الباب الثامن

الحركة المقيدة

بند ٥٩ – مقدمة : سنبحث فى هذا الباب حركة جسيمات مقيدة بمسارات مستوية كانزلاقها داخل أنابيب دقيقة يأخذ شكلها العام منحنيا مستويا أو كارتباطها بقضيب أو خيط مثبت أحد طرفيه .

والحركة المستوية المقيدة إما أن تكون مقيدة من جانب واحد أو من جانبين فحركة جسيم داخل أنبوبة دقيقة أو حركة خرزة منزلقة على سلك تعتبر حركه مقيدة من جانبين إذ أن الجسيم فى هذه الحالة لا يستطيع الخروج عن مساره . بينما حركة جسيم على السطح الخارجى لاسطوانة أفقية تعتبر مقيدة من جانب واحد ذلك لأن الجسيم يستطيع الانفصال عن الاسطوانة متى انعدم رد الفعل بينهما وكذلك البندول ذو الخيط يعطى حركة مقيدة من جانب واحد إذ أن الجسيم يستطيع فى هذه الحالة الاقتراب من مركز التعليق ولا يسمح له الخيط بالإبتعاد عنه لأكثر من طول الخيط نفسه .

بند ٦٠ – الطريقة العامة : لما كان مسار هذا النوع من الحركة معلوما مقدما كان للجسيم درجة حرية واحدة وهى المسافة المقطوعة s على المنحنى من نقطة ثابتة عليه مثل O . والاحداثيات المناسبة لهذه الحالة هى الاحداثيات الطبيعية (المسافة s المقاسة على المنحنى وميل المماس ψ فى نهايتها) والمعادلة الذاتية للمسار $s = \phi(\psi)$ تربط هذين الاحداثيين .

والقانون الديناميكى المناسب لهذه الحالة هو قانون نيوتن الأساسى للحركة

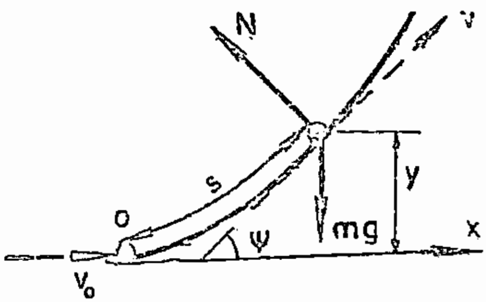
ممثلا في اتجـاه المماس للمنحنى والعمودى عليه وهما اتجاهان معلومان مقدما بمعلومية مسار الحركة .

وفى حالة الأسطح الملساء يمكن إستبدال معادلة نيوتن المماسة للمسار بمعادلة الطاقة وهى تعطى السرعة فى موضع ما للجسيم بينما تعطى معـادلة نيوتن العمودية رد الفعل العمودى للسطح . ومما هو جدير بالذكر أن رد الفعـل العمودى لسطح مقيد من جانبين يمكن أن يأخذ أى قيمة موجبة كانت أو سالبة نظرا لأن سهم رد الفعل هذا يمكن أن يكون إلى داخل السطح أو خارجه .

ولكن رد الفعل العمودى لسطح مقيد من جانب واحد يعمل دائما من السطح نحو الجسيم ولا العكس . وينعدم هذا الرد فى اللحظة التى يترك فيها الجسيم السطح .

بند ٦١ — حركة جسيم على منحنى رأسى أملس :

سنعالج حركة جسيم ينزلق على منحنى أملس واقع فى مستوى رأسى .



شكل (٣٤)

الجسيم فى أى موضع عام يكون تحت تأثير قوتين : وزنه mg ورد فعل المستوى N وهذا الأخير لا يبذل شغلا أثناء حركة الجسيم لتعامده باستمرار

على مسار الحركة ولذا نجد أن تطبيق قانون الطاقة فى هذه الحالة يعطى سرعة الجسيم فى أى موضع على الوجه الآتى :

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v^2 - \tfrac{1}{2}\, m\, v_0^2 = -\, m\, g\, y$$

$$\therefore \quad v^2 = v_0^2 - 2\, g\, y \qquad \dots \quad \dots \quad (1)$$

ثم بتطبيق مركبة قانون نيوتن فى الاتجاه العمودى على المسار نحصل على رد الفعل العمودى N

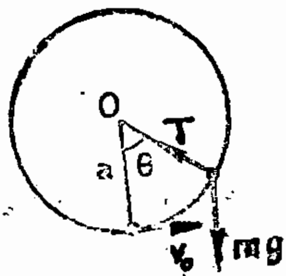
$$N - m\, g \cos\psi = m\, \frac{v^2}{\rho}$$

$$\therefore \quad N = m\, g \cos\psi + \frac{m}{\rho}\,(v_0^2 - 2\, g\, y) \qquad \dots \quad \dots \quad (2)$$

ولما كان شكل منحنى المسار معروفا مقدما فانه من الممكن حساب قيمة كل من ρ ، y بدلالة ψ وهى زاوية ميل المماس المنحنى عند موضع الجسيم وبذا تعطى المعادلة (2) قيمة N بدلالة الوضع . ومما ييسر إتمام الحل إعطاء معادلة المسار بالصورة الذاتية ($s = \phi(\psi)$) .

