الباب السادس

أسس الديناميكا

بند ٤٣ ـ مقدمة : تعالج الكينماتيكا ـ كما رأينا فى الأبواب السابقة ـ وصف الحركة المجردة دون التعرض لبواعث تغيير هذه الحركة والديناميكا هى الفرع الذى يتقصى أثر هذه البواعث فى تكييف الحركة .

والديناميكا الكلاسيكية أو الميكانيكا النيوتونية مبنية على عدة قوانين وضعها نيوتن فى القرن السابع عشر وهى معروفة باسمه وأثبتت التجربة والمشاهدة معاً إلى يومنا هذا دقة هذه القوانين وصدق وصفهـــا لحركة الأجسام إلا فى حالات نادرة كانت سرعة الأجسام فيها هائلة جـــداً مما حفز أينشتين رائد النسبية الأول إلى إعادة التفكير فى الأسس التى أقام عليهـــا نيوتن نظريته الميكانيكية فخرج على العالم فى مستهل القرن العشرين بنوع آخر من الميكانيكا يعتمد فى جوهره على النسبية . ورغما من اختلاف بعض الأسس التى بنى عليها كل من نيوتن وإينشتين نظريته الميكانيكية إلا أن الفارق فى نتائج النظريتين لا يكاد يذكر فيما نطبقه فى حياتنا اليومية .

غير أن الميكانيكا النيوتونية تمتاز عن نظيرتها النسبية بسهولة فى التفكير والتطبيق مع دقة كافية لأغلب التطبيقات والأغراض الهندسية جعلتنا نستمر فى استعمالها وتطبيقهـا مرجئين الأخـــذ بأساليب النسبية إلى بضع حالات من الحركة السريعة جداً كالحركة الالكترونية .

بند ٤٤ ـ القانون الاساسى للديناميكا ـ تعريف القوة والكتلة :

إذا تتبعنا حركة جسيم يسير بسرعة منتظمة فى خط مستقيم فان استمراره فى هذه الحركة هو نتيجة لخاصية عرفها نيوتن بخاصية **القصور الذاتي** وهى تعبر عن مقاومة الجسيم لتغيير حالة حركته وقد ضمنها نيوتن **قانونه الاول** الذى ينص على أن « **كل جسيم بعيد عن المؤثرات يظل محتفظا بحالة حركته من حيث السكون او الحركة المنتظمة فى خط مستقيم وفقا لاحوال البداية** » .

أما إذا لاحظنا تغيراً فى سرعة الجسيم سواء كان ذلك فى المقـــدار أو فى الاتجاه أو فيهما معاً وهو ما عرفناه **بعجلة** الجسيم فقد نسب نيوتن هـذا التغيير أو هذه العجلة إلى مؤثر أسماه **القوة** .

تعريف القوة : وعلى ذلك يمكن تعريف القوة بأنهـا المؤثر الذى يحـدث تغييراً فى حالة حركة الجسيم أو بتعبير آخر هو المؤثر الذى يحدث العجلة . وتدرك القوة حسياً فى صورة شد أو دفع وتمثل بمتجه مقيد بخط عمل يخضع لقانون متوازى أضلاع القوى كما جاء ذكره بالباب الأول .

قانون نيوتن الإساسى للحركة : ولقد اتخـــذ نيوتن كأساس للديناميكا قانونه الثانى الذى ينص على **التناسب المباشر بين القوة المؤثرة والعجلة الناتجة** وهذه هى أبسط صورة لمثل هذه العلاقة .

$$F \propto f \quad \cdots \cdots \cdots \quad (1)$$

وفيها F تمثل متجه محصلة القوى ، f تمثل متجه العجلة الناتجـة من هذه

القوة المحصلة . وبوضع معامل تناسب بين القوة والعجلة يمكن وضع العلاقة (1) على صورة معادلة :

$$F = m f \qquad \ldots\ldots (2)$$

وفيها m هى معامل التناسب بين المتجهين F ، f وقد عرفه نيوتن «بكتلة الجسيم»

وقانون نيوتن الثانى قانون طبيعى أى لا يعتمد على برهان رياضى وإنما أثبتت التجارب صحته وتبنى عليه باقى القوانين الديناميكية بالأستنتاج الرياضى والتحليل المنطقى كما سيأتى بعد ولذ أسميناه بالقانون الأساسى للحركة .

