

$$\frac{dj}{dt} = -\,\dot{\theta}\,i \qquad \dots \quad (14)$$

والاشارة السالبة فى العلاقة (14) ترجع إلى أن التغير فى j يكون فى الاتجاه السالب للمتجه (شكل ١٨ - ح) .

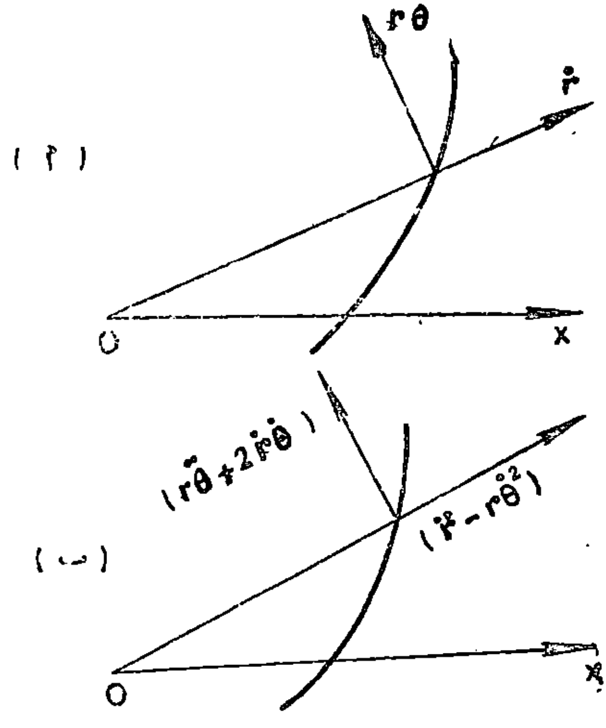
بتعويض العلاقتين (10) ، (14) فى العلاقة (13) وتجميع الحدود المشتركة فى كل من i ، j على حدة نحصل على :

$$f = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,i + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,j \qquad \dots \quad (15)$$

والمعادلة (15) تفيـــد أن لعجلة الجسيم مركبتين الأولى مركزية طاردة مقدارها $(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)$ وسنرمز لها بالرمز f_r والثانية متعامدة عليها ومقدارها $(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$ وسنرمز لها بالرمز f_θ والسبب فى تضخم هذين التعبيرين لمركبتى العجلة راجع إلى دوران اتجاهات التحليل مع انتقال الجسيم بعكس الحالة الكرتيزية حيث كانت اتجاهات التحليل ثابتة .

والمعادلتان (16) تعطيان العجلة :

$$\left.\begin{aligned} f_r &= \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 \\ f_\theta &= r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad \dots \quad (16)$$



شكل (١٩)

(أ) مركبات السرعة (ب) مركبات المجلة

والشكل (١٩) يبين مركبات السرعة والعجلة فى الاتجاه المركزى والمتعامد عليه .

بند ٤٢ — تطبيقات على الاحداثيات القطبية :

يوجد نوعان رئيسيان من المسائل المعالجة بالاحداثيات القطبية :

١ — النوع الأول ويعطى فيه مسار الجسيم بمعادلة قطبية ($r = \phi(\theta)$) ويعطى أيضا معدل قطع هذا المسار ثم تطلب مركبتا عجلة الجسيم . والطريق المتبع هو طريق التفاضل بالنسبة للزمن للحصول على الكميات $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{r}$, $\dot{r}$ المتبع فى معادلتى العجلة (16) .

٢ — النوع الثانى ويعطى فيه مركبتا عجلة الجسيم وأحوال البداية أى الموضع الابتدائى والسرعة الابتدائية ويطلب تعيين معادلة المسار والطريق المتبع هو تعويض مركبتى العجلة فى المعادلتين (16) فنحصل على معادلتين تفاضليتين يستلزم حلهما دراية أوسع بطرق التفاضل والتكامل ولذا سنرجىء أمثلة هذا النوع إلى باب الحركة المدارية عند الكلام عن ديناميكا الجسيم . وسنكتفى هنا بعرض أمثلة النوع الأول للتطبيق على الاحداثيات القطبية .

