الفصل الرابع

جـــدولة المشـــروع

* تحليل شبكات الأعمـال

* أهم التطبيقات

* الخصائص الأساسية اللازمة لهذه المشروعات

* أهم الاصطلاحات

* أسلوب المسار الحرج CPM

تخفيض وقت إتمام المشروع (تحليل التكاليف)

* مراجـع الفصـل

جـــدولة المشـــــروع

Project Scheduling

تحليل شبكات الأعمال Network Anaysis

ظهرت في نهاية الخمسينيات مجموعة من أساليب شبكات الأعمال وأهمها أسلوبي PERT,CPM. أما الأول فهو أسلوب المسار الحرج Critical Path Method والمعروف باختصار CPM، والثاني هو أسلوب تقييم ومراجعة البرامج Program Evaluation & Review Te-chingue والمعروف باختصار بيرت ويشكل عام ، يهدف كلا من الأسلوبين إلي تقديم مدخل بياني لجدولة وتخطيط المشروع يساعد مدير المشروع في تصور الأنشطة اللازمة والوقت المتوقع لإنجازها وتحديد العلاقات الفنية بينها ، وبالتالي تقدير الوقت للإنتهاء من المشروع . كذلك فإن كلا منهما يمكن من متابعة monitoring تقدم التنفيذ في الأنشطة للتعرف علي سير الأداء والكشف عن الاختناقات واتخاذ الإجراءات اللازمة لضمان حسن سير الأداء . وعلي وجه التحديد يحاول كلا من الأسلوبين الإجابة علي الأسئلة التالية :

١ ـ ما هو أقل وقت موقع يلزم لإتمام المشروع ككل ؟

٢ ـ ماهي الأنشطة التي تعد «حرجة » بالنسبة لمراحل إنجاز المشروع .

٣ ـ ما هو المسارالحرج ؟ وكيف يمكن تحديده .

٤ ـ ما هو أفضل جدول تشغيل (تواريخ البدء والإنتهاء) للأنشطة اللازمة للمشروع .

٥ ـ كيف يمكن ضغط وقت اتمام المشروع ؟ وما هي التكلفة الإضافية المترتبة علي ذلك .

وقد أصبح شائعا الآن استخدام اسلوب شبكات الأعمال في مجالات عديدة يصعب حصرها ، ومنها علي سبيل المثال .

١ ـ عمليات إنشاء المباني ، سواء كان ذلك للأسكان أو بناء الكباري والطرق والمصانع والمدارس والأنفاق والفنادق .

٢ ـ عملية ادخال منتج جديد فى السوق ، والذي عادة ما يمر بمراحل مختلفة تبدأ من ظهور الفكرة وتنتهي بالتصميم النهائي ووضع سياساته التسويقية .

٣ ـ عملية ادخال نظم المعلومات information Systems في الشركات ونظم الكومبيوتر بالمنشأة .

٤ ـ مشروعات الأبحاث والتطوير Research & Devvlopment التي تقوم بها الشركات سواءاً في مجالات التكنولوچيا أو التغيير الاداري والتنظيمي .

٥ـ جدولة عملية بناء السفن والطائرات وناقلات البترول وسفن الفضاء .

٦ ـ عمليات تصنيع وتجميع وإنشاء محطات الكهرباء الـ؛بيرة وعمليات مد خطوط أنابيب الغاز والبترول .

٧ ـ برامج ادخال نظم للدفاع عن الجيش وبرامج انتاج الأسلحة والصواريخ .

٨ ـ عمليات تخطيط إنشاء المدن الجديدة واستصلاح الأراضى.

٩ ـ تخطيط برامج الصيانة وجدولتها .

أهم الاصطلاحات المستخدمة في تحليل شبكات الأعمال :

النشاط activity هو جزء محدد من المشروع والذي يستلزم اتمامه وقت معين . ومثال علي تلك الأنشطة : تجهيز أمر الشراء ، ارساء القواعد والأساسات لمنزل ، إدارة مفتاح تشغيل السيارة . ،،، الخ .

الحدث event هو لحظة بدء أو إتمام لنشاط أو للمشروع . فلكل نشاط نقطة بدء ونقطة اتمام . وبالتالي فإن الحدث لا يستغرق أى فترة زمنية . وحتي يصل إلي حدث ، فإن كل الأنشطة التي تسبق الحدث يجب أن تكون قد تمت بالكامل .

النشاط الحرج critical activity هو النشاط الذي سوف يترتب علي تأخيره تأخير في إتمام المشروع بالكامل .المسار Path هو سلسلة من الأنشطة المتتابعة التي تقدم رابطة بين نقطة بدء ونقطة اتمام المشروع . المسار الحرج Critical Path هي سلسلة مستمرة من الأنشطة الحرجة التي تربط بين نقطة بدء ونقطة إتمام المشروع . وهو أطول المسارات علي الشبكة . ويعطي أقل وقت لازم لاتمام المشروع .

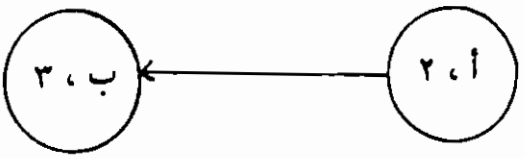
مثال :

يوضح الشكل التالي الحدث ١ الذي يعبر عن نقطة البدء لكل المشروع ، كما أنه نقطة البدء بالنسبة للأنشطة أ ، ب. كذلك فإن الأنشطة د ، هـ تتبع اتمام النشاط ب . أما النشاط ج فيتبع اتمام النشاط أ ، والنشاط ز يتبع اتمام الأنشطة ج ، هـ. ويتم المشروع بالكامل في الحدث ٥ ، وهو بالتمام عند اتمام الأنشطة هـ ، ز .

أوجه الشبه والإختلاف بين أسلوبي CPM, PERT

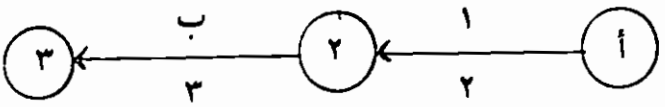
يتشابه أسلوبي CPM, PERT في أن كل منهما أساليب تستخدم في تخطيط وجدولة وضبط المشروعات ولكنها يختلفان في عدة أمور أساسية أهمها:

١ ـ من حيث طريقة الرسم: عند رسم الشبكة حسب أسلوب المسار الحرج CPM فإن الدوائر تعبر عن الأنشطة Activity on Node (AON) والأسهم التي تربط الدوائر ببعضها تعبر فقط عن اتجاه العلاقات بين الأنشطة. كذلك فإن الوقت اللازم لاتمام النشاط يوضح داخل الدائرة المعبرة عن النشاط. ويتضح ذلك من المثال التالي:



وهو يعني أن الشبكة تتكون من نشاطين هما أ ، ب. والسهم يشير إلى أن النشاط أ يجب أن يتم قبل بدء النشاط ب، كذلك فإن الزمن اللازم لإتمام النشاط أ هو ٢ وحدة زمنية، والزمن اللازم لاتمام النشاط ب هو ٣ وحدات زمنية.

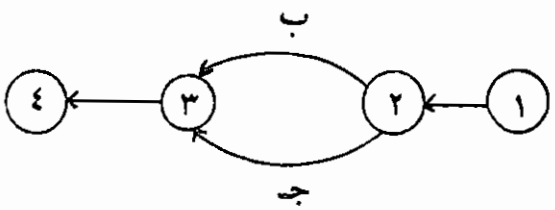
وعلى العكس من ذلك فإن أسلوب متابعة البرامج وتقييمها PERT يستخدم الدوائر nodes لتدل على بداية أو نهاية نشاط معين. وهي التي يطلق عليها حدث البدء Starting event وحدث الإتمام Completion event للنشاط. ولذلك تأخذ أرقام كما في المثال التالي:



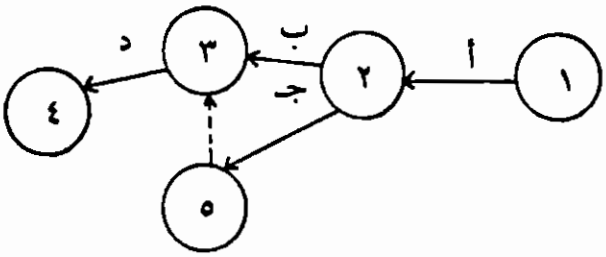
وهو يعبر عن ذات الشبكة التي تم رسمها حسب أسلوب CPM ويتضح منها أن الأنشطة يعبر عنها بأسهم تربط بين أحداث البداية والإتمام لكل نشاط Activity on Arrow (AOA). كما أن وقت النشاط يتم ايضاحه تحت السهم. وبالطبع قد يستخدم حدث الإنتهاء لنشاط كحدثاً للابتداء لنشاط آخر يليه في التتابع. كذلك فإن أكثر من نشاط قد يكون لهم نفس حدث البدء أو الإنتهاء.

٢ ـ يترتب على اختلاف طريق الرسم أننا قد نحتاج في أسلوب PERT إلى ما يعرف بالأنشطة الوهمية Dummy Activities، وهي أنشطة لا توجد أصلا في الشبكة ولكنها تلزم لتحقيق تناسق في الفهم العام لتتابع الأنشطة على الرسم. ولا يلزم الأمر استخدام هذا النوع من الأنشطة في طريقة المسار الحرج CPM. وطالما أنها أنشطة وهمية فإن الوقت اللازم لاتمامها يكون دائما صفر، كما يعبر عنها في الشبكة بخطوط متقطعة. وتظهر الحاجة إلى هذه الأنشطة الوهمية في الحالات التالية:

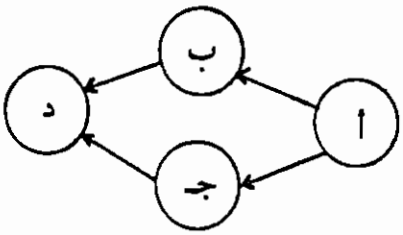
أ ـ عندما يكون هناك نشاطان لهما نفس نقطة البدء ونفس نقطة الانتهاء. ويتضح ذلك في الشكل التالي حيث يبدأ كل من ب ، ج من الحدث ٢ وينتهيان في الحدث ٣.