فقانون نيوتن الأول مثلا يعتبر حالة خاصة من قانونه الثانى إذ عندما تنعدم القوة المؤثرة تنعدم معها عجلة الحركة وبذا يسير الجسيم بسرعة ثابتة المقدار والاتجاه أو يبقى ساكناً كأحوال البداية .

تعريف الكتلة : ولدراسة المعامل m من الناحية الطبيعية نورد ما يلى :

لنفرض أن قوة معينة F أثرت فى جسم ما — فأنتجت عجلة f_1 ثم نتصور أن القوة F بعينها قد أثرت على جسم آخر فإن عجلته f_2 تختلف على وجه العموم عن العجلة الأولى f_1 وذلك لاختلاف الجسمين فى خاصية ديناميكية للمادة هى خاصية القصور الذاتى والكتلة m هى مقياس هذه الخاصية

فللجسم الأول : $F = m_1 f_1$

وللجسم الثانى : $F = m_2 f_2$

وعلى ذلك يكون : $\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_2}{m_1}$

أى أن القوة الواحدة تنتج فى الأجسام عجلات تتناسب عكسياً مع كتل هذه الأجسام فإذا كانت الكتلة كبيرة كانت العجلة الناتجة صغيرة والعكس بالعكس . وعلى هذا النمط يمكننا تعيين كتل الأجسام المختلفة بالقياس إلى كتلة معيارية كالجرام أو الباوند .

ويلاحظ بطبيعة الحال أن قانون نيوتن الأساسى للحركة (المعادلة (2))هو معادلة إتجاهية فيه الكتلة عبارة عن كمية قياسية بحتة تعبر عن خاصية القصور الذاتى كما أسلفنا وليس لها أى علاقة بالخواص الكيمائية أو الطبيعية الأخرى للجسم .

وزن الجسيم : فى مكان ما من الأرض هو قوة جذب الأرض للجسيم ويرمز له بالرمز w ولما كانت عجلة التساقط فى مكان ما من الأرض هى « g » كان وزن الجسم حسب قانون نيوتن الأساسى للحركة :

$$W = m\,g \qquad \cdots\cdots (3)$$

ولما كانت عجلة التساقط g ثابتة فى مكان ما من الأرض يمكن مقارنة كتل الأجسام عن طريق مقارنة أوزانها بالميزان المعتاد ذى الكفتين :

فلجسمين كتلتاهما m_1 ، m_2 نجد أن :

$$W_1 = m_1\,g \quad , \quad W_2 = m_2\,g$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

قياس القوى : تعرف وحدة القوى بأنها هى القوة التى إذا أثرت على وحدة الكتل أنتجت فيها وحدة العجلات فمثلا فى المقاييس المترية تعتبر وحدة القوى بأنها القوة التى إذا أثرت على الجرام أنتجت به عجلة ١ سم / ثانية / ثانية

وتسمى الداين وبالمثل تنتج وحدة القوى فى المقاييس الانجليزية واسمها الباوندال عجلة ١ قدم/ثانية٢ فى كتلة قدرها باوند .

ولاختلاف العجلة الأرضية باختلاف المكان على سطح الأرض يختلف وزن الجسم عينه باختلاف المكان ولذا تقـــارن الأوزان فى مكانين مختلفين بميزان زنبرك معيارى وذلك بمقارنة مقدار الاستطالة الناتجة فيه فى المكان نتيجـــة لتعليق الجسم .

ويدرج الميزان الزنبركى بتعليق وحدة الكتل وأضعافها .