بند ٦٢ ـ حركة فى دائرة راسية مقيدة من جانبين :

سنعالج على سبيل المثال حركة جسيم مربوط فى طرف قضيب خفيف مثبت طرفه الآخر O ومقذوف من أسفل [illegible] بسرعة إبتدائية v_0 مثلا . وبجعل [illegible] أيضا [illegible] [illegible]



شكل (٣٥)

دائرية الشكل أو حركة حلقة على سلك دائرى لأنه فى هـــذه الحالات الثلاث ستكون الحركة دائرية مقيدة من جانبين .

يتحـــدد موضع الجسيم على الدائرة بالزاوية المركزية θ (شكل ٣٥) أى أن للجسيم درجة حرية واحدة . ويتحرك الجسيم تحت تأثير قوتين : وزنه $m\,g$ ورد فعل القضيب T فى اتجاهه .

يعطى قانون الطاقة سرعة الجسيم عند أى موضع θ على الوجه الآتى :

$$\tfrac{1}{2}\,mv^2 - \tfrac{1}{2}\,mv_0^2 = -\,mgy = mg\,(a - a\cos\theta \qquad \dots \quad (3)$$

وفيها y هى مسقط مسار الجسيم فيما بين موضعه الابتدائى وموضعه العام θ وذلك على الخط الرأسى (خط عمل القوة $m\,g$) وأما شغل رد فعل القضيب فمعدوم نظرا لتعامده دائما على المسار الدائرى وعلى هذا :

$$v^2 = v_0^2 - 2ga\,(1 - \cos\theta) \qquad \dots \quad \dots \quad (4)$$

وتعطى المركبة العمودية لمعادلة نيوتن قيمة الشد T عند أى موضع :

$$T - mg\cos\theta = m\,\frac{v^2}{a} \qquad \dots \quad \dots \quad (5)$$

وبالتعويض من (4) فى (5) نحصل على الشد كدالة فى الموضع θ :

$$T = mg\;\;3\cos\theta - 2\; + \frac{v_0^2}{ga}) \qquad \dots \quad \dots \quad (6)$$

تبين المعادلة (1) أن سرعة الجسيم تتناقص كلما ارتفع وأنها تبلغ قيمتها الصغرى فى أعلى نقطة يصلها الجسيم فى مساره الدائرى . وإذا أريد للجسيم أن يتم دورته وجب أن تزيد سرعته الصغرى فى أعلى نقطة من الدائرة

$(\theta = 180°)$ عن صفر ومن المعادلة (4) نجد أن

$$(v_0^2 - 4\,g\,a) > 0$$

$$\therefore \quad v_0 > \sqrt{4\,g\,a} \qquad \dots \quad \dots \quad (7)$$

وإذا نقصت السرعة الابتدائية v_0 عن القيمة ($\sqrt{4\,g\,a}$) إنعدمت سرعة الجسم قبل بلوغه أعلى نقطة فى الدائرة وبذا يكر راجعا فى مساره مؤديا حركة اهتزازية كالبندول .

بند ٦٣ ـ حركة فى دائرة راسية مقيدة من جانب واحد :

إذا إستبدلنا القضيب فى الحالة السابقة بخيط غير مرن كانت حركة الجسم مقيدة من جانب واحد إذ هو لا يستطيع الخروج عن الدائرة بينما يستطيع دخولها دون مقاومة ما من الخيط ولذا كانت حركة الجسم فى دائرة طالما كان الخيط مشدودا ويترك الدائرة عند ما يرتخى الخيط وحينئذ تصبح حركة الجسم حرة .

المعادلتان (4) ، (6) فى البند السابق ساريتان على حالتنا هذه إلى الموضع الذى ينعدم فيه الشد T وعندها يتحرر الجسم من مساره الدائرى مبتدئا حركة حرة سرعتها الابتدائية هى السرعة التى بلغها عند الموضع الذى انعدم فيه الشد . ومن المعادلتين (4) ، (6) بالبند السابق يتضح أن كلا من السرعة v والشد T يتناقص بزيادة θ أى كلما ارتفع الجسم فى مساره وقد ينعدم أحدهما قبل الآخر أو ينعدمان معا ويترتب على كل من هذه الحالات نتائج نفصلها فيما يلى :

١ ـ إذا لم تنعدم أي من T ، v حتى بلغ الجسم أعلى نقطة فى مساره أتم دورة كاملة .