وطالما أن الأنشطة في PERT يتم تعريفها بنقطة البدء ونقطة الإنتهاء (الأحداث) فإن استخدام نفس الأرقام لتعريف الأنشطة، ب، ج يعد خطأ، وخصوصاً عند استخدام الكومبيوتر في حل مثل تلك المشاكل. فالنشاط بالنسبة لبرنامج الكومبيوتر يتم تعريفه برقمين الأول هو حدث البداية والثاني هو الاتمام. وللتغلب على هذه المشكلة يتم استخدام فكرة النشاط الوهمي كما يلي:



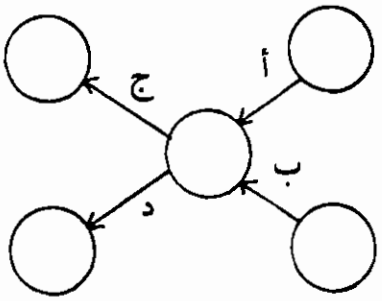
ويجب هنا ملاحظة أن ذلك لا يمثل مشكلة في ظل طريقة CPM حيث أن الشكل اللازم يكون هو:



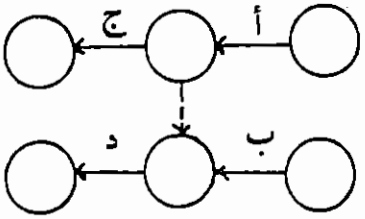
ب ــ في حالة احتمال حدوث خطأ في تصوير التتابع الواجب للأنشطة: بافتراض أن النشاط أ فقط يجب إتمامه قبل البدء في النشاط ج كما أن النشاط د يجب أن يكون مسبوقاً مباشرة بالأنشطة أ، ب. ويمكن التعبير عن ذلك في الجدول التالي:

النشاط	النشاط السابق مباشرة
أ	ــ
ب	ــ
ج	أ
د	أ ، ب

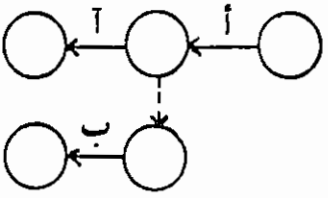
فعند تصوير ذلك على الشبكة باستخدام أسلوب PERT نجد أن هناك مشكلة. فإذا قمنا بتصويرها على النحو التالي:



نجد أن ذلك يعني أن أ ، ب يجب اتمامها قبل البدء في ج وذلك أمر غير لازم في هذه الحالة. والحل هو في عمل نشاط وهمي على النحو التالي.



جـ ــ في حالة اعتماد نشاط على آخر جزئياً Partial dependence . . فإذا كان بدء النشاط ب يعتمد على اتمام جزء فقط من النشاط أ، وليس بالضرورة اتمام كل النشاط. ومثال ذلك امكانية البدء في أعمال البياض لأحد المنازل عند انهاء أعمال التوصيلات الكهربائية في جزء منه. فلا داعي للإنتظار حتى يتم انهاء كل أعمال التوصيلات الكهربائية في المنزل. ويتم تصوير ذلك باستخدام نشاطاً وهمياً على النحو التالي:



وتجدر الإشارة هنا إلى أن مقدار الوقت اللازم لإتمام النشاط الوهمي هو صفر في كل الحالات السابقة.

٣ ــ من حيث الوقت اللازم لإتمام النشاط. . . يقوم أسلوب CPM على تقديرات أرقام ثابتة (رقم واحد) لوقت اللازم لإتمام النشاط. ويطلق عليها أرقام الوقت التقديرية deterministic. وهي تفترض التأكد التام من أن التنفيذ سوف يتم حسب الأرقام المقدرة. أما أسلوب PERT فإنه يقوم على تقديرات احتمالية للوقت والتي يطلق عليها Probabilistic. فلكل نشاط يتم عمل ثلاثة تقديرات للوقت اللازم لإتمام النشاط، مع وضع توزيعاً احتمالياً يعبر عن احتمال تحقق كل منهم. والتوزيع الإحتمالي المستخدم في هذه الحالة هو توزيع بيتا Beta distribution والذي يستلزم ثلاثة تقديرات أساسية هي:

(أ) الوقت المتفائل Optimistic time

(ب) الوقت المتشائم Pissimistic time

(جـ) الوقت الأكثر حدوثاً Most likely time.

وسوف نتناول مفهوم ذلك تفصيلا عند الحديث عن أسلوب PERT في جزء منفصل.

٤ ــ ينبني على الاختلاف الثالث بين أسلوبي CPM, PERT أن وقت اتمام المشروع الذي يتم التوصل إليه في ظل أسلوب CPM يكون رقماً تقديراً واحداً. أما في ظل أسلوب PERT فإن مقدار وقت اتمام المشروع يكون مجرد متوسط الوقت المتوقع لإتمام المشروع وهو ما يطلق عليه القيمة المتوقعة. ويرجع ذلك إلى أن هذه القيمة محسوبة بناءاً على القيم المتوقعة لوقت الأنشطة الحرجة. وبسبب هذه الخاصية يمتاز أسلوب PERT بإمكانية عمل بعض التحليلات الاحتمالية حيث أن وقت اتمام المشروع يكون موزعاً معتدلاً normally distributed. ومن أمثلة هذه التحليلات.

(أ) ما هو إحتمال اتمام المشروع قبل تاريخ معين؟
(ب) ما هو احتمال تأخر المشروع عن تاريخ معين؟
(جـ) ما هو احتمال اتمام المشروع خلال فترة زمنية محددة؟

٥ ــ نظراً لظهور أسلوب CPM بشكل أساسي في البيئة الصناعية،واستخدامه في عمليات الجدولة ـ بعكس أسلوب PERT الذي ظهر في أبحاث الجيش الأمريكي ـ فإن أسلوب CPM قد تضمن عملية إضافة موارد إضافية جديدة بهدف تقليل وقت اتمام المشروع. وهو ما يعرف بتحليل الوقت والتكاليف كما سنوضحه فيما بعد.

يتضح من هذا العرض أن أسلوبي CPM, PERT بينها تشابه كبير إلى أن هناك اختلافات أساسية بينها. فتتلائم طريقة CPM مع أنواع المشروعات التي تكون فيها أوقات الأنشطة معروفة ومؤكدة. ولذلك فإنها تركز على الموائمة trade-off بين وقت اتمام المشروع وتكلفته.

أما الأسلوب PERT فهو أكثر فائدة في حالة عدم التأكد من وقت اتمام النشاط. وبصفة عامة، يمكن القول بأن مثل هذه الفروق والاختلافات هي مجرد اختلافات تاريخية. فمع استخدام الكومبيوتر في حل مثل هذه المشاكل يمكن تعديل المعلومات المتاحة بما يمكن من عمل التحليلات المطلوبة سواء بدأنا بمعلومات PERT أو CPM. وأهم هذه التحليلات هي :

١ ــ تحديد موعد اتمام المشروع.
٢ ــ تحديد الأنشطة الحرجة التي يجب أن تتم في موعدها حتى لا تؤخر اتمام المشروع ككل.
٣ ــ تحديد المسار الحرج، وهو أطول مسار على الشبكة.
٤ ــ تحديد الوقت المسموح للأنشطة الغير حرجة أن تتأخره دون التأثير على المشروع.

٥ ــ عمل الموائمة بين التكلفة الإضافية واتمام المشروع في وقت أقل.
٦ ــ عمل تحليلات احتمالية.
٧ ــ عمل تسوية لمقدار الجهد المبذول على الفترات المختلفة.

وسوف نتناول في الفصول التالية أسلوبي PERT, CPM في فصول مستقلة بشيء من التفصيل.

أسلوب المسار الحرج CPM

ظهر هذا الأسلوب في عام ١٩٥٧ علي يد كل من J. E. Kelly في شركة M. R. Walker, Remington-Rand في شركة Du Pont بغرض المساعدة في جدولة عمليات التعطل بسبب الصيانة في مصانع المواد الكيماوية . وقد ذاع صيت هذا الأسلوب الذي أطلق عليه أسلوب المسار الحرج Critical Path Method بسبب المزايا التي تحققت من استخدامه . فقد أدي استخدام هذا الأسلوب في أحد مصانع شركة Du Pont في مدينة بالولايات Louisville بالولايات المتحدة الأمريكية إلي تخفيض وقت الأعطال اللازمة لعمل برنامج الصيانة من ١٢٥ ساعة إلي ٧٨ ساعة .

ويمكن ايجاز الخطوات اللازمة لاستخدام أسلوب CPM فيما يلي:

١ ـ حدد كل الأنشطة التي سوف تستخدم في المشروع وعرفها بدقة .
٢ ـ حدد التتابع الفني اللازم والذي يحكم العلاقة بين الأنشطة .
٣ ـ وضح هذه العلاقات في شكل شبكة network لهابداية ونهاية (لا تلزم هنا أية أنشطة وهمية) .

٤ ـ حدد مقدار الوقت اللازم لاتمام كل نشاط ، وهو رقم وحيد لكل نشاط يعتمد علي أفضل تقدير best guess .

٥ ـ حدد النشاط الحرج .

ولايضاح كيفية القيام بهذه الخطـوات سوف نعرض المثال التالي:

مثـال :

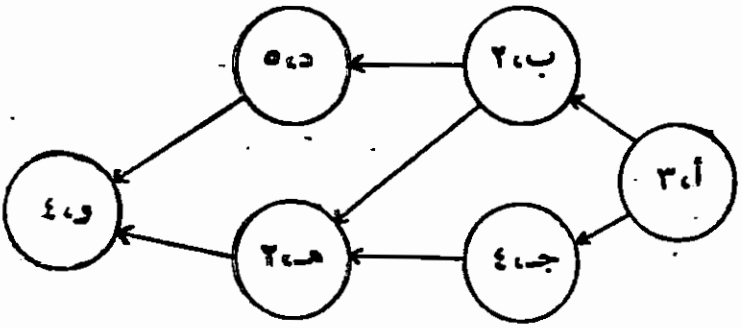
فيما يلي مجموعة الأنشطة اللازمة لاتمام مشروع معين وتتابعها الفني ، وكذلك الوقت اللازم لاتمام كل نشاط .