بند ٤٦ ـ الصورة العامة لقانون نيوتن الاساسى للحركة ـ تعريف كمية حركة الجسيم (Momentum)

تعرف كمية حركة الجسيم بحاصل ضرب كتلته فى سرعته وهى تبعا لهذا كمية متجهة بطبيعة الحال . وبهذا التعريف يمكن صياغة قانون نيوتن الأساسى للحركة كالآتى :

$$F = \frac{d}{dt}(m\,v) \qquad \ldots\ldots (4)$$

أى أن « **القوة تساوى معدل التغير فى كمية حركة الجسيم** »

وباعتبار الكتلة m لجسيم ما ثابتة فإن :

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\,f$$

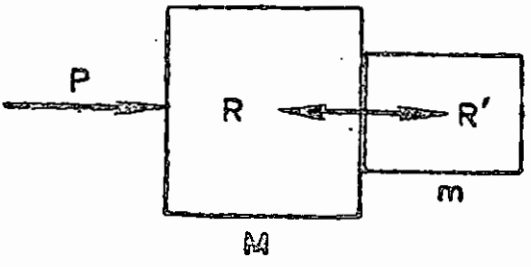
وعلى هذا فالصورة (4) هى الصورة الأعم للقانون الأساسى إذ أنها تشمل حالة كتلة الجسم .

بند ٤٧ ـ قانون الفعل ورد الفعل : وهو قانون نيوتن الثالث وينص فى صورته المبسطة على « انه اذا اثر جسم ما على جسم اخر بقوة ما اثر ذلك الاخير على الاول بقوة مساوية لها فى المقدار ومضادة فى الاتجاه وعلى خط عمل واحد »

وذلك سواء كانت هذه القوى قوى تلامس مباشر أو قـــوى تعمل عن بعد .

ويمكن برهنة هـذا القانون اعتمادا على قانون نيوتن الاساسى للحركة على الوجه الآتى :

١ ـ قوى التلامس المباشر : لنفرض أن جسمين كتلتا هما M ، m تدفعها قوة P على نضد أملس كما فى شكل (٢١) لنفرض أن رد فعل الكتلة m على الاخـــرى M هو R يختلف عن رد الفعل السابق



شكل (٢١)

ولنكن R' يتحرك الجسمان فى هذه الحالة بعجلة واحدة ولتكن f .

بتطبيق قانون نيوتن الاساسى للحركة على كل من الكتلتين M ، m ثم عليهما معا نحصل على العلاقات الآتية:

$$P - R = M f \qquad \cdots\cdots (5)$$

$$R' = m f \qquad \cdots\cdots (6)$$

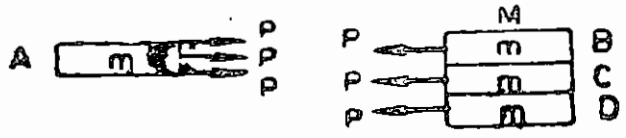
$$P = (M+m) f \qquad \cdots\cdots (7)$$

بحذف P بين المعادلتين (5) ، (7) نحصل على :

$$R = m f \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

من المعادلتين (6) ، (8) يتضح أن $R = R'$ وهو المطلوب

٢ ـ قوى تعمل من بعد : لنفرض أن كتلتين M ، m تؤثران على بعضهما من بعد بقوة تجاذب مثلا . لنفرض أن M تنقسم إلى عدد صحيح من الكتل m كما فى شكل (٢٢) ولنرمز لها بالرمز B ، C ، D . فاذا تجاذبت الكتلتان المتساويتان A ، B فيقضى المنطق أن يكون تأثير إحداهما على الأخرى مساويا تماما لتأثير الأخيرة على الأولى نظرا لتساويهما . وعلى هذا إذا أثرت الكتلة B على A بقوة P مثلا أثرت A على B بقوة P مساوية ومضادة .



شكل (٢٢)

وبالمثل تؤثر C على A بقوة P وتؤثر A على C بقوة مساوية وهكذا نجد فى النهاية أن مجموع القوى المؤثرة على الكتلة m مساويا لمجموع القوى المؤثرة على الكتلة M وقياسا على هذا يمكن تعميم هذا البرهان على أى كتلتين لا تنقسم أكبرهما إلى عدد صحيح من الكتلة الصغرى .