٢ — إذا إنعدمت v قبل إنعدام T عاد الجسيم فى مساره الدائرى مؤديا حركة اهتزازية .

٣ — إذا انعدمت T قبل v فى موضع ما ترك الجسيم الدائرة وسار فى قطع مكافىء كمقذوف قذف من هذا الموضع نفسه بالسرعة التى اكتسبها من حركته الاولى.

٤ — إذا إنعدمت T ، v معا سقط الجسيم رأسيا بتأثير الجاذبية .

والمعادلة (4) بالبند السابق تعطى ما يأتى شرطا لإنعدام v :

$$\cos\theta = 1 - \frac{v_0^2}{2ga} \qquad \cdots \quad \cdots \quad (8)$$

المعادلة (6) بالبند السابق تعطى ما يأتى شرطا لإنعدام T

$$\cos\theta = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{2ga} \qquad \cdots \quad \cdots \quad (9)$$

وبتطبيق القواعد السابقة من (١) إلى (٤) على المعادلتين (8) ، (9) نحصل على الحالات الآتية للحركة :

١ - إذا كانت

$$v_0 < \sqrt{2ga}$$

فإن الخيط لا يصل المستوى الافقى ولا ينعدم الشد وتكون الحركة اهتزازية .

٢ — إذا كانت

$$v_0 = \sqrt{2ga}$$

يصل الخيط إلى المستوى الأفقى وعندما ينعدم الشد وتكون الحركة اهتزازية

٣ — إذا كانت

$$\sqrt{2ga} < v_0 < \sqrt{5ga} \,,$$

نجد أن قيمة منفرجة للزاوية θ تعطيها المعادلة (9) أصغر من التى تعطيها المعادلة (8) وعلى هذا يرتخى الخيط قبل انعدام السرعة وبذا يبدأ الجسم حرة حرة كمقذوف يسير فى قطع مكافىء حتى يعود الخيط إلى التوتر ثانيا .

٤ — إذا كانت

$$v_0 = \sqrt{5ga} \,,$$

فإن الشد ينعدم فقط فى أعلى نقطة من الدائرة غير أن v لا تنعدم عندها وبذا يتم الجسم مساره الدائرى . ويلاحظ أن السرعة الابتدائية v_0 اللازمة لإتمام الدورة فى حالتنا هذه أكبر منها فى حالة الحركة المقيدة من جانبين .

٥ — إذا كانت

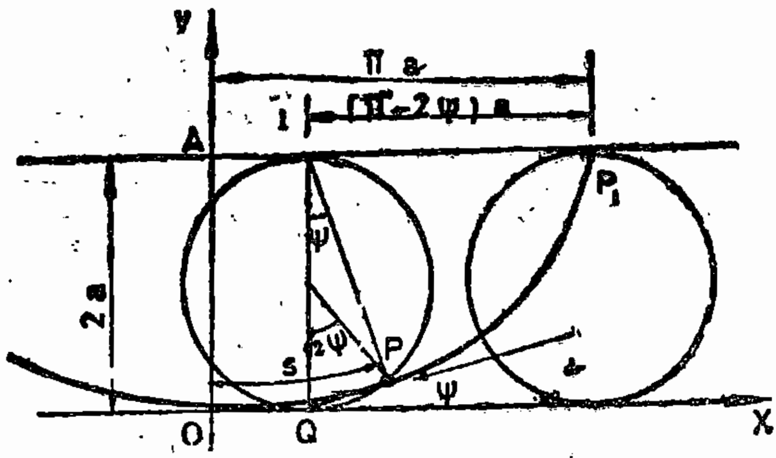
$$v_0 > \sqrt{5ga} \,,$$

فإن كلا من T , v لا ينعدمان أبدا وبذا يتم الجسم مساره الدائرى .

يجرى هذا الحل بحذافيره على حركة جسم ملامس لاسطوانة أفقيـة ملساء من الداخل وفى هذه الحالة الأخيرة يحل الرد فعل العمودى N للاسطـوانة على الجسم محل شد الخيط T ويبقى الحل على ما هو عليه .

بند ٦٤ ــ الحركة السيكلويدية :

يعرف المنحنى السيكلويدى بأنه المحل الهندسى لحركة نقطة معينة على قرص دائرى يتدحرج على حافة مستقيمة مثل AP_1 (شكل ٣٦) .



شكل (٣٦)

نفرض أن النقطة المعينة P_1 وأن القرص بدأ من الوضع الأيمن بالشكل يتدحرج بدون انزلاق فى اتجاه عقرب الساعة على الحافة المستقيمة AP_1 . ففى أى وضع عام للقرص كالمبين بالشكل على اليسار تكون حركة القرص عبارة عن دوران حول نقطة تماسه I مع الحافة المستقيمة (كما سيأتى تفصيله عند الكلام على كينماتيكا الجسم المتماسك) وبذا تكون حركة النقطة P المعينة فى هذا الوضع العام للقرص فى الاتجاه PQ المتعامد مع الخط PI الواصل إلى مركز الدوران I . وعليه يكون IQ قطرا فى الدائرة . ونظرا لأن متجه سرعة جسيم يتحرك فى مسار منحنى يكون دائما مماسا لهذا المنحنى فإن الاتجاه PQ يكون مماسا للمنحنى السيكلويدى .

