الفصل الأول

البرمجة الخطية

* طبيعة مشكلة البرمجة الخطية
* التطور التاريخي لأسلوب البرمجة الخطية
* مفاهيم أساسية
* صياغة المشكلة رياضيا
* الفروض الأساسية لأسلوب البرمجة الخطية
* استخدام أسلوب الرسم البياني في الحل (تعظيم الربح)
* استخدام أسلوب الرسم البياني في الحل (تدنية التكاليف)
* أسلوب السمبلكس
* استخدام أسلوب السمبلكس في الحل (تعظيم الربح)
* استخدام أسلوب السمبلكس في الحل (تدنية التكاليف)
* أسعار الظل
* حالات أخري لأسلوب السمبلكس
* مشاكل فنية عند استخدام السلوب السمبلكس
* تحليل الحساسية
* الثنائية (الوجه الآخر لمشكلة البرمجة الخطية)

البـــــرمجـــــة الخطيـــــة

Linear Programming

يستخدم أسلوب البرمجة الخطية في حل مشاكل التوزيع الأمثل للموارد المحدودة علي الاستخدامات المختلفة . ويعد هذا الأسلوب الرياضي من أكثر الأساليب الكمية Quantitative Methods انتشارا سواء في الدراسات الأكاديمية أو الممارسات العملية . وقد ثبت استخدامه في معالجة غالبية المشاكل التي يتعرض لها مدير الإنتاج والعمليات . ومن أمثلة هذه المشاكل :

١ - توزيع الموارد الانتاجية (المادة الخام ، الآلات ، العمالة ... ، الخ) علي منتجات مختلفة ، بهدف تحديد توليفة المنتجات المثلي Production mix التي تحدد الكمية الواجب إنتاجها من كل سلعة .

٢ ـ عمل خطة اجمالية يتم فيها توزيع أنواع مختلفة من الطاقة (الطاقة الأصلية ، الإضافية ، لدي الغير) علي الطلب المتوقع في فترات التخطيط القادمة .

٣ ـ عمل خطة توزيع مثلي يتم فيها تحديد كميات الإنتاج أو المادة الخام الواجب نقلها من المصادر المختلفة إلي جهات الاستخدام المتعددة وهوما يعرف بمشاكل النقل Transportation problems

٤ ـ تخصيص الموارد المختلفة (الأفراد ، الآلات ، ... الخ) علي أنواع

مختلفة من الأعمال Jobs وذلك في حالة اختلاف قدرة تلك الموارد علي أداء هذه الأعمال المختلفة .

ويجب أن نوضح هنا أن هذه هي مجرد أمثلة علي استخدام هذا الأسلوب في مجال الإنتاج ، وذلك لا يعني بأي حال من الأحوال قصر استخدام البرمجة الخطية علي هذا المجال ، فهناك الاستخدامات العديدة في مجالات التسويق والتمويل والأفراد .

طبيعة مشكلة البرمجة الخطية :

توضح الفقرة السابقة أن المشكلة التي يتم حلها باستخدام أسلوب البرمجة الخطية لها ثلاثة جوانب أساسية :

١ ـ التوزيع الأمثل .

٢ ـ الموارد المحدودة .

٣ ـ الاستخدامات المختلفة .

وسوف نوضح كل منها بايجاز فيما يلي :

١ ـ التوزيع الأمثل :

إن توزيع الموارد المتاحة لا يجب أن يتم بشكل عشوائي . فمن المؤكد أن هناك تكلفة معينة للحصول علي هذه الموارد كما أن هناك عائدا (يطق عليه الربح) متوقعا من تشغيل هذه الموارد ، فإذا كان المشروع يحدد أسعار بيع المنتجات ، وبالتالي هامش الربح ، فإن هدفه يجب أن يكون هو تعظيم الربح أو العائد الناتج من توزيع تلك

الموارد علي الاستخدامات المختلفة . أما إذا كان المشروع لا يحدد أسعار البيع ، كما هو الحال بالنسبة لبعض منشآت القطاع العام ، فإن هدفه يجب أن يكون هو تقليل تكاليف الانتاج إلي أقل حـد ممكن . ويتم ترجمه هذا الهدف في حالة استخدام أسلوب البرمجة الخطية (سواء تعظيم ربح أو تقليل تكاليف) إلي ما يعرف بدالة الهدف Ob-jective function.

ويضمن أسلوب البرمجة الخطية من خلال خطوات رياضية معينة الوصول إلي أفضل البدائل ا لذي يضمن المستـوي الأمـثل Optimum لدالة الهدف . ففي حالة تعظيم الربح سوف يضمن البديل المختار تعظيم الربح Profit maximization إلي أقصي حد ممكن ، وفي حالة تقليل التكاليف سوف يضمن البديل المختار تدنية التكاليف Cost minimi-zation إلي أقل حد ممكن.

٢ ـ الموارد المتاحة :

إن محدودية الموارد من الحقائق التي يتعامل معها بشكل دائم متخذي القرار . وتهدف كل المنظمات إلي تحقيق أهدافها التشغيلية في حدود مواردها المتاحة . وقد تكون هذه الموارد أموال أو مادة خام أو أفراد أو آلات أو ساعات تشغيل . كما أنها قد تكون قدرة السوق علي استيعاب السلعة أو القدرات التكنولوجية للمنشأة . وتجمع كل هذه الأنواع من الموارد خاصية المحدودية Limited . ويقصد بها وجود حدا أقصي من الكميات المتاحة من هذا المورد خلال فترة زمنية معينة . فهناك الميزانية المالية التي تحكم كمية الأموال المتاحة ، وحصص

التموين وحصص الاستيراد التي تحكم كمية المادة الخام . كما أن هناك الآلات الحالية والتي تحكم القدرة الانتاجية لكثير من المنشآت .

ويضمن نموذج Model البرمجة الخطية إدخال أثر هذه الموارد المتاحة في الحسبان عند صياغة المشكلة بإضافة ما يسمي بالقيود Constraints . فالقيود هي مجموعة المحددات التي لا يستطيع متخذي القرار التحكم فيها ولكنه يحاول الوصول إلي أفضل قرار في ظلها .

٣ ـ الاستخدامات المختلفة :

إن جوهر مشكلة البرمجة الخطية هو أن هناك بدائل للاستخدامات . فإذا كان لدي المنشأة كمية من الأخشاب فأمامها الخيار في استخدامها في انتاج الكراسي أو في إنتاج الترابيزات (المناضد) . وإذا كان لدي الشركة بترول خام فأمامها الخيار في انتاج بنزين أو كيروسين أو بنزين طائرات أو كميات مختلفة من كل منهم . أما في حالة عدم وجود بدائل للاستخدامات فلا يمكن Infeasibility استخدام أسلوب البرمجة الخطية .ولحسن الحظ فإن البدائل دائما تكون عديدة أمام متخذ القرار.وتكون المشكلة الأساسية هي الاختيار من بينها .

التطور التاريخي لأسلوب البرمجة الخطية :

قدم جورج دانتزج George Dantzig في عام ١٩٤٧ ما عرف بأسولب السمبلكسSimplex الذي يستخدم في حل المشكلة العامة

للبرمجة الخطية . وقد اعتمد دانتزج علي أن كل من دالة الهدف والقيود المستخدمة يمكن وضعها في شكل علاقات خطية Linear ، وبالتالي يمكن استخدام قواعد جبر المصفوفات Linear algebra في حل تلك المجموعة من المعادلات معا مع مراعاة أن يكون الحل النهائي هو أفضل الحلول بناء علي دالة الهدف . ولحسن الحظ فهناك أسلوب أبسط يستخدم في إيضاح ماهية المشكلة وكيفية حلها وهو أسلوب الرسم البياني Graphical method ولكن يعاب عليه أنه لا يستخدم إلا في حالة وجود استخدامين فقط (سلعتين) .

وعلي الرغم من التعقيد الرياضي الذي يتصف به إثبات واشتقاق أسلوب السمبلكس ، إلا أن خطوات الحل Algorithm سلسة ومحددة خصوصا في حالة المشاكل الصغيرة . وقد ساعد وجود الكومبيوتر في العصر الحديث علي نمو استخدام هذا الأسلوب في مجالات وتطبيقات عديدة جديدة كان يصعب استخدام هذا الأسلوب في حلها يدويا .

ويهمنا أن نشير هنا إلي وجود مشاكل معينة أن هناك بعض مشاكل الانتاج والتي تعتبر حالة خاصة من حالات مشاكل البرمجة الخطية . وعلي الرغم من إمكانية حل هذه المشاكل باستخدام الأسلوب البياني أو أسلوب السمبلكس إلا أنه نظرا للطبيعة الخاصة لهذه المشكلة فقد ظهرت أساليب أسهل لمعالجتها ، ومثال ذلك أسلوب النقل Transportation method أسلوب التخصيص Assign-ment method

وسوف نتناول في الأجزاء التالية أسلوب البرمجة الخطية عن طريق استخدام مثالا بسيطا وضع خصيصا لايضاح الخصائص الأساسية لعملية صياغة المشكلة وحلها باستخدام كل من الأسلوب البياني وأسلوب السمبلكس .

مثال (١ ـ ١) انتاج سلعتين :

دعنا نفترض أن إحدي شركات الأثاث قد قررت دخول ميدان الأثاثات المكتبية والتي يتم تصنيعها من الخشب . وكان أمامها أما إنتاج المكاتب أو المقاعد أو كليهما . والمشكلة التي تواجهها هي اختيار مزيج من المنتجات يحقق لها أقصي أرباحا ممكنة ـ وقد قامت الشركة بعمل مجموعة عمل مكونة من رجال البيع والإنتاج وقاموا بوضع الصورة أمام الإدارة العليا علي النحو التالي :

	مكتب	مقعد
ربح الوحدة (بالجنيه)	١٠	٩
كمية الأخشاب اللازمة (ألواح)	٥	٤
ساعات العمل اللازمة للوحدة في الورشة	٢	٤

وقد اتضح أن إجمالي كمية الخشب المتاحة أسبوعيا للمصنع هي ١٢٠ لوح وأن الورشة يمكنها أن تعمل فقط ٦٠ ساعة في الأسبوع . وأن الشركة يمكنها بيع كل الوحدات المنتجة من المكاتب والمقاعد .

والمطلوب الأن هو تحديد الكميات الواجب انتاجها من كل سلعة وذلك في حدود كمية الأخشاب وساعات العمل المتاحة أسبوعيا ، وذلك بشكل يضمن تعظيم Maximize إجمالي الربح المحقق إلي أقصي حد ممكن .

مفاهيم أساسية :

قبل وضع صياغة رياضية لهذه المشكلة يمكننا الآن أن نوضح معني الاصطلاحات التي سوف نستخدمها :

١ ـ المطلوب الآن هو تحديد قيمة لعدد الوحدات من المكاتب وعدد الوحدات من المقاعد . ويمكن تسمية هذه بالمتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها Decision variables ، أي أن المطلوب هو تحديد قيمة لكل من :

$س_١$ = عدد الوحدات الواجب انتاجها من المكاتب = ؟

$س_٢$ = عدد الوحدات الواجب انتاجها من المقاعد = ؟

٢ ـ هناك موارد محدود (وهي في هذا المثال المادة الخام والطاقة) تمثل نوعا من القيود Constraints علي متخذي القرار. فمن غير الممكن استخدام أكثر من ١٢٠ لوحا من الخشب في الأسبوع أو تشغيل الورشة أكثر من ٦٠ ساعة اسبوعياً. وهذه القيود يفترض أنها نتيجة لدراسة مستقلة بذاتها ولكنها بالنسبة لمتخذ القرار في هذا الموقف تمثل معطيات given لا يتم التحكم فيها . وفي الحياة العملية ممكن أن يزداد عدد هذه القيود بشكل كبير .

فتستخدم المنشآت مئات الأصناف من المادة الخام ويمر المنتج علي العديد من الأقسام. كذلك فمن الممكن أن تكون هناك عدة قيود من نوع آخر مرتبطة بالسوق أو بالإمكانيات المالية أو الخصائص الفنية للمنتج .

٣ ـ من المفترض في مشكلة البرمجة الخطية أن مساهمة Con-tribution كل وحدة من المنتجات المختلفة المقترحة مختلفة عن بعضها البعض ، ففي مثالنا هذا يبلغ ربح الوحدة ١٠ ، ٩ للمكتب والمقعد علي التوالي . ويترتب علي ذلك أن اختلاف توليفة الانتاج سوف يترتب عليها اختلاف في رقم الربح المحقق . والمطلوب هو الوصول إلي التوليفة التي تعظم الربح . ويطلق علي الصياغة الرياضية التي تمثل إجمالي الربح المحقق دالة الهدف Objective function .

وجدير بالذكر أن الهدف قد يكون تقليل التكاليف إلي أقل حد ممكن . وفي هذه الحالة نحتاج إلي معرفة تكلفة إنتاج الوحدة من كل سلعة بدلا من رقم الربح للوحدة . وهذه هي الحالة الأكثر شيوعا بالنسبة للمنشآت التي لا تسعي إلي تحقيق أرباح أو المنشآت التي لا تتحكم في سعر بيع السلعة . ومثال ذلك بعض السلع التي يتم تحديد أسعارها بواسطة الجهات الحكومية في منشآت القطاع العام .

٤ .. تمثل الطبيعة الفنية للعملية الانتاجية نوعا من القيود يرتبط بالكم اللازمة من كل مورد لانتاج وحدة من السلعة . ففي مثالنا هذا توصل قسم التصميم والمقايسات إلي أن المكتب يحتاج خمسة ألواح من الخشب كما أن تشغيله في الورشة يحتاج إلي ٢ ساعة عمل . ومن المفترض أيضا أن هذه التقديرات تتم بناء علي دراسات مسبقة تهدف إلي الوصول إلي أقصي وفر ممكن للمادة الخام وساعات العمل أما بالنسبة لمتخذ القرار فهي تمثل معطيات.

٥ ـ يمكن أن نشير هنا إلي أن تغير أى من تلك المعطيات الموضحة في الخطوات السابقة سوف يترتب عليه تغيير الحل الأمثل فالحل الأمثل يكون صحيحا فقط في حدود هذه الأرقام ـ أما مدي تأثير التغير في أى من هذه المعطيات علي الحل الأمثل فسوف نناقشة تفصيلا فيما بعد تحت موضوع تحليل الحساسية.

صياغة المشكلة رياضيا :

أوضحنا سابقا أن مشكلة البرمجة الخطية هي مشكلة توزيعا أمثل للموارد المحدودة علي استخدامات مختلفة . ويتضح من هذا المفهوم أن صياغة مشكلة البرمجة الخطية تستلزم جزئين أساسين هما (١) دالة الهدف .. والتي يقاس بها أثر الحل المقترح علي كفاءة توزيع الموارد وذلك حتي نصل إلي الحل الأمثل الذي يعظم قيمة دالة الهدف إلي أقصي رقم ممكن (أو يقللها في حالة تخفيض التكاليف)

و (٢) القيود ... وهي التعبير الرياضي عن الحدود الموضوعة علي الموارد والناتجة عن الطبيعة الفنية للعملية الانتاجية .

دعنا الآن نضع ذلك موضع التطبيق حسب المثال المستخدم .

أولا : دالة الهدف

تتكون دالة الهدف من عدة أجزاء كل منها يعبر عن الربح (أو التكلفة) المحقق من انتاج وبيع كل سلعة من السلع محل الاقتراح . وبذلك فإن دالة الهدف تعبر عن الربح (أو التكلفة) الإجمالي . وهي كما يلي :

إجمالي الربح = الربح المحقق من السلعة الأولي + الربح المحقق من السلعة الثانية .

$$ر = ١٠س_{١} + ٩س_{٢}$$

وذلك علي أساس أن قيم كل من $س_{١}$ ، $س_{٢}$ غير معروفة حتي الآن وأن ١٠ ، ٩ جنيه هي ربح الوحدة من كل من المكتب والمقعد علي التوالي . وبافتراض أن أرقام الربح (أوالتكلفة) للسلع ن الممكن انتاجها هي $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ، ... $أ_{ن}$ علي التوالي ، فإن دالة الهدف يمكن صياغتها بشكل عام علي النحو التالي :

$$عظم\ (أو\ قلل)_{د} = أ_{١}س_{١} + أ_{٢}س_{٢} + ... + أ_{ن}س_{ن}$$

ثانيا : القيود :

بتأمل المثال الحالي نجد أن لدينا نوعين فقط من القيود ، المادة الخام وطاقة الورشة . أما الأول فيمكن صياغته علي النحو التالي :

(كمية الخشب للمكاتب + كمية الخشب للمقاعد) لا تزيد عن (كمية الخشب الأسبوعية)

ففي حالة انتاج $س_1$ من المكاتب فإن إجمالي الخشب اللازم هو $٥س_1$ وذلك علي أساس أن كل وحدة تحتاج إلي خمسة ألواح .وكذلك فإن كمية الخشب اللازمة أسبوعيا لانتاج المقاعد تكون $٤س_2$.أما عبارة لا تزيد عن فتعني أن إجمالي الأخشاب المستخدمة من الممكن أن تكون أقل من أو تساوي كمية الأخشاب المتاحة أسبوعيا . أما أنها تساوي الحد الأقصي فذلك مفهوم بديهيا أما لماذا قد تقل عن الكمية المتاحة حيث أن ذلك يعني عدم استخدام كل الأخشاب المتاحة وهذه تمثل ضياع للموارد ؟ الإجابة علي هذا السؤال تكمن في أن هناك قيودا أخري علي العملية الانتاجية. فقد يكون من غير الممكن استخدام كل الأخشاب بسبب عدم وجود مادة خام أخري (مثل الغراء) أو عدم وجود ساعات عمل كافية في ورشة النجارة . فمشكلة البرمجة الخطية تأخذ في الحسبان كل القيود معا وليس قيدا واحدا فقط .

وتكون صياغة القيد الأول هي :

$$٥س_1 + ٤س_2 \le ١٢٠ \qquad (١)$$

علي أساس أن ≥ تعبر عن أقل من أو يساوي

وبنفس المنطق يمكن الوصول إلي القيد الثاني الخاص بالطاقة المستخدمة في ورشة النجارة علي النحو التالي :

(عدد ساعات العمل للمكاتب) + (عدد ساعات العمل للمقاعد)

لا تزيد عن (عدد ساعات العمل الأسبوعية)

$٢س_{١} + ٤س_{٢} \geq ٦٠$ (٢)

ويهمنا الآن أن نوضح عدة حقائق هامة خاصة بهذه القيود :

(أ) يجب أن تكون الوحدة المستخدمة للقياس في نفس القيد ثابتة . فالألواح هي المستخدمة في تقدير كمية الأخشاب اللازمة للمكاتب والمقاعد وهي ذاتها الوحدة المستخدمة في الطرف الأيسر من المتباينة .

(ب) ليس من الضروري أن تكون وحدة القياس المستخدمة لكل القيود ثابتة . فالقيد الأول يستخدم الألواح بينما يستخدم القيد الثاني ساعات العمل في طرفي المتباينة .

(ج) العلاقة الأساسية الواجب مراعاتها بين القيود جميعا هي استخدام نفس الوحدة الزمنية . فطالما أن المطلوب هو تحديد الكميات المنتجة من المكاتب والمقاعد في الأسبوع فيجب أن يعبر الطرف الأيسر من المتباينة الأولي عن كمية الأخشاب المتاحة في الأسبوع وأن يعبر الطرف الأيسر من المتباينة الثانية عن عدد ساعات العمل المتاحة في الأسبوع أيضا .

(د) ليس من الضروري أن تمثل كل من السلعتين في القيد ، فقد يكون القيد خاصا بسلعة واحدة فقط وذلك عندما يكون هناك قيود بيعية مثلا . ومثال ذلك ألا يستوعب السوق أكثر من عدد معين من المكاتب فى الأسبوع .

(هـ) هناك نوع آخر من القيود يتم إضافته قبل البدء في حل المشكلة ويعد جزءا أساسيا في حالة إنتاج السلع وهو القيد الذي يضمن ألا تكون أرقام الإنتاج أرقاما سالبة . فمن غير المعقول مثلا أن يكون عدد الوحدات الواجب انتاجها من المكاتب هو - ١٠ . ويطلق علي هذا القيد عدم السالبية Non-negativetity constraint ويتم صياغته علي النحو التالي :

س$_{١}$ ≤ صفر

س$_{٢}$ ≤ صفر

أو س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≤ صفر

ويعني ذلك أن كلا من عدد المكاتب والمقاعد المنتجة يمكن أن يكون صفرا أو أكثر من صفر .

يمكن الآن إجمال الصيغة الرياضية لهذه المشكلة كما يلي :

عظم : ر = ١٠س$_{١}$ + ٩ س$_{٢}$

في ظل القيود :

$$\boxed{\begin{array}{r} ٥س_{١} + ٤س_{٢} \geq ١٢٠ \\ ٢س_{١} + ٤س_{٢} \geq ٦٠ \\ س_{١} ، س_{٢} \leq صفر \end{array}}$$

أما الصفية العامة فهي :

عظيم : $ر = أ_{١} س_{١} + أ_{٢} س_{٢} + \dots + أ_{ن} س_{ن}$

في ظل القيود :

$$م_{١١} س_{١} + م_{٢١} س_{٢} + \dots + م_{ن١} س_{ن} \geq ب_{١}$$

$$م_{١٢} س_{١} + م_{٢٢} س_{٢} + \dots + م_{ن٢} س_{ن} \geq ب_{٢}$$

$$م_{١ع} س_{١} + م_{٢ع} س٢ + \dots م_{نع} س_{ن} \geq ب_{ع}$$

$$س_{١} ، س_{٢} ، \dots ، س_{ن} \leq صفر$$

وذلك علي أساس أن $م$ تعبر عن المعامل الخاص بالسلعة في القيد ويرمز الرقم الأول أسفل م إلي رقم القيد (عدد القيود ع) والرقم الثاني إلي رقم السلعة (عدد السلع ن) - ومعني ذلك أن $م_{٢١}$ تعني مثلا معامل السلعة الثانية في القيد الأول . أما ب فتعبر عن القيد الموجود في المتباينة . فمثلا $ب_{١}$ تعبر عن إجمالي المادة الخام الأولي المتاحة والتي لا يمكن تجاوزها خلال فترة زمنية محددة .

ملحوظة هامة :

سوف نري فيما بعد أن مشكلة البرمجة الخطية يمكن استخدامها أيضا في الحالات التي يكون الهدف فيها هو تقليل التكاليف وعندما تكون القيود في شكل ≤ أو = .

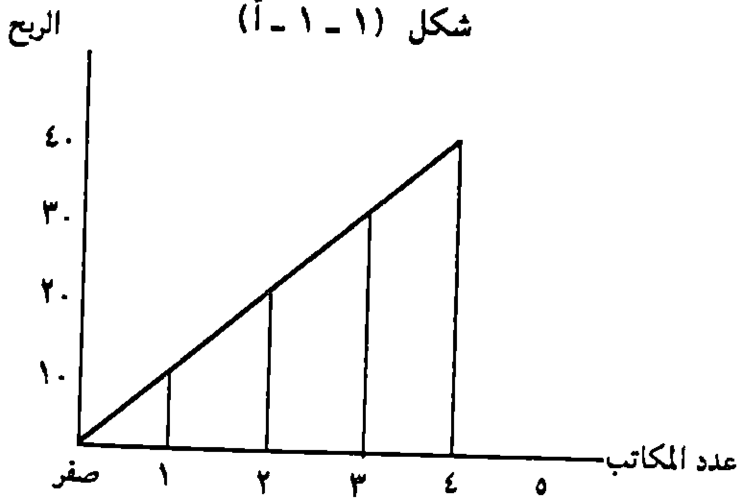
الفروض الأساسية لأسلوب البرمجة الخطية

قبل الشروع في إيضاح كيفية حل مشكلة البرمجة الخطية يجب أن نوضح الفروض الرياضية الأساسية التي يقوم عليها هذا الأسلوب . والسبب في ذلك في رأينا هو أن القائم باستخدام هذا الأسلوب يجب عليه التأكد أولا وقبل كل شئ من تحقق هذه الشروط في الحالة التي يواجهها . فاستخدام هذا الأسلوب في غير موضعه سوف يؤدي إلي نتائج سيئة قد تشكك الإدارة تماما في كل أساليب بحوث العمليات. علاوة علي أن هناك أساليب أخري رياضية متقدمة يمكن استخدامها في حالة عدم تحقق هذه الشروط ومثال ذلك البرمجة غير الخطية Non - linear Programming. وسوف نجمل الفروض فيما يلي:

١ ـ كل العلاقات الرياضية في الصياغة ، سواء في دالة الهدف أو القيود ، هي علاقات خطية linear . ويعني ذلك أن معامل الربح (التكلفة) ومعامل العملية الإنتاجية في القيود لا يرتبط بحجم النشاط فأيا كان رقم الانتاج والمبيعات فإن رقم ربح (أو تكلفة) الوحدة من السلعة ثابت، كما أن عدد الوحدات اللازمة من كل مورد (مادة خام أو ساعات عمل) لانتاج وحدة من

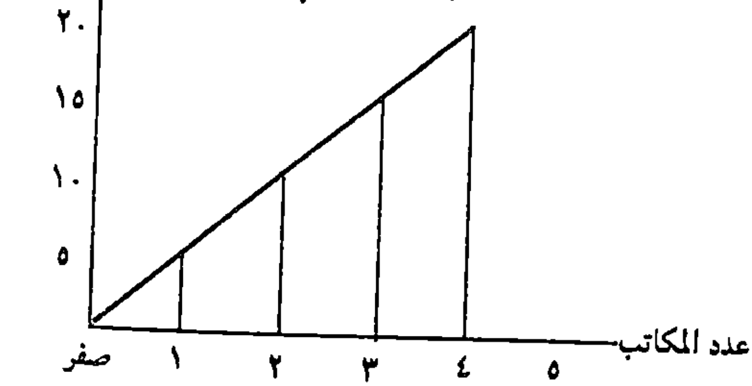
السلعة ثابتة . فإذا كانت الوحدة المنتجة تحقق ربحا قدره عشرة جنيهات فإن الوحدتين يحققان ربحا قدره عشرون .... وهكذا . ويعني ذلك بلغة الأعمال عدم وجود خصم كمية وعدم تحقيق وفورات في العملية الانتاجية نتيجة لتغير حجم النشاط. فانتاج مكتب واحد يستلزم خمسة ألواح من الأخشاب بينما انتاج مكتبين يحتاج عشرة .. وهكذا ، ومن السهل تصور أن كل من هذه تأخذ شكل علاقة خطـية كما في الأشكال (١ـ١ـ أ) ، (١ -١-ب) .