بند ٤A ـ الصورة التحليلية لقانون نيوتن الاساسى :

لما كان قانون نيوتن الأساسى للحركة معادلة اتجاهية لزم عند تطبيقها تحليل طرفيها فى اتجاهين متعامدين يتوقف إختيارهما حسب نوع الاحداثيات المستعملة وقد سبق فى الأبواب الثالث والرابع والخامس عن كينماتيكا الجسيم

استنتاج الصور التحليلية لعجلة الجسيم لأنواع مختلفة من الاحداثيات وعلى هذا يتخذ قانون نيوتن الأساسى للحركة الصورة التحليلية الآتية :

أ — **الاحداثيات الكرتيزية** : إذا كانت مركبتا القوة المحصلة فى الاتجاهين الكرتيزيين هما (X , Y) فإن :

$$X = m\ddot{x} \ , \ Y = m\ddot{y} \qquad \cdots\cdots \quad (9)$$

وفيها ($\ddot{x}$ ، $\ddot{y}$) هى مركبتا العجلة فى اتجاهى المحورين الكرتيزيين .

ب — **الاحداثيات الطبيعية** : وهى اتجاه المماس للمسار والعمودى عليه . فاذا كانت مركبة القوة المحصلة فى اتجاه المماس هى F_t والمركبة العمودية هى F_n فان :

$$F_t = m\frac{dv}{dt} = m\,v\frac{dv}{ds} \ , \ F_n = m\frac{v^2}{\rho} \qquad \cdots\cdots \quad (10)$$

وذلك بالرجوع إلى صيغ العجلة المماسة والعمودية بالبند (٤٣) من الباب الخامس .

ج — **الاحداثيات القطبية** : ويجرى التحليل فيها فى الاتجاه المركزى والمتعامد عليه فاذا كانت مركبتا القوة المحصلة فى هذين الاتجاهين هما F_r ، F_θ على الترتيب فإن :

$$F_r = m\,(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \ , \ F_\theta = m\,(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}) \qquad \cdots\cdots \quad (11)$$

وذلك باستخدام صيغ العجلة المركزية والمتعامدة المستنتجة بالبند (٤٣) من الباب الخامس.

بند ٥٠ — **القوى الطبيعية** : تكون القوى فى الطبيعة إما متوقفة على الزمن أو على موضع الجسيم أو على سرعته ونجمل فيما يلى بعض حالات القوى الطبيعية الهامة :

١ — قوة ثابتة على وجه التقريب كقوة جذب الأرض قريبا من سطحها .

٢ — قوة الجذب العام بين أى كتلتين وتخضع لقانون التربيع العكسى للمسافة بينهما ($F = \frac{c}{r^2}$) كما سيأتى إثباته عند دراسة حركة الكواكب .

٣ — قوة متناسبة مع المسافة كقوة شد أو ضغط زنبرك ($F = -kx$) .

٤ — قوة متناسبة عكسيا مع المسافة كضغط الغاز عند تمدده داخل أسطوانة مثلا . ($F = \frac{k}{x}$)

٥ — قوة مقاومة وسط مستمر كالماء والهواء لحركة جسيم فيه وتتوقف على سرعته v ($F = f_n(v)$) .

٦ — قوة متوقفة على الزمن كالقوة الناشئة من حركة دورية متكررة بانتظام كحركة أمواج البحر مثلا . الخ .