وبتطبيق شرط التدحرج بدون انزلاق ويتلخص فى أن طول التلامس

P_1I على الحافة المستقيمة يساوى طول التلامس PI على القوس وعليه :

$$P_1 I = (\pi - 2\psi)\, a$$

بأخذ محورى الاحداثيات (x, y) مارين بأوطى نقطة فى مسار P كما فى الشكل يمكن التعبير عن الموضع P بدلالة البارامتر ψ (أنظر شكل ٣٦)

$$\left.\begin{aligned} x &= \pi a - (\pi - 2\psi)\, a + a \sin 2\psi = a\,(2\psi + \sin 2\psi) \\ y &= a - a \cos 2\psi \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

وهاتان هما المعادلتان البارامتريتان للمنحنى السيكلويدى وفيها زاوية ميل المماس ψ هى البارامتر المشترك وللحصول على المعادلة (s, ψ) للسيكلويد نفاضل المعادلتين (10) ونعوض فى العلاقة المعروفة :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 = a^2\,(2 + 2\cos 2\psi)^2\, d\psi^2 + 4a^2 \sin^2 2\psi\, d\psi^2 \\ &= 4a^2\, d\psi^2\,(1 + \cos^2 2\psi + 2\cos 2\psi + \sin^2 2\psi) \\ &= 4a^2\, d\psi^2\, 4\cos^2\psi \end{aligned}$$

$$ds = 4a \cos\psi\, d\psi$$

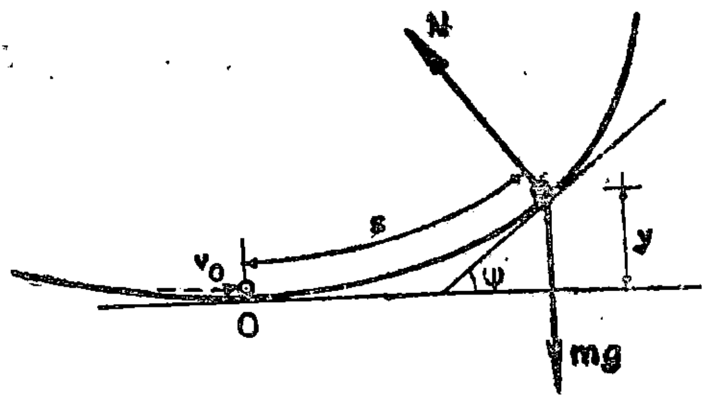
وبتكامل الطرفين نحصل على المعادلة الذاتية :

$$s = 4a \sin\psi \qquad \dots\dots \quad (11)$$

وفيها ينعدم ثابت التكامل لأن s , ψ ينعدمان معا عند نقطة الأصل O .
لدراسة حركة جسيم على منحنى سيكلويدى أملس فى وضع رأسى كالمبين فى شكل (٣٦) تحلل الحركة فى إتجاه المماس والعمودى للمسار كالمتبع فى حالة الحركة المقيدة وبذا يعطى قانون نيوتن الاساسى للحركة ما يأتى :

$$- mg \sin \psi = m \ddot{s} \quad \cdots \cdots (12)$$

$$N - mg \cos \psi = m \frac{v^2}{\rho} \quad \cdots \cdots (13)$$



شكل (٣٧)

وبالتعويض من المعادلة (11) فى (12) نحصل على :

$$\ddot{s} = - \frac{g}{4\,a} \cdot s \quad \cdots \cdots (14)$$

وهى تمثل حركة توافقية بسيطة كما سبق فى الباب الثالث بند (٢٢) ومنها الزمن الدورى τ تعطيه العلاقة :

$$\tau = 2\,\pi \sqrt{\frac{4\,a}{g}} \quad \cdots \cdots (15)$$

وهذا الزمن الدورى لا يتوقف على مدى الذبذبة على جانبى النقطة O . ويقال للذبذبة التى من هذا النوع أنها ثابتة الزمن الدورى (Isochronic) . ويمكن إيجاد السرعة v من قانون الطاقة ، نصف قطر التقوس ρ من

المعادلة (11) :

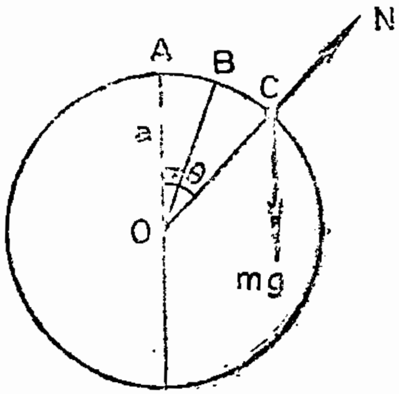
$$\rho = \frac{d\,s}{d\psi} = 4\ a\ \cos\ \psi$$