شكل (١ ـ ١ ـ أ)



دالة الهدف

(١ - ١ - ب)



القيد الأول

ويجب الإشارة هنا إلي أنه ليس من الضروري عمل مثل هذا الرسم لمعرفة توافر فرض الخطية . فالقاعدة أنه طالما أن دالة الهدف والقيود تخلو من الحالات التي يكون فيها أس المتغيرات الواجب تحديد قيمة بشأنها غير معادل للوحدة ، فإن العلاقة تكون خطية ويعني ذلك أنه إذا وجدت $س_1^2$ أو $\sqrt{س_1}$ مثلا فإن العلاقة تعد غير خطية.

٢ ـ أن قيم كل من الموارد المتاحة (الجانب الأيسر من متباينات القيود) ، ومدى مساهمة الوحدة فى دالة الهدف (الربح أو الخسارة للوحدة) ، ومعاملات الانتاج الفنية فى القيود (م) ، تكون جميعها معروفة وثابتة . فالحل يعد صحيحا عند هذه القيم فقط . كما أنه ليس هناك مجال لعدم التأكد أو الخطر فكل شئ معروف وسوف يتحقق فى المستقبل بنفس القيمة . فى حالة عدم التأكد يتم استخدام أساليب أخرى مثل stochastic programming .

٣ ـ من الممكن أن تكون قيم متغيرات الحل أرقاما صحيحة integers جميعها ، أو بعضها صحيح والبعض الآخر كسر ، أو بكليها كسور. هناك أساليب أخرى تستخدم فى حالة النص على أن تكون الأرقام صحيحة فقط مثل integer programming .

بعد أن أوضحنا الفروض الأساسية التى يقوم عليها أسلوب البرمجة الخطية سوف نعرض لكيفية حل هذه المشكلة ، والتى تتوفر فيها الشروط السابقة ، مبتدئين بأسلوب الرسم البيانى .

استخدام أسلوب الرسم البيانى فى الحل :

يستخدم هذا الأسلوب فى حل مشكلة البرمجة الخطية عندما لا يزيد عدد المتغيرات (س) علي اثنين أو ثلاثة على أكثر تقدير . ويرجع ذلك الى الاستحالة العملية لرسم أكثر من ثلاثة محاور لتصوير المشكلة بيانيا ، حتى أنه من المفضل عدم استخدام هذا الأسلوب عندما تزيد المتغيرات عن اثنين . ومن مزايا هذا الأسلوب البساطة كما أنه يعد أساسا لتفهم تماما ما يقوم به أسلوب السمبلكس لحل هذه المشكلة فى حالة أى عدد من المتغيرات وأي عدد من القيود. ويمكن تلخيص خطوات هذه الطريقة فيما يلى :

١ ـ صياغة المشكلة فى شكل نموذج رياضي .

٢ ـ رسم القيود فى شكل بيانى وتحديد المنطقة الممكنة Feasible area

٣ ـ اختيار الحل الأمثل .. ويتم ذلك عن طريق :

(أ) تقييم الربح عند النقط الركنية .

أو (ب) رسم دالة الهدف بيانيا .

وسوف نقوم بشرح هذه الخطوات بحل المثال الخاص بشركة الأثاث .

الخطوة الأولى : الصياغة الرياضية :

عظيم : ر = ١٠ س$_١$ + ٩ س$_٢$

فى ظل: ٥ س$_١$ + ٤ س$_٢$ ≥ ١٢٠ قيد المادة الخام (الخشب)

$٢س_١ + ٤س_٢ \leq ٦٠$ قيد ساعات العمل (الورشة)

$س_١ ، س_٢ \geq$ صفر قيد عدم السالبية

الخطوة الثانية : رسم القيود فى شكل بيانى :

يبين الشكل (١ـ٢) أحد الخطوط المستقيمة الذى يعبر عن قيد المادة الخام . وقد بدأت العملية برسم محورين أما الأفقى فيمثل الكميات المنتجة من المكاتب $س_١$ ، والرأسي يمثل الكميات المنتجة من المقاعد $س_٢$. ولرسم القيد الأول يتم تجاهل علاقة $\leq$ ونفترض أنها = فقط حيث أننا تعودنا كيف نرسم الخط المستقيم حسب قواعد الهندسة التحليلية . وطالما أن هذا خط مستقيم وسوف يتقاطع مع المحاور فأن أفضل طريقة لرسمه هى تحديد نقطتي التقاطع مع المحاور وتوصيلهما ولتحقيق ذلك :

* افرض أن $س_١$ = صفر

من المعادلة $٥ س_١ + ٤ س_٢ = ١٢٠$

يكون $٤ س_٢ = ١٢٠$ ومنها $س_٢ = ٣٠$

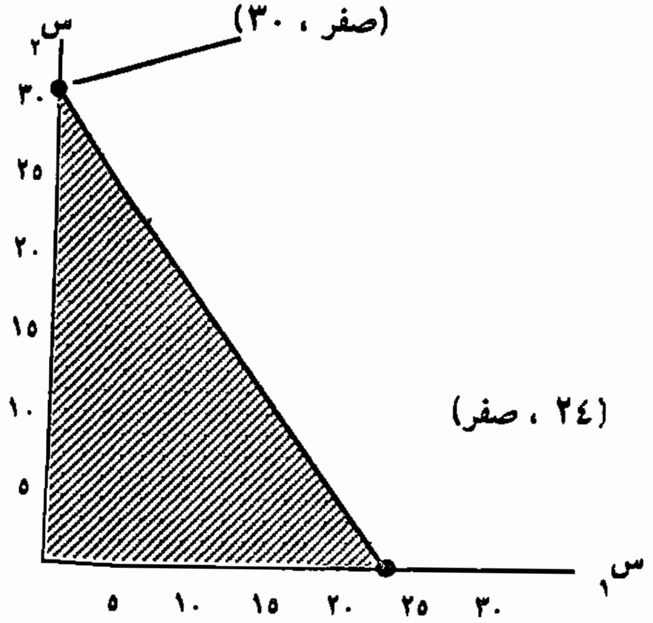
ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الأول مع المحور الرأسى (حيث $س_١$ = صفر) هى (صفر ، ٣٠) .

* أفرض أن $س_٢$ = صفر

من المعادلة $٥ س_١ + ٤ س_٢ = ١٢٠$

يكون $٥ س_١ = ١٢٠$ ومنها $س_١ = ٢٤$

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الأول مع المحور الافقى (حيث $س_٢$ = صفر) هى (٢٤ ، صفر) . وبتوصيل تلك النقطتين يتم التوصل الى الخط المستقيم الذى يمثل القيد . ويلاحظ هنا أنه لم يتم مد الخط لأكثر من ذلك لأن الامتداد يقع فى مناطق يكون فيها أى من $س_١$ أو $س_٢$ رقم سالب وذلك يتعارض مع شرط عدم السالبية الذى تم اضافته عند صياغة المشكلة . وبالرجوع أيضا الى الصيغة التى كان عليها القيد الأول نجد وجود اشارة ≥ وهى تعني أن أى نقطة على الخط أو تحت الخط تحقق هذا القيد - فاذا تم اختيار أية نقطة داخل المنطقة المظللة واسقط منها أعمدة على المحور الرأسي والافقى لتحديد قيم $س_١$ ، $س_٢$ ، وتم التعويض فى الطرف الأيمن من متباينة القيد الأول لوجدنا أن القيمة (التى تعبر عن اجمالى الأخشاب اللازمة) لاتزيد بأى حال من الأحوال عن الطرف الأيسر للمتباينة وهو ١٢٠ . ولذلك فان القيد يتم قراءته الى أسفل والمنطقة المظللة تعبر عن جميع



الحلول الممكنة حسب القيد الأول فقط . أما أي نقطة أعلي من هذا الخط فيجب عدم التفكير فيها حيث أنها تستلزم أخشاب أكثر من الكميات المتاحة .

وطالما أن الهدف هو إيجاد حلا تسمح به كل القيود فيجب أيضا رسم باقى القيود بنفس الكيفية السابقة ثم تحديد المنطقة الممكنة حسب كل القيود . ولرسم القيد الثانى نقوم بنفس الخطوات :

* افرض أن $س_{١}$ = صفر

من المعادلة ٢ $س_{١}$ + ٤ $س_{٢}$ = ٦٠

يكون ٤ $س_{٢}$ = ٦٠ ومنها $س_{٢}$ = ١٥

ويعني ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الثاني مع المحور الرأسي (حيث $س_{١}$ = صفر) هي (صفر ، ١٥)

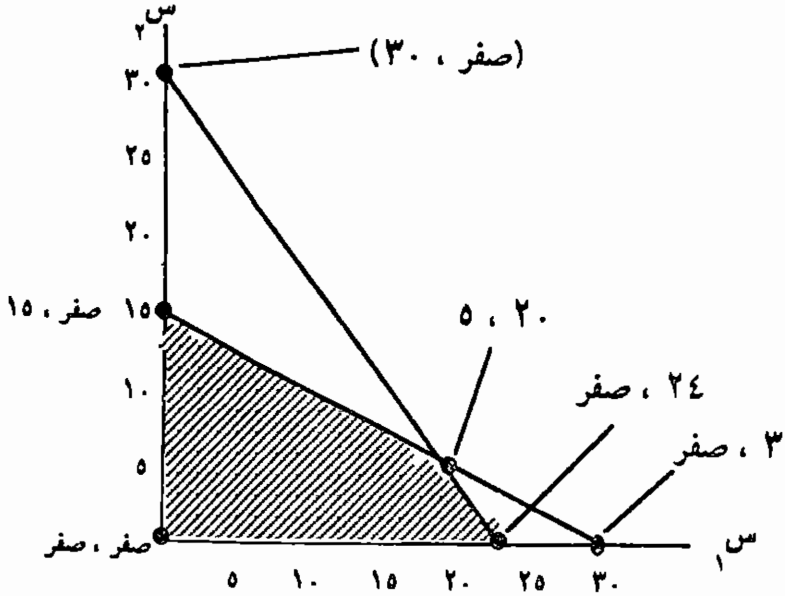
افرض أن $س_{٢}$ = صفر

من المعادلة ٢$س_{١}$ + ٤$س_{٢}$ = ٦٠

يكون ٢$س_{١}$ = ٦٠ ومنها $س_{١}$ = ٣٠

ويعني ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الثاني مع المحور الأفقي (حيث $س_{٢}$ = صفر) هي (٣٠ ، صفر) وبتوصيل تلك النقطتين يتم التوصل إلي الخط المستقيم الذي يمثل القيد الثاني ويتم قراءته علي أساس ≥ وليس = فقط ، وبوضع هذا الخط مع خط القيد الأول كما في

شكل (١ ـ ٣)



الشكل (١ - ٣) يتضح أن إضافة هذا القيد يترتب عليها استبعاد منطقة (المثلث العلوي) والتي كانت تعتبر ممكنة حسب القيد الأول فقط . ونتيجة لذلك يكون لدينا المنطقة الممكنة حسب القيدين وهي المنطقة المظللة في الشكل (١ - ٣). ويجب أن ننوه هنا إلي أن هذه المنطقة المظللة ليست بالضرورة تشمل نقطة الأصل (صفر ، صفر) أو تتلامس مع المحاور كما في هذا المثال ولكنها من الممكن أن تأخذ أى شكل هندسي له أضلاع مستقيمة (يطلق عليه Simplex) وذلك حسب شكل القيود كما سنري في أمثلة تالية .

الخطوة الثالثة : اختيار الحل الأمثل :

ويتم في هذه الخطوة اختيار الحل الأمثل Optimal solution وذلك من بين كل الحلول الممكنة لمشكلة البرمجة الخطية . وهوكما

أوضحنا الحل الذي يعظم (أو يقلل min) من قيمة دالة الهدف . ويمكن القيام بهذه الخطوة في ظل الطريقة البيانية إما اعتمادا علي (أ) تقييم كافة النقط الركنية أو (ب) رسم دالة الهدف . وسوف نتناول بالايضاح كيفية استخدام كل من هذين المدخلين في استكمال حل المثال الحالى .

(أ) عن طريق تقييم النقط الركنية Corner Points :

طالما أن القيود الموجودة في المشكلة هي قيود خطية ودالة الهدف دالة خطية وللمشكلة حلا أمثل فإن قواعد الرسم تقتضي أن يقع هذا الحل في واحدة علي الأقل من النقط الركنية exteme or corner Points وبالنظر إلي الرسم في الشكل (١ - ٣) يتضح أن هذه النقط الركنية هي :

(صفر ، صفر)، (صفر ، ١٥) ، (٢٤ ، صفر) ، ونقطة تقاطع القيدين الأول والثاني .

ولاستكمال معرفة جميع النقط الركنية يمكن اسقاط أعمدة علي المحاور ، ولكن ذلك دائما غير مضمون العواقب نظرا لعدم دقة الرسم البياني في كثير من الحالات . ولذلك نعود إلي قواعد الجبر ونحل المعادلتين معا .

$$٥س_{١} + ٤س_{٢} = ١٢٠ \longrightarrow (١)$$

$$٢س_{١} + ٤س_{٢} = ٦٠ \longrightarrow (٢)$$

بطرح (٢) من (١) تكون النتيجة

٣$س_{١}$ = ٦٠ ومنها $س_{١}$ = ٢٠

بالتعويض في (٢) نجد أن

٢(٢٠) + ٤$س_{٢}$ = ٦٠

ومنها ٤$س_{٢}$ = ٢٠ ومنها $س_{٢}$ = ٥

ويعني ذلك أن النقطة الركنية الرابعة هي (٥ ، ٢٠) ويمكن التأكد من ذلك من الرسم إذا كان دقيق .

ويمكن تقدير الأرباح المتوقعة عند تلك النقط الركنية (الحلول الممكنة) حسب الجدول التالي :

النقطة الركنية		مقدار الأرباح حسب دالة الهدف
$س_{١}$	$س_{٢}$	ر = ١٠$س_{١}$ + ٩$س_{٢}$
صفر	صفر	١٠ × صفر + ٩ × صفر = صفر
صفر	١٥	١٠ × صفر + ٩ × ١٥ = ١٣٥
٢٤	صفر	١٠ × ٢٤ + ٩ × صفر = ٢٤٠
٢٠	٥	١٠ × ٢٠ + ٩ × ٥ = ٢٤٥

ويتضح من هذا الجدول أن الحل الأمثل Optimal Solution هو في النقطة الركنية (٥ ، ٢٠) . ويعني ذلك أن $س_{١}$=٥ ، $س_{٢}$=٢٠ .

وهو توليفة تعني انتاج خمسة مكاتب وعشرون مقعدا . وذلك سوف يحقق ربحا قدره ٢٤٥ جنيها أسبوعيا للمنشأة .

(ب) عن طريق رسم دالة الهدف :

يمكن التوصل إلي نفس الحل الذي توصلنا إليه في طريقة تقييم النقط الركنية بأسلوب أيسر عن طريق رسم دالة الهدف . وتبدأ هذه الطريقة باختيار رقما للربح (يفضل أن يكون رقما تسهل معه العمليات الحسابية في دالة الهدف) وليكن ١٨٠ جنيه . وقد تم اختياره بحيث يسمح بالقسمة علي ٩ ، ١٠ في دالة الهدف دون وجود قيمة غير صحيحة من $س_١$ ، $س_٢$. وتكون الخطوة التالية هي رسم هذا الخط علي الشكل رقم (١ – ٤) الموجود به المنطقة الممكنة حسب كل القيود. ولرسم دالة الهدف نتبع الأسلوب السابق المستخدم في رسم القيود كما يلي :

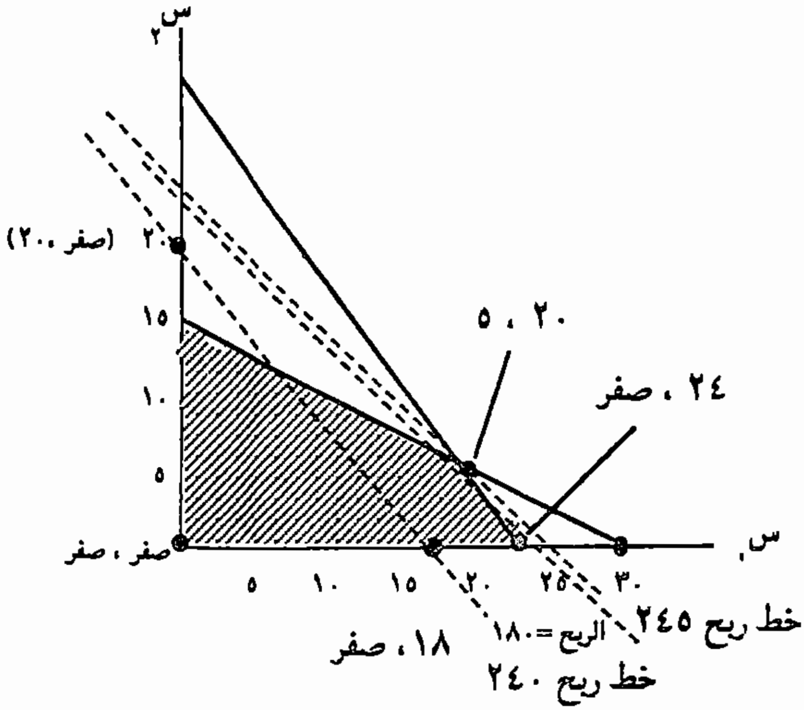
$$١٠س_١ + ٩س_٢ = ١٨٠$$

افرض أن $س_١$ = صفر ومنها $س_١$ = ٢٠ ---> نقطة (صفر ، ٢٠)

افرض أن $س_٢$ = صفر ومنها $س_١$ = ١٨ ---> نقطة (١٨ ، صفر)

برسم هذا الخط يكون لدينا خطا مستقيما يسمي خط الربح الثابت Iso-profit line . ويعني ذلك أن أى نقطة علي الخط تحقق المعادلة $١٠س_١ + ٩س_٢ = ١٨٠$. ويمكن التأكد من ذلك بافتراض أى نقطة علي الخط من الرسم البياني .

شكل (١ ـ ٤)



وبتأمل هذا الخط يتضح أنه يمكن تحسين الأرباح ، فرقم ١٨٠ ليس أفضل الأرباح ـ نظرا لأن هذا الخط يمر في داخل المنطقة الممكنة وما زال أمامنا فرصة تحريك الأرباح إلي أعلي ، فإذا حاولنا أي رقم للأرباح أعلي من ١٨٠ فإن ذلك سوف يؤدي إلي خطأ موازيا تماما للخط الحالي ويقع إلي أعلي هذا الخط . وترجع خاصية التوازي لتلك الخطوط إلي حقيقة أن ميل الخط ثابت علي الرغم من تغير الطرف الأيسر من قيمة دالة الهدف . فالميل محكوم بمعاملات الربح لكل من س١ ، س٢ وهما ثابتان . وباستمرار عملية التحريك إلي أعلي نجد أنه عند نقطة تقاطع القيدين يمس خط الربح المنطقة الممكنة وأى محاولة

بعد ذلك لتحريك الخط إلي أعلي يترتب عليها الخروج عن تلك المنطقة ويعني ذلك أن النقط التي علي الخط كلها غير ممكنه ـ ويترتب علي ذلك أن الخط المماس في نقطة التقاطع يكون هو أعلي ربح ممكن ونقطة التقاطع هي الحل الأمثل Optimal Solution . وبنفس الطريقة السابقة يمكن تحديد قيمة $س_١$ ، $س_٢$ عند نقطة التقاطع بحل المعادلتين معا . وسوف يؤدي ذلك إلي $س_١ = ٢٠$ ، $س_٢ = ٥$ والربح في هذه الحالة يتم حسابه بالتعويض في دالة الهدف ، وهو يعادل ٢٤٥ جنيها كما في الطريقة السابقة .

ملحوظة :

طالما أن رقم ١٨٠ قد تم اختياره بشكل تحكمي إلي حد ما فإن الرقم المختار قد يؤدي إلي رسم خط ربح ثابت يقع بالكامل في أعلي المنطقة الممكنة . ومثال ذلك اختيار ٣٦٠ جنيه . وفي هذه الحالة يتم رسم خطوط موازية لخط ٣٦٠ وإلي أسفل هذا الخط حتي يلامس آخر خط أول نقطة من المنطقة الممكنة . عندئذ نتوقف ونعتبر هذه النقطة الركنية عند المماس هي الحل الأمثل .

ملحوظات علي الحل :

يوضح الحل النهائى في هذا المثال ما يأتي :

١ ـ هذا هو حلا أمثل وحيد Unique Optimal Solution ويعني ذلك

أن النقطة $س_١ = ٢٠$ ، $س_٢ = ٥$ هي النقطة الممكنة الوحيدة ذات أعلي قيمة لدالة الهدف . وأن أى نقطة ممكنة أخري تحقق ربحا أقل . وسوف نناقش فيما بعد حالة تعدد الحلول المثلي .

٢ ـ أن مجرد توزيع الموارد علي أساس ربحية الوحدة دون أخذ في الحسبان القيود . لا يعد صحيحا . فعلي سبيل المثال علي الرغم من أن ربحية المكتب الواحد أعلي من الكرسي إلا أن تعظيم الربح الإجمالي يتطلب انتاج كل من المكتب والمقعد . فإذا تم تخصيص كل الموارد للمكاتب فإن أعلي رقم يمكن انتاجه في ظل القيدين هو ٢٤ مكتب وذلك يحقق ربحا إجماليا قدره ٢٤٠ جنيها والذي هو أقل من ربح الحل الأمثل .

٣ ـ لا يجب أن يفهم من هذا المثال أن الحل الأمثل يكون دائما في نقطة تقاطع القيود . فأحيانا يقع الحل الأمثل علي أحد المحاور (التي هي نقط تقاطع أيضا) . ويعني الحل في مثل تلك الحالة انتاج سلعة واحدة وعدم انتاج السلعة الأخري . وحقيقة يتوقف ذلك علي ميل دالة الهدف .

استخدام الأسلوب البياني في حل مشكلة تقليل التكاليف:

يتشابه استخدام الطريقة البيانية في حالة مشكلة تقليل التكاليف Cost minimization مع استخدامها في حالة مشكلة تعظيم الربح التي أوضحناها في المثال السابق . والفارق الوحيد سوف يكون

في خطوة اختيار الحل الأمثل كما سوف يتضح في المثال التالي :

مثال (١ - ٢) :

في إحدي الكليات العسكرية ، طلب من المسئول عن التغذية The academy dietitian أن يحدد المكونات الأساسية لوجبة الإفطار لطلبة الكلية ، وكان أمام الرجل (أو السيدة) أن يضمن أن الوجبة تفي بالحد الأدني اللازم من البروتين وفيتامين (أ) والحديد لطالب الكلية . وقد اتضح أنه يمكن تدبير هذه المتطلبات من نوعين من الغذاء غ١ ، غ٢ ، (فول ، بيض مثلا) (في هذه الحالة فقط يمكن استخدام الطريقة البيانية) ، ويوضح الجدول التالي مدي توافر الاحتياجات الأساسية في هذين النوعين من الغذاء والحد الأدني اللازم من كل منهما .

المستلزمات	الكميات المتوفرة في أوقية واحدة من غ٢	الكميات المتوفرة في أوقية واحدة من غ١	الحد الأدني في الوجبة
البروتين (وحدة)	٢	٢	١٠
فيتامين أ (وحدة)	٢	١	٧
الحديد (وحدة)	١ ١/٣	٢	٨

وكانت تكلفة الأوقية من الغذاء الأول هي ثلاثة قروش وتكلفة الأوقية من الغذاء الثاني أربعة قروش . والمشكلة الآن هي تحديد

الكميات اللازمة من كل من الغذائين في الوجبة مع تقليل التكاليف إلي أقل حد يمكن .

الخطوة الأولي : صياغة المشكلة رياضيا :

بفرض أن المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها هي :

$س_١$ = الوزن من $غ_١$ المستخدم في الوجبة (بالأوقية)

$س_٢$ = الوزن من $غ_٢$ المستخدم في الوجبة (بالأوقية)

فإن دالة الهدف تكون من جزئين كما يلي :

التكاليف الكلية لوجبة = ت الجزء المستخدم من $غ_١$ + ت الجزء المستخدم من $غ_٢$

أي أن : ت = ٣$س_١$ + ٤$س_٢$ ----> دالة الهدف

والمطلوب هو تقليل هذه القيمة ت إلي أقل حد ممكن مع مراعاة القيود الخاصة بمواصفات الوجبة وهي :

((كمية البروتين في الوجبة من $غ_١$) + (كمية البروتين من الوجبة في $غ_٢$) = علي الأقل ١٠ وحدات.

ويعني ذلك رياضيا :

٢$س_١$ + ٢$س_٢$ ≤ ١٠ (وحدات من البروتين) ---> قيد ١

كذلك فإن قيد الفيتامينات يمكن صياغته علي النحو التالي :

٢س$_{١}$+١س$_{٢}$ ≥ ٧ (وحدات من فيتامين أ)---> قيد ٢

كما أن قيد الحديد يكون كما يلي :

$\frac{١}{٣}$ ١س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ ≥ ٨ (وحدات من الحديد) ---> قيد ٣

ويضاف شرط عدم السالبية س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≥ صفر

الخطوة الثانية : ارسم القيود وحدد المنطقة الممكنة :

لرسم القيد الأول دع ٢س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ = ١٠

عند س$_{١}$ = صفر سوف تصبح س$_{٢}$ = ٥ --> النقطة (صفر ، ٥)

عند س$_{٢}$ = صفر سوف تصبح س$_{١}$ = ٥ --> النقطة (٥ ، صفر)

ولرسم القيد الثاني دع ٢س$_{١}$ + ١س$_{٢}$ = ٧

عند س$_{١}$ = صفر سوف تصبح س$_{٢}$=٧ ---> النقطة (صفر ، ٧)

عند س$_{٢}$= صفر سوف تصبح س$_{١}$ = ٣,٥ --> النقطة (٣,٥ ، صفر)

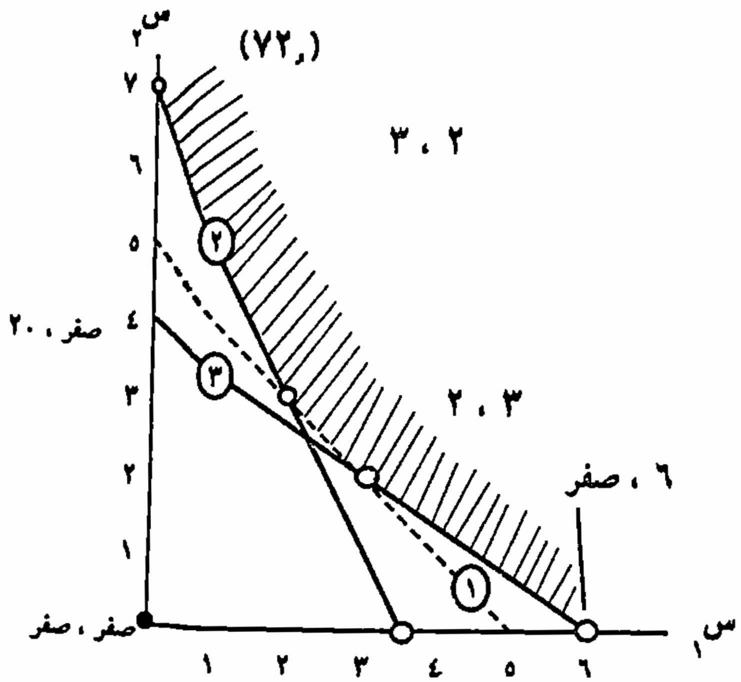
ولرسم القيد الثالث دع $\frac{١}{٣}$١ س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ = ٨

عند س$_{١}$ =صفر سوف تصبح س$_{٢}$ = ٤ ---> النقطة (صفر ، ٤)

عند س$_{٢}$ =صفر سوف تصبح س$_{١}$ = ٦ ---> النقطة (٦ ، صفر)

برسم القيود الثلاثة كما في الشكل (١ - ٤) وقراءة القيود حسب معناها ≥ يتضح أن المنطقة الممكنة هي المنطقة التي تقع إلي أعلي القيود الثلاثة وهي المنطقة المظللة أو أي نقطة في أعلاها .