وسيأتى شرح تفصيلى لهذه الحالات عند الكلام على التطبيقات الديناميكية فى الأبواب التالية

بند ٥١ — تطبيقات ديناميكية :

بتطبيق إحدى الصور التحليلية لقانون نيوتن (معادلات (9) أو (10) أو (11) حسب صورة القوى المعطاة نحصل على المعادلات التفاضلية لحركة الجسيم . وللحصول على سرعة الجسيم أو دالة موضعه يجرى تكامل هذه المعادلات مرة أو مرتين كما سبق فى أبواب الكينماتيكا عندما تكون دالة

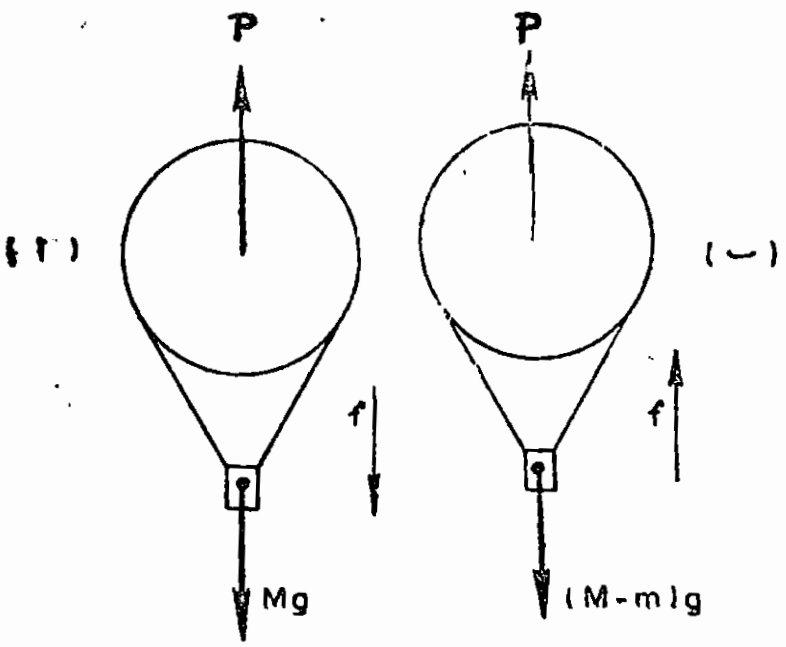
العجلة هى المطلوبة إذ بتطبيق قانون نيوتن على الكتلة m نعود بالمسألة الديناميكية إلى مسألة كينماتيكية أعطيت فيها عجلة الحركة وعند إجراء التكامل ستظهر ثوابت التكامل وتعينها أحوال بداية الحركة من سرعة وموضع ابتدائيين .

مثال (١) يهبط منطاد كتلته الكلية M تحت تأثير الجاذبية بعجلة قدرها f. أوجد كتلة الحصى m اللازم القائها من سلة المنطاد حتى يصعد بنفس العجلة إلى أعلى . أهمل مقاومة الهواء .

الحـــل

يهبط المنطاد فى الحالة الأولى تحت تأثير وزنه Mg ، الطفو P شكل (٢٣-أ) وبتطبيق قانون نيوتن الأساسى للحركة نحصل على :

$$Mg - P = Mf \qquad \cdots\cdots \quad (12)$$



شكل (٢٣)

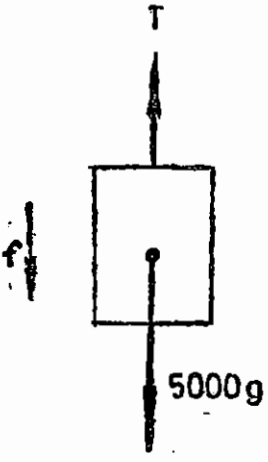
أما فى حالة الصعود فيكون تحت تأثير وزنه الجديد (Mg — mg) وقوة الطفو شكل (٢٣ — ب) ويعطى قانون نيوتن الأساسى لهذه الحالة :

$$P - (M-m)\,g = (M-m)\,f \qquad \cdots\cdots \quad (13)$$

وبحذف P بين المعادلتين (12) ، (13) نحصل على الكتلة المطلوبة m :

$$m = \frac{2M}{1 + \frac{g}{f}}$$

مثال (٢) مصعد كتلته ٥٠٠٠ باوند يهبط بعجلة ثابتة فيقطع مسافة ١٠٠ قدم فى ١٠ ثوانى مبتدئا من سكون . أوجد شد الحبل الحامل للمصعد أثناء هذه الحركة أهمل جميع المقاومات .