النشـاط	النشاط السابق عليه مباشرة	الوقت اللازم
أ	-	٣
ب	أ	٢
جـ	أ	٤
د	ب	٥
هـ	ب، جـ	٢
و	د ، هـ	٤

الخطوة الأولي :

هي رسم الشبكة . باستخدام أسلوب CPM يمكن تصوير المشروع علي النحو التالي (شكل ٣ - ١) .

(شكل ٣ - ١)



الخطوة الثانية :

تحديد أقل وقت يلزم لاتمام المشروع . يمكن تحديد أقل وقت باستخدام أسلوبين . أما الأول فهو تحديد مجموعة المسارات التي تبدأ من نقطة بداية المشروع وتنتهي عند نهايته . ثم اختار أطول مسار ليمثل أقل وقت لازم لاتمام المشروع . ويعاب علي هذا الأسلوب أنه لا يصلح فقط إلا في حالة الشبكات المحددة ذات الأنشطة القليلة والعلاقات البسيطة ، ولذلك يستخدم الأسلوب الثاني بشكل واسع والذي يقوم علي القيام بعدة خطوات نظامية محددة للتوصل إلي أقل وقت ممكن . وسوف نقوم بعرض الأسلوبين بالتطبيق علي هذا المثال .

أولا : عن طريق تحديد المسارات :

المسارات هي : أ ---> ب ---> د ---> و

أ ---> ب ---> هـ ---> و

أ ---> جـ ---> هـ ---> و

وبجمع قيم الأوقات اللازمة لكل نشاط والموجودة علي المسار يمكن تحديد الوقت اللازم لكل مسار علي النحو التالي :

المسـار الأول ٣ + ٢ + ٥ + ٤ = ١٤ يوم

المسار الثاني ٣ + ٢ + ٢ + ٤ = ١١ يوم

المسار الثالث ٣ + ٤ + ٢ + ٤ = ١٣ يوم

وفي هذه الحالة يتم اختيار المسار الأول ، حيث أنه يمثل أطول مسار في الشبكة . وهو الذي يحدد أقل وقت لازم لاتمام المشروع ككل ، وهو ١٤ يوم في هذا المثال .

ويلاحظ هنا أنه علي الرغم أننا نبحث عن أقل وقت ممكن لاتمام المشروع إلا أننا اخترنا أطول مسار في الشبكة . وعلي الرغم من أن هناك تناقض ظاهري في تلك العبارة إلا أنها صحيحة تماما فاتمام المشروع سوف يرتبط بأبطء مسار ، وفي هذه الحالة هو المسار الأول .

ثانيا : عن طريق تحديد أوقات البدء والانتهاء :

علي الرغم من سهولة الأسلوب الأول إلا أنه لا يصلح إلا ففي حالات الشبكات البسيطة كذلك فإنه لا يخدم الغرض الأساسي من تحليل مثل هذه الشبكات وهو تحديد جدول لوقت البدء ووقت الاتمام لكل نشاط . فغالبا ما يحتاج المسئول عن المشروع إلي وضع جدول زمني محدد البدء والاتمام لكل نشاط حتي يتم اتمام المشروع في موعده كما أن هذا الجدول يكون أساسا له لتحديد موعد احتياج المواد

والمستلزمات اللازمة لاتمام كل نشاط . ولذلك فإن التحليل الأكثر فائدة هو الذي يعتمد علي هذه الطريقة الثانية

وتبدأ هذه الطريقة بحساب أربعة أرقام (قيم) أساسية لكل نشاط هي :

١ ـ أول وقت بدء ممكن (وب) Earliest Start (ES)

٢ ـ أول وقت اتمام ممكن (وت) Earliest Finish (EF)

٣ ـ آخر وقت بدء مسموح (خ ب) Latest Start (Ls)

٤ ـ آخر وقت اتمام مسموح (خ ت) Latest Finish LF

ويعرف أول وقت بدء ممكن ، بأنه اللحظة التي يمكن للمسئولين عن النشاط البدء فيه فورا دون تأخير ، وبمجرد أن تسمح بذلك الظروف الفنية الخاصة بتتابع الأنشطة . وعلي ذلك فإن أول وقت اتمام ممكن يكون هو لحظة اتمام النشاط إذا لم يكن هناك تأخير فى لحظة البدء، أو في وقت انجاز النشاط . ولذلك فإن :

أول وقت اتمام ممكن = أول وقت بدء ممكن + الوقت اللازم لانجاز النشاط (١)

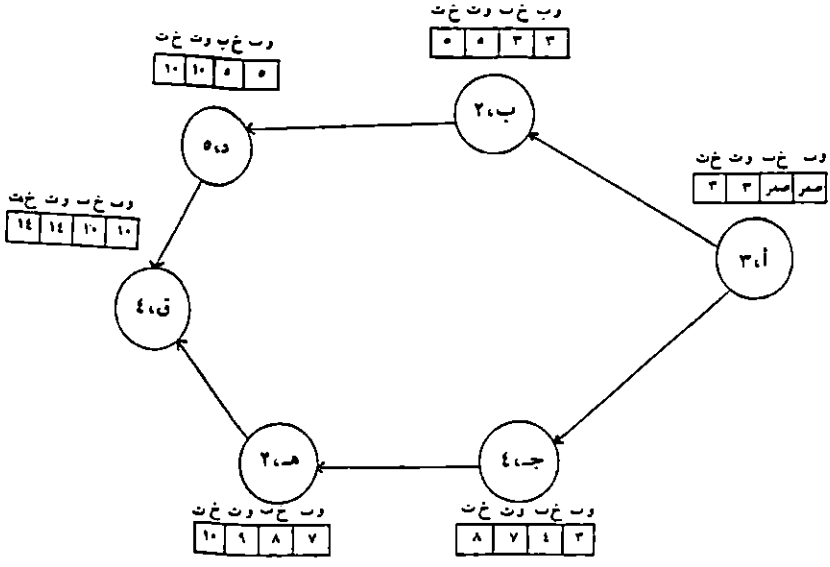
أما آخر وقت اتمام مسموح ، فهو عبارة عن آخر لحظة مسموح للمسئولين عن النشاط فيها باتمام هذا النشاط . ويعني ذلك أن يقوموا بتسليم النشاط المسند إليه بعد أن تم انجازه بالكامل . وبلغة الجيش أن يقوموا « باعطاء التمام » . وعلي ذلك فإن آخر وقت بدء مسموح يكون هو اللحظة التي إذا حدث تأخير عن بدء النشاط فيهااعتبر ذلك تأخيرا . وحتي لا يحدث هذا التأخير فإن البدء يجب أن يكون قبل

آخر وقت اتمام مسموح بوقت كاف لانجاز المشروع . ويتضح ذلك في العلاقة التالية :

آخر وقت بدء مسموح = آخر وقت اتمام مسموح- الوقت اللازم لانجاز النشاط (٢)

دعنا نقوم بتطبيق هذه المفاهيم والحسابات علي المثال الذي بين أيدينا ، والذي يمكن أن نتتبع خطواته علي الشكل (٣ - ٢) والذي يلاحظ عليه أننا قمنا لكل نشاط بعمل مستطيل مكون من أربعة أجزاء يمثل الأول منها أول وقت بدء ممكن (وب) والثالث منها أول وقت اتمام ممكن (وت) . كذلك فإن الثاني منها يمثل آخر وقت بدء مسموح (خ ب) والرابع يمثل آخر وقت اتمام مسموح (خ ت) . ويتم حساب قيم هذه الأوقات علي النحو التالي :

شكل (٣ ـ ٢)



بالنسبة للنشاط الأول أ :

نظرا لأن ذلك هو أول الأنشطة ولا يستلزم القيام به اتمام أي نوع آخر من النشاط قبله ، فإنه فإن أول وقت بدء ممكن (وب) بالنسبة له يكون هو لحظة بدء المشروع . وطالما أننا لانحدد ذلك التاريخ أو الوقت من الآن ، فإن ذلك يرجع إلي من سوف يقوم بتنفيذ الخطة ، فإننا نقول أن البدء اللحظي يعني أن أ سوف يبدأ في الوقت صفر . وبلغة العمليات العسكرية ، هذه هي « ساعة الصفر». وعند تحديد موعد فعلي لبدء المشروع ككل قد يكون هذا الصفر معناه الخامس عشر من يناير أو أو فبراير أو أى تاريخ معين .

وينبني علي ذلك أن أول وقت اتمام ممكن للنشاط أ حسب المعادلة (١) هو (صفر - ٣) = ٣ . ويعني ذلك أن النشاط أ يمكن اتمامه بعد ثلاثة فترات زمنية (أيام أو ساعات) من بدء المشروع ككل . وذلك بفرض أن هناك بدء فوري واتمام للنشاط في الوقت المحدد له . ولذلك أطلق عليه أول وقت إتمام ممكن .

بالنسبة للنشاط ب :

نظرا لأنه لا يمكن البدء في هذا النشاط إلا بعد اتمام النشاط (أ) والانتهاء منه ، فإنه أول وقت بدء ممكن هو مجرد الانتهاء من النشاط أ ويكون ذلك هو ٣ . أى بعد ثلاثة فترات زمنية (ساعات مثلا) من بدء المشروع ككل وحيث أن الوقت اللازم هو ٢ فإن أول وقت

انتهاء ممكن بغرض عدم تأخر البدء أو انجاز النشاط يكون هو (٣ + ٢ = ٥) حسب المعادلة (١) أيضا .

بالنسبة للنشاط جـ :

باستخدام نفس المنطق المتبع في (ب) نجد أن أول وقت بدء ممكن هو ٣ وأن وقت اتمام النشاط ب هو ٧ .