شكل (١ - ٥)



الخطوة الثالثة : اختيار الحل الأمثل :

(أ) عن طريق اختبار النقطة الركنية ... أمامنا أربعة نقط ركنية يمكن تحديدها في المنطقة الممكنة وهي: (صفر ، ٧) (٦، صفر)، نقطة تقاطع القيود (١)،(٢)، نقطة تقاطع القيود (١)،(٣) ولتحديد نقطة التقاطع (١)،(٢) يتم ذلك كما يلي :

$$٢س_{١} + ٢س_{٢} = ١٠ \longleftarrow (١)$$

$$٢س_{١} + ١س_{٢} = ٧ \longleftarrow (٢)$$

بطرح (٢) من (١) فإن $س_٢ = ٣$

بالتعويض في (٢) أو (١) عن قيمة $س_٢$ فإن قيمة $س_١ = ٢$

وعلي ذلك فإن نقطة التقاطع هي (٢ ، ٣)

ولتحديد نقطة تقاطع (١) ، (٣) يتم ما يلي :

$$٢س_١ + ٢س_٢ = ١٠ \dashrightarrow (١)$$

$$\frac{١}{٣} ١س_١ + ٢س_٢ = ٨ \dashrightarrow (٢)$$

بطرح (٢) من (١) فإن $س_١ = ٢ \times \frac{٣}{٢} = ٣$

بالتعويض في (١) أو (٢) فإن $س_٢ = ٢$

∴ نقطة التقاطع هي (٣ ، ٢)

ويمكن الآن تقدير التكاليف المتوقعة عند تلك النقط الركنية حسب دالة الهدف كما في الجدول التالي :

النقطة الركنية	دالة الهدف ت = $٣س_١ + ٤س_٢$
صفر ، ٧	٣(صفر) + ٤(٧) = ٢٨
٢ ، ٣	٣(٢) + ٤(٣) = ١٨
٣ ، ٢	٣(٣) + ٤(٢) = ١٧
٦ ، صفر	٣ (٦) + ٤(صفر) = ١٨

ويتضح منه أن الحل الذي يصل بتكاليف الوجبة إلي أدناها هو استخدام ٣ أوقيات من غ$_١$ وأقيتين فقط من غ$_٢$ ، حيث تصل التكلفة إلي ١٧ قرش للوجبة .

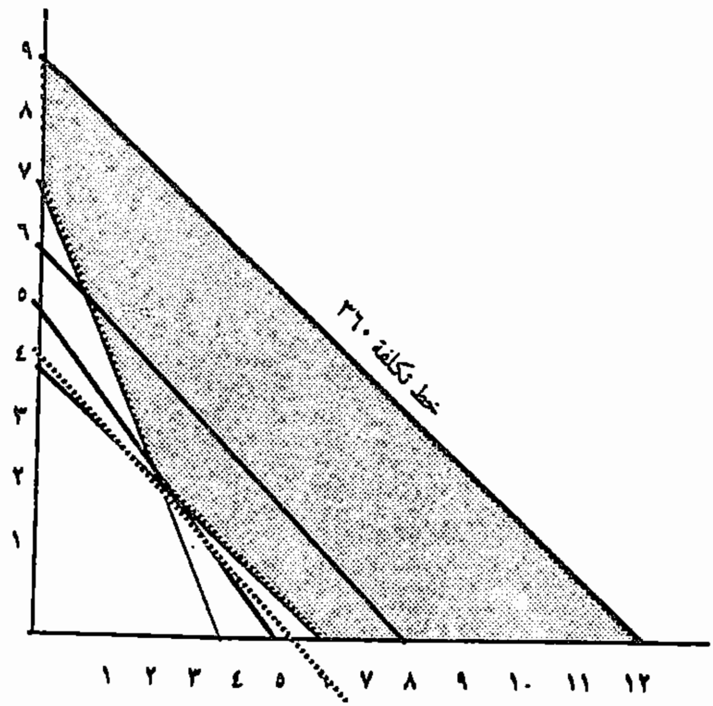
(ب) عن طريقة رسم دالة الهدف ... وكما هو الحال في حالة تعظيم الربح سوف تؤدي هذه الطريقة إلي نفس النتيجة السابقة . وتبدأ الطريقة برسم دالة الهدف عند أية قيمة افتراضية لدالة الهدف ولتكن ٣٦ قرش . ويعني ذلك أنه :

٣س$_١$ + ٤س$_٢$ = ٣٦

بافتراض س$_١$ = صفر --> س$_٢$ = ٩ ومنها النقطة (صفر ، ٩)

بافتراض س$_٢$ = صفر ---> س$_١$ = ١٢ ومنها النقطة (١٢ ، صفر)

شكل (١ ـ ٦)



ومن هاتين النقطتين يمكن رسم خط تكلفة ٣٦ كما في الشكل (١ ـ ٥) والذي يتضح منه أنه علي الرغم من وقوعه في المنطقة الممكنة إلا أنه ما زال أمامنا إمكانية تغيير توليفة $س_{١}$ ، $س_{٢}$ حتي يتسني لنا تخفيض التكاليف ـ وبرسم خطوط موازية لهذا الخط تقع إلي أسفل هذا الخط (علي يساره) نجد أن أقل خط يمس المنطقة الممكنة في النقطة الخاصة بتقاطع القيدين (١) ، (٣). وأي محاولة لرسم خط وتكلفة آخر إلي اليسار سوف تؤدي إلي توليفات من $س_{١}$ ، $س_{١}$ يصعب تحقيقها لأنها خارج المنطقة الممكنة . ويعني ذلك أن نقطة تقاطع (١)، (٣) هي نقطة الحل الأمثل الذي يقلل التكاليف إلي أقل حد ممكن . ولمعرفة هذه النقطة يتم حل معادلتي القيدين (١)، (٣) معا كما فعلنا سابقا والتي سوف تؤدي إلي أن $س_{١}$ = ٣، $س_{٢}$ = ٢ (والتي تتضح من الرسم أيضا) ويمكن تحديد تكلفة الحل = ٣(٣) + ٤(٢) ١٧ = قرش وهي أقل تكلفة ممكنة للوجبة .

أسلوب السمبلكس
Simplex Method

بينا في الجزء السابق كيف تستخدم الطريقة البيانية في حل مشكلة البرمجة الخطية ، ولكن هناك قصورا واضحا في الطريقة البيانية وهو أنها لا تستخدم إلا في حالة وجود سلعتين فقط أو ثلاثة علي أكثر تقدير . ويرجع ذلك أساسا إلي صعوبة ، بل استحالة ، الرسم البياني عندما يزيد عدد المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها عن اثنين . وطالما أن معظم التطبيقات العلمية تتضمن عددا كبيرا من المتغيرات والقيود ، فإننا نحتاج إلي أسلوب آخر صمم خصيصا لذلك يعرف بأسلوب السمبلكس Simplex Method .

يقوم أسلوب السمبلكس ـ الذي قدمه دانتزج Dantzig الأمريكي في عام ١٩٤٧ ـ علي مجموعة من الخطوات الجبرية التي تؤدي إلي الوصول إلي الحل الأمثل ، في حالة وجود حل ، وذلك في عدة مراحل متتابعة ومحددة . ويتم تحقيق ذلك عن طريق تقييم النقط الركنية للمنطقة الممكنة في خطوات متتابعة تؤدي إلي الوصول إلي حلا أفضل في كل مرحلة ، وذلك إلي الحد الذي لا يمكن معه تحقيق تحسين في الحل . عندئذ نكون قد وصلنا إلي الحل الأمثل .

ويمكن تلخيص الخطوات التي تتضمنها طريقة السمبلكس في الخطوات الخمس التالية :

١ ـ ضع مشكلة البرمجة الخطية في الصيغة النمطية Standard form

٢ ـ اختار حل مبدئي ممكن وهو عبارة عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة Intial feasible solution .

٣ ـ تقييم امكانية تحسين الحل القائم Current solution

٤ ـ إذا كان التحسين ممكنا يتم عمل الخطوات التالية :

(أ) حدد المتغير الغير أساسي الغير موجود في الحل الحالي Nonbasic Variable الواجب إدخاله في الحل واعتباره متغيرا أساسيا .

(ب) حدد المتغير الأساسي Basic Variable الموجود في الحل الحالي والواجب خروجه من الحل ، واعتباره متغيرا غير أساسيا .

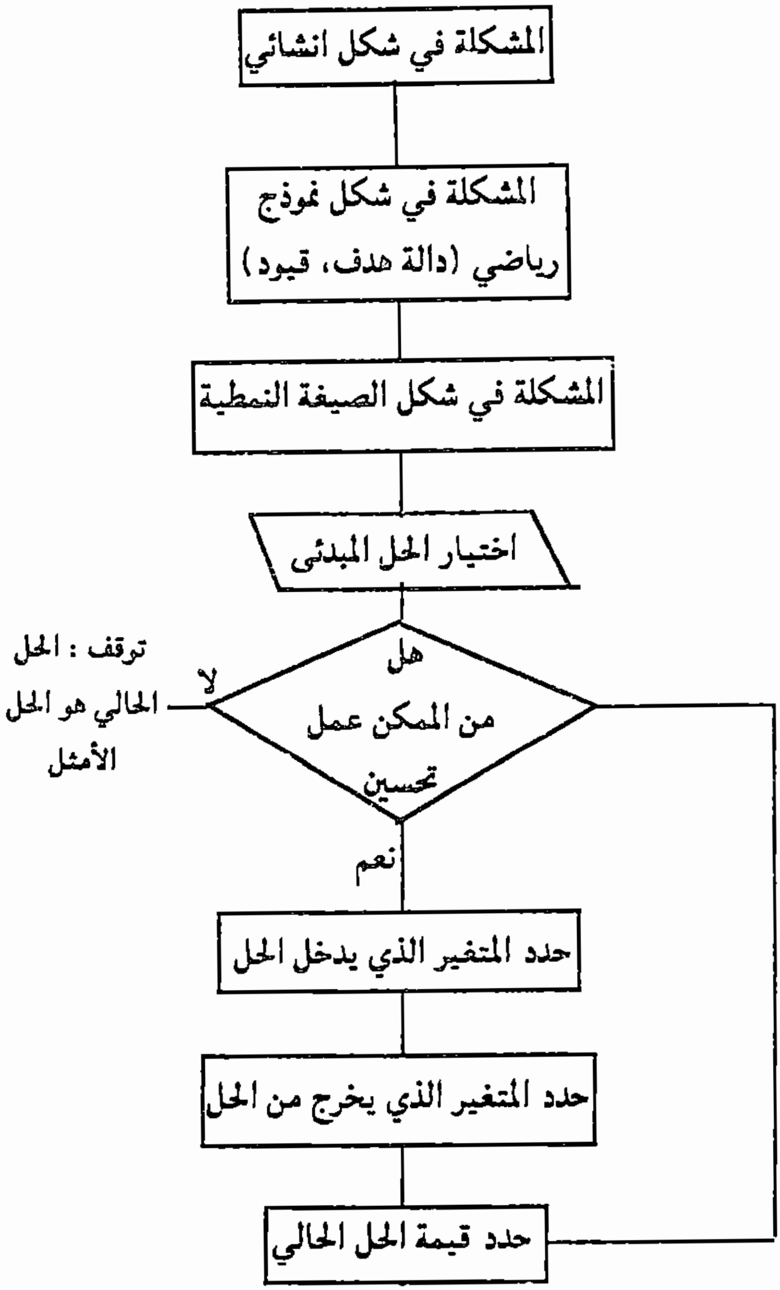
(جـ) حدد قيم المتغيرات الموجودة في الحل الجديد، وهو يعبر عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة، وكذلك حدد قيم المعاملات الجديدة في معادلات القيود .

(د) ارجع إلي الخطوة ٣ وكرر عملية التقييم .

٥ ـ إذا كان التحسين غير ممكنا فإن الحل الذي توصلت إليه يكون هو الحل الأمثل .

ويوضح الشكل (١ – ٧) العلاقة بين هذه الخطوات والتي سوف نبين كيفية القيام بها من خلال عرض المثال التالي :

(شكل ١ - ٧)


المشكلة في شكل انشائي
المشكلة في شكل نموذج رياضي (دالة هدف، قيود)
المشكلة في شكل الصيغة النمطية
اختيار الحل المبدئى
هل من الممكن عمل تحسين
لا
توقف : الحل الحالي هو الحل الأمثل
نعم
حدد المتغير الذي يدخل الحل
حدد المتغير الذي يخرج من الحل
حدد قيمة الحل الحالي

مثال (٢ ـ ١) استخدام أسلوب السمبلكس في حالة تعظيم الربح :

في المثال السابق الخاص بانتاج المكاتب $س_{١}$ ، والمقاعد $س_{٢}$ توصلنا إلي الصيغة الرياضية الآتية :

عظم ر = ١٠ $س_{١}$ + ٩$س_{٢}$

٥$س_{١}$ + ٤$س_{٢}$ ≥ ١٢٠ قيد المادة الخام (١)

٢$س_{١}$ + ٤$س_{١}$ ≥ ٦٠ قيد عدد ساعات التشغيل (٢)

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ≤ صفر فرض عدم السالبية

وعلي الرغم من أنه من الأيسر الأسلوب البياني هنا نظرا لأن عدد المتغيرات اثنين فقط إلا أننا سوف نوضح كيفية استخدام أسلوب السمبلكس باستخدام نفس المثال حتي يتثني لنا شرح المعني العلمي للخطوات الرياضية التي يقوم عليها أسلوب السمبلكس وذلك من خلال مقارنة الخطوات مع الطريقة البيانية .

الخطوة الأولي : وضع المشكلة في شكل الصيغة النمطية :

ويقصد بذلك تحويل متباينات القيود إلي معادلات ، ويعني ذلك استخدام (=) بدلا من (≥ أو ≤) في القيود . وبتأمل كل من القيدين (١) ، (٢) نجد أن إشارة ≥ تقتضي إضافة متغير جديد علي

يمين المتباينة . وحتي يتمشي ذلك مع معني المتباينة يجب أن تكون قيمة هذا المتغير مساوية للصفر أو أكبر من الصفر (شرط عدم السالبية) . فإذا كانت قيمة المتغير الجديد مساوية للصفر فيعني ذلك أن المتباينة أصبحت معادلة ، وهذا هو معني = في المتباينة .أما إذا كانت قيمة المتغير الجديد أكبر من الصفر فيعني ذلك أن الجانب الأيمن من المتباينة أقل من الجانب الأيسر وهذا هو معني < .

دعنا نتأمل معني ذلك بالنسبة للقيد الأول . بافتراض أن $ع_١$ هي المتغير الجديد فإن القيد الأول يكون :

$$٥س_١ + ٤س_٢ + ع_١ = ١٢٠$$

فإذا كانت $ع_١$ = صفر فإن ذلك يعني أن المادة الخام مستخدمة بالكامل . فالرقم المستخدم من الأخشاب لتصنيع الكراسي مضافا إليه الرقم المستخدم من الأخشاب في تصنيع الترابيزات يساوي تماما الحد الأقصي المتاح من الأخشاب وهو ١٢٠ وحدة . وعندما يكون المتغير $ع_١$ رقما موجبا فيعني ذلك أن الكمية الإجمالية المستخدمة من الأخشاب أقل من ١٢٠ وحدة . ولذلك وضعنا قيمة $ع_١$ موجبة ليكون لدينا معادلة . ويتضح من وصفنا أن قيمة $ع_١$ تعبر عن الكمية غير المستخدمة من الأخشاب ، ولذلك يطلق عليها بصفة عامة أرقام العطل Slack في مشكلة البرمجة الخطية .

وباستخدام نفس المفهوم سوف نقوم بإضافة $ع_٢$ في القيد الثاني

لتعبر عن عدد ساعات غير مستغلة ويصبح القيد هو :

$$٢س_١ + ٤س_٢ + ع_٢ = ٦٠$$

ونظرا لأن أسلوب السمبلكس يقوم علي أسلوب حل المعادلات الآنية : Simultaneous Linear Equations فإن ظهور متغير في أحد المعادلات يقتضي وجوده في المعادلات الآخري . وعلي ذلك فإن الصيغة النمطية Standard form للمشكلة تكون هي :

$$\text{عظم ر} = ١٠س_١ + ٩س_٢ + \text{صفر}ع_١ + \text{صفر}ع_٢$$

$$\text{في ظل}\quad ٥س_١ + ٤س_٢ + ع_١ + \text{صفر}ع_٢ = ١٢٠ \text{ ---> } (١)$$

$$٢س_١ + ٤س_٢ + \text{صفر}ع_١ + ع_٢ = ٦٠ \text{ ---> }$$

(٢)

$$س_١ ، س_٢ ، ع_١ ، ع_٢ \leq \text{صفر}$$

وذلك علي أساس أن معاملات كل من $ع_١$ ، $ع_٢$ هي صفر في دالة الهدف نظرا لأنها لا تؤدي إلي تحقيق أية أرباح . كما أن معامل $ع_١$ في القيد (٢) هو صفر ، ومعامل $ع_٢$ في القيد (١) هو صفر نظرا لعدم وجودهم أصلا في تلك القيود .

الخطوة الثانية : اختيار حلا مبدئيا ووضع جدول السمبلكس الأولي :

تقوم طريقة السمبلكس علي البدء بحلا مبدئيا Initial Solution وتحديد ربحه ، ثم محاولة تحسين هذا الحل إن أمكن . ولذلك يجب البدء بحلا مبدئيا لتلك المعادلات معا . وبالطبع سوف يكون هذا الحل هو نقطة ركنية في المنطقة الممكنة . فمعني أن هذا الحل يقع في نقطة ركنية أنه يحقق كل القيود معا ـ ومن الناحية النظرية يمكن اختيار أية نقطة ركنية ، ففي كلا الحالات سوف نصل إلي الحل الأمثل .

وبتأمل مشكل البرمجة الخطية ، فإننا نجد أن القيود ما هي إلا مجموعة من المعادلات ، وعدد المجاهيل بها في الغالب يكون أكثر من عدد المعادلات. ففي مثالنا هذا نجد أن عدد المتغيرات (المجاهيل) هو أربعة ـ بما فيها متغيرات العطل ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ـ بينما عدد المعادلات (القيود) هو اثنين فقط ، ومن الحقائق الرياضية أنه إذا كان عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات فإن مجموعة المعادلات معا سوف يكون لها أكثر من حل. ويطلق عليها مجموعة الحلول Solution set . ويتكون الحل الواحد من قيم للمتغيرات الأربعة وذلك بشرط أن يكون دائما عدد المتغيرات التي تأخذ قيمة الصفر هو معادلا لـ (عدد المتغيرات – عدد القيود) . ومعني ذلك أن عدد المتغيرات التي لها قيمة غير صفرية ، والتي يطلق عليها المتغيرات الأساسية Basic Variables أو المتغيرات التي يمكن الحل لها ، يعادل عدد القيود الموجودة وفي مثالنا الحالي يكون عدد المتغيرات الأساسية في الحل هو

اثنين فقط . أما المتغيرات التي تأخذ قيما صفرية في الحل فهي ما تعرف بالمتغيرات الغير أساسية Nonbasic Variables والتي يبلغ عددها في المثال اثنين ، وهو عبارة عن عدد المتغيرات مطروحا منه عدد القيود .

وبالرجوع إلي القاعدة العامة في حل المعادلات معا ، وهي محاولة eliminate إزالة أحد المتغيرات من المعادلات عن طريق ضرب أحد المعادلات في رقم وطرحها من باقي المعادلات ، وباستخدام أيضا قواعد جبر المصفوفات ، أمكن التوصل إلي طريقة لحل مجموعة من المعادلات معا عن طريق ما عرف بطريقة ازالة المتغيرات من المعادلات علي مراحل Successive elimination والمبسطة عن طريق أسلوب Gauss - Jordan method .

وتوضح الطريقة المشار إليها أن المتغيرات الأساسية سوف تظهر في مصفوفة الحل النهائي في شكل ما يسمي بمصفوفة الوحدة والتي تدل علي أن المتغيرات الخاصة بتلك الأعمدة الموجودة في مصفوفة الوحدة هي متغيرات مستقلة Linearly Independent ولذلك تعتبر متغيرات أساسية في الحل .

وإذا رجعنا إلي مثالنا نجد أن بيانات المعادلات (القيود) يمكن وضعها في مصفوفة يطلق عليها مصفوفة المعاملات تأخذ الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ١ & \text{صفر} \\ ٢ & ٤ & \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$$

ويظهر في هذه المصفوفة أن العمودين الثالث والرابع هما مصفوفة الوحدة Unit Matrix . ويعني ذلك مباشرة أن ع$_1$ ، ع$_2$ يمكن اعتبارهما متغيران أساسيان في حل السمبلكس المبدئى . وهذا يعني أن ع$_1$ ، ع$_2$ لهما قيم غير صفرية بينما باقي المتغيرات س$_2$ ، س$_1$ لهما قيم صفرية . وبالنظر إلي المعادلات وافتراض أن كل من س$_1$ ، س$_2$ = صفر نجد أن ع$_1$ = ١٢٠ ، ع$_2$ = ٦٠. وبالتالي فإن الحل المبدئى هو :

س$_1$ = صفر
س$_2$ = صفر
متغيرات غير أساسية

ع$_1$ = ١٢٠
ع$_2$ = ٦٠
متغيرات أساسية

ويجب هنا أن نعرف أنه لحسن الحظ بمجرد إضافة متغيرات العطل إلي المتباينات في حالة القيود ذات الإشارة ≥ فإن المعادلة سوف تضمن وجود متغيرات أساسية (في مصفوفة الوحدة) يمكن استخدامها في الوصول إلي الحل المبدئى . والآن يمكننا وضع هذه المعلومات فيما يسمي بجدول السمبلكس الأولي الموضح في الشكل التالي والذي يلاحظ عليه ما يلي :

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س$_{١}$	س$_{٢}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$
ح			١٠	٩	صفر	صفر
صفر	ع$_{١}$	١٢٠	٥	٤	١	صفر
صفر	ع$_{٢}$	٦٠	٢	٤	صفر	١
ل		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ح ـ ل			١٠	٩	صفر	صفر

١ ـ يتكون الجدول من جزء علي اليمين يتضمن معلومات عن المتغيرات الأساسية وجزءاً آخر علي اليسار يتكون من مصفوفة تعبر عن تفريغ لمعادلات القيود ودالة الهدف .

٢ ـ يبدأ الجدول بتفريغ للمتغيرات الأساسية التي توصلنا إليها في الحل المبدئى وهما ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ في هذا المثال . ثم يوضع علي يمين كل منها ربح الوحدة .وهو مجرد معامل الربح لكل من ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ في دالة الهدف ـ أما علي يسارها فيتم وضع قيم تلك المتغيرات في الحل المبدئي Initial Solution ، وهي ع$_{١}$ = ١٢٠، ع$_{٢}$ = ٦٠ تكون قيمة كل من س$_{١}$ ، س$_{٢}$ مساوية للصفر نظرا لأنها متغيرات غير أساسية عند هذه المرحلة .

وعمليا يعني هذا الحل عدم انتاج كل من س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، ولذلك فإن كل المادة الخام غير مستخدمة وكل الطاقة تعد معطلة، فكل من ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ تأخذ حدها الأقصي .

٣ ـ الجانب الأيسر من الجدول به أربعة أعمدة ، كل منها يمثل أحد المتغيرات . ولذلك نبدأ بتفريغ دالة الهدف في الصف ح ، ثم تفرغ القيود في الصفين الخاصين بالمتغيرين ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ فالصف الأول ما هو إلا معلومات القيد الأول التي تعبر عن قيد الأخشاب المتاحة ، أما الصف الثاني فهو عبارة عن قيد ساعات العمل المتاحة .

وبتأمل مصفوفة المعاملات نجد أن مصفوفة الوحدة تعبر عن المتغيرين ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$. ولذلك فإن المتغير الأساسي الذي يظهر في الجانب الأيمن من جدول السمبلكس المبدئى يتقاطع الصف الخاص به مع العمود الخاص بنفس المتغير عند القيمة واحد ، وتكون جميع القيم في ذات العمود معادلة للصفر . فالصف الخاص بالمتغير ع$_{١}$ يتقاطع مع عمود ع$_{١}$ عند الواحد الصحيح بينما تقاطع الصف الثاني مع صف ع$_{١}$ هو صفر . وذلك يعد صحيحا أيضا بالنسبة للمتغير ع$_{٢}$.

٤ ـ الصفين الأخير وقبل الأخير يعبران عن بعض العمليات الحسابية اللازمة الواجب القيام بها حتي يمكن القيام بالخطوة التالية ،

وهي اختبار مثالية الحل . أما الصف قبل الأخير والذي أطلق عليه ل فهو ناتج من عملية حسابية بسيطة هي ضرب ربح الوحدة من المتغيرات الأساسية في الأرقام المناظرة في مصفوفة المعاملات لكل عمود وجمعها ، ومثال ذلك الخانة الموجودة في الصف ل في عمود قيم المتغيرات الأساسية محسوبة كالآتي :

صفر × ١٢٠ + صفر × ٦٠ = صفر

ويمكن التوصل إلي نفس النتيجة باستخدام جبر المصفوفات

$$\begin{bmatrix}\text{صفر}\\ \text{صفر}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١٢٠ & ٦٠\end{bmatrix}=\text{صفر}$$

وكذلك فإن الخانة الثانية في الصف ل محسوبة كالآتي :

صفر × ٥ + صفر × ٢ = صفر

وباقي الخانات محسوبة كالآتي :

صفر × ٤ + صفر × ٤ = صفر

صفر × ١ + صفر × صفر = صفر

صفر × صفر + صفر × ١ = صفر

وبتأمل هذه الأرقام نجد أن الخانة الأولي تعبر عن ربح الحل . فعدم انتاج س$_{١}$ ، س$_{٢}$ سوف يجعل ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ أقصي ما يمكن والربح

المحقق منهم هو الصفر = صفر × ١٠ + صفر × ٩ + ١٢٠ × صفر + ٦٠ × صفر .