شكل (٢٤)

الحـــل

بتطبيق قانون نيوتن الأساسى نحصل على :

$$5000\,g - T = 500\,f \qquad \cdots \quad (14)$$

ونظراً لثبات عجلة الحركة تطبق قانون الحركة بعجلة منتظمة :

$$s = V_0 t + \tfrac{1}{2} f t^2$$

فنحصل :

$$f = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \times 100}{10 \times 10} = 2\ \text{ft/sec}^2 \qquad \cdots\cdots \quad (1$$

من المعادلتين (14) ، (15) نجد :

$$T = 5000\ (g - f)\ \text{poundals}$$

$$= 5000\ (1 - \frac{f}{g})\ \text{lbs}$$

$$= \underline{4690}\ \text{lbs}$$

خلاصة الحساب

١) القوة : هى المؤثر الذى يحدث العجـــلة فى حركة الأجسام وهى كمية متجهة يقاس مقدارها بزنبرك معيارى .

٢) الكتلة : مقياس القصور الذاتى للأجسام وهى كمية قياسية يعرفها قانون نيوتن الأساسى للحركة .

٣) قانون نيوتن الأساسى للحركة : إذا أثرت قوة F فى جسم كتلته m أحدثت به عجلة f فى اتجاه القوة وتتناسب معها فى المقدار تبعا للعلاقة الاتجاهية ($F = m f$) وهو قانون طبيعى .

٤) قانون نيوتن الأول أو قانون القصور الذاتى : يعتبر حالة خاصة من القانون الأساسى السابق عندما تنعدم محصلة القوى المؤثرة .

٥) قانون الفعل ورد الفعل : وينص على تساويهما فى المقـــدار وتضادهما الاتجاه وهو صحيح بالنسبة لقوى التلامس المباشر والقوى التى تعمل من بعد ويمكن برهنة هذا القانون إستنادا إلى قانون نيوتن الاساسى للحركة .

٦) وزن الجسم هو قوة جذب الأرض له وتعطيه العلاقة ($W = mg$) وهو متجه رأسى إلى أسفل أى إلى مركز الأرض .

تمرينات

١) قطار وزن عرباته ... ن بدأ الحركة بعجلة منتظمة على خط أفقى اكتسب بعد ٦٠ ثانية من الحركة سرعة قدرها ٣٥ ميلا فى الساعة . أوجد شد القاطرة إذا علمت أن المقاومة الكلية للحركة نتيجة للاحتكاك ومقاومة الهواء تساوى ٥ فى الألف من وزن القطار .

[الجواب : الشد = ١٤٢٢٠ باوند]

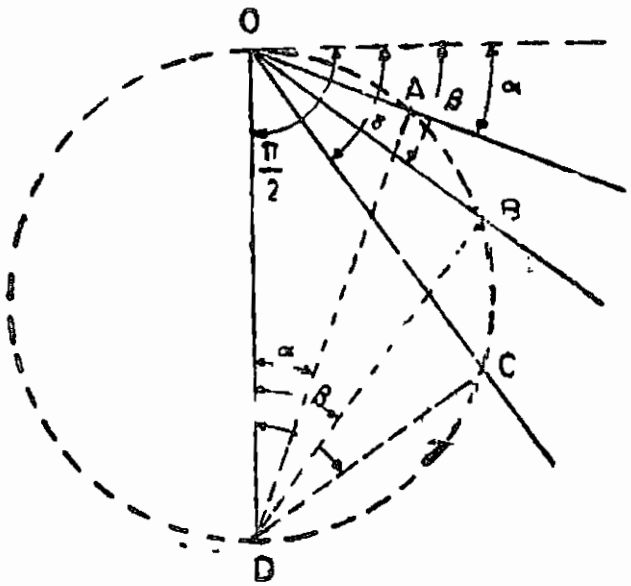
٢) ضغط سائق على فرامل سيارته فجأة فانزلقت السيارة مدة ثانيتين قطعت خلالها مسافة ٢٢ قدما قبل أن تقف . فعلى فرض أن التقصير كان منتظما خلال فترة الإنزلاق . أوجد معامل الاحتكاك بين إطارات السيارة والأرض .