وبالتعويض فى المعادلة (13) نحصل على رد الفعـــل العمودى N بدلالة الموضـــع :

$$N = m\ g\ \cos\ \psi + \frac{m(v^2-2gy)}{4\ a\ \cos\ \psi} \qquad \cdots\ \cdots\ (16)$$

امثلة توضيحية :

مثـال (١) : ينزلق جسيم على دائرة رأسيـــة ملساء من الخارج مبتدئا من سكون فى النقطة B ‏($AOB = \alpha$) . أوجد سرعة الجسيم عند أى موضع وكذا رد فعل المنحنى ومن ثم أوجد الموضع الذى يغادر فيه الجسيم الدائرة :



شكل (٣٨)

الحـل

يعطى قانون الطـــاقة سرعة الجسيم v عند أى موضـع C على الوجه الآتى :

$$\tfrac{1}{2}\ m\ v^2 - 0 = m\ g\ (\ a\ \cos\ \alpha\ - a\ \cos\ \theta\ )$$

$$\therefore\ v^2 = 2g\ a\ (\ \cos\ \alpha\ - \cos\ \theta\ ) \qquad \cdots\ \cdots\ (17)$$

وتعطى مركبة قانون نيوتن فى الاتجاه العمودى على المسار CO قيمة رد

الفعل العمودى N على الوجه الآتى :

$$m\ g \cos\theta - N = m \frac{v^2}{a} \qquad \dots \dots (18)$$

وبالتعويض من (17) فى (18) نحصل على رد الفعل فى الموضع العام θ

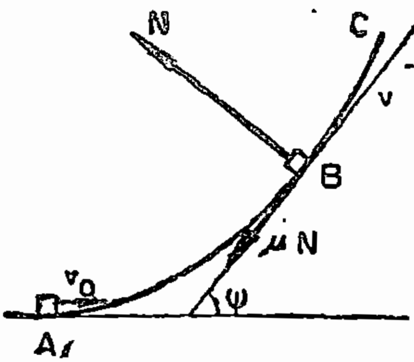
$$N = mg\ (\ 3 \cos\theta - 2 \cos\alpha\ ) \qquad \dots \dots (19)$$

ويغادر الجسيم مساره الدائرى عندما ينعدم رد الفعل N أى عندماتكون

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \cos\alpha$$

وإذا كانت زاوية الابتداء α صفر تقريبا كانت ($\cos\theta = \frac{2}{3}$)

مثال (٢) : يتحرك جسيم على مستوى أفقى أملس مبتدئا بسرعة v_0 (شكل ٣٩) ويحرف مساره حائط رأسى خشن ــ معامل احتكاكه μ ــ ومسقطه الأفقى هو المنحنى ABC كما فى الشكل . أوجد سرعة الجسيم v بدلالة زاوية ميل المماس ψ عند موضع عام للجسيم



شكل (٣٩)

الحـل

القوى المؤثرة على الجسيم فى مستوى حركته هى N , μ N وأما وزن الجسيم ورد فعل المستوى الأفقى الأملس فيعملان عموديا على مستوى الحركة .

تعطى مركبات قانون نيوتن الأساسى للحركة فى اتجاه المماس والعمود على المسار ما يأتى :

$$\left.\begin{aligned} -\mu N &= mv\frac{dv}{ds} = mv\frac{dv}{\rho\, d\psi} \\ N &= m\,\frac{v^2}{\rho} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (20)$$

وبحذف N بين هاتين المعادلتين نحصل على :

$$\frac{dv}{v} = -\mu\, d\psi$$

وبتكامل الطرفين نحصل على :

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\mu \int_{0}^{\psi} d\psi$$

$$\therefore \quad \log \frac{v}{v_0} = -\mu\psi$$

$$\therefore \quad v = v_0\, e^{-\mu\psi} \qquad \cdots\cdots (21)$$

خلاصة الحساب

١ – تحلل الحركة فى الاتجاهات الطبيعية وهى المماس لمنحنى المسار والعمودى عليه ويطبق قانون نيوتن الأساسى للحركة على كل من الاتجاهين

٢ – يستحسن إستعمال الصورة الذاتية لمنحنى المسار $(s ; \psi)$.

٣ – إذا كان المنحنى المقيد للحركة أملسا فيمكن استبدال معادلة نيوتن المماسة للمسار بقانون الطاقة الذى يعطى السرعة مباشرة دون الحاجة إلى التكامل .