٥ ـ الصف الآخير في الجدول هو ناتج عن طرح القيمة الموجودة في الصف ل من ربح الوحدة لكل عمود والموجودة في أعلي الجدول . فالخانة الأولي هي (١٠ - صفر) والثانية هي (٩ - صفر) وهكذا . وبصفة عامة نجد أن القيم الخاصة بالمتغيرات الأساسية في هذا الصف قيما صفرية . ويرجع ذلك إلي أن أعمدة هذه المتغيرات هي التي تكون مصفوفة الوحدة وبالتالي فالعمود به قيمة واحدة مرة واحدة وباقي القيم صفر ، ونظرا لأن هذا الواحد موجود في صف نفس المتغير فإن ح = ل دائما لكل عمود من تلك الأعمدة .

الخطوة الثالثة : اختيار مثالية الحل :

ويتم في هذه الخطوة القيام باختبار بسيط يتم منه معرفة ما إذا كنا قد وصلنا إلي الحل الأمثل أم لا . وقبل ذكر هذا الاختيار يجب أن نتفهم أولا معني الصفين الأخيرين في جدول السمبلكس المبدئى . بالنظر إلي كيفية حساب الصف قبل الآخير نجد أنه يعبر عن الربح الذي سوف تتم التضحية به مقابل زيادة الوحدة من المتغير الموجود في كل عمود .

فبالنسبة للعمود الأول والخاص بالمتغير $س_١$ نجد أن رقم ٥ يعبر عن عدد الوحدات التي سوف تنقص بها $ع_١$ (الأخشاب غير

المستخدمة) عند انتاج وحدة واحدة من $س_1$. كذلك فإن رقم ٢ في ذات العمود يعبر عن عدد الوحدات التي سوف تنقص بها $ع_2$ (الطاقة المعطلة) عند انتاج وحدة واحدة من $س_1$. وطالما أن ربح الوحدة من $ع_1$ (الأخشاب غير المستخدمة) ، $ع_2$ (الطاقة العاطلة) هو صفر ، فإن مقدار الربح الذي يتم التضحية به في حالة انتاج وحدة من $س_1$ هو صفر × ٥ + صفر × ٢ = صفر . وهو ذات الرقم الموجود في الخانة الثانية من الصف قبل الآخير. كذلك يمكن بيان أن الربح الذي سوف يتم التضحية به نتيجة لإنتاج وحدة واحدة من السلعة الثانية $س_2$ هو صفر × ٤ + صفر × ٤ = صفر وهكذا .

والآن يمكننا تفهم معني الصف الآخير ح – ل . فقيم ح هي الربح المتوقـــع من انتاج وحدة واحدة من $س_1$ ، $س_2$. وعلي ذلك فإن ح – ل بالنسبة للعمود الأول $س_1$ تعني الفارق بين الربح الذي سوف يتحقق والربح الذي سوف يتم التضحية به عند انتاج وحدة واحدة من السلعة $س_1$. وهو في هذه الحالة رقما موجبا قدره عشرة جنيهات، ويطلق عليه الأثر الصافي (ح-ل) المترتب علي زيادة انتاج وحدة من السلعة الأولي .وكذلك فإن الفارق بين لربح الذي سوف يتحقق والربح الذي سوف تتم التضحية به عند انتاج وحدة واحدة من السلعة $س_2$ هو تسعة جنيهات ويطلق عليه الأثر الصافي المترتب علي زيادة انتاج وحدة من السلعة الثانية . ولذلك يمكننا الآن ذكر القاعدة التي هي محور الاختبار الذي يستخدم في هذه الحالة :

في حالة تعظيم الربح :

إذا كانت كل القيم الموجودة في الصف الآخير ح - ل هي قيما صفرية أو سالبة فإن الحل الموجود يكون هو الحل الأمثل Optimal Solution ، أما إذا كانت واحدة أو أكثر من تلك القيم ذات قيمة موجبة فإن الحل لا يعد حلا أمثل .

في حالة تقليل التكاليف :

إذا كانت كل القيم الموجودة في الصف الأخير ح - ل هي قيما صفرية أو موجبة فإن الحل الموجود يكون هو الحل الأمثل ، أما إذا كانت واحدة أو أكثر من تلك القيم ذات قيم سالبة فإن الحل لا يعد حلا أمثل .

ويتطبيق هذه القاعدة علي المثال الحالي نجد أن هناك قيما موجبة في الصف الأخير ، ويعني ذلك أن الحل الحالي ليس هو الحل الأمثل ، ومعني ذلك أن أى تغيير في قيم كل من $س_١$ ، $س_٢$ يترتب عليه زيادة الأرباح ، ولذلك فإن الخطوة التالية هي البحث عن حلا أفضل .

الخطوة الرابعة : البحث عن حلا أفضل :

الحل الحالي الذي بين أيدينا هو $س_١$ = صفر، $س_٢$ = صفر ، $ع_١$ = ١٢٠ ، $ع_٢$ = ٦٠ ، وطالما أننا قد توصلنا في الخطوة السابقة

إلي ضرورة البحث عن حلا أفضل فإننا سوف نغير الحل الموجود أمامنا الآن . وطالما أن عدد المعادلات كما هو اثنين فإن عدد المتغيرات الأساسية ذات القيم سوف يظل دائما اثنين .. وبناء علي ذلك فإننا إذا حاولنا إدخال متغيرا غير أساسي Non-basic Variable في الحل ليصبح متغيرا أساسيا فإن أحد المتغيرات الأساسية يجب أن يصبح متغيرا غير أساسيا قيمته صفر ونطلق عليه .أنه المتغير الذي يترك الحل وعلى ذلك إن تعديل الحل لحالي يتطلب القيام بالخطوات الثلاث التالية :

أولا : تحديد المتغير الذي يدخل الحل .. بمقارنة القيم الموجودة في الصف الأخير في صف السمبلكس المبدئي بعضها ببعض نجد أن المتغير $س_١$ في العمود الأول يحظي بأكبر القيم .ويعني ذلك أن إدخال السلعة $س_١$ في الحل سوف يترتب عليه تحقيق أرباح أعلي مما لو تم إدخال المتغير $س_٢$ ولذلك فالقرار الآن هو اعتبار $س_١$ متغيرا أساسيا في الحل له قيمة بعد أن كان متغيرا غير أساسيا قيمته صفر . (ويتم التعبير عن ذلك بالسهم الذي يشير إلي أعلي في أسفل عمود المتغير $س_١$).

ثانيا : تحديد المتغير الذي سوف يترك الحل .. طالما أن المراد هو انتاج $س_١$ فإننا سوف نحاول تحديد أقصي رقم ممكن انتاجه من $س_١$ بفرض أنها هي الوحيدة ـ مع $ع_٢$ ـ الموجودة في الحل . بتأمل الصف الأول نجد أن أقصي قيمة يمكن انتاجها من $س_١$ حسب قيد الأخشاب هي ١٢٠ ÷ ٥ = ٢٤ وحدة . كذلك فإن الصف الثاني يوضح أن

أقصي قيمة يمكن انتاجها من $س_٢$ حسب قيد الطاقة هي ٦٠ ÷ ٢ = ٣٠ وحدة ، وذلك علي أساس أن ٥ ، ٢ في عمود $س_١$ هي عدد الوحدات من الأخشاب والطاقة اللازمة لانتاج وحدة واحدة من $س_١$.

وطالما أن الحد الأقصي الممكن انتاجه عمليا يجب أن يحقق كلا من قيود الأخشاب والطاقة معا فإن أقصي قيمة للمتغير $س_١$ هي أقل القيمتين المحسوبتين فيما سبق ، وهما ٢٤ ، ٣٠ . أى أن القيمة هي ٢٤ والتي جاءت من عملية القسمة الأولي . ويعني ذلك أن كمية الأخشاب الغير مستخدمة سوف تستخدم بالكامل لإنتاج ٢٤ وحدة (٢٤ × ٥ = ١٢٠) . ويعني ذلك رياضيا أن $ع_١$ (الكمية غير المستخدمة) سوف تصبح صفرا ، أى تصبح متغيرا غير أساسيا ، أى تترك الحل .

وحتي نضع ذلك في شكل خطوة محددة نقول :

« اقسم قيم المتغيرات الأساسية في كل صف علي المعاملات المناظرة الموجبة الموجودة في عمود المتغير الذي سوف يترك الحل - المتغير الموجود في الصف ذو ناتج القسمة الأقل يكون هو المتغيرالذي يترك الحل . » .

وتطبيق ذلك اجرائيا هو :

صف $ع_٢$ ٦٠ ÷ ٢ = ٣٠
صف $ع_١$ ١٢٠ ÷ ٥ = ٢٤

∴ $ع_١$ تترك الحل .

(ويتم التعبير عن ذلك بالسهم الأفقي الذي يشير إلي اليسار في صف المتغير ع$_{١}$) .

ثالثا : عمل جدول السمبلكس التالي ... يوجد بالحل الجديد متغيرين أساسين هما س$_{١}$ ، ع$_{٢}$ (التي لم تتغير) ومتغيرين غير أساسين هما س$_{٢}$ ، ع$_{١}$ (التي خرجت من الحل) . ولذلك نقوم بتعديل ذلك في جدول السمبلكس كما يلي :

ربح الوحدة ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س$_{١}$	س$_{٢}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$
١٠	س$_{١}$					
صفر	ع$_{٢}$					
ل						
ح ـ ل						

وحتي نقوم بملأ بقية الخانات في الصفين الأول والثاني يجب أن نعرف الآن ما يسمي بالصف المحور Pivot row وهو الصف الموجود في جدول السمبلكس السابق (المبدئى في هذه الحالة) الخاص بالمتغير الذي سوف يترك الحل . وفي هذه الحالة هو الصف الأول ، صف المتغير ع$_{١}$. وكذلك العمود المحور Pivot column في ذات الجدول

وهو العمود الخاص بالمتغير الذي سوف يدخل الحل . وهو عمود المتغير $س_١$. ومن هـذا التحديد يمكن أن نعرف ما يسمي بالرقم المحور وهو الرقم الذي يقع في تقاطع الصف المحور والعمود المحور في جدول السمبلكس السابق (المبدئى في هذه الحالة) . وفي مثالنا الحالي يكون الرقم هو (٥) .

ولتحديد القيم الواجب وضعها في جدول السمبلكس الجديد في الصف المناظر للصف المحور ، أى الصف الأول الخاص بالمتغير $س_١$ ، فإن كل القيم المناظرة في الصف المحور في الجدول القديم يتم قسمتها علي الرقم المحور . وسوف يضمن ذلك أن القيمة المناظرة للرقم المحور في الجدول القديم سوف يصبح قيمتها واحد في الجدول الجديد . وهذا هو بداية تكوين مصفوفة الوحدة في الجدول الجديد . ويوضح الجدول الجزئى التالي تلك القيم الجديدة في الصف الأول من الجدول الجديد .

المتغيرات الأساسية	القيم	$س_١$	$س_٢$	$ع_١$	$ع_٢$
$س_١$	٢٤	١	$\frac{٤}{٥}$	$\frac{١}{٥}$	صفر

ويجب ألا يغيب عن بالنا أن هذه أصلا معادلة وأن قسمة طرفي المعادلة علي رقم ثابت لا يؤثر إطلاقا علي علاقاتها الرياضية أو تأثيرها كقيد في مشكلة البرمجة الخطية .

ولتحديد القيم الواجب وضعها في جدول السمبلكس الجديد في الصفوف الأخري ـ غير الصف المناظر مع الدمج للصف المحور ـ نقوم

بعمل بعض الخطوات الحسابية التي تهدف إلي استكمال مصفوفة الوحدة في جدول السمبلكس الجديد وذلك باستخدام الصف الجديد في الجدول في إزالة بعض المتغيرات من باقي الصفوف التي سوف يتم نقلها .

وتطبيق ذلك إجرائيا يمكن أن يتم عن طريق العمليات الحسابية التالية :

[القيم الموجودة في الصف المراد نقله إلي الجدول الجديد] — [القيم الموجودة في الصف الخاص بالمتغير الجديد الأساسي في الجدول الجديد] × [الرقم الخاص بالصف في العمود المحور] = القيم في الصف الجديد

وبتطبيق ذلك علي صف المتغير ع$_{٢}$ تحسب القيم الجديدة في الجدول الجديد علي النحو التالي :

٦٠ – ٢ × (٢٤) = ١٢

٢ – ٢ × (١) = صفر

٤ – ٢ × ($\frac{٤}{٥}$) = $\frac{١٢}{٥}$

صفر – ٢ × ($\frac{١}{٥}$) = –$\frac{٢}{٥}$

صفر – ٢ × ($\frac{١}{٥}$) = –$\frac{٢}{٥}$

ويوضح هذ المعلومات ، بالإضافة إلي معلومات صف المتغير س$_{١}$ في الجدول نصل إلي الجدول التالي

جدول السمبلكس رقم (٢)

ربح الوحدة ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_١$	$س_٢$	$ع_١$	$ع_٢$
١٠	$س_١$	٢٤	١	$\frac{٤}{٥}$	$\frac{١}{٥}$	صفر
صفر	$ع_٢$	١٢	صفر	$\frac{١٢}{٥}$	$-\frac{٢}{٥}$	١
ل		٢٤٠	١٠	٨	٢	صفر
ح ـ ل			صفر	١	٢-	صفر

ويتم أيضا استكمال الصفين ل ، ح - ل كما فعلنا في الجدول السابق . ومن هذا الجدول يتضح أن الحل هو :

$س_١ = ٢٤$
$ع_١ = ١٢$ } متغيرات أساسية

$ع_١ =$ صفر
$س_٢ =$ صفر } متغيرات غير أساسية

وأن ربح الحل هو ٢٤٠ = ١٠ × ٢٤ + صفر × ١٢ والذي يظهر في الخانة الأولي من الصف ل ، والذي هو أكثر من ربح الحل السابق . ويعني ذلك أن الحل الجديد هو أفضل من الحل السابق عليه.

ويهمنا هنا قبل الانتقال إلي الخطوة الرابعة أن نوضح المعني وراء بعض الأرقام الواردة في جدول السمبلكس الثاني ، ففي المشكلة الأصلية حسب جدول السمبلكس المبدئى كان انتاج وحدة من السلعة $س_{١}$ يستلزم ٥ وحدات من الأخشاب ، ووجدتين من الطاقة . وكانت هذه القيم هي القيم الواردة في عمود المتغير $س_{١}$ ، أما الآن في جدول السمبلكس الثاني فإن معاملات $س_{١}$ في العمود الأول هي ١ ، صفر . كذلك فإن معاملات المتغير $س_{٢}$ في الجدول الأول كانت ٤ ، ٤ أما الآن فهي ٤/٥ ، ١٢/٥ . فهل ذلك يعني عدم صحة الشرح الذى تم مسبقا للمنطق وراء العمليات الحسابية ؟ الإجابة هي النفي القاطع ولنري الآن لماذا .

إن القيمة ٥ الواردة في الجدول الأول يمكن أن يطلق عليها معدل الإحلال الحدي بين المتغير $س_{١}$ ، $ع_{١}$ فانتاج وحدة من $س_{١}$ يعني تخفيض $ع_{١}$ بخمسة وحدات كما ذكرنا من قبل. كذلك فإن القيمة ٢ الواردة في الجدول الأول هي معدل الإحلال الحدي Marginal rate of substituation بين المتغير $س_{١}$ ، $ع_{٢}$. فانتاج وحدة من $س_{١}$ يعني تخفيض $ع_{٢}$ بوحدتين . وبتطبيق نفس المفهوم في الجدول الثاني نجد أن تغيير المتغيرات الأساسية يقضي تغيير معدلات الإحلال. وهو ما حدث فعلا فالقيمة الموجودة في عمود $س_{١}$ تعبر عن أن معدل الأحلال الحدي بين $س_{١}$ ، $س_{١}$ هو واحد وذلك أمر منطقيا . فنظرا لأننا في هذه المرحلة ننتج أقصي عدد ممكن من السلعة $س_{١}$ (حسب القيدين معا) فإن زيادة إنتاج السلعة $س_{١}$ بوحدة لابد أن يكون عن طريق التضحية بوحدة من

الوحدات التي تم انتاجها من $س_{١}$. فوحدة من $س_{١}$ تعادل وحدة واحدة من $س_{١}$ لا أكثر ولا أقل . كذلك فإن القيمة صفر في الصف $ع_{٢}$ تعني أنه في هذه المرحلة لا يمكن زيادة انتاج $س_{١}$ باستخدام وحدات اضافية من $ع_{٢}$. ويرجع ذلك قطعا إلي أن رقم ٢٤ الوارد في الحل هو أقصي رقم يمكن انتاجه من $س_{١}$ حسب القيدين معا .

ونستطيع الآن شرح معني $\frac{٤}{٥}$ الواردة في عمود $س_{٢}$ صف $س_{١}$. فحيث أن انتاج ٢٤ وحدة من $س_{١}$ سوف يستلزم كل المادة الخام (٢٤ × ٥ = ١٢٠) فإن أى إنتاج للسلعة $س_{٢}$ سوف يكون علي حساب السلعة $س_{١}$. ومعني $\frac{٤}{٥}$ هو أن إنتاج وحدة واحدة من السلعة $س_{٢}$ يعني التضحية بـ $\frac{٤}{٥}$ وحدة من $س_{١}$ والسبب في ذلك هو أن البيانات في هذه المرحلة توضح أن المادة الخام (الأخشاب) هي القيد المحدد Critical constraint نظرا لعدم وجود أخشاب غير مستخدمة ($ع_{١}$ = صفر) . وبيانات القيد الأول تنص علي أن وحدة من $س_{١}$ تستلزم ٥ وحدات من الأخشاب وأن وحدة من $س_{٢}$ تستلزم ٤ وحدات من الأخشاب . وعلي ذلك ، فإن التضحية بأربعة وحدات من الأخشاب لانتاج وحدة واحدة من $س_{٢}$ يقتضي التضحية بما يعادل $\frac{٤}{٥}$ وحدة من السلعة $س_{١}$.

ماذا عن المعامل $\frac{١٢}{٥}$ الوارد في العمود $س_{٢}$ ؟ أنه أيضا عدد الوحدات الواجب التضحية بها من $ع_{٢}$ لانتاج كما أوضحنا مسبقا $\frac{٤}{٥}$

وحدة من س$_١$. ويعني ذلك توفير ساعات عمل قدرها $\frac{٤}{٥}$ × ٤ = $\frac{٨}{٥}$ ساعة نظرا لأن الوحدة الواحدة تستلزم أربعة ساعات كاملة . ونظرا لأن انتاج وحدة من س$_٢$ يستلزم أيضا ٤ ساعات كاملة فإن الأثر النهائى لانتاج وحدة من س$_٢$ علي ع$_٢$ هو التضحية بـ (٤ - $\frac{٨}{٥}$) = $\frac{١٢}{٥}$ ساعة .

وبنفس المنطق فإن زيادة الخشب غير المستخدم ع$_١$ بوحدة سوف يترتب عليه تخفيض المنتج من س$_١$ بخمس وحدة حيث أن الوحدة يلزمها خمسة وحدات خشب . أما زيادة ع$_١$ بوحدة فسوف تستلزم تخفيض انتاج س$_١$ بخمس وحدة وذلك يتسبب في زيادة ع$_٢$ (الوقت غير المستخدم) بما يعادل $\frac{١}{٥}$ × ٢ = $\frac{٢}{٥}$ نظرا لأن الوحدة من س$_١$ تستلزم وحدتين من ع$_٢$. ويجب هنا أن نلاحظ أن الإشارة السالبة للقيمة $\frac{٢}{٥}$ تعني أن زيادة ع$_١$ في هذه المرحلة سوف يترتب عليها زيادة ع$_٢$ بينما أن الإشارة الموجبة في المعامل تعني النقص في المتغير الموجود في الصف . والقاعدة هنا أنه إذا كنت إشارة معامل الإحلال موجبة فيعني ذلك أن العلاقة بين المتغير الموجود في الصف والمتغير الموجود في العمود علاقة عكسية أما إذا كانت الإشارة سالبة فيعني ذلك أن العلاقة بينهما علاقة طردية .

رابعا : **اختبار مثالية الحل** .. بتأمل القيم الواردة في الصفالأخير من جدول السمبلكس رقم (٢) يتضح أن به رقما موجبا ويعني ذلك أن الحل الموجود ليس هو الحل الأمثل . ولذلك نقوم بتكرار نفس الخطوات السابقة والتي تقوم علي الاجراءات التالية :

١ ـ ادخال المتغير $س_٢$ في الحل .

٢ ـ لتحديد المتغير الذي يترك الحل نقوم بالآتي :

$٢٤ \div \frac{٤}{٥} = ٣٠$ وحدة

$١٢ \div \frac{١٢}{٥} = ٥$ وحدة

$ع_٢$ يجب أن يترك الحل

وبناء علي ذلك فإن عمود $س_٢$ هو العمود المحور ، صف $ع_٢$ هو الصف المحور ، $\frac{١٢}{٥}$ هو الرقم المحور .

٣ ـ يتم نقل الصف $ع_٢$ أولا إلي الجدول الجديد وذلك بقسمة كل القيم علي الرقم المحور ووضعها في الصف المناظر $س_٢$.

جدول السمبلكس رقم (٣)

ربح الوحدة ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	$س_١$	$س_٢$	$ع_١$	$ع_٢$
١٠	$س_١$	٢٠	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	$س_٢$	٥	صفر	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٥	١٠	٩	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح ـ ل			صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

أما قيم الصف س١ في الجدول الثالث فتم تحديدها علي النحوالتالي :

$$(٢٤) - (٥) \times (\frac{٤}{٥}) = ٢٠$$

$$(١) - (\text{صفر}) \times (\frac{٤}{٥}) = ١$$

$$(\frac{٤}{٥}) - (١) \times (\frac{٤}{٥}) = \text{صفر}$$

$$(\frac{١}{٥}) - = (\frac{٢}{١٢}-) \times (\frac{٤}{٥}) = \frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$$

$$(\text{صفر}) - (\frac{٥}{١٢}) \times (\frac{٤}{٥}) = - \frac{١٤}{١٢} = - \frac{١}{٣}$$

ويتضح من الجدول الثالث أن الحل هو :

س١ = ٢٠
س٢ = ٥
متغيرات أساسية

ع١ = صفر
ع٢ = صفر
متغيرات غير أساسية

وأن ربح الحل هو ٢٤٥ .

وحيث أن كل القيم في الصف الأخير صفرية أو سالبة ، فإن ذلك يعني أن هذا الحل هو الحل الأمثل والذي يقضي بأن تقوم الشركة بانتاج عشرون مكتبا وخمسة مقاعد فقط . وذلك يحقق أقصي ربح ممكن وهو ٢٤٥ جنيها .

أسعار الظل :

حتي نتفهم أكثر معني باقي القيم الموجودة في الصف الأخير في جدول الحل الأمثل دعنا نأخذ جزءا من الجدول كما يلى :

جدول سبملكس جزئي

ربح الوحدة ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س$_١$	س$_٢$	ع$_١$	ع$_٢$
١٠	س$_١$	٢٠			$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$
٩	س$_٢$	٥			$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٥			$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح ـ ل			صفر	صفر	$\frac{-١١}{٦}$	$\frac{-٥}{١٢}$

ويتضح منه أن المتغيرات الأساسية س$_١$، س$_٢$ يكون معاملها صفر في الصف ح – ل كما أنه محاولة زيادة ع$_١$ بوحدة واحدة سوف يترتب عليها تخفيض الربح الإجمالي بما يعادل $\frac{١١}{٦}$ جنية وزيادة ع$_٢$ بوحدة واحدة سوف يترتب عليه تخفيض الربح الإجمالي بما يعادل $\frac{٥}{١٢}$ جنيه . ويمكن إثبات ذلك بمحاولة تتبع أثر زيادة ع$_١$ بوحدة واحدة . فحسب المعاملات الموجودة في العمود ع$_١$ سوف يترتب علي ذلك تخفيض س$_١$ بمقدار ثلث وحدة وزيادة س$_٢$ بمقدار $\frac{١}{٦}$ وحدة

ويعني ذلك أن

$$س_1 = ٢٠ - \frac{١}{٣} = ١٩ \frac{٢}{٣}$$

$$س_2 = ٥ - \frac{١}{٦} = ٥ \frac{١}{٦}$$

ويكون الربح من $س_1 = ١٩\frac{٢}{٣} \times ١٠ = ١٩٦\frac{٤}{٦}$

والربح من $س_2 = ٥\frac{١}{٦} \times ٩ = ٤٦\frac{٣}{٦}$

ومجموع الربح الجديد هو $٢٣٤\frac{١}{٦}$

والذى هو أقل من الربح الأمثل بمقدار $\frac{١١}{٦}$

وعن طريق تتبع أثر زيادة $ع_2$ بوحدة واحدة يمكن أيضاً بيان أن الأثر هو تخفيض الربح الأجمالي بمقدار $\frac{٥}{١٢}$ جنيـه .

ويجب الإشارة هنا إلي أنه يمكن استخدام بيانات الصف الأخير لمعرفة أثر تخفيض (وليس زيادة)كل من $ع_1$ ، $ع_2$ علي الربح الأمثل. فبنفس المنطق سوف نجد أن تخفيض $ع_1$ بمقدار وحدة واحدة (لاحظ أن ذلك يعني زيادة المستخدم من الأخشاب بوحدة واحدة) سوف يرفع الأرباح المحققة بما قدره $\frac{١١}{٦}$ ، كما أن تخفيض ع٢ بمقدار وحدة واحدة (لاحظ أن ذلك يعني زيادة المستخدم من الطاقة بوحدة واحدة) سوف يرفع الأرباح المحققة بما قدره $\frac{٥}{١٢}$ جنيه . والترجمة الاقتصادية لذلك هو أن المنشأة سوف تكون مستعدة أن تزيد المتاح من الأخشاب بوحدة واحدة طالما أن ثمن الوحدة المعروض لا يزيد علي الزيادة المتوقعة فى الربح نتيجة زيادة الأخشاب بوحدة . ولذلك يطلق علي $\frac{١١}{٦}$

الموجودة في الصف الأخير لفظ سعر الظل Shadow Price لعنصر الأخشاب أي أنه أقصي سعر يمكن أن يدفع في وحدة اضافية من الأخشاب . حيث أن الربح المحقق من ذلك لا يزيد عن $\frac{١١}{٦}$.