بالنسبة للنشاط د :

بتأمل الشبكة نجد أنه يتوقف علي اتمام النشاط ب ولذلك فإن و ب للنشاط د = ٥ كما أن وت = ٥ + ٥ = ١٠ .

بالنسبة للنشاط هـ :

بالنظر إلي التتابع الوارد في الشبكة نجد أن مجرد البدء في النشاط هـ يتوقف علي اتمام كلا من الأنشطة ب ، جـ . وحيث أن أول وقت أتمام للنشاط ب هو ٥ وأول وقت اتمام للنشاط جـ هو ٥ فإن أول وقت بدء ممكن لنشاط هـ يكون أكبر الرقمين . ويرجع ذلك إلي الاستحالة الفعلية للبدء إلا بعد انتهاء النشاط الأكثر تأخيرا . ولذلك فإن وب للنشاط هـ = ٧. وحسب المعادلة (١) فإن وت = ٧ +٢=٩ .

بالنسبة للنشاط و :

وهو النشاط الذي يعد آخر نشاط لازم للمشروع . فبمقارنة ١٠ ، ٩ نجد أن وب لهذا النشاط = ١٠ كما أن وت = ١٤ . ويعني ذلك أن أول وقت ممكن فيه اتمام النشاط و هو بعد ١٤ فترة زمنية من بدء المشروع .

من هذا العرض يمكن التوصل بسهولة إلي ما يسمي بالحد الأدني من الوقت اللازم لاتمام المشروع . وهو ١٤ فترة زمنية نظرا للأن النشاط و هو آخر نشاط في سلسلة الأنشطة اللازمة للمشروع .

نود هنا أن نوضح أن هذا التحليل قد حدد فقط الوقت اللازم للمشروع دون تحديد لنفس المسار الحرج . وتحديد هذا المسار يقضي تحديد لمجموعة الأنشطة الحرجة كما سنري في الجزء الثاني .

الخطوة الثالثة : تحديد المسار الحرج :

في بعض الشبكات البسيطة يمكن التوصل ، كما ذكرنا سابقا ، إلي المسار الحرج بمجرد النظر إلي الشبكة . فهو أطول المسارات علي الشبكة . وعلي ذلك فهو المسار أ ، ب ، د ، هـ في مثالنا البسيط ، ولكن في الشبكات الأكثر تعقيدا ، وباستخدام الكومبيوتر ، يتم الاعتماد علي أسلوب تحديد أوقات البدء والانتهاء في تحديد النشاط الحـــرج .

ففي المثال الحالي يتم تحديد قيم كل من خ ب ، خ ت الخاصة بكل نشاط . ويتم ذلك بدءا من آخر نشاط لازم لاتمام المشروع ، وهو النشاط و في مثالنا هذا . فنقوم بتحديد آخر وقت للاتمام مسموح به للمشروع ككل . ويرجع ذلك إلي أن معني الحرجة هي أنها الأنشطة التي إذا تأخرت ترتب علي ذلك تأخير في إتمام المشروع ككل . ويعني ذلك ضمنيا أن هناك تاريخ محدد للانتهاء من المشروع . أي أن هناك مايشابه العقد الذي تم توقيعه بين الشركة المنفذة والجهة التي تحتاج إلي المشروع . والذي ينص علي تاريخ انتهاء محدد . وطالما أن أقرب

وقت يمكن للشركة المنفذة أن تعد به الجهة المحتاجة هو ١٤ حسب الحسابات السابقة لقيم أول وقت اتمام للمشروع وللأنشطة ، فإن ذات الرقم يستخدم كأنه نهاية لا يجب تجاوزها ويوضع في خانة خ ت للنشاط و .

بالنسبة للنشاط و :

طالما أن آخر وقت مسموح به الانتهاء من المشروع هو بعد ١٤ يوم من البدء خ ب للنشاط و هي ١٤ - ٤ = ١٠ وذلك حسب المعادلة (٢) .

بالنسبة للنشاط د :

إذا كان من المفروض أن آخر وقت مسموح به لأن يبدأ النشاط وهو ١٠ فإن د يجب ألا يتأخر إتمامه بأى حال من الأحوال عن هذه اللحظة . ولذلك فإن خ ب في النشاط و هي التي تحكم قيمة خ ت في النشاط د . وعلي ذلك فإن خ ب للنشاط د = ١٠ - ٥ = ٥ حسب المعادلة (٢) .

بالنسبة للنشاط هـ :

بنفس المنطق المستخدم في د فإن موعد بدء النشاط و يحكم آخر وقت للانتهاء من النشاط هـ وبذلك فإن قيمة خ ت للنشاط هـ هي ١٠ ، وبطرح الوقت اللازم للنشاط هـ من هذه القيمة نصل إلي خ ب للنشاط هـ والتي تساوي ٨ .

بالنسبة للنشاط ب :

نظرا لأن بدء النشاط د ، هـ يتوقف علي اتمام ب وأن آخر موعد مسموح للنشاط د لبدء هو ٥ بينما هو ٨ بالنسبة للنشاط هـ فإن آخر

وقت يسمح فيه للاتمام للنشاط ب يكون هو أقل الرقمين وهو ٥ وعلي ذلك فإن خ ب للنشاط ب تكون هي ٣ .

بالنسبة للنشاط جـ :

نظرا لارتباطه بالنشاط هـ فإن خ ت = ٨ ، خ ب = ٤ .

بالنسبة للنشاط أ :

بمقارنة خ ب للنشاط ب ، خ ب للنشاط ح يتم الوصل إلي خ ت للنشاط أ وهو ٣ . وبالتالي فإن خ ب للنشاط أ هو صفر .

ويمكن الآن ايجاز هذه القيم في الجدول التالي :

النشاط	أول وقت بدء ممكن وب	آخر وقت بدء مسموح خ ب	أول وقت اتمام ممكن و ت	آخر وقت اتمام مسموح خ ت	الوقت الزائد
أ	صفر	صفر	٣	٣	صفر
ب	٣	٣	٥	٥	صفر
جـ	٣	٤	٧	٨	١
د	٥	٥	١٠	١٠	صفر
هـ	٧	٨	٩	١٠	١
و	١٠	١٠	١٤	١٤	صفر

ومن هذا الجدول يمكن تحديد ما يسمي بالوقت الزائد أو الفائض slack لكل الأنشطة كما هو واضح في العمود الأخير بالجدول. والفائض هو عبارة عن أقصي قدر من الوقت يمكن أن يتأخر به اتمام النشاط دون أن يسبب تأخيرا في وقت اتمام المشروع ككل . ويمكن التوصل إليه عن طريقتين :

الفائض = آخر وقت بدء مسموح - أول وقت بدء ممكن .

الفائض = آخر وقت اتمام مسموح - أول وقت اتمام ممكن .

ويجب دائما أن تكون النتيجة واحدة في الحالتين بالنسبة لذات النشاط ، فعلي سبيل المثال بالنسبة للنشاط أ الفائض = صفر - صفر = صفر وهو تماماً يعادل ٣ -٣ = ١ كذلك فإن القبض بالنسبة للنساط جـ = ٤= ـ٣ =١ وهي بالتمام القيمة ٨ - ٧ = ١ .

ونلاحظ أيضا أن قيمة هذا الفائض سوف تكون دائما رقما موجبا أو صفرا . فلا يمكن أن يكون رقما سالبا إلا إذا كان هناك خطأ حسابيا . أما القيم الموجبة فتعني أنه يمكن تأخر النشاط في حدود تلك القيمة دون أن يسبب ذلك تأخيرا للمشروع ككل . فالنشاط جـ علي سبيل المثال يمكن أن يتأخر اتمامه يوما كاملا دون التأثير علي اتمام المشروع في ١٤ يوما أما إذا تأخر بمقدار يومين أو أكثر فإنه بالتأكيد سوف يؤدي إلي تأخير المشروع ـ

وقد يكون هذا التأخير في صورة تأخير تاريخ البدء أو استغراق وقت أطول في تنفيذ النشاط عما كان مقررا له . وقد يكون سبب كل ذلك تأخر ورود المواد والأدوات اللازمة أو العمالة الكافية . أو بسبب خطأ في عملية التقدير .

ومن جهة أخري فإن القيم الصفرية للفائض تعني أنه ليس هناك مجال لتأخير هذا النشاط فأي تأخير فيه سوف يؤثر مباشرة علي المشروع ككل ولذلك تسمي الأنشطة ذات الفائض الذي قيمته صفر بالأنشطة الحرجة Critical activities . وتمثل الأنشطة الحرجة التي تقع علي مسار معين ما يسمي بالمسار الحرج والذي يعد أطول مسارا علي الشبكة وهو الذي يعبر أيضا عن أقل وقت لازم لاتمام المشروع .

وبتأمل المثال نجد أن المسار الحرج الذي يجمع الأنشطة الحرجة هوالمسار

أ ---> ب ---> د ---> و

ويجب أن ننوه هنا إلي أنه من الممكن أن يكون هناك أكثر من مسارا حرجا كما أنه من الممكن وجود النشاط الحرج الواحد علي أكثر من مسار .

ويفيد تحديد المسار الحرج في أمرين : أما الأول فهو تحديد الأنشطة الحرجة التي يجب أن تتم ملاحظة عملية تنفيذها بعناية كاملة. فهي سوف تحتاج إلي عملية اشراف إداري خاصة للتأكد من أن يتم البدء في التاريخ المحدد وأن يتم التنفيذ خلال المدة المحددة . ويقتضي ذلك التأكد من أن كافة الموارد اللازمة متاحة لها والاستعداد بموارد احتياطية لتفادي عملية التأخير . كذلك قد تستخدم بالنسبة لها خرائط متابعة تنفيذ خاصة مثل خرائط جانت للتأكد من السير حسب برنامجها الموضوع .