مثال (١) : يتحرك جسيم بسرعة زاوية ثابتة ω فى مسار مستوى معادلته القطبية ($r = a\,\theta$) وفيها a مقدار ثابت . أوجد سرعة وعجلة الجسيم بعد دورة كاملة حول القطب إذا علمت أن الجسيم بدأ حركته من القطب .

الحل

نعرف السرعة الزاوية لحركة الجسيم بمعدل التغير الزمنى للزاوية θ أى $\dot{\theta}$

$$\therefore \quad \dot{\theta} = \omega = \text{const}$$

وبتكامل هذه المعادلة بالنسبة للزمن نحصل على :

$$\theta = \omega t + c$$

وفيها c هو ثابت التكامل وتعينه أحوال البداية ولإنعدام θ عندما

تكون ($t = 0$) انعدم c

$$\therefore \theta = \omega t$$

وبالتعويض فى معادلة المسار نجد أن

$$r = a \omega t$$

ومنها $\dot{r} = a\omega \; ; \; \ddot{r} = 0$

كما أن $\dot{\theta} = \omega \; ; \; \ddot{\theta} = 0$

وبالتعويض نجد أن مركبتى السرعة فى الاتجاهين المركزى والمتعامد عليه هما على الترتيب .

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \dot{r} = \omega a \\ v_\theta &= r\dot{\theta} = \omega r \end{aligned}\right\}$$

وكذا مركبتا العجلة فى الاتجاهين السابقين هما :

$$\left.\begin{aligned} f_r &= \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = -\,\omega^2 r \\ f_\theta &= r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} = 2\,\omega^2 a \end{aligned}\right\}$$

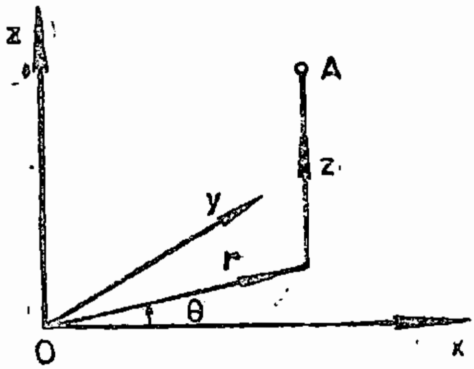
الحركة الفراغية بالاحداثيات الاسطوانية

بند ٤٣ ـ الوضع والسرعة والعجلة . إذا إتخـــذت محور x مارا بقطب الاحداثيات القطبية وعمـــوديا على مستواها أمكن تعيين موضع أى نقطة فى الفراغ بالاحداثيات الثلاثة (r , θ , z) كما فى شكل (٢٠) .

ونظرا لثبات المحور z فانه يمكن تعميم نتائج الاحداثيات القطبية المستوية فيما يختص بمركبات السرعة والعجلة على الوجه الآتى :

مركبات السرعة :

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\,\dot{\theta} \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad (17)$$



شكل (٢٠)

ومركبات العجلة :

$$\left.\begin{aligned} f_r &= \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 \\ f_\theta &= r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} \\ f_z &= \ddot{z} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad 1(8)$$

مثال : يتعين موضع جسيم متحرك فى الفــراغ باحداثياته الاسطوانية $(r\,,\theta\,,z)$ بدلالة الزمن t على الوجه الآتى :

$$r = a\,,\ \theta = \omega t\,,\ z = b\,t$$

وفيها a ، b ، ω ثوابت أوجد مسار الجسيم وسرعته وعجلته وأشرح حركته على وجه العموم .