وبنفس المنطق تعد $\frac{٥}{١٢}$ هي أقصى ثمن ممكن أن يدفع لوحدة واحدة من الطاقة ، نظراً لأن إضافة وحدة واحدة سوف لا يزيد الربح بمقدار أعلي من $\frac{٥}{١٢}$ جنيه .ولذلك يطلق عليها الظل Shadow Price لعنصر ساعات العمل .

وعن طريق مقارنه أسعار الظل لكل من الأخشاب وساعات التشغيل يمكن تحديد أولويات الإنفاق . فمن الواضح أن زيادة المتاح من الأخشاب عند هذه المرحلة هو الذي يرفع من الربح بقدر أعلي من زيادة ساعات العمل . ويوضح ذلك لمتخذي القرار أن عملية زيادة المخصص لجميع الموارد في الميزانية بنفس النسبة قرار قد لا يكون فى جميع الحالات هو الأمثل .

ولأسعار الظل استخداماً آخر في حالة تخفيض الميزانيات والموارد . ففي مثالنا هذا إذا كان هناك ضغطاً في الميزانية يقتضي تقليل المادة الخام أو العمالة (يعنى ذلك زيادة $ع_١$،$ع_٢$) فإن الأرقام فى الصف الأخير تقتضى أن يتم تخفيض العمالة (ساعات العمل) أولاً لأن التخفيض بوحدة سوف يقلل الربح بمقدار $\frac{٥}{١٢}$ فقط . أما تخفيض المادة الخام بوحدة فسوف يترتب عليه تقليل الأرباح بمقدار $\frac{١١}{٦}$ جنيه

وهناك قاعدتين هامتين يجب أخذهما فى الحسبان بالنسبة لقيم أسعار الظل :

١ ـ إذا كان متغير العطل ع ضمن المتغيرات الأساسية فى الحل في الجدول النهائى فإن سعر الظل لهذا المتغير لابد وأن يكون صفراً . ويرجع ذلك إلي أن وجود قيمة موجبة للمتغير ع تدل علي وجود فائض Slack من هذا المورد . وبالتالى ليس هناك داعى لشراء أية وحدة إضافية منه فى هذه المرحلة . ويعني ذلك أن قيمة الوحدة الإضافية للمنشأة هى صفر .

٢ - عندما يكون متيغر العطل ع ضمن المتغيرات الغير أساسية في الحل في الجدول النهائى فإن قيمته تساوي صفر وسعر الظل له يكون رقماً موجباً معبراً عنه برقماً سالباً مساويا له فى الصف الأخير . ويرجع ذلك إلى أنه قد تم استخدام هذا العنصر تماماً وأصبح هو العامل الحاكم في رقم الإنتاج وأى زيادة فيه يترتب عليها زيادة الإنتاج وتحقيق أرباح أعلى .

حالات أخرى لأسلوب السمبلكس

في الجزد السابق عرضنا لاستخدام أسلوب السمبلكس في حالة تعظيم الربح وعندما تكون القيود جميعها في صورة ≥ وسوف نعرض فى هذا الجزء الحالات الأخري العديدة التى يمكن معها استخدام نفس الأسلوب مع تعديل طفيف .

أولاً : حالة تقليل التكاليف :

هناك العديد من المشروعات التي لا تتحكم فى أسعار بيع المنتجات ، كما أن هناك العديد من المنشآت التي تقوم بتقديم خدمات لا تهدف من وراءها إلي تحقيق الأرباح ، وفى مثل هذه الحالات يكون الهدف هو تقليل التكاليف إلي أقل حد ممكن .

فبافتراض أن دالة الهدف هى :

$$\text{قلل ت} = ٢\text{س}_{١} + ٣\text{س}_{٢}$$

حيث أن ت هى إجمالي تكاليف إنتاج من السلعيتن المراد تقليلها إلي أقل حد ممكن . والجزء الأول من الطرف الأيسر يعبر عن إجمالى تكلفة إنتاج $\text{س}_{١}$ من السلعة الأولى عندما تكون تكلفة إنتاج الوحدة من السلعة الأولى هى ٢ جنيه . كما أن $٣\text{س}_{٢}$ هي أجمالى تكلفة $\text{س}_{٢}$ من السلعة الثانية .

وهناك طريقتين يمكن استخدامهم لمعالجة مثل هذه الحالة :

الطريقة الأولى : حول مشكلة البرمجة الخطية إلى مشكلة تعظيم ربح وهذه يمكن إجراءها عن طريق ضرب طرفي المعادلة في -١ فتكون دالة الهدف هى :

عظم ت = ـ ت = -٢س$_{١}$ = ٣س$_{٢}$

فإذا قمت بتعظيم القيمة السالبة للتكلفة ت ، فإنك تلقائيا سوف ترفع هذه القيمة مروراً بالقيم السالبة إلى رقم قريب من الصفر هو أكبر قيمة سالبة للحل . وهي (-ت*) كما فى الشكل :

أرقام سالبة (- ت*) صفر أرقام موجبة

وبتأمل ذلك نجد أن القيمة الموجبة للمتغير ت (إجمالى التكلفة) قد تم تخفيضها تلقائياً مروراً بالقيم الموجبة إلى رقم قريب من الصفر هو أقل قيمة للحل . وهي (ت*) كما فى الشكل :

أرقام سالبة صفر ب* أرقام موجبة

وبأختصار فإن تقليل ت يعنى تماماً تعظيم قيمتها السالبة (-ت) . كما أن باقي خطوات الحل سوف تستمر كما في المثال السابق في حالة التعظيم .

الطريقة الثانية: استخدام دالة الهدف كما هى، مع مراعاة ما يلي

١ ـ في خطوة السمبلكس الأولي .. كما هي .

٢ـ في خطوة السمبلكس الثانية .. كما هي .

٣ـ في خطوة اختبار مثالية الحل يجب استخدام القاعدة التى تم ذكرها سابقاً وهي :

« إذا كانت كل القيم الموجودة في الصف الأخير ح - ل هى قيما صفرية أو موجبة فإن الحل الموجود يكون هو الحل الأمثل ، أما إذا كانت واحدة أو أكثر من تلك القيم ذات قيمة سالبة فإن الحل لا يعد حلاً أمثل » .

ويرجع ذلك إلي أنه في حالة تقليل التكاليف تعنى الأرقام المسحوبة فى الصف قبل الأخير ل قيماً تعبر عن الوفر فى التكلفة المترتبة على إنتاج وحدة من السلعة (وذلك بتقليل تكاليف العطل) أما الصف الأخير فيعبر عن الزيادة الصافية المتوقعة فى التكلفة نتيجة إنتاج وحدة من السلعة . ،وذلك يعنى أن القيمة الموجبة تعني أن أى تغيير يترتب عليه ارتفاع التكلفة . أما وجود قيمة سالبة في الصف الأخير فيعني أن التغير يترتب عليه تقليل فى التكالف .

٤ - في خطوة تحسين الحل ، وبالذات عن اختيار المتغير الذي يدخل الحل ، أى الذي سوف يصبح متغيراً أساسيا ، أختر المتغير ذو الرقم السالب الأعلى فى الصف الأخير . أما باقى أجزاء الخطوة الرابعة فهي كما هي .

ثانياً : حالة قيود أكبر من أو يساوى

افرض أن هناك قيد في البرمجة الخطية مثل :

$$٢س_١ + ٣س_٢ + س_٣ \geq ١٠$$

يمكننا تحويل هذه المتباينة إلي معادلة عن طريق طرح قيمة من

الجانب الأيمن سوف نطلق عليها الفائض Surblus . وهى ذات قيمة صفرية أو موجبة حيث أن ذلك يفي بحالتى > أو = في المتباينة . ولذلك يكون لدينا المعادلة .

$$٢س_١ + ٣س_٢ + س_٣ - ف = ١٠$$

$$ف \leq صفر$$

حيث ف تعبر عن الفائض بين الجانب الأيمن والأيسر .

وبتأمل هذه المعادلة الأخيرة نجد أنه ما زالت أمامنا مشكلة واحدة واجبة الحل . وهي أنه سوف نجد صعوبة في عمل حلا مبدئيا في الخطوة الثانية من أسلوب السمبلكس . ففى حالة قيود ≥ أعتبرنا من قبل أن متغير العطل $ع_١$ هو أحد المتغيرات الأساسية فى الحل المبدئى وكان ذلك يرجع إلي أنه مع متغيرات العطل الأخرى يكون مصفوفة الوحدة . أما الآن فإن المتغير ف سوف يكون معاملة فى المصفوفة هو (-١) وبذلك فهو لا يمكن أن يكون جزءا من مصفوفة الوحدة التي تحوي المتيغرات الأساسية . وبدون الدخول في تفاصيل رياضية دعنا نفترض أننا اعتبرنا أن $س_١$،$س_٢$، $س_٣$ هي متغيرات غير أساسية قيمتها صفر وأن المتغير الأساسي سوف يكون هو ف ، ومن المعادلة بالتعويض نجد أن :

$$١٠ = - ف$$

$$ومنها\ ف = - ١٠$$

وهذه القيمة السالبة تتعارض مع القيد الذى أضفناه عندما عرفنا هذا المتغير ف بأنه قيمة غير سالبة .

ولمعالجة هذه المشكلة ، نقوم بإضافة متغير جديد يطلق عليها متغير وهمي artificial variable (و) يظهر فى المعادلة كما يلى :

$$٢س_١ + ٣س_٢ + س_٣ - ف + و = ١٠$$

$$و \geq صفر$$

وفي هذه الحالة يمكن أن نبدأ بالمتغيـر و كمتغير أساسى ، $س_١ = س_٢ = س_٣ = ف = صفر$ لأنها متغيرات غير أساسية . وذلك يعنى بالتعويض أن و = ١٠ ، وهذا مقبول .

ونظراً لأن هذا المتغير هو متغير وهميا لا يجب أن يظهر فى الحل النهائي ، فإنه يجب أن نعمل على استبعاده . ويكون ذلك بإضافته في دالة الهدف بمعامل يضمن عدم وجودة في الحل . فإذا كانت دالة الهدف هي دالة تعظيم فيجب أن يكون معاملة رقماً سالباً كبيراً وليكن - م (مثلا - م تعادل خسارة مليون جنيه) ، أما إذا كانت دالة الهدف هي دالة تقليل تكاليف فيفترض أن معامل وهو رقماً موجبا كبيرا وليكن م (ويعني ذلك أن إنتاج يترتب عليه زيادة في التكـاليف بمليـون جنيـه). ويعرف ذلك التعـديل بأسلوب الكبري big method.

ثالثاً : حالة القيـود التى بهـا يساوى :

افرض أن هناك قيد فى المشكلة مثل :

$$٢ س_١ + ٤س_٢ = ٦$$

نظراً لأن تلك المعادلة ليس بها متغيراً أساسياً يمثل في مصفوفة

الوحدة فإن المعالجة الرياضية تقتصى إضافة متغيراً وهمياً كمافعلنا في ثانياً كما يلى :

$$٢ س_١ + ٤س_٢ + و = ٦$$

$$و \leq ٦$$

وذلك أيضاً مع إضافة هذا المتغير الوهمى فى دالة الهدف بمعامل + م أو ـ م حسب نوع دالة الهدف .

* سوف نحاول في هذا المثال تغطية عدة حالات مختلفة .فسوف نتناول مشكلة تقليل تكاليف بها أنواع متنوعة من القيود .

قلل ت $= ٥س_١ + ٧س_٢$

قيود : $س_١ + ٢س_١ = ٥٠$

$س_١ \leq ٢٠$

$س_٢ \geq ٢٠$

$س_١ ، س_٢ \leq$ صفر

الحل :

بالنسبة لدالة الهدف سوف نتركها كما هي دون تغيير . لاحظ أن ذلك حسب الطريقة الثانية التي ذكرت من قبل في حالة استخدام أسلوب السمبلكس في مشكلة تقليل التكاليف . أما القيود فسوف يتم معالجتها حسب نوع الإشارة ، فالقاعدة هي :

في حالة ≤ يضاف متغير فائض ومتغير وهمي .

في حالة ≥ يضاف متغير عظل فقط .

في حالة = يضاف متغير وهمي فقط .

وعلي ذلك تصبح الصيغة الجديدة للمشكلة هي :

قلل ت = ٥س$_{1}$ + ٧س$_{2}$

في ظل القيود

س$_{1}$ + ٢س$_{2}$ + و$_{1}$ = ٥٠

س$_{2}$ − ع$_{2}$ + و$_{2}$ = ٢٠

س$_{2}$ + ع$_{2}$ = ٢٠

س$_{1}$ ، س$_{2}$ ، و$_{1}$ ، و$_{2}$ ، ع$_{1}$ ، ع$_{2}$ ≤ صفر

وتكون الخطوة التالية هي وضع المعادلات بشكل يسمح بتفريغها في جدول السمبلكس المبدئى وهو ما يطلق عليه الصيغة النمطية للمشكلة ، كما يلي :

قلل ت = ٥س$_{1}$ + ٧س$_{2}$ + صفرع$_{1}$ + صفرع$_{2}$ + م و$_{1}$ + م و$_{2}$

القيود :

س$_{1}$ + ٢س$_{2}$ + صفرع$_{1}$ + صفرع$_{2}$ + و$_{1}$ + صفرو$_{2}$ = ٥٠

$$\text{س}_{١} + \text{صفر س}_{٢} - \text{ع}_{١} + \text{صفر ع}_{٢} + \text{صفر و}_{١} + \text{و}_{٢} = ٢٠$$

$$\text{صفر س}_{١} + \text{س}_{٢} + \text{صفر ع}_{١} + \text{ع}_{٢} + \text{صفر و}_{١} + \text{صفر و}_{٢} = ٢٠$$

$$\text{س}_{١} \text{، س}_{٢} \text{، ع}_{١} \text{، ع}_{٢} \text{، و}_{١} \text{، و}_{٢} \quad \text{صفر}$$

وبتأمل دالة الهدف عند تلك المرحلة نجد أننا قد أضفنا قيمة جديدة هي (م)(كمعامل للمتغيرات الوهمية . ويرجع ذلك إلي أنه طالما أن هذه متغيرات وهمية فإنه يجب ألا تظهر في الحل الفعلي للتمرين. وحتي يمكن تحقيق ذلك يجب أن يكون تأثيرها على دالة الهدف تأثيرا غير مرغوب ، وطالما أن الحالة التي أمامنا هي حالة تدنية التكاليف لنحمل كل وحدة من المتغيرات الوهمية سواء كانت ١ أو ٢ ، تكلفة المنشأة مبلغا كبيرا جدا من المال ولنطلق عليه مليون جنيه أو باختصار (م) وسوف ينبني علي ذلك أن يقودنا أسلوب الحل بشكل تلقائي إلي استبعاد هذه المتغيرات من الحل حتي لا تتكلف المنشأة مبالغ كبيرة . والقاعدة هي :

في حالة تدنية التكاليف: تعطي المتغيرات الوهمية في دالة الهدف لمعامل م كقيمة وجبة .

في حالة تعظيم الربح : تعطي المتغيرات الوهمية في دالة الهدف المعامل م كقيمة سالبة .

ويمكن الآن اختيار حلا أوليا نظرا لوجود مصفوفة الوحدة في الأعمدة الثلاث الآخيرة من الجانب الأيمن للمعادلات . وحيث أن عدد

المعادلات ثلاثة فإن عدد المتغيرات الأساسية هي ثلاثة في الحل المبدئى ، وهي $و_{١}$ ، $و_{٢}$ ، $ع_{٢}$ كما أن $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $ع_{١}$ هي المتغيرات الغير أساسية ذات القيم الصفرية . ومعني ذلك أن :

$$\left.\begin{array}{l} س_{١} = صفر \\ س_{٢} = صفر \\ ع_{١} = صفر \end{array}\right\} \text{متغيرات غير أساسية}$$

$$\left.\begin{array}{l} و_{١} = ٥٠ \\ و_{٢} = ٢٠ \\ ع_{٢} = ٢٠ \end{array}\right\} \text{متغيرات أساسية}$$

والآن يمكن عمل جدول السمبلكس المبدئى كما يلي :

تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيمة المتغيرات	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$	$و_1$	$و_2$
ت			٥	٧	صفر	صفر	م	م
م	$و_1$	٥٠	١	٢	صفر	صفر	١	صفر
م	$و_2$	٢٠	(١)	صفر	١-	صفر	صفر	١
صفر	$ع_2$	٢٠	صفر	١	صفر	١	صفر	صفر
ل		٧٠م	٢م	٢م	- م	صفر	م م	
ت - ل			٥ ـ ٢م	٧ ـ ٢م	م	صفر	صفر	صفر

وبتأمل الجدول نجد أن ذلك ليس هذا هو الحل الأمثل نظرا لوجود قيما سالبة في الصف الآخير (راجع قاعدة اختبار مثالية الحل في حالة تنظيم الربح) . ولذلك يتم اختيار المتغير $س_١$ ليدخل الحل نظرا لأن له أكبر قيمة سالبة حيث أن المشكلة الموجودة هي مشكلة تقليل تكاليف - وبقسمة قيم المتغيرات علي المعاملات الموجبة الموجودة في العمود المحور $س_٢$ يتضح أن المتغير $و_١$ هو المتغير الذي من المفروض أن يترك الحل . وبذلك فإن الصف $و_٢$ يكون هو الصف المحور والقيمة (١) هي القيمة المحورية . وباستخدام نفس القواعد المستخدمة في حالة تعظيم الربح نصل القيم الجديدة في الجدول الثاني كما في الصفحة التالية .

وبتكرار نفس الخطوات يكون الجدول الثالث كما في الصفحة بعد التالية :

وحيث أن القيم الواردة في الصف الآخير في الجدول الثالث قيما موجبة فيعني ذلك أننا قد توصلنا إلي الحل الأمثل التالي :

$س_١$ = ٢٠ ، $س_٢$ = ١٥ ، $ع_٢$ = ٥

، $ع_١$ = $و_١$ = $و_٢$ = صفر

وذلك يؤدي إلي أقل تكلفة ممكنة وهي ٢٠٥ جنيه .

جـ

جدول السمبلكس الثاني

ت			٥	٧	صفر	صفر	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيمة المتغيرات	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ع$_2$	و$_1$	و$_2$
م	و$_1$	٣٠	صفر	(٢)	١	صفر	١	-١
٥	س$_1$	٢٠	١	صفر	-١	صفر	صفر	١
صفر	ع$_2$	٢٠	صفر	١	صفر	١	صفر	صفر
ل		٣٠م + ١٠٠	٥	٢م	م - ٥	صفر	م	- م + ٥
ت - ل			صفر	٧ - ٢م	٥ - م	صفر	صفر	٢م - ٥

جدول السمبلكس لثالث

ت			٥	٧	صفر	صفر	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيمة المتغيرات	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$	$و_1$	$و_2$
٧	$س_2$	١٥	صفر	١	$\frac{1}{2}$	صفر	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
٥	$س_1$	٢٠	١	صفر	١-	صفر	صفر	١
صفر	$ع_2$	٥	صفر	صفر	$-\frac{1}{2}$	١	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
ل		٢٠٥	٥	٧	$-\frac{3}{2}$	صفر	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$
ت - ل			صفر	صفر	$\frac{3}{2}$	صفر	م $-\frac{7}{2}$	م $-\frac{3}{2}$

مشاكل فنية عند إستخدام أسلوب السمبلكس

حالة تعادل القيم الموجبة (أو السالبة) في الصف الأخير :

أوضحنا أن من بين خطوات تحسين الحل (إذا كان ممكناً) أن يتم إختيار المتغير ذو القيمة الموجبة الأعلي (في حالة تعظيم الربح) والمتغير ذو القيمة السالبة الأعلي (في حالة تقليل التكاليف) حتي يدخل الحل . ونواجه أحياناً مشكلة عندما تتعادل القيم الموجبة أو السالبة الخاصة بالمتغيرات الغير أساسية المرشحة لأن تدخل الحل لتعتبر متغيرات أساسية . وفي مثل هذه الحالة يمكن أن يتم الإختيار من بينها بشكل تحكمي . فإختيار أي من هذه المتغيرات سوف يوصل في النهاية إلي الحل الأمثل بعد خطوات معينة . ولكن يفضل حتي يمكن تقليل عدد الخطوات اللازمة للوصول إلي الحل الأمثل إتباع النصائح الآتية :

١ - إذا كان التعادل بين متغيراً أصلياً ($س_١$ ، $س_٢$ ...) ومتغيراً إضافياً ($ع_١$ ، $ع_٢$ ...) فيفضل إختيار المتغير الأصلي لأن يدخل الحل . ومثال ذلك ، كما في الجدول التالي ، إذا كانت المفاضلة بين $ع_١$ ، $س_٣$ نظراً لتساوي المعامل الموجب في الصف الأخير يجب إختيار $س_٣$ ليصبح متغيراً أساسياً ، أي ليدخل الحل في جدول السمبلكس التالي .

ربح الوحدة	متغيرات أساسية	قيم المتغيرات	س$_1$	س$_2$	س$_3$	ع$_1$	ع$_2$	ع$_3$
	س$_1$							
	ع$_2$							
	ع$_3$							
	ل							
	ح - ل		صفر	٢	٤	٤	صفر	صفر

٢ - إذا كان التعادل بين متغيرين أصليين (س$_1$ ، س$_2$ ...) فيتم الإختيار بطريقة عشوائية .

٣ - إذا كان التعادل بين متغيرين إضافيين (ع$_1$ ، ع$_2$ ...) فيتم الإختيار بطريقة عشوائية .

حالة تعادل خارج القسمة عند تحديد المتغيرالذي يترك الحل :

في خطوة تحسين الحل يتم تحديد المتغير الأساسي الذي يجب أن يترك الحل . ويتم ذلك بقسمة قيم المتغيرات الأساسية علي المعاملات الموجبة في العمود المحور ، وإختيار المتغير الموجود في الصف ذو خارج القسمة الأقل . ويحدث أحياناً أن يتعادل خارج القسمة لصفين أو أكثر ، مما يؤدي إلي ظهور ما يسمي بمشكلة عدم الإنتظام degeneracy .

والخطورة الأساسية في هذه الحالة هي أن إختيار أحد المتغيرات

الذي يترك الحل عشوائياً قد يؤدي إلي الوصول إلي حلاً جديداً قيمة أحد المتغيرات الأساسية فيه تعادل الصفر . ومثال ذلك :

عظم ح = ٨٠ س$_{١}$ + ٧٠ س$_{٢}$

القيود ٢ س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≥ ١٢٠

س$_{١}$ ≥ ٧٠

س$_{١}$ + س$_{٢}$ ≥ ٦٠

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≤ صفر

يوضح الجدول التالي ، جدول السمبلكس المبدئي اللازم لهذه المشكلة :

ح			٨٠	٧٠	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س$_{١}$	س$_{٢}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$	ع$_{٣}$
صفر	ع$_{١}$	١٢٠	٢	١	١	صفر	صفر
صفر	ع$_{٢}$	٧٠	١	صفر	صفر	١	صفر
صفر	ع$_{٣}$	٦٠	١	١	صفر	صفر	١
ل		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ح - ل			٨٠	٧٠	صفر	صفر	صفر

في الجدول المبدئي عند محاولة تحديد المتغير الذي يترك الحل نقوم بقسمة :

$$١٢٠ \div ٢ = ٦٠$$

$$٧٠ \div ١ = ٧٠$$

$$٦٠ \div ١ = ٦٠$$

فإذا قمنا بإختيار الصف ع$_{١}$ كصف محوري فإن الجدول التالي سوف يصبح :

ح			٨٠	٧٠	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س$_{١}$	س$_{٢}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$	ع$_{٣}$
٨٠	س$_{١}$	٦٠	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	صفر	صفر
صفر	ع$_{٢}$	١٠	صفر	$-\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	١	صفر
صفر	ع$_{٣}$	صفر	صفر	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	صفر	١
ل		٤٨٠	٨٠	٤٠	٤٠	صفر	صفر
ح - ل			صفر	٣٠	-٤٠	صفر	صفر

وفي هذا الجدول يلاحظ أن قيمة المتغير الأساسي ع$_{٣}$ = صفر وهذا مخالف للخاصية الأساسية التي ذكرناها في الحل الأساسي وهو أن تكون قيم المتغيرات الغير الأساسية هي التي تساوي صفر .

ويترتب علي ذلك في الخطوات التالية أن الحل التالي في جدول السمبلكس الثالث سوف يكن $س_١ = ٦٠$ ، $ع_٢ = ١٠$ ، $س_٢ =$ صفر ، $ع_١ = ع_٣ =$ صفر ، وذلك يحق ربحاً قدره ٤٨٠ وهو ذات الربح المحقق في الخطوة السابقة . ويعني ذلك أننا نغير الحل دون أن نغير الربح . وذلك عكساً للمنطق الأساسي لأسلوب السمبلكس . بل هناك أكثر من ذلك بسبب مشكلة عدم الإنتظام . فإنك عندما تحاول تحسين الحل الأخير الذي ينتج من جدول السمبلكس الثالث سوف تجد أنك تعود في جدول السمبلكس الرابع إلي ذات الحل الذي توصلنا إليه في جدول السمبلكس الثاني . وتعرف هذه الخاصية بمشكلة أن نكرر نفس الحلول ونعود إليها cycling دون الوصول إلي الحل الأمثل. ويهمنا الان أن نذكر بعض الخصائص الأساسية لمشكة عدم الإنتظام :

١ - لا تمثل هذه الخاصية أية مشكلة عند حل المشكلة بالطريقة البيانية .

٢ - إذا ظهر أحد المتغيرات الأساسية بقيمة صفر في جدول السمبلكس النهائي فإن ذلك لا يمثل أية مشكلة .

٣ - إذا ظهر تعادل عند القسمة بغرض تحديد المتغير الذي يترك الحل فإن الحل التالي سوف يكون حلاً غير منتظماً degenerate.

٤ - إذا ظهر أحد المتغيرات الأساسية بقيمة صفر في أحد مراحل الحل قبل الجدول النهائي فإن الحل قد يواجه مشكلة تكرار نفس

الحلول والعودة إليها دون الوصول إلي الحل الأمثل . ولكنه في أحيان كثيرة قد لا تحدث هذه المشكلة .

٥ – هناك بعض القواعد الرياضية ، الخارجة عن نطاق هذا الكتاب ، والتي تستخدم في الإختيار بين المتغيرات التي تترك الحل وذلك لضمان عدم حدوث مشكلة تكرار نفس الحلول cycling . ولكن طالما أن هذه المشكلة لا تظهر إلا نادراً بالنسبة لغالبية المشاكل فإن بعض الكتاب [١] يقترح إختيار الصف الأعلي كصفاً محورياً في حالة تعادل خارج القسمة .