[الجواب : معامل الاحتكاك = $\frac{1}{4}$]

٣) فى لحظة ما بدأ عدد من الجسيمات الحركة تحت تأثير أوزانها من نقطة O على المستويات المائلة الملساء OA , OB , OC , OD ، والتى تصنع مع الأفق الزاوية α ، β ، γ ، $\frac{\pi}{4}$ على الترتيب (شكل ٢٥) أثبت أنه فى أى لحظة تكون هذه الجسيمات على الدائرة O A B C D المنشأة على OD كقطر فيها حيث OD هو المسافة الرأسية التى يسقطها الجسيم حراً تحت تأثير وزنه .

٤) قاس مهندس مرور المسافة التى إنزلقتها سيارة بعد الضغط على فراملها فوجدها ١٤٥ قدما أوجد سرعة السيارة قبل الضغط على الفرامل مباشرة إذا علمت أن معامل الاحتكاك بين إطارات السيارة والأسفلت هو ٠٫٦

[الجواب : ٥١ ميلا فى الساعة]



شكل (٢٥)

٥) يتحرك جسيم كتلته m فى خط مستقيم مبتدئا من سكون تحت تأثير قوة X دالتها الزمنية

$$X = P e^{-kt}$$

وفيها P , k ثابتان . أوجد دوال سرعته ومسافته بدلالة الزمن

الجواب :

$$x = \frac{P}{m k^2} (kt + e^{-kt} - 1)$$

$$v = \frac{P}{m k} (1 - e^{-kt})$$

٦) يتحرك جسيم كتلته m فى خط مستقيم تحت تأثير قوة ($X = P \cos \omega t$) حيث P , ω ثابتان . أوجد علاقة المسافة بالزمن إذا علمت أن الجسيم بدأ ساكنا فى نقطة الأصل .

الجواب :

$$x = \frac{P}{m \omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

٧) يتحرك جسيم من سكون فى نقطة الأصل تحت تأثير قوة ($X = 12 - 2t$) . فى أى لحظة t يعود الجسيم لنقطة الأصل ؟

[الجواب : ١٨ ثانية]

٨) تصعد سيارة منحدرا ميله ١ : ٢٠ ضد مقاومة هواء متناسبة مع مربع سرعتها . فإذا نفذ بنزولها عندما كانت سرعتها ٩٠ كم / ساعة أوجد المسافة التى تقطعها قبل أن تقف . مقاومة الهواء للسيارة عندما تكون سرعتها ٩٠ كم/ساعة تبلغ ٥ ٪ من وزنها . اعتبر عجلة الجاذبية ١٠ متر / ث^2

(أولى هـ . ١ . يونية سنة ١٩٥٠)

[الجواب : المسافة ٤٣٥ متر]

٩) ما هى أقل سرعة ابتدائية v_0 يجب اعطائها لصاروخ مقذوف من الأرض لكى يصل نقطة بين الأرض والقمر يتلاشى فيها جذباهما إذا علمت أن كتلة القمر تساوى $\frac{1}{81}$ من كتلة الأرض وأن المسافة بين مركزيهما تساوى ٦٠ مرة نصف قطر الأرض . أهمل مقاومة الهواء ودوران الأرض .

[الجواب : ٦٫٩ ميلا / ثانية]

١٠) يتحرك جسيم وزنه w فى خط مستقيم تحت قوة طاردة متناسبة مع المسافة ($X = k\,x$) مبتدئا من وضع x_0 ، أوجد العلاقة (x , t) لهذه الحركة .

[الجواب : $x = x_0 \cosh (t \sqrt{k\,g/w})$]

١١) دفع جسم وزنه w بسرعة ابتدائية v_0 على مستوى أفقى خشن فتوقف بعد مسافة x . أوجد معامل الاحتكاك إذا علمت أنه لا يتوقف على السرعة .

[الجواب : $v_0^2/2gx$]