بتفاضل العلاقات المعطاة بالنسبة الزمن نجد :

$$\dot{r} = 0 \quad , \quad \dot{\theta} = \omega \quad , \quad \dot{z} = b$$

$$\ddot{r} = 0 \quad , \quad \ddot{\theta} = 0 \quad , \quad \ddot{z} = 0$$

بتعويض هذه النتائج فى معادلات السرعة (17) نحصل على

مركبات السرعة :

$$v_r = 0 \ , \ v_\theta = \omega a \ , \ v_z = b$$

ومنها يتضح أن للجسيم سرعتين منتظمتين الأولى مقدارها (ωa) مماسة للدائرة $(r = a)$ والثانية مقدارها b وموازية للمحور z والجسيم المتحرك بهذه السرعة يرسم حلزونا منتظما على اسطوانة دائرية محورها مطابق لمحور z ونصف قطرها a

بتعويض نتائج التفاضل بالنسبة للزمن فى معادلات العجلة (18) نحصل على :

$$f_r = - \omega^2 a \ , \ f_\theta = 0 \ , \ f_z = 0$$

ومنها يتضح أن للجسيم مركبة عجلة واحدة فقط مقدارها $(\omega^2 a)$ وتتجه نحو محور الاسطوانة دائما .

خلاصة الباب

١) أ - تستخدم الاحداثيات الطبيعية لدراسة حركة الجسيم المقيدة بمسار معلوم ويتعين موضع الجسيم بالمسافة s المقاسة على منحنى المسار من نقطة ثابتة عليه .

ب - سرعة الجسيم تكون فى اتجاه المماس للمنحنى ومقدارها $\dot{s}$

حـ - لعجلة الجسيم مركبة مماسة $\left(\dot{v} = \ddot{s} = v \dfrac{dv}{ds} \right)$ وعجلة عمودية إلى الداخل ومقدارها $\left(\dfrac{v^2}{\rho} \right)$

د - مركبات الحركة فى اتجاه المماس لمنحنى المسار تشابه الحركة فى خط مستقيم باستبدال المسافة x على المستقيم بالمسافة s على المنحنى .

٢) أ - تستخدم الاحداثيات القطبية لدراسة حركة مستوية حرة لجسيم إذا نشأت عجلة الحركة من مركز أو قطب ثابت .

ب - مركبتا السرعة فى الاتجاهين المركزى والمتعامد هما على الترتيب .

$$v_r = \dot{r} \, , \, v_\theta = r \dot{\theta}$$

هـ - مركبتا العجلة فى الاتجاهين المركزى والمتعامد هما على الترتيب :

$$\left. \begin{aligned} f_r &= \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ f_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} \end{aligned} \right\}$$

تمرينات

١ — يتحرك جسيم فى دائرة نصف قطرها a مبتدئا من $(s = 0)$

بسرعة ابتدائية v_0 . فإذا كانت العجلة المماسة f_t والعجلة العموديه f_n مرتبطتين بالعلاقة

$$f_t = -k f_n$$

وفيها k ثابت أوجد العلاقات (v , s) ، (v , t) ، (s , t) أوجد مقادير العجلة الابتدائية والعجلة النهائية [إعدادى هـ. ا. مايو سنة ١٩٥٨]

[الجواب :

$$v = v_0 e^{-ks/a} \quad , v = \frac{v_0}{1 + k v_0 t/a}$$

$$s = \log \left(1 + \frac{k v_0 t}{a} \right) ,$$

العجلة العمودية فى البداية والنهاية على الترتيب :

$\frac{v_0^2}{a}$ ، صفر]

(٢) تربط العلاقة الآتية بين سرعة جسيم يتحرك على منحنى مستوى معلوم وبين عجلته المماسة :

$$f_t = \frac{1}{1+v}$$

أوجد العلاقتين (s , v) ، (v , t) إذا علمت أن الجسيم بدأ حركته من سكون عندما كانت $(s = 0)$.