حالة وجود أكثر من حل أمثل :

أوضحنا في الطريقة البيانية أن تعادل ميل أحد القيود مع ميل دالة الهدف سوف يؤدي إلي وجود أكثر من حل أمثل ، وأمكن الإستدلال علي ذلك بإنطباق دالة الهدف علي جزء من محيط المنطقة الممكنة وليس تماس نقطة منه . أما في ظل أسلوب السمبلكس فإن وجود صفر في الصف الأخير (ح – ١) تحت واحد أو أكثر من المتغيرات الغير أساسية يعني وجود أكثر من حل أمثل . ولنتأمل المثال التالي والذي يوضح جدول السمبلكس النهائي لأحد المشكلات الإفتراضية :

ح			٦٠	٦٠	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س ١	س ٢	ع ١	ع ٢
٦٠	س ١	٢٠	١	صفر	٢/٣	- ١/٢
٦٠	س ٢	١٠	صفر	١	- ١/٣	١/٢
ل		١٨٠٠	٦٠	٦٠	٢٠	صفر
ل - ح			صفر	صفر	٢٠	صفر

يتضح من هذا الجدول أن الحل الموجود هو حلاً أمثل فيه :

س ١ = ٢٠ ، ع ١ = صفر

س ٢ = ١٠ ، ع ٢ = صفر

ولكننا تعارفنا من قبل علي أن قيم الصف الأخير الخاصة بالمتغيرات الأساسية يجب أن تكون صفر ، وذلك صحيح في لجدول مع تعديل آخر وهو أن هناك متغيراً غير أساسياً آخر (ع ٢) معامله في الصف الأخير هو صفر . ويعني ذلك أن ع ٢ يمكن إدخالها في الحل دون تأثير علي رقم الربح المحقق زيادة أو نقصاً . وهذه هي حالة وجود أكثر من حل أمثل . فإذا أدخلنا (ع ٢) في الحل فإن الجدول لتالي يكون هو :

ح			٦٠	٦٠	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_{١}$	$س_{٢}$	$ع_{١}$	$ع_{٢}$
٦٠	$س_{١}$	٣٠	١	١	$\frac{١}{٣}$	صفر
صفر	$ع_{٢}$	٢٠	صفر	٢	$-\frac{٢}{٣}$	١
ل		١٨٠٠	٦٠	٦٠	٢٠	صفر
ل − ح			صفر	صفر	− ٢٠	صفر

وفيه نجد أن الحل الموجود هو حلاً أمثل يحقق نفس الربح ولكن القيم هي :

$$س_{١} = ٣٠ \quad ، \quad ع_{١} = صفر$$

$$س_{٢} = صفر \quad ، \quad ع_{٢} = ٢٠$$

ويعني ذلك أنه يمكن تحقيق نفس الربح بمجموعة جديدة من قيم المتغيرات . وذلك يعد ميزة بالنسبة لمتخذي القرار كما أوضحنا في حالة الطريقة البيانية .

حالة عدم وجود حلاً ممكناً :

يمكن معرفة ذلك أيضاً من جدول السمبلكس النهائي . فإذا تم التوصل إلي الحل الأمثل وكان واحداً أو أكثر من المتغيرات الوهمية

(و) ضمن المتغيرات الأساسية فإن ذلك يعني عدم وجود أي حل ممكن لهذه المشكلة . ويجب أن نلاحظ أيضاً أنه في حالة عدم الإنتظام إذا ظهر واحد أو أكثر من المتغيرات الوهمية في المتغيرات الأساسية بقيمة قدرها صفر فإن هذه لا تعد حالة عدم إمكانية وجود حلاً أمثل .ويظهر الجدول التالي أحد حالات عدم وجود حلاً أمثل لمشكلة تقليل تكاليف كما تظهر في جدول السمبلكس النهائي :

ت			٧	٣	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س١	س٢	ع١	ع٢	و١
٣	س٢	٥	١	١	١/٢	صفر	صفر
م	و١	٢	- ١	صفر	- ١	- ١	١
ت		١٥+١٢م	٣ - م	٣	١,٥ - م	- م	م
ت - ل			٤ + م	صفر	م - ٣/٢	م	صفر

حالة المشكلة غير المحدودة :

كما ذكرنا عند إستخدام الأسلوب البياني فإن هذه الحالة تعني إمكانية زيادة الأرباح (أو تقليل التكاليف) إلي ما لا نهاية . ويستدل عليها في أسلوب السمبلكس في خطوة تحديد المتغير الواجب أن يترك الحل بقسمة قيم المتغيرات علي المعاملات الموجبة في العمود .

المحوري . فقد نجد أحياناً أنه لا توجد قيم موجبة في العمود المحوري. بمعني أن كل القيم إما صفرية أو سالبة . وفي هذه الحالة تعتبر المشكلة غير محدودة .

ويوضح الجدول التالي أحد الحالات التي تعبر عن هذه الظاهرة في أحد مشاكل تعظيم الربح :

ح			٢٠	١٥	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_١$	$س_٢$	$ع_١$	$ع_٢$
١٥	$س_٢$	١٢	صفر	١	صفر	١
٢٠	$س_١$	٤	١	صفر	$-\frac{١}{٤}$	١
ل		٢٦٠	٢٠	١٥	- ٥	٤٥
ح - ل			صفر	صفر	٥	- ٤٥

ففي هذا الجدول من الواضح أن الحل ليس هو الحل الأمثل . ويجب إدخال المتغير $ع_١$ في الحل . وعند محاولة تحديد المتغير الذي يخرج من الحل نجدأنه ليست هناك قيم موجبة في العمود $ع_١$. وبالتالي لا يمكن إجراء عملية القسمة وبالتالي فإن المشكلة بلا حدود.

تحليـل الحساسيـة

Sensitivity Analysis

بعد أن نصل إلي الحل الأمثل لمشكلة لبرمجة الخطية ، يكون في الغالب هناك تساؤل عما سوف يحدث لهذا الحل إذا تغير أحد أجزاء المشكلة التي تم حلها . ومثال ذلك ، قد تكون مهتمين بأسئلة مثل :

١ - ماذا يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت القيمة الموجودة في الطرف الأيسر لأحد القيود . ماذا في مثالنا السابق إذا تغيرت حصة الخشب المتاحة أسبوعياً ؟

٢ - ماذا سوف يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت أحد القيم الموجودة في دالة الهدف . ماذا في مثالنا لو زاد الربح المحقق من إنتاج وبيع المكتب بمبلغ معين ؟

٣ - ماذا سوف يحدث لحل الأمثل إذا تغيرت المعاملات الموجودة في الطرف الأيمن من متباينات القيود ؟ ما هو أثر أن تزيد عدد ساعات العمل اللازمة لإنتاج المقعد برقم معي ؟ .

في مثل هذه الحالات يثار التساؤل حول ما إذا كان الحل الأمثل سوف يتغير أو سوف يبقي كما هو ؟ وإذا كان سوف يتغير هل لابد من حل كل المشكلة مرة أخري بالقيم الجديدة للوصول إلي الحل الأمثل الجديد ؟ هل من طريقة لمعرفة الحل الأمثل الجديد دون حل المشكلة مرة أخري ؟ الإجابة علي ذلك تكمن فيما سمي بتحليل الحساسية -Sensi tivity analysis والذي - كما هو واضح من التسمية - يقيس درجة حساسية الحل الأمثل الحالي للتغير في القيم الواردة parameters في المشكلة الأصلية . ويمتاز هذا المدخل بأنه يوفر تكلفة وجهد إعادة حل المشكلة مرة أخري حتي في حالة إستخدام الكومبيوتر . وسوف نتناول هنا عرض هذا النوع من التحليل في الحالات الثلاث التي ذكرناها سابقاً ، وهي : (١) حالة تغير قيم الطرف الأيسر ، (٢) حالة تغير أحد القيم الموجودة في دالة الهدف ، و (٣) حالة تغير المعاملات في الطرف الأيمن في متباينات القيود .

أولاً : تغير قيم الطرف الأيسر في القيود :

يعبر الجانب الأيسر من القيود في غالب الأحيان عن قيمة الموارد المتاحة . وطالما أن هذه الموارد تعتمد علي توافر الأموال لدي المنشأة وظروف السوق ، وظروف التشغيل الفعلية ، وعلي العاملين أنفسهم . فإنه من الموقع دائماً أن تتغير قيمة تلك الموارد . ولنتتبع معني هذه التغيير . في القيد الأصلي الخاص بالمادة الخام (الأخشاب) في المثال السابق .

$$٥ س_١ + ٤ س_٢ \geq ١٢٠$$

إذا إفترضنا أن قيمة الموارد المتاحة من هذا النوع قد إرتفعت إلي ١٢١ وحدة فإن القيد يصبح :

$$٥ س_١ + ٤ س_٢ \geq ١٢١$$

وحسب أسلوب الرسم البياني فإنه من الواضح أن ميل الخط لم يتغير وإنما الذي تغير هو تقاطع هذا القيد مع كل من محور س١ ،

محور $س_٢$ (يمكن للطالب إثبت ذلك بنفسه بإستخدام ورقة بيانية ورسَم الخطين) . ويعني ذلك أن القيد الجديد سوف يوازي لقيد القديم وسوف يقع أعلي منه (لأن ١٢١ > ١٢٠) . وبالطبع يمكن تتبع أثر ذلك بيانياً علي الحل الأمثل ، إلا أن ذلك لا يصلح في حالة وجود أكثر من متغيرين . ولذلك سوف نناقش ذلك بناءاً علي حدول السمبلكس النهائي الذي توصلن إليه والذي نورده هنا مرة أخري كما يلي :

جدول الحل الآمثل (الأخشاب = ١٦٠)

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_١$	$س_٢$	$ع_١$	$ع_٢$
١٠	$س_١$	٢٠	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	$س_٢$	٥	صفر	١	$-\frac{١}{٣}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٥	١٠	٩	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح - ل			صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

ولنفرض الآن كما ذكرنا لن الأخشاب المتاحة زادت إلي ١٢١ والمراد تحديد أثر ذلك علي الحل الأمثل الحالي وهو :

$س_١$ = ٢٠ ، $س_٢$ = ٥ ، $ع_١$ = $ع_٢$ = صفر ؟

نظراً لأن $ع_١$ = صفر في الحل الأمثل فإن ذلك يعني أن كمية

الأخشاب الغير مستخدمة تعادل صفر ، وهذا معناه أن جميع الأخشاب مستخدمة بالكامل . ومن ثم فإن زيادة الأخشاب سوف يترتب عليها بالضرورة تغير في إنتاج كل من السلعتين أو في واحدة منهم فقط . ولتحديد ذلك ترجع إلي العمود $ع_١$ والذي يحوي قيم تعبر كما أوضحنا من قبل عن معاملات إحلال $ع_١$ مع كل من $س_١$ ، $س_٢$. فالقيمة $\frac{١}{٣}$ تعني أن تخفيض $ع_١$ (زيادة الأخشاب المستخدمة) بوحدة واحدة سوف يترتب عليه زيادة $س_١$ بما يعادل $\frac{١}{٣}$ وحدة . كما أن زيادة $ع_١$ (تخفيض الأخشاب المستخدمة) بوحدة سوف يترتب عليه تخفيض $س_١$ بما يعادل $\frac{١}{٣}$ وحدة . وبنفس المنطق فإن ($-\frac{١}{٣}$) تحكم العلاقة بين $ع_١$ ، $س_٢$.

والآن إذا زادت قيمة الأخشاب المتاحة إلي ١٢١ وحدة ، فإن تأثير الوحدة الجديدة الزائدة من الأخشاب سوف يكون له نفس تأثير تخفيض $ع_١$ بوحدة واحدة . وبالنظر إلي العمود $ع_١$ نجد أن تخفيض $ع_١$ بمقدار الوحدة سوف يترتب عليه : (أ) زيادة $س_١$ بمقدار $\frac{١}{٣}$ وحدة و (ب) تخفيض $س_٢$ بمقدار $\frac{١}{٦}$ وحدة . يتأمل أثر ذلك علي كمية الخشب نجد أن :

الخشب الإضافي المستخدم في $س_١ = \frac{١}{٣} \times ٥$ (للوحدة) $= \frac{٥}{٣}$

الخشب الذي يتم توفيره من $س_٢ = \frac{١}{٦} \times ٤$ (للوحدة) $= \frac{٤}{٦}$

وبالتالي فإن صافي الخشب الإضافي المستخدم

$$= \frac{5}{3} - \frac{4}{6} = \frac{6}{6} = 1 \text{ وحدة}$$

وهذه الوحدة هي الوحدة الإضافية في الخشب (١٢١ - ١٢٠)

والآن ، إذا كان هذا هو التغير الوحيد فإننا يمكننا عمل جدول السمبلكس الذي يعبر عن الحل الأمثل عندمايزيد الطرف الأيسر إلي ١٢١ كما يلي (يمكن للقاريء أن يتأكد من خلال خطوات تفصيلية أن ذلك هو جدول الحل الأمثل النهائي الجديد) :

جدول الحل الأمثل (الأخشاب = ١٢١)

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$
١٠	$س_1$	$20\frac{1}{3}$	١	صفر	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
٩	$س_2$	$4\frac{5}{6}$	صفر	١	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
ل		$246\frac{5}{6}$	-1	٩	$\frac{11}{6}$	$\frac{5}{12}$
ح - ل			صفر	صفر	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{5}{12}$

وقد تم التوصل إلي القيم الجديدة للمتغيرات الأساسية عن طريق جمع معاملات العمود $ع_1$ وقيم المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل قبل تغيير كمية الأخشاب . ويوضح الجدول أن ربح الحل قد إرتفع إلي $246\frac{5}{6}$. ويعبر ذلك عن زيادة بمقدار سعر الظل الخاص بالمتغير $ع_1$ في الجدول . فالربح الجديد $246\frac{5}{6} = 245 + \frac{11}{6}$.

لاحظ أن المتغيرات الأساسية في الحل لم تتغير وإنما الذي تغير هو قيم تلك المتغيرات.

ويجب هنا أن نوضح أن هذا التحليل لا يعني أنه من الممكن وإلي مالا نهاية زيادة الربح عن طريق زيادة وحدات من الأخشاب ، فقد لا يكون ممكناً infeasible بعد كمية معينة من التغيير إستغلال الموارد الزائدة . ويعبر عن ذلك بالقول بأن ذلك يعد صحيحاً بشرط ألا يكون التغيير كبيراً إلي الحد الذي يجعل الحل حلاً غير ممكناً . ولهذا نكون مهتمين دائماً بتقرير ماهو الحد الذي يمكن أن تتغير القيمة في الطرف الأيسر من القيد دون أن تتغير ماهية (وليست قيمة) المتغيرات الأساسية في الحل الحالي الأمثل ؟ أي أننا نريد إلي أي حد يمكن أن يتغير الطرف الأيسر لأحد القيود وتظل المتغيرات الأساسية (وليست قيمها) كما هي ؟

لإيضاح ذلك دعنا نفترض أن الطرف الأيسر من القيد الأول قد تغير بقيمة هي Δ فإذا إستبدلنا القيمة ١٢٠ بالقيمة ١٢٠ + Δ في جدول السمبلكس المبدئي وقمنا بعمل نفس خطوات الحل نجد أن الجدول النهائي الذي به الحل الأمثل هو كما يلي :

ح			١٠		صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س١	س٢	ع١	ع٢
١٠	س١	$20 + \frac{1}{3}\Delta$	١	صفر	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
٩	س٢	$5 - \frac{1}{6}\Delta$	صفر	١	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
ل		$245 + \frac{11}{6}\Delta$	١٠	٩	$\frac{11}{6}$	$\frac{5}{12}$
ح − ل			صفر	صفر	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{5}{12}$

ويلاحظ علي هذا الجدول أن المتغير الوحيد كان في عمود قيم المتغيرات الأساسية . فلم تتغير تلك المتغيرات ولكن تغيرت قيمتها . كذلك فإن مصفوفة المعاملات كما هي ، كما أن الصفوف ل ، (ح – ل) لم يتغيرا . وأكثر من ذلك فإن القيم الجديدة في العمود الخاص بقيم المتغيرات لها علاقة بالمعاملات الموجودة في العمود ع . فمثلاً ($20 + \frac{1}{3}\Delta$) ما هي إلا القيمة الأصلية ٢٠ + القيمة الموجودة في العمود ع١ في الصف س١ مضروبة في مقدار التغير . كذلك فإن ($5 - \frac{1}{6}\Delta$) ما هي إلا القيمة الأصلية ٥٠ + القيمة الموجودة في العمود ع١ في الصف س٢ مضروبة في مقدار التغير Δ . أي أنها مرتبطة تماماً بالعمود ع١ الذي هو الطاقة العاطلة المناظرة للقيد الأول . ويمكن تلخيص الفارق بين الجدول الأصلي والجدول الذي به تغير قيمته Δ في القيد الأول كما يلي :

قيم المتغيرات الجديدة = قيم المتغيرات الأصلية + معاملات العمود ع ١ × Δ

$$\Delta \times \frac{١}{٣} + ٢٠ = \Delta \frac{١}{٣} + ٢٠$$

$$\Delta \times \left(\frac{١}{٦} - \right) + ٥ = \Delta \frac{١}{٦} + ٥$$

وحتي يكون هذا الحل الجديد حلاً ممكناً feasible فيجب ألا تأخذ قيم س ١ ، س ٢ قيماً سالبة . ويعني ذلك شرطين :

$$\text{صفر} \leq \Delta \frac{١}{٣} + ٢٠$$

$$٢٠ - \leq \Delta \frac{١}{٣}$$

وذلك يعني $\quad ٦٠ - \leq \Delta$ ——— (١)

وأيضاً $\quad \text{صفر} \leq \Delta \frac{١}{٦} - ٥$

$$٥ - \leq \Delta \frac{١}{٦} -$$

بالضرب في (−) $\quad ٥ \leq \Delta \frac{١}{٦}$

وذلك يعني $\quad ٣٠ \leq \Delta$ ——— (٢)

بوضع الشرطين معاً نجد أن $٣٠ \leq \Delta \leq ٦٠ -$

ويعني ذلك أن هناك مدي معين للتغير الذي يمكن أن يحدث في الطرف الأيسر للقيد الأول ، دون أن يتغير نوع المتغيرات الأساسية الموجودة في الحل الأمثل الحالي . وهذا المدي هو بين ٣٠ ، − ٦٠ . وطالما أن القيمة الحالية التي بدأنا بها للطرف الأيسر للقيد الأول هي

١٢٠ ، فإن المدي range الذي يمكن أن نأخذ قيمة الطرف الأيسر دون تغيير نوع المتغيرات الأساسية هو :

القيمة الأصلية + ٣٠ ≥ مدي الطرف الأيسر ≥ القيمة الأصلية - ٦٠

١٢٠ + ٣٠ ≥ مدي الطرف الأيسر ≥ ١٢٠ - ٦٠

١٥٠ ≥ مدي الطرف الأيسر ≥ ٦٠

أي أن تغير حجم الموارد المتاحة من الأخشاب في حدود ٦٠ ، ١٥٠ وحدة (مع بقاء كل شيء علي ما هو عليه) سوف لا يترتب عليه تغيير نوع المتغيرات الأساسية الموجودة في الحل الأمثل الحالي وهي س ١ ، س ٢ . ولكن بالطبع سوف تتغير قيم هذه المتغيرات وبالتالي أرقام الربح المحققة .

وينبني علي ذلك ، أنه في حدود هذا المدي يمكن دائماً معرفة القيم الموجودة للمتغيرات الأساسية دون الحاجة إلي حل المشكلة من جديد . ومثال ذلك إذا زادت الأخشاب المتاحة بعشرة وحدات فإن قيم الحل الأمثل الجديد يمكن التوصل إليها كما يلي :

المتغيرات الأساسية	قيم الحل الأمثل القديم	عمود ع ١ في الحل الأمثل	قيم الحل الأمثل الجديد
س ١	٢٠	$\frac{١}{٣}$	٢٠ + $\frac{١}{٣}$ (١٠) = ٢٣ $\frac{١}{٣}$
س ٢	٥	- $\frac{١}{٦}$	٥ - $\frac{١}{٦}$ (٩) = ٣ $\frac{١}{٢}$

ويكون الربح الجديد هو :

$$(٢٣ \frac{١}{٣}) (١٠) + (٣ \frac{١}{٣}) (٩) = ٢٦٣ \frac{١}{٣}$$ جنيه .

وبنفس المنطق فإن تخفيض كمية الأخشاب بعشر وحدات ، والذي يعني أن تكون Δ = - ١٠ يتم تحديد أثره كما يلي :

المتغيرات الأساسية	قيم الحل الأمثل القديم	عمود ع $_١$ في الحل الأمثل	قيم الحل الأمثل الجديد
س $_١$	٢٠	$\frac{١}{٣}$	$٢٠ + \frac{١}{٣} (-١٠) = ١٦ \frac{٢}{٣}$
س $_٢$	٥	$-\frac{١}{٦}$	$٥ - \frac{١}{٦} (-١٠) = ٦ \frac{٢}{٣}$

ويكون الربح الجديد هو :

$$(١٦ \frac{٢}{٣}) (١٠) + (٦ \frac{٢}{٣}) (٩) = ٢٢٦ \frac{٢}{٣}$$ جنيه .

وقبل أن ننتهي من هذه النقطة نود أن نقدم طريقة رياضية (للراغبين فيها فقط) مختصرة لتحديد المدي range الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة الطرف الأيسر في أحد القيود دون تغيير نوع من المتغيرات الأساسية الموجودة في الحل الأمثل .

بفرض أن :

ش $_د$ = القيمة الأصلية الموجودة في الجانب الأيسر من القيد الدالي

ق $_ن$ = قيمة المتغير الأساسي النوني في جدول الحل الأمثل النهائي

$ا_{د ن}$ = قيمة المعاملات في العمود الخاص بالمتغير ع المناظر للقيد الذي يتم تغيير طرفه الأيسر .

وذلك علي أساس أن :

د = ١ ، ٢ ، ... ، عدد القيود

ن = ١ ، ٢ ، ... ، عدد المتغيرات الأساسية

فإن الحد الأدني للطرف الأيسر في القيد

$$= \underset{\text{من بين}}{\text{أكبر القيم}} \left(\text{القيمة الأصلية} - \frac{\text{قيمة المتغير الأساسي}}{\text{قيمة المعاملات}} \right) \text{ لكل المتغيرات عند } ا_{د ن} > \text{صفر}$$

$$= \text{أعظم} \left(ش_{د} - \frac{ق_{ن}}{ا_{د ن}} \right) \text{ لكل المتغيرات عند } ا_{د ن} > \text{صفر}$$

كذلك فإن الحد الأقصي للطرف الأيسر من القيد

$$= \underset{\text{من بين}}{\text{أقل القيم}} \left(\text{القيمة الأصلية} - \frac{\text{قيمة المتغير الأساسي}}{\text{قيمة المعاملات}} \right) \text{ لكل المتغيرات عند } ا_{د ن} > \text{صفر}$$

$$= \text{أقل} \left(ش_{د} - \frac{ق_{ن}}{ا_{د ن}} \right) \text{ لكل المتغيرات عند } ا_{د ن} > \text{صفر}$$

وبتطبيق ذلك علي القيد الأول . نبدأ من جدول الحل النهائي وعلي أساس أن القيمة الأصلية في الطرف الأيسر هي ١٢٠ ونقوم بالخطوات الموضحة في الجدول والتي يتضح منها أن الحد الأدني هو ٦٠.

	(١)	(٢)	(٣)	
المتغيرات الأساسية	$ق_{ن}$	$أ_{دن}$ في عمود $ع_{٢}$	(١) ÷ (٢)	١٢٠ - (٣)
$س_{١}$	٢٠	$-\frac{١}{٣}$	٦٠	٦٠
$س_{٢}$	٥	$-\frac{١}{٦}$	غير موجبة	غير موجبة

وللوصول إلي الحد الأقصي نقوم بعمل خطوات الجدول التالي :

	(١)	(٢)	(٣)	
المتغيرات الأساسية	$ق_{ن}$	$أ_{دن}$ في عمود $ع_{١}$	(١) ÷ (٢)	١٢٠ - (٣)
$س_{١}$	٢٠	$\frac{١}{٣}$	ليست سالبة	ليست سالبة
$س_{٢}$	٥	$-\frac{١}{٦}$	- ٣٠	١٢٠-(-٣٠)= ١٥٠

ومنه يتضح أن الحد الأقصي للجانب الأيسر للقيد الأول هو ١٥٠ .

وبنفس الإجراءات يمكن الوصول إلي الحد الأدني والحد الأقصي الذي يمكن أن يأخذه الطرف الأيسر من القيد الثاني علي النحو التالي:

	(١)	(٢)	(٣)	
المتغيرت الأساسية	$ق_{ن}$	$أ_{دن}$ في عمود $ع_{٢}$	(١) ÷ (٢)	٦٠ - (٣)
$س_{١}$	٢٠	$-\frac{١}{٣}$	غير موجب	غير موجب
$س_{٢}$	٥	$\frac{٥}{١٢}$	١٢	٤٨

ومنه الحد الأدني للطرف الأيسر (عدد ساعات العمل) = ٤٨

(٣) (٢) (١)

المتغيرات الأساسية	قن	أ د ن في عمود ع ٢	(١) ÷ (٢)	٦٠ - ٣١)
س ١	٢٠	$-\frac{١}{٣}$	- ٦٠	١٢٠
س ٢	٥	$-\frac{٥}{١٢}$	غير سالب	غير سالب

ومنه الحد الأقصي للطرف الأيسر (عدد ساعات العمل) ١٢٠

نخلص من كل هذا إلي بعض الحقائق الهامة وهي :

١ - إذا كان تغير قيمة الطرف الأيسر الخاص بأحد القيود في حدود المدي الذي تم ذكره بإستخدام تحليل المعني أو المعادلات . فإن نوع المتغيرات الأساسية الواردة في جدول الحل الأمثل سوف يظل كما هو . ولا يعني ذلك أن قيمها سوف تظل كما هي . ويمكن الوصول إلي القيم الجديدة لذات المتغيرات الأساسية عن طريق ضرب مقدار التغير × المعامل المناظر في عمود العطل الخاص بالقيد ثم إضافة ذلك إلي القيمة المناظرة في صف المتغيرات الأساسية .

٢ - إذا كان تغير قيمة الطرف الأيسر الخاص بأحد القيود ليس في حدود المدي ، فإن نوع المتغيرات الأساسية الواردة في جدول الحل

الأمثل الحالي سوف يتغير . ولذلك يجب حل المشكلة من البداية مرة أخري للوصول إلي الحل الأمثل الجديد .