أما الفائدة الثانية من تحديد الأنشطة الحرجة فهي تحديد أوجه النشاط التي يجب تقليل فترة انجازها إذا كانت هناك رغبة في تخفيض وقت اتمام المشروع بقدر معين من الوقت فإذا قدر لعملية عسكرية أن تتم خلال فترة زمنية معينة واتضح بعد ذلك أن العدو قد حصل علي أنواع من المعدات تسمح له بالاستجابة لمثل هذه العملية في فترة أقل من الوقت المقدر لها فإن الأمر يستلزم محاولة وضع خطة لاتمام العملية في وقت أقل ، ويكون ذلك بالتركيز علي الأنشطة الحرجة كما سنري في الجزء التالي .

تحليل الفائض الإجمالي والفائض الحر :

أوضحنا في جزء سابق أن الفائض الإجمالي للنشاط هو أقصي وقت ممكن أن

يتأخر به اتمام نشاط معين دون أن يؤثر ذلك على موعد إتمام المشروع ككل. وعلى ذلك فإن هذا النوع من الفائض يقيس علاقة التأثير المباشر بين نشاط معين والمشروع ككل. وبالإضافة إلى هذا النوع من الفائض يوجد أيضاً ما يسمى بالفائض الحر Free Slack. وهو عبارة عن الوقت الذي يمكن أن يتأخر به نشاطاً معيناً دون أن يؤثر ذلك على البداية المبكرة (و ب) لنشاط آخر يليه. ويتم حساب الوقت الزائد الحر للنشاط عن طريق الفرق بين أول وقت إتمام للنشاط (و ت) وأقل وقت من بين كل أوقات البدء المبكرة (و ب) لكافة الأنشطة التي تليه مباشرة والتي تتوقف عليه immediate successors. ففي مثالنا الحالي نجد أن النشاط حـ ليس له فائض حر ويرجع ذلك إلى أن تأخيره بيوم واحد سوف يؤدي إلى أن يصبح أول وقت اتمام ممكن له هـو ٨، ويعني ذلك أن أول وقت إتمام للنشاط الذي يليه وهو هـ سوف يتأخر بيوم ليصبح ٨ أيضاً. ويمكن الوصول لتلك النتيجة مباشرة عن طريق المعادلة التالية:

$$\text{الفائض الحر للنشاط} = \begin{bmatrix} \text{أقل وقت بين} \\ \text{أول وقت بدء للأنشطة} \\ \text{التي تلي النشاط جـ} \\ \text{مباشرة} \end{bmatrix} - \text{أول وقت إتمام للنشاط جـ}$$

وحيث أن الذي يلي النشاط حـ مباشرة هو نشاط واحد هو هـ فإن الفائض الحر للنشاط حـ = و ب (للنشاط هـ) ـ و ت (للنشاط جـ)

= ٧ - ٧ = صفر

وبالنسبة للنشاط هـ فإن الوقت الفائض

= و ب (للنشاط و) - و ت (للنشاط هـ)

= ١٠ - ٩ = ١

أما الفائض الحر لباقي الأنشطة على الشبكة فهو صفر. ويمكن إيضاح ذلك على سبيل المثال للنشاط أ.

$$\text{الفائض الحر للنشاط أ} = \begin{bmatrix} \text{أقل وقت} \\ \text{من بين} \\ \text{و ب للنشاط ب} \\ \text{و ب للنشاط جـ} \end{bmatrix} - \text{و ت (للنشاط أ)}$$

$$= ٣ - ٣ = \text{صفر}$$

$$\text{الفائض الحر للنشاط ب} = \begin{bmatrix} \text{أقل وقت من بين} \\ \text{و ب للنشاط د} \\ \text{و ب للنشاط هـ} \end{bmatrix} - \text{و ت (للنشاط ب)}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{أقل وقت من بين} \\ ٥ ، ٧ \end{bmatrix} - \text{و ت (للنشاط ب)}$$

$$= ٥ - ٥ = \text{صفر}$$

والقاعدة عامة:

إذا كان وقت الفائض الإجمالي لأي نشاط يساوي صفر فإن الفائض الحر لهذا النشاط لابد أن يساوي صفرا أيضاً. بمعنى آخر فإن كل الأنشطة الحرجة على المسار الحرج تكون أرقام الفائض الاجمالي والفائض الحر لكل منها مساوية للصفر.

كذلك فإن هذا المثال يوضح أنه على الرغم من أن هناك بعض الأنشطة الغير حرجة التي وقتها الفائض الاجمالي موجب، كما هو الحال بالنسبة للنشاط جـ، فإن وقتها الفائض الحر يساوي الصفر. أي أن لها وقت فائض إجمالي وليس لها وقت فائض حر. فالنشاط الذي له وقت زائد إجمالي موجب قد أو قد لايكون له وقت زائد حر. وفي كل الحالات التي أوضحناها لا يجب أن يزيد وقت الفائض الحر عن الوقت الفائض الإجمالي كما ذكرنا سابقاً (راجع الأمثلة مرة أخرى للتأكد من ذلك).

ويفيد هذا التحديد لكل من الفائض الإجمالي والفائض الحر لكل نشاط في تقدير درجة المرونة المتاحة أمام مدير المشروع في جدولة النشاط. فعندما يكون للنشاط وقت فائض إجمالي قدره صفر فإن ذلك يعني أن جدول هذا النشاط لايمكن تأخيره (فأول وقت للبدء هو آخر وقت للبدء). وأي تأخير في وقت البدء المحسوب سوف يترتب عليه تأخير المشروع ككل. أما الأنشطة التي لها وقت فائض إجمالي، فإنها تتيح للقائمين على جدولة الأنشطة نوع من المرونة في تحديد تاريخ البدء لهذا النشاط. وذلك يفيد في إمكانية عمل تسوية smoothing لمستويات الطاقة التي يتم استخدامها. فبدلاً من أن يكون هناك ضغط peak على بعض الموارد المشتركة لفترات محددة وتركها دون استخدام في فترات أخرى فيمكن تحمل توزيع معتدل لإستخدامات الموارد Load Leveling عن طريق إعادة جدولة الأنشطة التي ليست حرجة، أي التي يمكن تأخيرها في حدود وقت معين دون التأثير على وقت إتمام المشروع. ويفيد ذلك، كما سنرى فيما بعد، في تفادي التكاليف الزائدة المترتبة على عملية تغيير مستوى الطاقة المستخدمة. فبدلاً من أن يعمل الأفراد ورديات إضافية في فترة محددة (مما يترتب عليه تكاليف أعلى) يمكن العمل خلال الورديات الأصلية ولكن على فترات مختلفة إذا أمكننا إعادة جدولة الأنشطة.

كذلك الأمر بالنسبة للأنشطة ذات الوقت الفائض الحر. فيمكن استخدامها بفعالية عند تحديد مستويات التشغيل. على سبيل المثال، إذا كان لنشاط معين فائض حر، يمكن للمشرف أن يمنح نوع من المرونة في تقرير متى يبدأ النشاط. فحتى إذا أخر وقت بدء النشاط بوقت معادل (أو أقل من) الفائض الحر، فإن ذلك التأخير سوف لا يؤثر على أوقات البدء أو مقدار الفائض الخاص بالأنشطة التالية. وذلك أمر غير ممكن بالنسبة للأنشطة التي ليس لديها أي وقت فائض حر. وبتطبيق ذلك على المثال الحالي نجد بعض الحقائق :

- إن تأخير النشاط هـ فقط في حدود الوقت الفائض الإجمالي (وهو يوم واحد) سوف لا يؤخر إتمام المشروع أما تأخيره بأكثر من هذا الفائض فإنه سوف يؤدي بالضرورة إلى تأخير المشروع.

- إن تأخير النشاط جـ فقط في حدود الوقت الفائض الإجمالي (وهو يوم واحد) سوف لا يؤخر إتمام المشروع أما تأخيره بأكثر من هذا الفائض فإنه سوف يؤدي بالضرورة إلى تأخير المشروع.

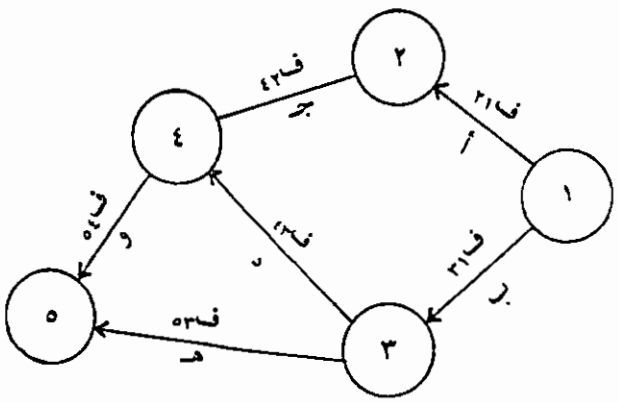
- إن وجود أكثر من فائض إجمالي لكل نشاط لا يعني إمكانية تأخير كل هذه الأنشطة في حدود تلك الأوقات الخاصة بكل منها دون أن يؤثر ذلك على وقت إتمام المشروع. ففي مثالنا الحالي نجد أن تأخير النشاط (و) بيوم والنشاط (هـ) بيوم سوف يؤدي بالضرورة إلى تأخير وقت إتمام المشروع بيوم. أما وجود أكثر من فائض حر لكل نشاط فإن يعني إمكانية كل هذه الأنشطة في حدود تلك الأوقات الخاصة بها دون أن يؤثر على وقت إتمام المشروع. وهذا يعد فارقاً أساسياً بين مفهوم واستخدام فكرتي الفائض الإجمالي والفائض الحر.

إستخدام البرمجة الخطية في حل مشكلة المسار الحرج

سوف نتناول في هذا الجزء استخدام البرمجة الخطية* في تحديد (١) أقل وقت يلزم لإتمام المشروع و (٢) المسار الحرج. وسوف نعرض ذلك في خلال مثال في صيغة عامة.

مثال (٢ ـ ٢)

بفرض أن لديك المشروع التالي، والمكون من ستة أنشطة هي أ، ب، جـ، د، هـ، و. وأن لكل نشاط فترة زمنية مقدرة سوف نعبر عنها بالرمز ف كذلك فإن لكل نشاط نقطة بداية ونهاية تسمى حدث. وأن الشبكة تأخذ الشكل التالي حسب العلاقات التتابعية بين الأنشطة:



يعني ذلك أن الوقت اللازم لإتمام النشاط أ هو ف٢١ والنشاط ب هو ف٣١ . . . وهكذا. أي أن ف س ص هي عبارة عن الوقت المستغرق لنشاط ما يبدأ في الحدث س ويتم في الحدث ص.