٤ — إذا كان المنحنى المقيد للحركة خشنا تكتب معادلتا نيوتن فى اتجاه المماس للمنحنى والعمودى عليه ويحذف رد الفعل العمودى بينهما وتكامل المعادلة الناتجة .

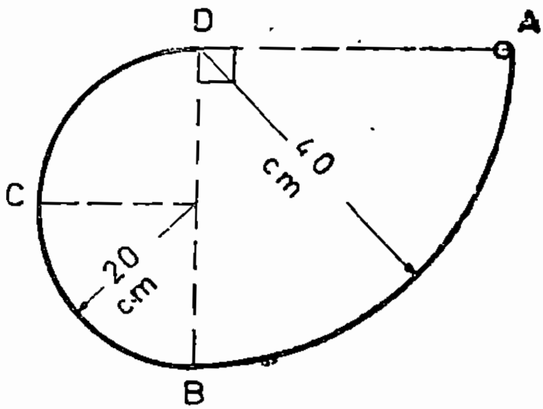
تمرينات

(١) ينزلق جسيم وزنه W داخل أنبوبة دقيقة على شكل دائرة نصف قطرها ٢ قدم مثبتة فى وضع رأسى . فإذا بدأ الجسيم من أعلى نقطة فى الدائرة بسرعة ٨ قدم فى الثانية أوجد سرعته عندما يصل أوطى نقطة فيها وكذا رد فعل الأنبوبة عليه فى هذا الموضع الأخير . أوجد الموضع الذى ينعدم فيه رد فعل الأنبوبة (عجلة الجاذبية = ٣٢ قدم / ث^{٢}) .

[إعدادى هـ. ا. يونيه سنة ١٩٤٩]

[الجواب : السرعة = ٧ $\sqrt{٥}$ قدم / ث
رد الفعل = ٦ أمثال الوزن عند أعلى نقطة]

(٢) أثبت أن سرعة جسيم فى حركته على منحنى رأسى أملس لا يتوقف على شكل المنحنى وإنما على ارتفاعه عن مستوى أفقى ما .



شكل (٤٠)

تنزلق حلقة صغيرة كتلتها ٥ جم من سكون فى النقطة A على سلك أملس A B C D فى وضع

رأسى كما فى الشكل . أوجد سرعتها وردود فعل السلك عليها فى B.C. D .

ماذا يحصل لرد الفعل عند المرور بالنقطة B من اليمين إلى اليسار ؟

[إعدادى هـ. ا يونية سنة ١٩٥٠]

		عند B	عند C	عند D
الجواب :	السرعة	٢٨٠ سم / ث	$١٤٠ \sqrt{٢}$	صفر
	رد الفعل	١٥	١٠	٥

(٣) أنبوبة دقيقة تتكون من جزء مستقيم طوله ٢ قدم يتصل به ربع دائرة نصف قطرها ٢ قدم والأنبوبة فى وضع رأسى ترك بها من أعلى جسيم كتلته $\frac{١}{٤}$ باوند أوجد السرعة التى يغادر بها الأنبوبة من أسفل وكذا أقصى ضغط له على جدار الأنبوبة . [إعدادى هـ. ا سبتمبر سنة ١٩٥٩]

[الجواب : السرعة = ١٦ قدما/ث . الضغط = ٥ أمثال الوزن] .

(٤) ينزلق جسيم وزنه ١ باوند داخل طوق دائرى أملس فى وضع رأسى ونصف قطره ٧ أقدام . فإذا إبتدأ الجسيم من أوطى نقطة بسرعة u وغادر الطوق عند نقطة ترتفع ٥ر١٠ قدما عن أوطى نقطة أوجد السرعة u وأقصى ضغط على الطوق وأقصى ارتفاع يبلغه الجسيم .

[أولى هـ ا. يونية سنة ١٩٥٣] .

الجواب : السرعة ٢٨ قدم/ث أقصى ضغط = ٥ر٤ باوند

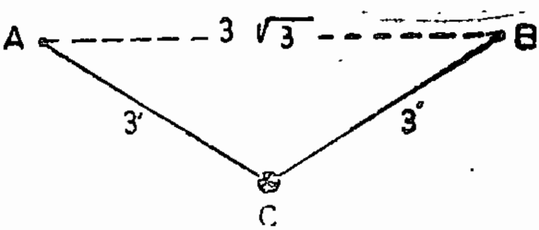
أقصى ارتفاع $\frac{٨٩}{٢٦}$١ قدم .

(٥) ينزلق جسيم تحت تأثير وزنه داخل طوق دائرى أملس فى وضع رأسى ونصف قطره ١ قدم فإذا علمت أن أقل ضغط للجسيم على الطوق يساوى وزن الجسيم أوجد أقل وأكبر سرعة وكذا أقصى ضغط له على الطوق .