ثانياً : التغير في مساهمة الوحدة :

ويقصد ذلك التغير الذي يحدث في ربح الوحدة أو تكلفة الوحدة في دالة الهدف . فعادة ما يكون الممارسين في حاجة إلي معرفة أثر التغير في سعر الوحدة وبالتالي ربحيتها علي القرار الخاص بالمزيج الإنتاجي . فظروف السوق في حالة ديناميكية مستمرة يصعب معها إفتراض ثبات الأسعار . كذلك فإن تغير تكلفة الإنتاج نتيجة لظروف التشغيل الفعلية والتقدم التكنولوجي الدائم سوف يستلزم إعادة النظر في توليفة الإنتاج من السلع المختلفة . والسؤال الآن هو : ما تأثير كل ذلك علي الحل الأمثل الذي توصلنا إليه في مشكلة البرمجة الخطية التي أمامنا ؟ قبل الجابة علي هذا السؤال يهمنا أن نشير إلي أن التغيير في دالة الهدف لا يؤثر علي الإطلاق علي المنطقة الممكنة للحلول feasible arc . فنحن نعلم ذلك من الطريقة البيانية . وهو صحيح أيضاً عند إستخدام أسلوب السمبلكس . وينبني علي ذلك أننا سوف نهتم بأثر هذا التغيير علي مثالية opti-mality الحل الحالي ممثلاً في الصف الأخير ح – ل . وهنا سوف نعالج حالتين مختلفتين . أما الأولي فهي أن يكون تغير مساهمة الوحدة خاص بأحد المتغيرات الغير أساسية . والثانية هي حالة أن يكون التغير خاص بأحد المتغيرات الأساسية .

(أ) التغير في مساهمة الوحدة لأحد المتغيرات الغير أساسية :

طالما أن الذي يحكم الوصول إلي الحل الأمثل هو القيم الموجودة في الصف الأخير (ح - ل) في جدول السمبلكس النهائي ، وأن القيم الخاصة بالمتغيرات الغير أساسية في هذا الجدول في الصف الأخير تكون دائماً صفراً أو قيماً سالبة في حالة تعظيم الربح ، فإننا يمكننا أن نضع القواعد التالية :

١ - إذا كانت الزيادة في ربح الوحدة للمتغير الغير أساسي >

- (معامل المتغير في الصف الأخير)

فإن تلك الزيادة سوف تؤدي إلي حلاً آخر جديد يدخل فيه المتغير هذا كمتغيراً أساسياً ويحقق ربحاً أعلي .

٢ - إذا كانت الزيادة في ربح الوحدة للمتغير الغير أساسي =

-(معامل المتغير في الصف الأخير)

فإن تلك الزيادة سوف تؤدي إلي أن يظل الحل الحالي حلاً أمثل مع ظهور حلولاً أخري مثلي تحقق نفس الربح .

٣ - إذا كانت الزيادة في ربح الوحدة للمتغير الغير أساسي <

- (معامل المتغير في الصف الأخير)

فإن تلك الزيادة سوف لا تؤدي إلي أي تغيير في الحل الأمثل الحالي .

ويلاحظ هنا أننا قد ركزنا علي زيادة الربح للوحدة، نظراً لأن تخفيض ربح الوحدة للمتغير غير الأساسي لا يترتب عليه أي تغيير علي الإطلاق .

مثـــال :

كان جدول السمبلكس النهائي لأحد حالات تعظيم الربح كما يلي (لا داعي لكل الأرقام في مصفوفة المعاملات لإيضاح المعني) .

ح			٢	٤	٣	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$	ع$_{٣}$
٤	س$_{١}$	٦ $\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٣}$					
٣	س$_{٢}$	١٦ $\frac{٢}{٣}$	$\frac{٥}{٦}$					
صفر	ع$_{٣}$	٢٦ $\frac{٢}{٣}$	$\frac{٥}{٣}$					
ل		٧٦ $\frac{٢}{٣}$	$\frac{٢٣}{٦}$	٤	٣	$\frac{٥}{٦}$	$\frac{٢}{٣}$	صفر
ح - ل			$\frac{١١}{٦}$	صفر	صفر	$-\frac{٥}{٦}$	$-\frac{٢}{٣}$	صفر

والمطلوب:

١ - إيضاح أثر التغير في ربح الوحدة من س$_{١}$ بزيادة قدرها ٣ جنيه .

٢ - إيضاح أثر التغير في ربح الوحدة من $س_١$ بزيادة قدرها $\frac{١١}{٦}$ جنيه.

٣ - إيضاح أثر التغير في ربح الوحدة من $س_١$ بزيادة قدرها ١ جنيه .

الحـــل :

١ - واضح أن زيادة ربح الوحدة في العمود الأول من ٢ إلي خمسة جنيهات سوف تؤدي إلي أن تصبح قيمة ح -ل في العمود $س_١$ = $\frac{٢٣}{٦}$ = $\frac{٧}{٦}$ وهي قيمة موجبة مما يستلزم إدخال $س_١$ في الحل نظراً لأن الحل الحالي سوف لا يصبح حلاً أمثل . وهنا يجب عمل التعديلات الازمة للوصول إلي الحل الأمثل الجديد وذلك حسب الطريقة المعتادة في أسلوب السمبلكس إبتداءاً من الجدول الذي بين أيدينا وهو جدول الحل الأمثل الحالي قبل التغيير .

٢ - واضح أن زيادة ربح الوحدة في العمود الأولي إلي $\frac{١١}{٦}$ ٢ =$\frac{٢٣}{٦}$ سوف يترتب عليه أن تصبح قيمة ح - ل في العمود $س_١$ = $\frac{٢٣}{٦}$ - $\frac{٢٣}{٦}$ = صفر . وحيث أن $س_١$ هي متغير غير أساس فإن ذلك يعني إمكانية تغيير الحل دون التأثير علي الربح . وهذه هي حالة وجود أكثر من حل أمثل .

٣ - من الواضح أن تغير ربح الوحدة إلي ٣ جنيه في العمود $س_١$ سوف يترتب عليه أن قيمة ح - ل في العمود $س_١$ = ٣ - $\frac{٢٣}{٦}$ = - $\frac{١}{٦}$ وهي ما زالت قيمة سالبة . ويعني ذلك أن الحل الأمثل

الحالي هو الحل الأمثل الجديد أيضاً . فكل القيم في الصف الأخير ما زالت قيماً صفرية أو سالبة .

ويهمنا هنا الإشارة إلي أن نفس القواعد الثالثة السابقة صحيحة في حالة تقليل التكايف أيضاً . كما أن الذي يهمنا هو حالة تخفيض تكلفة إنتاج الوحدة من المتغيرات غير الأساسية . وذلك لأن الزيادة في تكلفة الوحدة لا تغير الحل الأمثل . ويمكن صياغة هذه القواعد علي النحو التالي :

١ - إذا كان الإنخفاض في تكاليف الوحدة للمتغير الغير أساسي >

(معامل المتغير في الصف الأخير)

فإن الحل الحالي سوف يتغير إلي حل جديد يدخل فيه هذا المتغير الحل .

٢ - إذا كان الإنخفاض في تكاليف الوحدة للمتغير الغير أساسي =

(معامل المتغير في الصف الأخير)

فإن الحل الحالي سوف يظل حلاً أمثل بالإضافة إلي ظهور أكثر من حلاً أمثل .

٣ - إذا كان الإنخفاض في تكاليف الوحدة للمتغير الغير أساسي <

(معامل المتغير في الصف الأخير)

فإن الحل الحالي سوف يبقي كما هو حلاً أمثل .

(ب) التغيير في مساهمة الوحدة لأحد المتغيرات الأساسية :

نظراً لأن ربح (تكلفة) الوحدة من المتغيرات الأساسية والموجودة في العمود الأول لجدول السمبلكس يستخدم في حساب الصف ل وبالتالي الصف (ح - ل) لكل من أعمدة المتغيرات الأساسية وغير الأساسية . فإن أي تغيير في قيمها سوف يؤدي إلي تغيير في قيم (ح - ل) للمتغيرات غير الأساسية . (لاحظ هنا أن (ح - ل) للمتغيرات الأساسية لن تتأثر لأنها دائماً صفر في جدول الحل الأمثل) . ومن المؤكد أن مقدار هذا التغيير يتوقف علي معاملات أعمدة تلك المتغيرات الغير أساسية . لأن تحديد قيمة ل لكل عمود غير أساسي يتم عن طريق ضرب قيم ربح الوحدة من المتغيرات الأساسية في المعاملات الموجودة في أعمدة المتغيرات غير الأساسية .

وبناء علي ذلك من المحتمل أن نواجه أربعة حالات عند تغيير معامل أحد المتغيرات الأساسية :

التغيير للوحدة	عمود المتغير غير الأساسي	
	به معاملات موجبة	به معاملات سالبة
زيادة في مساهمة الوحدة	يصبح المتغير غير مرغوب أكثر	يصبح المتغير مرغوباً أكثر
تخفيض في مساهمة الوحدة	يصبح المتغير مرغوباً أكثر	يصبح المتغير غير مرغوب أكثر

فإذا أصبح المتغير الغير أساسي غير مرغوب أكثر ، فإنه سوف يظل متغيراً غير أساسياً . ويعني ذلك ، أن الحل الأمثل الحالي سوف

يظل كما هو حتي بعد زيادة مساهمة الوحدة للمتغير الأساسي . وبالتالي فإننا أساساً نهتم بحالة أن يصبح المتغير الغير أساسي متغيراً مرغوباً أكثر لأننا في هذه الحالة قد نغير الحل الأمثل الحالي . ويعني ذلك تفصيلاً :

١ - عند زيادة مساهمة الوحدة للمتغير الأساسي فيجب علينا أن نفحص فقط المتغيرات الغير أساسية التي لها معاملات سالبة في صف ذلك المتغير الأساسي .

٢ - عند تخفيض مساهمة الوحدة للمتغير الأساسي فيجب علينا أن نفحص فقط المتغيرات الغير أساسية التي لها معاملات موجبة في صف ذلك المتغير الأساسي .

ومثال ذلك ... في جدول السمبلكس النهائي الخاص بشركة الأثاث .

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س١	س٢	ع١	ع٢
١٠	س١	٢٠	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	س٢	٥	صفر	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٥	١٠	٩	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح - ل			صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

بفرض أن ربح الوحدة من س ١ قد إرتفع إلي ١٢ جنيه فإننا يجب أن نفحص فقط إحتمال أن ندخل ع ٢ في الحل . أما إذا إنخفض ربح الوحدة من س إلي ٧ جنيهات فإننا يجب أن نفحص فقط إحتمال أن تدخل ع ١ في الحل . كذلك فإن إرتفاع ربح الوحدة من س ٢ إلي ١١ جنيه يقضي أن نفحص أثر إدخال ع ١ في الحل ، وعند إنخفاض ربح الوحدة من س ٢ إلي ٦ جنيهات فإننا يجب أن نفحص إحتمال إدخال ع ٢ في الحل .

والسؤال الآن : هل سوف يؤدي التغير في مساهمة الوحدة من المتغير الأساسي إلي تغير دائماً في الحل الأمثل ؟ بمعني آخر هل هناك مدي ممكن أن تقع فيه قيمة مساهمة الوحدة ويظل الحل الأمثل كما هو؟ الإجابة نعم ... ولنأخذ مثال علي كيفية تحديد هذا المدي .

بفرض أن ربح الوحدة من س ١ قد زاد إلي (١٠ + Δ) فعليا الآن أن نفحص المتغير الغير أساس ع ٢ حسب القاعدة السابقة . ويكون ذلك بحساب ل ، ح − ل الجديدة لهذا المتغير كما يلي :

$$\text{ل} = (١٠ + \Delta)\left(-\frac{١}{٣}\right) + ٩\left(\frac{٥}{١٢}\right)$$

$$= \frac{٥}{١٢} - \frac{١}{٣}\Delta$$

$$\text{، ح} - \text{ل} = \text{صفر} - \left(\frac{٥}{١٢} - \frac{١}{٣}\Delta\right)$$

$$= \frac{١}{٣}\Delta - \frac{٥}{١٢}$$

وإذا أردنا ألا يتغير الحل الأمثل الحالي فإن القيمة المحسوبة للعمود ع ٢ الجديدة يجب ألا تكون رقماً موجبا ويعني ذلك رياضيا :

$$\frac{١}{٣} \Delta - \frac{٥}{١٢} \geq \text{صفر}$$

ومنها $\frac{١}{٣} \Delta \geq \frac{٥}{١٢}$

$$٤ \Delta \geq ٥$$

$$\Delta \geq \frac{٥}{٤} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (١)$$

ويعني ذلك أن الحد الأقصي للزيادة والذي يجعل الحل الأمثل الحالي لا يتغير هو $\frac{٥}{٤}$ ، فإذا زاد ربح الوحدة بمقدر $\frac{٥}{٤}$ فإن الصف (ح – ل) للمتغير ع ١ سوف يصبح صفراً . ويعني ذلك عدم تغير الحل الأمثل الحالي ولكن مع وجود أكثر من حل أمثل . أما زيادة الربح للوحدة بما هو أكثر من $\frac{٥}{٤}$ فسوف تؤدي إلي تغيير الحل الأمثل الحالي .

وبفرض أن ربح الوحدة من س ١ قد إنخفض إلي (١٠ – Δ) فعلينا الآن أن نفحص المتغير الغير أساسي ع ١ حسب القاعدة السابقة. ويكون ذلك بحساب ل ، ح – ل الجديدة لهذا المتغير كما يلي :

$$ل = (١٠ - \Delta) \frac{١}{٣} + ٩ (- \frac{١}{٦})$$

$$= \frac{١١}{٦} - \frac{١}{٣} \Delta$$

ومنها ح - ل = صفر - ($\frac{١١}{٦}$ - $\frac{١}{٣}$ Δ)

= $\frac{١}{٣}$ Δ - $\frac{١١}{٦}$

وحتي يظل ع $_{١}$ خارج الحل فإن :

$$\frac{١}{٣}\Delta - \frac{١١}{٦} \geq \text{صفر}$$

$$\frac{١}{٣}\Delta \geq \frac{١١}{٦}$$

$$٢\Delta \geq ١١$$

$$\Delta \geq \frac{١١}{٢} \quad \text{———— (٢)}$$

ويعني ذلك أن الحد الأقصي للتخفيض والذي يجعل الحل الأمثل الحالي لا يتغير هو $\frac{١١}{٢}$.

ومن (١) ، (٢) يمكن تحديد مدي ربح الوحدة من المتغير س $_{١}$ والذي إذا وقع فيه ربح وحدة س $_{١}$ لا يؤثر ذلك علي الحل الأمثل الحالي، كما يلي :

الحد الأعلي لمساهمة الوحدة = ١٠ + $\frac{٥}{٤}$ = $\frac{٥}{٤}$ ١٠ جنيه .

الحد الأدني لمساهمة الوحدة = ١٠ - $\frac{١١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ٤ جنيه .

وبنفس الإجراءات يمكن تحديد مدي ربح الوحدة من المتغير س $_{٢}$ والذي إذا وقع فيه ربح الوحدة من س $_{٢}$ لا يوثر ذلك علي الحل الأمثل الحالي ، وسوف نجد أنه :

الحد الأعلي لمساهمة الوحدة = ٩ + ١١ = ٢٠ جنيه .

الحد الأدني لمساهمة الوحدة = ٩ - ١ = ٨ جنيه .

واضح من هذا المثال أن الإجراء يعد بسيطاً نسبياً ، ويرجع ذلك أساساً إلي أن هذا المثال المحدود به متغيرين أساسين فقط . أما في حالة وجود أكثر من متغيرين ، فلتحديد قيمة Δ يجب وضع الشروط الخاصة بكل صف إلي جوار بعضها البعض لتحديد قيمة Δ التي تحقق جميع الشروط معاً . ويمكن وضع هذا الإجراء لعام في شكل رياضي بإستخدام الرموز التالية :

$ح_{ن}$ = ربح الوحدة للمتغير الأساسي النوني في جدول الحل النهائي الحالي

$(ل - ح)_{د}$ = القيمة في الصف الأخير للمتغير الغير أساسي الدالي

$ا_{ن د}$ = المعامل الموجود في صف المتغير الأساسي النوني وعمود المتغير الغير أساسي الدالي.

حيث ن = ١ ، ٢ ، ... ، عدد المتغيرات الأساسية

د = ١ ، ٢ ، .... ، عدد المتغيرات الغير أساسية

فإن الحد الأدني لرقم مساهمة الوحدة في المتغير الأساسي :

أكبر القيم ربح الوحدة قيمة الصف الأخير للمتغير غير الأساسي لكل المتغيرات
= (+ ————————————) الغير أساسية > صفر
من بين للمتغير الأساسي المعـــامل عند $ا_{ن د}$

$$= \text{أكبر} \left(ح_ن - \frac{(ل - ح)_د}{أ_{ن د}} \right) \text{لكل المتغيرات الغير أساسية عند } أ_{ن د} > \text{صفر}$$

وكذلك فإن الحد الأقصي لرقم مساهمة الوحدة في المتغير الأساسي :

$$= \text{أقل القيم من بين} \left(\text{ربح الوحدة للمتغير الأساسى} + \frac{\text{قيمة الصف الأخير للمتغير غير الأساسى}}{\text{المعامل}} \right) \text{لكل المتغيرات الغير أساسية عند } أ_{ن د} < \text{صفر}$$

$$= \text{أقل} \left(ح_ن - \frac{(ل - ح)_د}{أ_{ن د}} \right) \text{لكل المتغيرات الغير أساسية عند } أ_{ن د} < \text{صفر}$$

ولنأخذ الآن مثالاً به ثلاثة متغيرات أساسية كما في جدول السمبلكس النهائي التالي :

ح			٥	١٢	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	$س_١$	$س_٢$	$ع_١$	$ع_٢$	$ع_٣$
صفر	$ع_١$	١٠	صفر	صفر	١	−١	٢
٥	$س_١$	١٦	١	صفر	صفر	$\frac{٤}{٥}$	$-\frac{٨}{٥}$
١٢	$س_٢$	١٥	صفر	١	صفر	صفر	١
	ل	٢٦٠	٥	١٢	صفر	٤	٤
ل − ح			صفر	صفر	صفر	−٤	−٤

والمطلوب : تحديد الحد الأدني والأعلي للمتغير $س_١$

الحــل :

حيث أن $ا_{ن د}$ الموجب الوحيد هو $\frac{٤}{٥}$ في أعمدة المتغيرات الغير أساسية في صف $س_{١}$ فإن الحد الأدني :

$$= \left(٥ + \frac{-٤}{\frac{٤}{٥}} \right) = \text{صفر}$$

وكذلك فإن $ا_{ن د}$ السالب الوحيد هو $-\frac{٨}{٥}$ في أعمدة المتغيرات الغير أساسية في صف $س_{١}$ فإن الحد الأعلي :

$$= \left(٥ + \frac{-٤}{-\frac{٨}{٥}} \right) = ٥ + ٢\frac{١}{٢} = ٧\frac{١}{٢}$$

ويعني ذلك أي قيمة لربح الوحدة من المتغير $س_{١}$ بين صفر، $٧\frac{١}{٢}$ سوف لا تؤدي إلي تغيير الحل الأمثل الحالى .

ثالثاً : التغير في معاملات القيود :

ويقصد بذلك تغير عدد الوحدات اللازمة من كل مورد لكل وحدة من المتغيرات . ويعبر عنها بالمعاملات التكنولوجية Technological Coefficients ، نظراً لأن قيمها تكون محكومة إلي حد كبير بنوع التكنولوجيا المستخدمة . ويحدث كثيراً أن تتغير هذه المعاملات نظراً لتغير نوع الآلات أو الأفراد أو لتغير المزيج المستخدم من كل من الالات والأفراد . وفي هذه الحالة يهتم متخذ القرار بتأثير هذا التغير علي الحل الأمثل .

يتوقف هذا التأثير علي ما إذا كان المعامل خاص بمتغيراً غير أساسياً أم يخص متغيراً أساسياً .

(أ) التغير في معامل متغير غير أساسي :

إذا تغير المعامل الخاص بأحد المتغيرات الغير أساسية في أحد القيود في المشكلة الأصلية فإن ذلك لن يؤثر علي الوصول إلي الحل النهائي الذي توصلت إليه قبل التغيير ، بمعني أن الحل المثالي السابق سوف يكون دائماً حلاً ممكناً (وليس بالضرورة أمثل) بعد التغيير . وطالما أن هذا المتغير هو متغيراً غير أساسياً فيجب التأكد من أثر التغيير في المعامل علي الرقم الموجود في الصف قبل الأخير الخاص بهذا المتغير . فإذا أصبح رقماً موجباً فإن ذلك يعني أن الحل الحالي (الذي كان أمثلاً والذي هو ممكن) ليس حلاً أمثل ويجب عمل خطوة أخري للوصول إلي الحل الأمثل .

ولذلك فإننا يمكننا مبدئياً تحديد أثر التغير علي الحل الحالي كما يلي :

في جدول السمبلكس النهائي التالي :

ح			٢	٤	٣	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$ع_١$	$ع_٢$	$ع_٣$
٤	$س_٢$	$٦ \frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٣}$			$\frac{١}{٣}$		
٣	$س_٣$	$١٦ \frac{٢}{٣}$	$\frac{٥}{٦}$			$-\frac{١}{٦}$		
صفر	$ع_٣$	$٢٦ \frac{٢}{٣}$	$-\frac{٥}{٣}$			$-\frac{٢}{٣}$		
ل		$٧٦ \frac{٢}{٣}$	$\frac{٢٣}{٦}$	٤	٣	$\frac{٥}{٦}$	$\frac{٢}{٣}$	صفر
ح - ل			$-\frac{١١}{٦}$	صفر	صفر	$-\frac{٥}{٦}$	$-\frac{٢}{٣}$	صفر

* لا تحتاج إلي القيم الغير واردة بالجدول لأنها سوف لا تتغير.

بفرض أن القيد الأول ٣ $س_١$ + ٤ $س_٢$ + ٢ $س_٣$ ≥ ٦٠. الخاص بهذه المشكلة قد تغير إلي ٥ $س_١$ + ٤ $س_٢$ + ٢ $س_٣$ ≥ ٦٠

فإن التغير الذي سوف يطرأ علي جدول الحل النهائي الجديد يمكن حسابه بإستخدام العمود $ع_١$ والعمود $س_١$ وذلك علي أساس أن:

Δ = ٥ - ٣ = ٢ = مقدار التغير في المعامل .

الصف	المعاملات القديمة في العمود س ١	المعاملات في العمود ع ١	المعاملات الجديدة في العمود س ١
س ٢	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣} + ٢ (\frac{١}{٣}) = ١$
س ٣	$\frac{٥}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{٦} - ٢ (\frac{١}{٦}) = \frac{٣}{٦}$
ع ٣	$-\frac{٥}{٣}$	$-\frac{٢}{٣}$	$-\frac{٥}{٣} - ٢ (\frac{٢}{٣}) = -٣$

وبذلك يصبح الجدول الجديد هو :

ح			٢	٤	٣	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س ١	س ٢	س ٣	ع ١	ع ٢	ع ٣
٤	س ٢	$٦\frac{٢}{٣}$	١			$\frac{١}{٣}$		
٣	س ٣	$١٦\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٢}$			$-\frac{١}{٦}$		
صفر	ع ٣	$٢٦\frac{٢}{٣}$	-٣			$-\frac{٢}{٣}$		
ل		$٧٦\frac{٢}{٣}$	$\frac{١١}{٢}$	٤	٣	$\frac{٥}{٦}$	$\frac{٢}{٣}$	صفر
ح − ل			$-\frac{٧}{٢}$	صفر	صفر	$-\frac{٥}{٦}$	$-\frac{٢}{٣}$	صفر

ويلاحظ علي هذا الجدول أن الحل القديم لم يتغير ويعني ذلك أن هذا الحل هو حلاً ممكناً feasible . كذلك فإن التغير الوحيد هو التغير في معاملات العمود الخاص بالمتغير الغير أساسي س ١ . لاحظ الآن

أننا قلنا أن هذا الحل الحالي ممكناً ولم نقل أمثل . وللتأكد من أنه أمثل يجب أن نحسب قيمة (ح - ل) الجديدة لمتغير $س_١$ في الجدول الأخير . وهي :

$$= ٢ - (٤ \times ١ + ٣ \times \frac{١}{٢} + صفر) = - \frac{١}{٢} ٣$$

وهي رقماً سالباً وذلك يعني أن الحل الأمثل السابق لم يتغير والحل الجديد هو تماماً الحل القديم . ولكن ذلك لا يعني دائماً أن الحل الأمثل الجديد بعد التغير سوف يظل كما هو . ولذلك يأتي السؤال الهام المشابه لمعظم تحليلات الحساسية السابقة : ما هو المدي الذي يمكن أن تقع فيه قيمة المعامل لأحد المتغيرات غير الأساسية دون أن يؤثر ذلك علي الحل الأمثل ؟

للإجابة علي هذا يمكن التعويض عن (٥ - ٣) بالقيمة Δ حتي تعبر عن قيمة التغير بشكل عام ، وبذلك فإن القيد الأول

$$٣ س_١ + ٤ س_٢ + ٢ س_٣ \leq ٦٠$$

سوف يصبح

$$(٣ + \Delta) س_١ + ٤ س_٢ + ٢ س_٣ \leq ٦٠$$

والقيم الجديدة في عمود المتغير $س_١$ في الجدول الجديد سوف تصبح :

الصف	المعاملات القديمة في العمود س ١	المعاملات في العمود ع ١	المعاملات الجديدة في العمود س ١
س ٢	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}\Delta$
س ٣	$\frac{٥}{٦}$	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{٦} - \frac{١}{٦}\Delta$
ع ٢	$-\frac{٥}{٣}$	$-\frac{٢}{٣}$	$-\frac{٥}{٣} - \frac{٢}{٣}\Delta$

ومنها يمكن حساب ل ، ح − ل الخاصة بالعمود س ١

$$\text{ل} = ٤\left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}\Delta\right) + ٣\left(\frac{٥}{٦} - \frac{١}{٦}\Delta\right) + \text{صفر}$$

$$= \frac{٢٣}{٦} - \frac{١}{٦}\Delta$$

$$\text{ح} - \text{ل} = ٢ - \left(\frac{٢٣}{٦} - \frac{١}{٦}\Delta\right)$$

$$= -\frac{١١}{٦} + \frac{١}{٦}\Delta$$

فإذا رغبنا في ألا يتغير الحل الأمثل الحالي فإن الشرط هو :

$$\frac{١}{٦}\Delta - \frac{١١}{٦} \le \text{صفر}$$

$$\frac{١}{٦}\Delta \le \frac{١١}{٦}$$

ويعني ذلك $\Delta \le ١١$

وطالما أن القيمة الجديدة للمعامل = ٣ + Δ

Δ = القيمة الجديدة – ٣

فإن (القيمة الجديدة – ٣) ≤ ١١

∴ القيمة الجديدة ≤ ١٤

ويعني ذلك أنه طالما أن القيمة الجديدة للمعامل الخاص بالمتغير س ١ في القيد الأول ≤ ١٤ فإن الحل الأمثل الحالي سوف لا يتغير بسبب تغير قيمة المعامل . أما إذا أصبح المعامل الجديد أكبر من ١٤ فإن (ح – ل) سوف تصبح رقماً موجباً ويعني ذلك أن الحل السابق ليس هو الحل الأمثل ، ويجب عمل خطوة واحدة إضافية عليه هدفها إدخال س ١ في الحل للوصول إلي الحل الأمثل الجديدة .