دعنا الآن نعرف متغير جديد هو (وص) وهو عبارة عن أول وقت من الممكن أن يتم فيه الحدث ص. وعلى ذلك يكون الهدف الآن هو تقليل minimize

(*) للمزيد عن موضوع البرمجة الخطية، راجع كتاب المؤلف، البرمجة الخطية، المكتب العربي الحديث، الاسكندرية، ١٩٨٦.

أول وقت من الممكن أن يتم فيـه المشروع ككـل (وهـو بـالضبط أول وقت من الممكن أن يتم فيـه الحدث ٥ في هـذا المثال). وذلـك في ظل القيـود النـاتجـة عن تعـريف وص. أي أن القيود في هـذه الحالـة يجب أن تضمن أن فـص تكـون عـلى الأقل أكبر من أو تساوي مجموع الفترات على كل المسارات التي تؤدي إلى الحـدث ص. فعلى سبيل المثال، بالنسبـة للحدث (٤)، فـإن القيدين التـاليين يضمنـا أن وقت هذا الحدث لا يقل عن أطول المسارات الداخلة في الحـدث (٤) . . وهذين القيدين هما:

$$و_٤ \geq و_٢ + ف_{٤٢}$$

وأيضا $و_٤ \geq و_٣ + ف_{٤٣}$

ويعني ذلك أن وقت الحدث (٤) سوف يكون هو أكبر المسارين التاليين:

(١) ← (٢) ← (٤)

و (١) ← (٣) ← (٤)

وبنفس المنطق فإنه بالنسبة لكل الشبكة الواردة في المثال تكون صياغتها في شكل نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:

دالة الهدف: قلل ت = $و_٥$

في ظل القيود

$$و_٢ \leq ف_{٢١} \quad (١)$$

$$و_٣ \leq ف_{٣١} \quad (٢)$$

$$-و_٢ + و_٤ \leq ف_{٤٢} \quad (٣)$$

$$-و_٣ + و_٤ \leq ف_{٤٣} \quad (٤)$$

$$-و_٣ + و_٥ \leq ف_{٥٣} \quad (٥)$$

$$-و_٤ + و_٥ \leq ف_{٥٤} \quad (٦)$$

وكل وص $\geq$ صفر

أما القيدين الأول والثاني فهما مباشرة من الحدثين (٢)، (٣). فالحدث (٢) لا يسبقه إلا الحدث (١). وطالما أن الوقت الذي يستغرقه الحدث دائماً هو صفر فإن أول وقت حدوث الحدث (٢) يكون هو على الأقل بعد إتمام النشاط أي بعد وقت النشاط أ وهو ف٢١. كذلك الحال بالنسبة لأول وقت يمكن أن يحدث فيه الحدث (٣) فهو على الأقل بعد مرور الفترة ف٣١.

كذلك فإن القيدين (٣) و (٤) هما الترجمة المباشرة للقيدين الذين تم استنتاجهم فيما سبق فيما يتعلق بالحدث (٤). ولكن تم إعادة الترتيب للمتغيرات حتى نصل إلى الصياغة النمطية التي تستلزمها طريقة البرمجة الخطية. ويكون ذلك كما يلي:

$$و_٤ \geq و_٢ + ف_{٤٢}$$

$$و_٤ - و_٢ \geq ف_{٤٢}$$

ومنها $$-و_٢ + و_٤ \geq ف_{٤٢} \qquad (٣)$$

كذلك فإن

$$و_٤ \geq و_٣ + ف_{٤٣}$$

$$و_٤ - و_٣ \geq ف_{٤٣}$$

ومنها $$-و_٣ + و_٤ \geq ف_{٤٣} \qquad (٤)$$

أما القيدين الخامس والسادس فيمكن التوصل إليهم عند مراعاة شرط الحدث (٥) من حيث التتابع. فحيث أن الحدث (٥) يمكن الوصول إليه من مسارين. أما عن طريق الحدث (٣) أو عن طريق الحدث (٤) فإن هناك قيدين لضمان تحقيق أول وقت وهما:

$$و_٥ \geq و_٣ + ف_{٥٣}$$

وأيضا

$$و_٥ \geq و_٤ + ف_{٥٤}$$

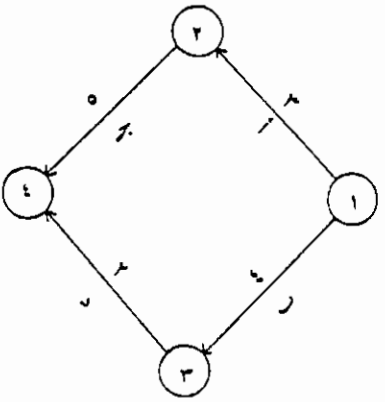
وبشيء من إعادة الترتيب لهذين القيدين يمكن التوصل إلى القيدين (٥)، (٦).

وبتأمل هذه الصياغة التي أمامنا نجد أن القيم الموجودة من الجانب الأيسر من كل القيود (١) إلى (٦) توضح خاصية هامة في تلك الصياغة. وهي أن عدد القيود لابد وأن يساوي عدد الأنشطة. ويرجع ذلك إلى أن القيم الموجودة على اليسار ماهي إلا الوقت اللازم لاتمام الأنشطة جميعها. كذلك فإن إعادة صياغة هذه المشكلة الأصلية حسب الصيغة الثنائية* dual سوف يوضح أن مشكلة الثنائية في هذه الحالة سوف تؤدي إلى الوصول إلى أطول مسار على الشبكة. كذلك فإن الحل الأمثل لمشكلة الثنائية سوف يعطي قيماً مثلى لمتغيرات الثنائية (هي أسعار الظل) سوف توضح تماماً ما إذا كان النشاط حرجاً (له قيمة الوحدة) أو غير حرجاً (له قيمة صفر). وبناءاً على ذلك فإن المسار الحرج يمكن تحديده عن طريق فحص أسعار الظل في الحل الأمثل للمشكلة الأصلية التي قمنا بصياغتها في الفقرات السابقة. وطالما أنه بالنسبة لكل قيد في المشكلة الأصلية سوف يكون هناك متغيراً مناظراً في المشكلة الثنائية فإن ذلك يؤدي في مثالنا إلى أن سعر الظل Shadow Price الخاص بالقيد (١) يوضح ما إذا كان النشاط (١ ، ٢) نشاطاً حرجاً أم لا، كما أن سعر الظل الخاص بالقيد (٢) يوضح ما إذا كان النشاط (١ ، ٣) نشاطاً حرجاً أم لا . . وهكذا.

ولإيضاح هذا المعنى دعنا نأخذ المثال البسيط جداً التالي

(*) للمزيد عن موضوع الثنائية في مشكلة البرمجة الخطية، راجع كتاب المؤلف، البرمجة الخطية، المكتب العربي الحديث، الاسكندرية، ١٩٨٦.

مثال (٢ ـ ٣)



يتضح من هذا المثال أن المسار الحرج هو المسار (١) ← (٢) ← (٤) حيث أنه أطول مسار على الشبكة. وطوله يساوي ٨ أسابيع. كذلك فإن الأنشطة الحرجة هي الأنشطة أ ، جـ. وعلى ذلك فإن الفائض الإجمالي لكل من النشاط أ والنشاط جـ = صفر أما الفائض الاجمالي للنشاط ب فهو ٢ وللنشاط د فهو ٢. كذلك فإنه يمكننا حساب الفائض الحر للأنشطة ب ، د. وهو يساوي صفراً بالنسبة للنشاط ب و ٢ بالنسبة للنشاط د. وبالطبع فإن الفائض الحر للأنشطة الحرجة أ ، جـ يساوي صفر.

والآن سوف نحاول استخدام أسلوب البرمجة الخطية علنا نصل إلى نفس الإجابات. وتكون الخطوة الأولى هي صياغة المشكلة حسب أسلوب البرمجة الخطية على النحو التالي:

قلل ت = و ٤

في ظل القيود

و٢ ≤ ٣

و٣ ≤ ٤

و٤ ≤ و٢ + ٥

و٤ ≤ و٣ + ٢

وبإعادة ترتيب القيود نصل إلى الصيغة المنتظمة التالية

قلل ت = و٤

و٢ + صفر و٣ + صفر و٤ ≤ ٣ (١)

صفر و٢ + و٣ + صفر و٤ ≤ ٤ (٢)

-و٢ + صفر و٣ + و٤ ≤ ٥ (٣)

صفر و٢ - و٣ + و٤ ≤ ٢ (٤)

و٢ ، و٣ ، و٤ ≤ صفر

ويمكن تحويل التباينات إلى معادلات عن طريق إضافة متغير عطل يمثل كل قيد على النحو التالي:

قلل ت =

صفر و٢ + صفر و٣ + و٤ + صفر ع١ + صفر ع٢ + صفر ع٣ + صفر ع٤

القيود

و٢ + صفر و٣ + صفر و٤ - ع١ + صفر ع٢ + صفر ع٣ + صفر ع٤ = ٣

صفر و٢ + و٣ + صفر و٤ + صفر ع١ - ع٢ + صفر ع٣ + صفر ع٤ = ٤

-و٢ + صفر و٣ + و٤ + صفر ع١ + صفر ع٢ - ع٣ + صفر ع٤ = ٥

صفر و٢ - و٣ + و٤ + صفر ع١ + صفر ع٢ + صفر ع٣ - ع٤ = ٢

و٢ ، و٣ ، و٤ ≤ صفر

وقبل أن نبدأ في الحل يجب هنا أن نلاحظ أن عدد القيود هو عدد الأنشطة. وأن القيم الموجودة في القيود على اليسار ما هي إلا قيم الوقت المقدر للأنشطة. فالقيمة ٣ هي الخاصة بالنشاط أ والقيمة ٤ هي الخاصة بالنشاط ب كذلك فإن القيمة ٥ هي الخاصة بالنشاط جـ والقيمة ٢ هي الخاصة بالنشاط الأخير د. كذلك نلاحظ أيضاً في هذه الصياغة أن المتغيرات الجديدة الخاصة بالعطل في كل قيد قد تم طرحها من الجانب الأيمن نظراً لأن صيغة القيود هنا هي ≤ . وحتى

نوفر على نفسنا عملية إضافة المتغيرات الوهمية سوف نحاول خلق حلاً أساسياً ممكناً يحقق شروط جدول السمبلكس من خلال بعض العمليات الرياضية البسيطة. والسبب الذي شجع على ذلك هو أن معظم المعاملات للمتغيرات هي إما الوحدة (السالبة أو الموجبة) أو صفر. وعلى ذلك نبدأ بجدول السمبلكس المبدئي الذي اعتبرنا فيه أن و٢ ، و٣ ، و٤ ، ع٤ (بالضرورة) متغيرات أساسية بينما تعتبر كل من ع١ ، ع٢ ، ع٣ متغيرات غير أساسية قيمتها صفر.