[أولى هـ ٠ ١ سبتمبر سنة ١٩٥٢]

[الجواب : أقل سرعة = ٨ قدم / ث
أكبر سرعة = ٨ $\sqrt{٣}$ قدم/ث
أقصى ضغط = ٧ أمثال الوزن]

(٦) جسيم وزنه ٢ باوند ثبت فى وسط خيط ACB طوله ٦ أقدام وطرفا الخيط مثبتان فى نقطتين A , B على خط



شكل (٤١)

أفقى واحد ويبعدان ٣ $\sqrt{٣}$ قدما عن بعضها . دفع الجسيم عندما كان فى موضع إتزان بسرعة أفقية قدرها ١٦ قدما / ث عموديا على المستوى ABC أثبت أنه يتم دورة رأسية وأوجد أقل وأكبر شد فى الخيط .

[أولى هـ ٠ ١ سبتمبر سنة ١٩٤٨]

[الجواب : أقل شد = ١ باوند أكبر شد = ١٩ باوند]

(٧) بندول بسيط طول خيطه ٨ر٠ مترا ووزن كرته ٥ر٠ كج يتذبذب لمدى ٦٠° على جانبى الخط الرأسى المار بنقطة تعليقه . أوجد أقصى سرعة للكرة وأقصى شد فى الخيط .

وإذا تحول البندول إلى بندول مخروطى نصف زاوية رأسه ٦٠° فأوجد سرعة كرته وشد الخيط .

[أولى هـ. إ. نوفمبر سنة ١٩٤٦]

الجواب :
أكبر سرعة = ٢٨٠ سم/ث
أكبر شد = ضعف وزن الكرة
للبندول المخروطى
الشد = ضعف وزن الكرة
والسرعة = ١٤٠ $\sqrt{6}$ سم/ث

(٨) ينزلق جسيم فوق طوق دائرى أملس فى وضع رأسى مبتدئا من سكون عند نقطة قريبة جدا من أعلى نقطة ويقاوم حركته قوة مماسة ثابتة المقدار F . فإذا علمت أن الجسيم يغادر الطوق فى موضع زاويته المركزية ٦٠° أوجد قيمة F بدلالة وزن الجسيم ثم أوجد السرعة التى يغادر بها الطوق .

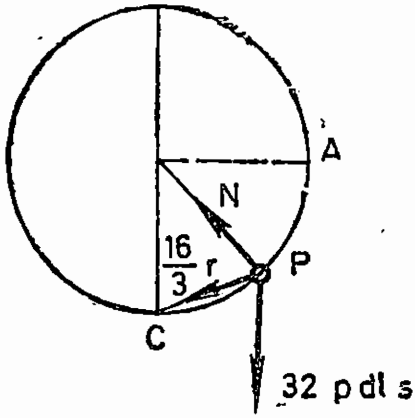
[أولى هـ. إ. سبتمبر سنة ١٩٥١]

[الجواب : $F = \frac{3}{4\mu}\, m\, g \,,\, v^2 = \frac{1}{2}\, g\, a$]

(٩) ينزلق جسيم كتلته m فوق طوق دائرى أملس فى وضع رأسى نصف قطره ٦ر. مترا ويربطه بمركز الطوق خيط مرن يشد الجسيم بقوة تساوى وزنه فى المقدار طالما كان الجسيم ملامسا للطوق . بدأ الجسيم الانزلاق من نقطة قريبة من أعلى نقطة فى الطوق . أوجد أين يغادر الجسيم الطوق وبأى سرعة ؟

[أولى هـ إ. يونيه سنة ١٩٤٧]

[الجواب : $(\cos\theta = \frac{1}{3}\ , v = \sqrt{\frac{4}{3}}\, g\, a = 28 \text{ m/sec})$]



شكل (٤٢)

(١٠) حلقة صغيرة P كتلتها ١ باوند تنزلق على طوق دائرى أملس فى وضع رأسى نصف قطره ٦ أقـــدام. بدأ الجسم الحركة من نهاية قطر أفقى A بسرعة v قـــدرها ١٦ قدما / ث ويؤثر عليها عدا وزنها قوة مرنة قدرها $\left(\frac{16}{3}r\right)$ من الباوندالات تتجـــه دائما إلى أوطى نقطة فى الطـــوق C $(r = PC\ ft)$

أوجد سرعة الجسم وضغطه على الطوق عند أوطى نقطة C. أوجد أقصى إرتفاع يبلغه الجسم على يسار C.