(ب) التغير في معامل متغير أساسي :

يعد تحليل أثر التغير في معامل أحد المتغيرات الأساسية في أحد القيود أكثر صعوبة وتعقيداً من كل الحالات السابقة . ويرجع ذلك إلي خاصية أساسية وهي أن قيمة المتغير الأساسي في جدول السمبلكس النهائي تكون قيمة موجبة وعلي ذلك فإن تغير المعامل الخاص بها سوف يكون له تأثير ما علي قيم المتغيرات الأساسية الأخري في الحل النهائي . ويترتب ذلك أن الحل الجديد يجب التأكد من أنه ممكناً feasibility كما يجب التأكد أنه ما زال حلاً أمثل optimality .

والخطوة الأولي ، هي أن نحسب المعاملات الجديدة للمتغير

الأساسي الذي يتغير معامله بنفس الطريقة التي قمنا بها في حالة المتغير الغير أساسي . دعنا نأخذ مثال حتي يمكن إيضاح ذلك :

في جدول السمبلكس النهائي الخاص بمكشلة الأثاث التالي :

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	ح ١٠ $س_1$	 ٩ $س_2$	 صفر $ع_1$	 صفر $ع_2$
١٠	$س_1$	٢٠	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	$س_2$	٥	صفر	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
	ل	٢٤٥	١٠	٩	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
	ح - ل		صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

بفرض أن القيد الأول ٥ $س_1$ + ٤ $س_2$ $\geq$ ١٢٠

قد تغير إلي ٦ $س_1$ + ٤ $س_2$ $\geq$ ١٢٠

والمطلوب : إيضاح أثر ذلك علي الحل الأمثل الحالي .

لتحديد أثر ذلك نبدأ بتحديد معاملات المتغير $س_1$ في عمود $س_1$ في جدول السمبلكس الأخير كما يلي :

الصف	المعاملات القديمة في العمود $س_1$	المعاملات في العمود $ع_1$	المعاملات الجديدة في العمود $س_1$
$س_1$	١	$\frac{١}{٣}$	١ + $\frac{١}{٣}$ (١) = $\frac{٤}{٣}$
$س_2$	صفر	$-\frac{١}{٦}$	صفر - $\frac{١}{٦}$ (١) = $-\frac{١}{٦}$

وذلك علي أساس أن Δ = ٦ - ٥ = + ١

ويذلك فإن الجدول التالي الجديد يكون :

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س$_{١}$	س$_{٢}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$
١٠	س$_{١}$	٢٠	$\frac{٤}{٣}$	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	س$_{٢}$	٥	$-\frac{١}{٣}$	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$

ولكن هذا الجدول لا يحقق شرط المتغير الأساسي الذي يجب أن يكون عموده أحد مكونات أعمدة مصفوفة الوحدة . ولذلك نقوم بعمل تغيير بإستخدام بعض العمليات الرياضية من شأنه أن يجعل العمود س$_{١}$ به (١) ، (صفر) في الصف الأول والثاني علي التوالي .

وتكون نتيجته ما يلي :

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س$_{١}$	س$_{٢}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$
١٠	س$_{١}$	١٥	١	صفر	$\frac{١}{٤}$	$-\frac{١}{٤}$
٩	س$_{٢}$	١٠	صفر	١	$-\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٣}$
ل		٢٤٠	١٠	٩٠	$\frac{٢١}{١٢}$	$\frac{٦}{١٢}$
ح - ل			صفر	صفر	$-\frac{٢١}{١٢}$	$-\frac{٦}{١٢}$

وبإختيار مثالية الحل يتضح أن ذلك هو حلاً أمثل وفيه :

$س_{١} = ١٥$

$س_{٢} = ١٠$

ع $_{١}$ = صفر

ع $_{٢}$ = صفر

وربح الحل الأمثل = ٢٤٠

الثنـــــائية

Duality

(الوجه الآخر لمشكله البرمجة الخطية)

يعني لفظ الثنائية في مجال البرمجة الخطية أن كل مشكلة برمجة خطية يمكن صياغتها رياضياً بطريقتين . أما الأولي فهي الطريقة المعتادة التي ذكرناها في الأجزاء السابقة ، والتي عادة ما يطلق عليها الطريقة الأصلية primal . والثانية هي الوجه الآخر للصياغة الأولية والتي يطلق عليها الصيغة الثنائية dual . التي تفضل أن يطلق عليها في اللغة العربية صياغة الوجه الاخر . ويرجع ذلك إلي أننا نبدأ عادة بالصيغة الأصلية ثم نصل إلي صياغتها علي الوجه الآخر . فكل صياغة أصلية يمكن صياغتها علي الوجه الآخر . ومثال ذلك ، أن كل مشكلة تعظيم لربح يمكن صياغتها كمشكلة لتقليل التكاليف . كما أن مشكلة تقليل التكاليف يمكن النظر إليها علي أنها مشكلة تعظيم كفاءة إستخدام الموارد المتاحة . وعلي العموم سوف نستخدم إصطلاحي الثنائية والوجه الآخر للتعبير عن ذات الشيء .

ولقد تناولنا في الفصول السابقة عملية الوصول إلي الحل الأمثل للصياغة الأصلية . وطالما أن ذات المشكلة يمكن صياغتها علي وجه آخر dual فإن الحل الذي نصل إليه لحل الصيغة الثنائية dual يكون هو ذات الحل الذي نصل إليه بحل الصيغة الأصلية . فالأمر هو مجرد إختلاف في طريقة الصياغة . كذلك فإن المشكلة التي تصاغ علي

الوجه الآخر ، إذا تم صياغتها حسب الوجه الآخر لذلك الوجه الآخر dual of a dual سوف تكون هي بالتمام الصياغة الأصلية primal . فكأنك قمت بقلب نفس العملة مرتين .

ويتبادر إلي الذهب الآن التساؤل حول الأسباب التي قد تدعو إلي إستخدام عملية الصيغة الثنائية عند حل مشكلة البرمجة الخطية. هناك سببين رئيسيين لذلك هما (أ) أن مشكلة الثنائية تقدم بيانات ذو أهمية خاصة عند عمل التحليل الإقتصادي لمشكلة البرمجة الخطية، و (ب) تستلزم مشكلة الثنائية عند حلها خطوات رياضية أقل تعقيداً من الخطوات اللازمة لحل الصيغة الأصلية للمشكلة . ويرجع ذلك إلي إنخفاض عدد جداول السمبلكس اللازمة قبل الوصول إلي الحل الأمثل كما سنري في الأمثلة القادمة .

العلاق بين الصياغة الأصلية وصياغة الوجه الآخر :

لإيضاح تلك العلاقة يجب أن نبدأ بمثال :

مثـــال :

بإستخدام الصياغة الأصلية التالية لمشكلة الأثاث في المثال (١ - ١) .

$$\text{عظم } ز = ١٠ س_١ + ٩ س_٢$$

$$\text{في ظل القيود } ٥ س_١ + ٤ س_٢ \geq ١٢٠$$

$$٢ س_١ + ٤ س_٢ \geq ٦٠$$

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≥ صفر

ضع صياغة الوجه الآخر الممكنة لهذه المشكلة .

الحـــل :

صياغة الوجه الاخر (الصيغة الثنائية) هي :

قلل ت = ١٢٠ ص$_{١}$ + ٦٠ ص$_{٢}$

القيود ٥ ص$_{١}$ + ٢ ص$_{٢}$ ≥ ١٠

٤ ص$_{١}$ + ٤ ص$_{٢}$ ≥ ٩

ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ ≥ صفر

ويلاحظ علي هذه الصياغة ما يلي :

١ - إن دالة الهدف الجديدة في صيغة الوجه الآخر هي دالة تقليل تكاليف نظراً لأن دالة الهدف الأصلية هي دالة تعظيم ربح . وعلي ذلك فإن دالة الهدف الجديدة تكون دائماً عكس دالة الهدف الأصلية .

٢ - إن عدد القيود اللازمة في الصيغة الثنائية يعادل تماماً عدد المتغيرات الموجودة في الصيغة الأصلية . فقد كان لدينا متغيرين س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ولذلك يصبح لدينا قيدين فقط في الصيغة الثنائية . وعلي ذلك إذا بدأنا في الصياغة الأصلية بثلاث

متغيرات فإن عدد القيود في الصيغة الثنائية يجب أن يكون ثلاثة حتي إذا كان عدد القيود في الصياغة هو إثنين فقط .

٣ - إن عدد المتغيرات اللازمة في الصيغة الثنائية يعادل تماماً لعدد القيود الموجودة في الصيغة الأصلية . فالمتغيرات الجديدة في صيغة الوجه الآخر هي ص ١ ، ص ٢ نظراً أن الصياغة الأصلية بها قيدين فقط . ويمكن تعريف هذه المتغيرات علي النحو التالي :

ص ١ = القيمة الحدية لوحدة واحدة من الأخشاب المتاحة للإستخدام .

ص ٢ = القيمة الحدية لساعة واحدة من ساعات العمل المتاحة للإستخدام .

٤ - إن قيم مساهمة الوحدة في دالة الهدف الجديدة للمتغيرات الجديدة ص ١ ، ص ٢ هي بالتمام إجمالي الموارد المتاحة من كل عنصر والموجودة في الطرف الأيسر من القيود حسب الصياغة الأصلية . وهما ١٢٠ ، ٦٠ علي التوالي .

٥ - الطرف الأيسر من متباينات القيود في الصياغة الثنائية هي تماماً قيم مساهمة الوحدة في دالة الهدف في الصياغة الأصلية للمشكلة . وهما ١٠ ، ٩ علي التوالي .

٦ - قيم المعاملات الموجودة في القيود حسب الصياغة الأصلية يتم إستخدامها ولكن بعد عكس المصفوفة . ويعني ذلك أن الصف

الأول (الطرف الأيمن من القيد) في الصياغة الثنائية يستخدم القيم الموجودة في العمود الأول في الصياغة الأصلية . ويستخدم الصف الثاني (الطرف الأيمن من القيد الثاني) في الصيغة الثنائية نفس القيم الموجودة في العمود الثاني في الصياغة الأصلية ، وهكذا .

معني الصياغة الجديدة :

بتأمل القيد الأول في صيغة الثنائية نجد أن الجانب الأيمن يعبر عن إجمالي تكلفة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من السلعة الأولي س ١ . حيث أن الوحدة الواحدة من س ١ تستلزم خمسة وحدات من الأخشاب والتي تبلغ القيمة الحدية للوحدة منها ص ١ ، كما تستلزم أيضاً وحدتين من ساعات العمل والتي تبلغ القيمة الحدية للوحدة منها ص ٢ . أما الجانب الأيسر فهو يعبر عن ربح الوحدة من السلعة الأولي وهو ١٠ جنيهات . وعلي ذلك فإن القيد الأول يضع قيداً علي إنتاج س ١ . فلا نبدأ في إنتاجها إلا إذا كان إجمالي تكلفة الموارد المستخدمة في إنتاج الوحدة منها يعادل أو يقل عن الربح الممكن تحقيقه من الوحدة .

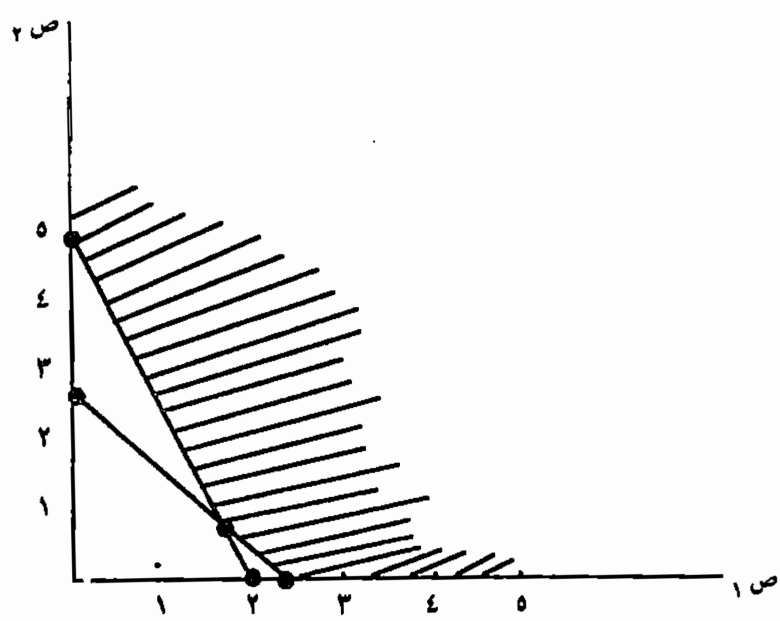
وبنفس المنطق فإن الوحدة الواحدة من السلعة س ٢ سوف تستلزم موارد تكلفتها المستخدمة الإجمالية هي ٤ ص ١ + ٤ ص ٢ . ويعني القيد الثاني ألا يتم إنتاج وحدة من السلعة الثانية ألا إذا كانت

التكلفة الإجمالية للموارد المستخدمة في إنتاجها تقل عن أو تساوي ربح الوحدة المتوقع وهو ٩ .

أما دالة الهدف في الصياغة الثنائية فإنها تهدف إلي تقليل إجمالي تكلفة الموارد المستخدمة في الإنتاج ككل . فالجزء الأول منها يعبر عن عدد الوحدات المتاحة من الأخشاب مضروباً في القيمة الحدية للوحدة . وبالتالي فهو يعبر عن إجمالي تكلفة الأخشاب . كذلك فإن الجزء الثاني يعبر عن إجمالي تكلفة العمالة .

حل الصيغة الثنائية بيانياً :

بإستخدام الأسلوب البياني المعتاد للبرمجة الخطية يمكن الوصول إلي الحل الأمثل للصيغة الجديدة علي النحو التالي :



نقط التقاطع الركنية	التكاليف حسب دالة الهدف	
صفر ، ٥	٣٠٠	
$\frac{١١}{٩}$ ، $\frac{٥}{١٢}$	٢٤٥	الحل الأمثل
$٢\frac{١}{٤}$ ، صفر	٢٧٠	

وبتأمل هذا الحل نجد أن التكلفة التي تعبر عن أقل تكلفة ممكنة وهي ٢٤٥ جنيهاً تعادل تماماً الربح الأمثل المحقق في حالة حل المشكلة الأصلية بإستخدام الرسم البياني فيما سبق .

حل الصيغة الثنائية بإستخدام أسلوب السمبلكس :

يمكن حل مشكلة الثنائية بإستخدام السمبلكس بعد إضافة متغيرات العطل والمتغيرات الوهمية علي النحو التالي :

$$ت = ١٢٠ ص_{١} + ٦٠ ص_{٢} + صفر ع_{١} + صفر ع_{٢} + م و_{١} + م و_{٢}$$

القيــــود :

$$٥ ص_{١} + ٢ ص_{٢} - ع_{١} + صفر ع_{٢} + و_{١} + صفر و_{٢} = ١٠$$

$$٤ ص_{١} + ٤ ص_{٢} + صفر ع_{١} - ع_{٢} + صفر و_{١} + و_{٢} = ٩$$

$$ص_{١} ، ص_{٢} ، ع_{١} ، ع_{٢} ، و_{١} ، و_{٢} \geq صفر$$

جدول السمبلكس المبدئي

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	ص١	ص٢	ع١	ع٢	و١	و٢
ت			١٢٠	٦٠	صفر	صفر	م	م
م	و١	١٠	(٥)	٢	-١	صفر	١	صفر
م	و٢	٩	٤	٤	صفر	-١	صفر	١
ت الحل ل		١٩م	٩م	٦م	-م	-م	م	م
ت - ل			١٢٠-٩م	٦٠-٦م	م	م	صفر	صفر

جدول السمبلكس الثاني

ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	ص١	ص٢	ع١	ع٢	و١	و٢
ت			١٢٠	٦٠	صفر	صفر	م	م
١٢٠	ص١	٢	١	٢/٥	-١/٥	صفر	١/٥	صفر
م	و٢	١	صفر	(١٢/٥)	٤/٥	-١	-٤/٥	١
ل		٢٤٠+م	١٢٠-	٤٨+١٢/٥م	٤/٥م -٤٨	-م	٤٨-٤/٥م	م
ت - ل			صفر	١٢-١٢/٥م	٤٨-٤/٥م	م	٩/٥م -٤٨	صفر

جدول السمبلكس النهائي للصيغة الثنائية

ت			١٢٠	٦٠	صفر	صفر	م	م
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	ص١	ص٢	ع١	ع٢	و١	و٢
١٢٠	ص١	١١/٦	١	صفر	- ١/٣	١/٦	١/٣	- ١/٦
٦٠	ص٢	٥/١٢	صفر	١	١/٣	- ٥/١٢	- ١/٣	٥/١٢
ل		٢٤٥	١٢٠	٦٠	- ٢٠	- ٥	٢٠	٥
ت - ل			صفر	صفر	٢٠	٥	م - ٢٠	م - ٥

وسوف نقارن نتائج هذا الجدول الأخير مع جدول السمبلكس النهائي التالي والذي توصلنا إليه عند حل الصيغة الأصلية لنفس المشكلة والذي فضلنا أن نورده هنا مرة أخري لأغراض المقارنة .

جدول السمبلكس النهائي للصيغة الأصلية

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س١	س٢	ع١	ع٢
١٠	س١	٢٠	١	صفر	١/٣	- ١/٣
٩	س٢	٥	صفر	١	- ١/٦	٥/١٢
ل		٢٤٥	١٠	٩	١١/٦	٥/١٢
ح - ل			صفر	صفر	- ١١/٦	- ٥/١٢

توضح المقارنة بين الجدولين الأخيرين ما يلي :

١ - إن قيم المتغيرات $ص_١$ ، $ص_٢$ التي تم التوصل إليها عند حل الصياغة الثنائية هي بالضبط القيم المطلقة لمعاملات المتغيرات $ع_١$ ، $ع_٢$ في الصف ح - ل من جدول حل الصيغة الأصلية . وهذه القيم هي ما أوضحنا سابقاً أنها أسعار الظل shadow prices للمتغيرات الأصلية $س_١$ ، $س_٢$. وعلي ذلك فإن حل صياغة الثنائية يؤدي إلي الوصول إلي أسعار الظل للمتغيرات الأصلة . وهذه القيم هي $\frac{١١}{٦}$ ، $\frac{٥}{١٢}$ علي التوالي .

٢ - إن قيم المتغيرات $س_١$ ، $س_٢$ التي تم التوصل إليها عند حل الصياغة الأصلية هي بالضبط ذات القيم التي توصلنا إليها في الصف ح - ل للمتغيرات $ع_١$ ، $ع_٢$. أي أنها أسعار الظل للمتغيرات $ص_١$ ، $ص_٢$. وعلي ذلك فإن حل صياغة الثنائية يؤدي إلي الوصول إلي قيم المتغيرات الأصلية $س_١$ ، $س_٢$ أيضاً ولكن تظهر كأسعار ظل لمتغيرات $ص_١$ ، $ص_٢$. وهذه القيم هي ٢٠ ، ٥ علي التوالي .

٣ - هناك علاقة بين مصفوفة المتغيرات $ع_١$ ، $ع_٢$ في جدول السمبلكس النهائي للصيغة الأصلية ومصفوفة المتغيرات $ع_١$ ، $ع_٢$ في جدول السمبلكس النهائي للصيغة الثنائية . فالصف في الأولي هو عمود في الثانية ولكن بإشارة مغايرة . فمثلاً الصف

$\frac{١}{٣}$ ، - $\frac{١}{٣}$ في الجدول الأول هو العمود - $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ في الجدول الآخر .

٤ - رقم الربح في حل الصيغة الأصلية هو ذات رقم التكاليف الذي تم التوصل إليه في حل الصيغة الثنائية . وهذه القيمة هي ٢٤٥ في الحالتين .

ويتضح من ذلك أن نفس معلومات الجدول النهائي لصيغة الثنائية يمكن الحصول عليها مباشرة من الجدول النهائي للصيغة الأصلية . ويشترط لذلك فقط تفهم العلاقة بينهما كما أوضحناها . والسؤال الأهم الآن هو ... لماذا نلجأ إلي إستخدام أسلوب الثنائية إذن إذا كانت لدينا نفس المعلومات من حل المشكلة الأصلية ؟ الإجابة تكمن في أسلوب الوجه الآخر للسمبلكس dual simplex .

أسلوب الوجه الآخر للسمبلكس :

أوضحنا حتي الآن أنه عند إستخدام أسلوب السمبلكس المعتاد في حالة وجود قيود بها $\leq$ أو = فإننا يجب أن نستخدم أسلوب المتغيرات الوهمية و$_{١}$ ، و$_{٢}$ والقيمة الكبري م في عملية الصياغة والحل . ولكن هناك أسلوب آخر أكثر سهولة يمكن إستخدامه وهو لا يستلزم إضافة متغيرات وهمية وعلي الرغم من أن هذا الأسلوب يبدو مغايراً لأسلوب السمبلكس المعتاد حيث أنه يبدأ بحلاً مبدئياً فيه قيم المتغيرات من الممكن أن تأخذ قيماً سالبة ، إلا أنه يضمن أن يكون ذلك عملية مرحلية تبدأ من حلاً غير ممكناً إلي حلاً ممكناً وأمثل .

مثـال :

قلل ت = ٨ س$_{١}$ + ١٠ س$_{٢}$

القيود ٣ س$_{١}$ + ٣ س$_{٢}$ ≥ ٣٠

٤ س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$ ≥ ٢٤

س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$ ≥ ١٢

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≥ صفر

الحــل :

قلل ت = ٨ س$_{١}$ + ١٠ س$_{٢}$ + صفرع$_{١}$ + صفرع$_{٢}$ + صفرع$_{٣}$

القيود : ٣ س$_{١}$ + ٣ س$_{٢}$ − ع$_{١}$ + صفرع$_{٢}$ + صفرع$_{٣}$ = ٣٠

٤ س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$ + صفرع$_{١}$ − ع$_{٢}$ + صفرع$_{٣}$ = ٢٤

س$_{١}$ + ٢ س$_{٢}$ + صفرع$_{١}$ + صفرع$_{٢}$ − ع$_{٣}$ = ١٢

بإهمال فرض عدم السالبية وضرب القيود في (−) يكون لدينا:

عظم − ت = − ٨ س$_{١}$ − ١٠ س$_{٢}$ − صفرع$_{١}$ − صفرع$_{٢}$ − صفرع$_{٣}$

القيود : − ٣ س$_{١}$ − ٣ س$_{٢}$ + ع$_{١}$ − صفرع$_{٢}$ − صفرع$_{٣}$ = −٣٠

$$- ٤ س_١ - ٢ س_٢ - صفر ع_١ + ع_٢ - صفر ع_٣ = -٢٤$$

$$س_١ - ٢ س_٢ - صفر ع_١ - صفر ع_٢ + صفر ع_٣ = -١٢$$

ويكون جدول السمبلكس المبدئي كما يلي :

ت			- ٨	- ١٠	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س ١	س ٢	ع ١	ع ٢	ع ٣
صفر	ع ١	- ٣٠	(-٣)	- ٣	١	صفر	صفر ←
صفر	ع ٢	- ٢٤	- ٤	- ٢	صفر	١	صفر
صفر	ع ٣	- ١٢	- ١	- ٢	صفر	صفر	١
ل		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ت - ل			- ٨ ↑	- ١٠	صفر	صفر	صفر

وبتأمل الجدول الحالي نجد أن الحل الوارد به ليس حلاً ممكناً حيث أن قيم المتغيرات قيماً سالبة ولذلك يجب تعديل هذا الحل .

لتحديد المتغير الذي يترك الحل يجب النظر إلي القيم السالبة للمتغيرات الأساسية . ونبدأ بإختيار المتغير ذو القيمة الأكثر سالبية largest negative حيث أنها عند خطأ أكبر في البعد عن الحل الممكن. وفي مثالنا هذا هي القيمة الموجودة في الصف ع ١ حيث أن القيمة هي - ٣٠ .

لتحديد المتغير الذي سوف يدخل الحل بدلاً من ع ١ يتم إستخدام عملية القسمة التالية وإختيار أقل القيم كما يلي :

المتغيرات غير الأساسية	ت - ل (١)	القيم المناظرة في صف ع ١ (٢)	(١) ÷ (٢)
عمود س ١	- ٨	- ٣	$\frac{٨}{٣}$
عمود س ٢	- ١٠	- ٣	$\frac{١٠}{٣}$

نجد أن المتغير س ١ يجب أن يدخل الحل بدلاً من ع ١ وبالتالي فإن الرقم المحور يكون هو (- ٣) .

ثم نقوم بعمل التعديلات للوصول إلي الجدول الثاني التالي :

ت			- ٨	- ١٠	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س ١	س ٢	ع ١	ع ٢	ع ٣
- ٨	س ١	١٠	١	١	- $\frac{١}{٣}$	صفر	صفر
صفر	ع ٢	١٦	صفر	٢	- $\frac{٤}{٣}$	١	صفر
صفر	ع ٣	- ٢	صفر	(- ١)	- $\frac{١}{٣}$	صفر	١
ل		- ٨٠	- ٨	- ٨	$\frac{٨}{٣}$	صفر	صفر
ت - ل			صفر	- ٢	- $\frac{٨}{٣}$	صفر	صفر

وهذا ليس حلاً ممكناً ولذلك نقوم بإخراج ع ٣ من الحل .ولتحديد المتغير

المتغيرات غير الأساسية	ت - ل	القيم المناظرة في صف ع١	(١) ÷ (٢)
س١	- ٢	- ١	٢
س٢	- ٨/٣	- ١/٣	٨

الذي يدخل الحل نقوم بتكرار الخطوات كما هو موضح . ومنها يتضح أن س٢ يجب أن يدخل الحل وبالتالي فإن جدول السمبلكس التالي يكون هو :

ح			- ٨	- ١٠	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س١	س٢	ع١	ع٢	ع٣
- ٨	س١	٨	١	صفر	- ١/٣	صفر	١
صفر	س٢	١٢	صفر	صفر	- ٢	١	٢
- ١٠	س٣	٢	صفر	١	١/٣	صفر	- ١
ح		- ٨٤	- ٨	- ١٠	٢	صفر	٢
ح - ل			صفر	صفر	- ٢	صفر	- ٢

وحيث أن كل قيم المتغيرات الأساسية في الحل موجبة فإن ذلك حلاً ممكناً ، وكذلك فإن كل القيم في الصف ح - ل قيماً غير موجبة وهذه مشكلة تعظيم (- ت) فإذا هذا هو الحل الأمثل .