ت			صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر
ت الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	و٢	و٣	و٤	ع١	ع٢	ع٣	ع٤
صفر	و٢	٣	١	صفر	صفر	-١	صفر	صفر	صفر
صفر	و٣	٤	صفر	١	صفر	صفر	-١	صفر	صفر
١	و٤	٨	صفر	صفر	١	-١	صفر	-١	صفر
صفر	ع٤	٢	صفر	صفر	صفر	-١	١	-١	١
، ل ـ		٨	صفر	صفر	١	-١	صفر	-١	صفر
ت - ل			صفر	صفر	صفر	١	صفر	١	صفر

ملحوظة :

ثم استنتاج المعادلة الخاصة بالصف و٤ عن طريق جمع المعادلة الأولى الخاصة بالمتغير الأساسي و٢ مع المعادلة الثانية في صيغ المعادلات السابقة الخاصة بالمشكلة. أما معادلة الصف ع٤ فقد تم الوصول إليها عن طريق طرح المعادلة الأخيرة من المعادلة الثانية حتى تصبح ع٤ قيمة موجبة كمتغيراً أساسياً.

وحيث أن كل القيم في الصف ت ـ ل في الجدول قيماً صفرية أو موجبة فإن ذلك يكون هو الحل الأمثل. ويلاحظ على هذا الحل ما يلي :

١ ــ أن أقل قيمة للمتغير و٤ يمكن تحقيقها هي ٨ وهي التي تتضح في الجدول في الصف قبل الأخير. وهو بالضبط أقل وقت يلزم لإتمام المشروع وهو طول المسار الحرج كما أوضحنا في الحل العادي لهذا التمرين منذ بدايته.

٢ ــ يمكن أيضاً الاستفادة من هذا الجدول في تحديد الأنشطة الحرجة. ويكون ذلك عن طريق تحديد أسعار الظل لمتغيرات العطل التي تعبر عن كل قيد. (لاحظ أن كل قيد يعني نشاطاً معيناً). وعلى هذا الأساس فإن أسعار الظل لهذه المتغيرات تعبر عن حرجية النشاط. فإذا كان سعر الظل رقماً موجباً (مساوياً للوحدة) فيعني ذلك عدم إمكانية تأخير النشاط، وعلى ذلك فيكون نشاطاً حرجاً. أما إذا كان سعر الظل صفراً فيعني ذلك أن النشاط نشاطاً غير حرجاً. وبتطبيق هذه القاعدة على الجدول نجد إن:

- سعر الظل للمتغير ع١ = ١ ويعني ذلك أن النشاط أ نشاطاً حرجاً (فالمتغير ع١ قد أضيف إلى القيد الأول، والقيد الأول يخص النشاط أ).
- سعر الظل للمتغير ع٢ = صفر ويعني ذلك أن النشاط ب نشاطاً غير حرجا (فالمتغير ع٢ قد أضيف إلى القيد الثاني، والقيد الثاني يخص النشاط ب).
- سعر الظل للمتغير ع٣ = ١ ويعني ذلك أن النشاط جـ نشاطاً حرجاً. (فالمتغير ع٣ قد أضيف إلى القيد الثالث، والقيد الثالث يخص النشاط جـ).
- سعر الظل لمتغير ع٤ = صفر ويعني ذلك أن النشاط د نشاطاً غير حرجاً (فالمتغير ع٤ قد أضيف إلى القيد الرابع، والقيد الرابع يخص النشاط د).

وعلى ذلك فإن الأنشطة الحرجة هي أ، جـ وهذا يتطابق مع الحل بالطريقة العادية أيضا.

٣ ــ يمكن استخدام البيانات الواردة في الجدول في تحديد مقدار الفائض الخاص بكل نشاط، وهو الفائض الحر. فالقيم ع١ ، ع٢ ، ع٣ ، ع٤ تعني مقدار الفائض الحر للأنشطة أ ، ب ، جـ ، د على التوالي. وحيث أن ع١ ، ع٢ ، ع ٣ متغيرات غير أساسية لا تظهر في الحل فإن قيمها تساوي صفر. ويعني ذلك أن وقت الفائض الحر للأنشطة أ ، ب ، جـ تساوي الصفر. أما القيمة الموجبة ع٤ = ٢ فإنها تعني أن مقدار الفائض الحر للنشاط يساوي ٢ أسبوع. ويرجع ذلك كما ذكرنا إلى أن ع٤ قد أضيفت إلى القيد الرابع وعلى ذلك فهي تخص النشاط د.

ويهمنا هنا أيضاً الإشارة إلى أن هذه المشكلة يمكن حلها مباشرة عن طريق الصياغة الثنائية والتي تمتاز بقلة عدد القيود. كما أنها تعطي نتائج مباشرة يمكن منها معرفة الأنشطة الحرجة وغير الحرجة. كذلك تعطي مباشرة أطول مسار على الشبكة.

وحتى يمكننا القيام بذلك نبدأ بصياغة نفس المشكلة في شكل الثنائية على النحو التالي:

عظم

ح = ٣ص١ + ٤ص٢ + ٥ص٣ + ٢ص٤ + صفر ك١ + صفر ك٢ + صفر ك٣

القيود

ص١ + صفر ص٢ − ص٣ + صفر ص٤ + ك١ + صفر ك٢ + صفر ك٣ = صفر

صفر ص١ + ص٢ + صفر ص٣ − ص٤ + صفر ك١ + ك٢ + صفر ك٣ = صفر

صفر ص١ + صفر ص٢ + ص٣ + س٤ + صفر ك١ + صفر ك٢ + ك٣ = ١

ويكون جدول الحل المبدئي هو:

ح			٣	٤	٥	٢	صفر	صفر	صفر
ح للوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ك١	ك٢	ك٣
صفر	ك١	صفر	١	صفر	-١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	ك٢	صفر	صفر	١	صفر	-١	صفر	١	صفر
صفر	ك٣	١	صفر	صفر	(١)	١	صفر	صفر	١
		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
			٣	٤	٥	٢	صفر	صفر	صفر

أما الجدول الثاني فهو

ح			٣	٤	٥	٢	صفر	صفر	صفر
ح للوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ك١	ك٢	ك٣
صفر	ك١	١	١	صفر	صفر	١	١	صفر	١
صفر	ك٢	صفر	صفر	(١)	صفر	-١	صفر	١	صفر
٥	ص٣	١	صفر	صفر	١	١	صفر	صفر	١
		٥	صفر	صفر	-٥	-٥	صفر	صفر	٥
			٣	٤	صفر	-٣	صفر	صفر	-٥

والجدول التالي هو:

ح									
ح للوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ك١	ك٢	ك٣
صفر	ك١	١	(١)	صفر	صفر	١	١	صفر	١
٤	ص٢	صفر	صفر	١	صفر	-١	صفر	١	صفر
٥	ص٣	١	صفر	صفر	١	١	صفر	صفر	١
		٥	صفر	٤	٥	١	صفر	٤	٥
			٣	صفر	صفر	١	صفر	-٤	-٥

أما الجدول الأخير لمشكلة الصيغة الثنائية فهو:

ح									
ح للوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ك١	ك٢	ك٣
٣	ص١	١	١	صفر	صفر	١	١	صفر	١
٤	ص٢	صفر	صفر	١	صفر	-١	صفر	١	صفر
٥	ص٣	١	صفر	صفر	١	١	صفر	صفر	١
		٨	٣	٤	٥	٤	٣	٤	٨
			صفر	صفر	صفر	-٢	-٣	-٤	-٨

ويتضح من هذا الجدول أن الحل الحالي هو الحل الأمثل. ويمكن استخدام هذا الحل في التعرف على ما يلي:

١ ــ أطول مسار على الشبكة طوله ٨ كما يتضح ذلك في الصف قبل الأخير.

٢ ــ أن قيمة المتغيرات ص١ ، ص٢ ، ص٣ هي بالتمام أسعار الظل التي توصلنا إليها للمتغيرات ع١ ، ع٢ ، ع٣ في حل المشكلة الأصلية للسمبلكس. ولذلك فإن هذا الجدول يوضح أن سعر الظل للقيد الأول الأصلي = صفر ويعني ذلك أن النشاط أ نشاطاً حرجاً. وكذلك الحال بالنسبة للنشاط جـ. كذلك فإن سعر الظل للقيد الثاني في الصياغة الأصلية هو صفر وسعر الظل للقيد الرابع في الصياغة الأصلية = ص٤ = صفر وعلى ذلك فإن الأنشطة ب ، د أنشطة غير حرجة.

٣ ــ القيم الخاصة بالمتغيرات الغير أساسية الواردة في الصف الأخير في جدول الحل النهائي لمشكلة الثنائية يمكن منها معرفة القيم الخاصة بالمتغيرات الأصلية الأساسية. ويكون ذلك عن طريق ضربها في (-). وعلى ذلك فإن قيم المتغيرات الأصلية و١ ، و٢ ، و٣ هي ٣ ، ٤ ، ٨ على التوالي. كذلك فإن المتغير الغير أساسي في مشكلة الثنائية ص٤ يعطى قيمة المتغير الأصلي الأساسي ع٤ = ٣.