[الجواب : $s = \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} , t = v + \frac{v^2}{2}$]

(٣) يتحرك جسيم حركة مستوية مركبتا سرعته فى الاتجاهين المركزى والمتعامد ثابتتان ويساوى كل منهما c . أوجد عجلة الجسيم بدلالة

المسافة القطبية r وأثبت أنها عمودية دائما على محصلة السرعة . أوجد المعادلة القطبية للمسار إذا أعطيت أحوال البداية الآتية :

$$t = 0 \; , \; \theta = 0 \; , r = a$$

[إعدادى هـ ٠١٠ يونيه سنة ١٩٥٧]

الجواب :

$$f_r = -\frac{c^2}{r} \; , \; f_\theta = \frac{c^2}{r} \; ,$$

$$f = \frac{c^2 \sqrt{2}}{r} \; , \; r = a\, e^{\theta}$$

(٤) أوجد عجلة جسيم يتحرك حركة مستوية بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ω إذا تحرك فى كل من المسارات القطبية الآتية :

$$\text{(i) } r = a + b\,\theta \; , \; \text{(ii) } r = a\, e^{\theta} \; , \; \text{(iii) } r = a + b \sin\theta$$

وفيها a , b ثابتان .

الجواب

$$\text{(i) } (f_r = -\omega^2 r, \; f_\theta = 2\,\omega^2 b\,) .$$

$$\text{(ii) } (f_r = 0 \qquad f_\theta = 2\,\omega^2 r\,) .$$

$$\text{(iii) } (f_r = \omega^2 (a - 2r) .$$

$$f_\theta = 2\,\omega^2 \sqrt{b^2 - (r-a)^2}$$

(٥) يتحرك كوكب فى مسار معادلته $\left(r = a \sec^2 \frac{\theta}{2}\right)$ وبعجلة مركزية جاذبة . أوجد هذه العجلة بدلالة r إذا علمت أن الكوكب بدأ حركته من النقطة $(r = a, \; \theta = 0)$ بسرعة ابتدائية قدرها v عمودية على الاتجاه المركزى

[الجواب : $f_r = -\dfrac{v^2 a}{2\, r^3}$]

(٦) يتحرك جسيم فى مســـار مستوى معادلته القطبية ($r = a^2 \theta^2$) بسرعة زاوية منتظمة قدرها ω حول نقطة الأصل . أوجـــد سرعة الجسيم وعجلته بدلالة كل من r , t إذا علمت أن الجسيم بدأ من النقطة $(0;0)$.

(أول هـ . ١ فبراير سنة ١٩٥٧)

الجواب :

$$\begin{aligned} v_r &= 2a\,\omega\sqrt{r} = 2a^2\,\omega^2\,t\,, \\ v_\theta &= \omega\, r = a^2\,\omega^3\,t\,, \\ f_r &= \omega^2(2a^2 - r) = \omega^2 a^2(2 - \omega^2 t^2) \\ f_\theta &= 2a\,\omega^2\sqrt{r} = 2a^2\,\omega^3\,t \end{aligned}$$

(٧) لسرعة جسيم متحرك فى مستوى مركبتان ثابتتان فى المقدار أحداهما U فى اتجاه المحور y دائما والثانية V متعامدة على متجه الموضع دائما . أوجد المعادلة القطبية لمسار الجسيم إذا علمت أنه بدأ من النقطة $(0\,,0)$.

الجواب :

المسار قطع مخروطى منسوب للبؤرة

$$r = \frac{a\,V}{V + U\cos\theta}$$

(٨) يتحرك جسيم بعجلة مركزية متجهة نحو مركز الاحداثيات O تبعا للعلاقة ($r^2 = a^2 + b^2 t^2$)

وفيها a , b ثابتان ، t هو الزمن ، r بعد الجسيم عن مركز الاحداثيات O والحركة بدأت من النقطة ($a\,,\,0$) بسرعة رأسية قدرها V أوجـــد سرعة الجسيم وعجلته

[هـ . ١ . يونية سنة ١٩٥٤]

الجواب :

$$v_r = b\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}\;,\; v_\theta = \frac{Va}{r}$$

$$f_r = \frac{a^2}{r^3}(b^2 - V^2)\;.\; f_\theta = 0$$