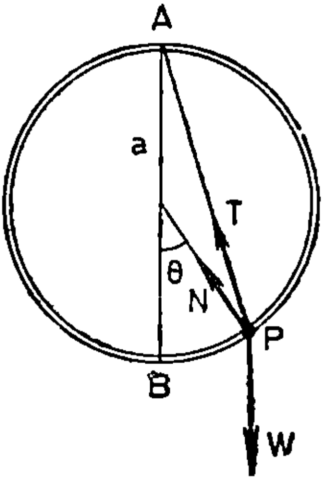
[أولى هـ ١ يناير سنة ١٩٥٧]

الجواب :–
السرعة عند C = ٣٢ قدم / ثانية
رد الفعـــل = $\frac{19}{3}$ أمثال الوزن
أقصى ارتفاع = ٨ أقدام

(١١) يتذبذب جسم P داخـــل أنبوبة دقيقة ملساء ودائرية الشكل فى وضع رأسى وكان مـــدى الذبذبة ٦٠° على جانبي القطر الرأسى. ويؤثر على الجسم علاوة على وزنه W شد T يتجه دائما إلى أعلى نقطة A يتناســب مقداره مع الطول PA $(T = k \cdot AP)$ حيث k هو معامل التناسب

وتعطيه العلاقة ($2\,k\,a = W$) وفيها a نصف قطر الدائرة . أوجد أقصى سرعة للجسيم وأقـــل وأكبر ضغطه له على الأنبوبة .

[اعدادى هـ.١ يونيه سنة ٩٥٩]

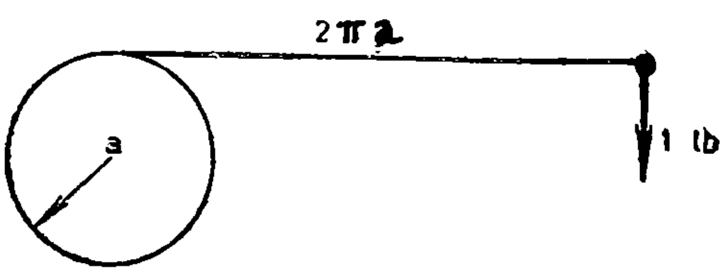


شكل (٤٣)

(الجواب : $v^2 = \frac{1}{2}\,g\,a,\ N_B = \frac{1}{3}\,mg,\ N_{min} = \frac{1}{4}\,m\,g$)

(١٢) جسيم وزنه ١ باوند مربوط فى طرف خيط طرفه الآخر ملفوف حول أسطوانة مثبتة فى وضـــع أفقى . فاذا بدأ الجسيم من سكون بطول حر للخيط مساو لمحيط الاسطوانة كما فى الشكل أوجـــد سرعة الجسيم وشد الخيط عندما يكون الجسيم فى أوطى موضع .

(الجواب $v^2 = 2ga\left(1 + \frac{3}{2}\pi\right)$. $T_{max} = 3\,mg\,(1 + \pi)$)



شكل (٤٤)

(١٣) يدور جسم وزنه W مربوط بخيط مثبت أحد طرفيه فى دائرة رأسية فاذا كان أقصى شد هو nW وأقل شد mW فاثبت أن

$$n = m + 6$$

(١٤) حلقتان صغيرتان كتلتاهما m , m′ مربوطتان بخيط وتنزلقان على طوق دائرى رأسى فاذا بدأتا الحركة من سكون والخيط مشدود فى وضع أفقى فوق مركز الدائرة والزاوية المركزية المقابلة له (2α) اثبت أن شد الخيط عندما يكون ميله θ مع الأفقى يساوى

$$\frac{2m\ m'\ g\ \tan\ \alpha\ \cos\ \theta}{m + m'}$$

(١٥) جسيمان متساويان فى الكتلة يربطهما خيط طوله ($\frac{1}{2}\pi a$) يمر فوق أسطوانة أفقية ملساء نصف قطرها a . فاذا بدأ الجسيمان الحركة من موضع كانا فيه على خط أفقى واحد تقريبا فاثبت أنه عندما يبدأ أحـــد الجسمين فى مغادرة الاسطوانة يكون ضغط الآخر عليها أكثر من $\frac{3}{4}$ وزنه .

(١٦) تنزلق حلقة كتلتها m على سلك منحنى معـــادلته ($y = \sin x$) ومستواه رأسى مبتدئة من سكون عند ($x = \frac{\pi}{4}$) . أثبت أن ضغط الحلقة على السلك عند مرورها بنقطة أصل الاحداثيات يبلغ ($\frac{mg}{\sqrt{2}}$) وأوجد الضغط عندما تمر بالوضع ($x = -\frac{\pi}{2}$) . (الجواب : $m\,g\,(3 + \sqrt{2})$)

(١٧) أنبوبة دقيقة على هيئة قطع مكافىء معادلته ($x^2 = 2\,cy$) موضوعة فى مستوى رأسى . جسيم كتلته m قذف من رأس هـــذا القطع بسرعة

ابتدائية v وواصل سيره داخـــل الأنبوبة . أثبت أن $(N\rho = const)$
حيث N هو رد الفعل العمودى للأنبوبة على الجسيم و ρ نصف قطر التقوس.
أوجد قيمة الثابت .

(ارشاد : أستعمل العلاقة : $\rho = \dfrac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$)