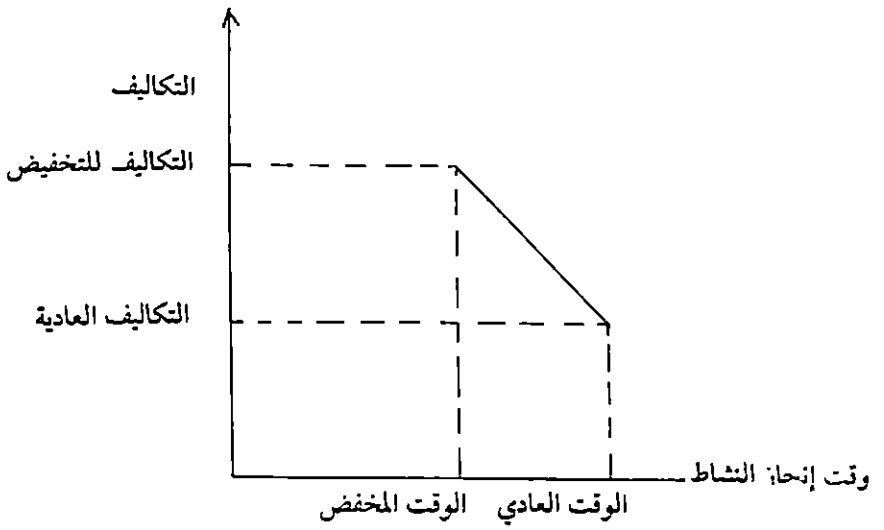
وهكذا فسواءاً عن طريق حل مشكلة البرمجة الخطية الأصلية أو مشكلة الثنائية فإنه يمكننا الوصول إلى نفس النتائج التي توصلنا إليها عن طريق الأسلوب التقليدي للمسار الحرج CPM.

تخفيض وقت اتمام المشروع :

في حالة الحاجة إلي تخفيض وقت اتمام المشروع يجب أن ينصب الاهتمام علي الأنشطة الحرجة . ففي مثالنا السابق إذا قمنا بإضافة موراد عديد إلي القائمين بالنشاط جـ بشكل يمكنهم من اتمام النشاط في ثلاثة أيام لا في أربعة .سوف نجد أن أقل وقت يلزم لاتمام المشروع ما زال هو ١٤ يوما ، ويرجع ذلك إلي أن النشاط جـ ليس نشاطا حرجا . فإضافة الموارد إلي النشاط غير الحرج يعتبر مضيعة للجهد والموارد . أما تقليل الوقت اللازم للنشاط و وهو نشاط حرجا ، بما قدره يوما فسوف يترتب عليه تخفيض وقت اتمام المشروع إلي ١٣ يوما ويعني ذلك أن هذا عملا فعالا له تأثير علي وقت اتمام المشروع .

ويجب أن ندرك أن عملية تخفيض Crash وقت اتمام المشروع ـ من خلال الأنشطة الحرجة ـ هي عملية لها جانب هندسي وآخر اقتصادي ، أما الجانب الهندسي فيتمثل في الإجابة علي مدي امكانية تخفيض الوقت اللازم لانجاز نشاط معين من الناحية الفنية ، فقد يكون الرقم الأصلي المقدر يمثل الحد الأدني اللازم لهذاالنشاط ، فعلي سبيل المثال يجب الانتظار لفترة معينة حتي تصبح الأساسات صلبة بدرجة كافية قبل بدء البناء عليها. بمعني آخر يجب علي المتخصصين الإجابة علي السؤال : هل من الممكن التخفيض ؟ وإذا كانت الإجابة بنعم فماهو أقصي تخفيض ممكن بالنسبة لكل نشاط حرج ؟

أما الجانب الاقتصادي فهو المتمثل في العبء المادي الإضافي الذي يتحمله المشروع الناتج عن عملية التخفيض للنشاط الحرج وبالتالي للمشروع ككل ، فتخفيض الوقت اللازم للنشاط يستلزم موارد اضافية في الغالب تكون تكلفة الحصول عليها أكثر من التكاليف الأصلية . فتشغيل الأفراد ورديات إضافية أو في أيام العطلات يترتب عليه دفع أجور أعلي من الأيام العادية . وتظهر هذه الخاصية الآن في قطاع المقاولات . فإذا رغب صاحب المشروع اتمامه في فترة وجيزة عليه أن يدفع أسعار موارد البناء في السوق الحرةوالتي تزيد بالقطع عن أسعار الحصص التي تخصصها الدولة . ويمكن ايضاح العلاقة بين فترة اتمام النشاط والتكاليف علي النحو التالي في الشكل (٣ ـ ٣) .



يوضح هذا الشكل علي المحور الأفقي مقدار الوقت اللازم لانجاز النشاط وعلي المحور الرأسي مقدار التكاليف اللازمة لانجاز النشاط . وعلي المحور الأفقي يوجد الوقت الأصلي المقدر والذي يطلق عليه عادة الوقت العادي normal Time وكذلك الوقت المنخفض Crashed Time والذي يكون عادة أقل من الوقت العادي . ويمثل هذا الوقت المخفض أقل مدة زمنية لازمة فنية لانجاز النشاط . ويتأمل العلاقة بين مقدار الوقت اللازم للنشاط وتكلفة الأداء نجد أنها علاقة عكسية ، فتخفيض وقت الأداء سوف يترتب عليه زيادة التكاليف من التكاليف العادية normal cost اللازمة للوقت العادي إلي التكاليف المرتفعة Crash cost المصاحبة للوقت المخفض . وقد افترضنا هنا للتبسيط فقط أن العلاقة خطية. أما في الحياة العملية فمن الممكن ألا تكون كذلك .

ومن هذه العلاقة الموضحة في الرسم يمكن التوصل إلي تقدير لكل زيادة مترتبة علي تخفيض وقت أداء المشروع بفترة زمنية واحدة علي أنها تساوي :

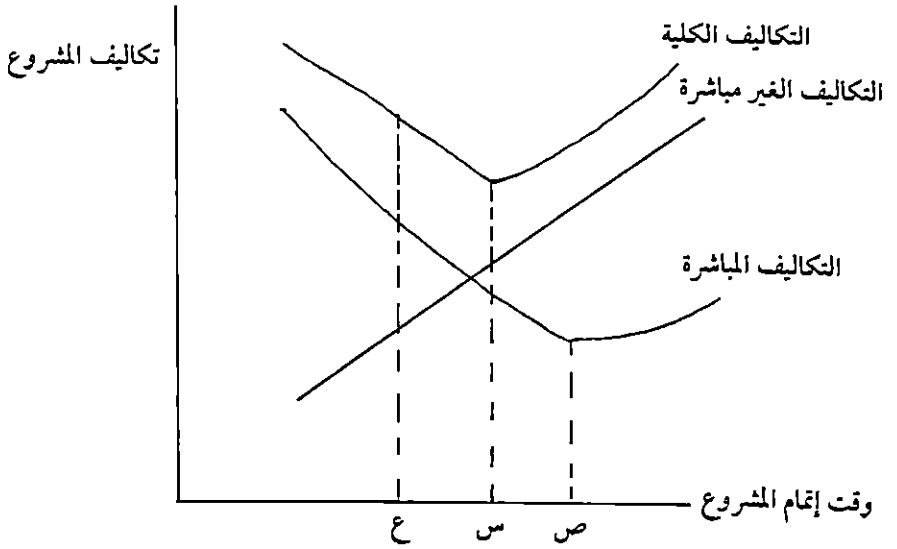
$$\frac{\text{تكلفة الوقت المنخفض ـ تكلفة الوقت العادي}}{\text{الوقت العادي ـ الوقت المخفض}}$$

وهي التكلفة الواجب أخذها في الحسبان عند اتخاذ قرار التخفيض كما سنري في مثال قادم .

من ناحية أخري فإن قرار الاسراع باتمام المشروع ككل عن طريق خفض أوقات الأنشطة الحرجة يجب أن يصحبه دراسة للعائد والتكلفة علي مستوي المشروع وليس الأنشطة فقط . فإذا كان العائد المحقق الإضافي المتوقع من الإسراع بالمشروع يزيد علي التكلفة الإضافية فإن قرار الإسراع سوف يكون له مايبرره ماذا وإلا فإن مثل هذا القرار سوف لايكون له مايبرره .

والعلاقة بني التكاليف ووقت اتمام المشروع علي مستوي المشروع ككل يمكن تصويرها علي النحو التالي في (شكل ٣ - ٤) :

شكل (٣ - ٤)



وفي هذا الشكل يظهر منحني التكاليف الغير مباشرة وهو تقريبا خطاً مستقيما ويعبر عن بعض التكاليف الثابتة Overhead التي يتم تحميلها للمشروع علي حسب مدة المشروع . ومثال ذلك مرتبات المهندسين والإداريين واستهلاك العدد والمعدات ، وهي تنخفض مع انخفاض مدة المشروع وتزيد بزيادته . أما المنحني الآخر فهو منحني التكاليف المباشرة والتي ترتفع مع عملية التخفيض ، فهي تكلفة الموارد الإضافية التي نحتاجها أكثر لتخفيض وقت اتمام المشروع . ويلاحظ أن هذا المنحني بعد تاريخ معين وهو ص يبدأ في الارتفاع وقد يعبر ذلك عن غرامات التأخير التي تدفع عن أيام تأخير اتمام المشروع . كما أنها قد تعبر عن احتمال ارتفاع تكلفة المواد اللازمة في حالة التأخير لفترات طويلة. أماالمنحني الثالث فهو منحني التكاليف الكلية والذي يمثل إجمالي التكاليف المباشرة وغير المباشرة لفترات اتمام المشروع المختلفة .

وعلي الرغم من بساطة هذا التحليل ، إلا أنه يمكن استخدامه في دراسة قرار تخفيض وقت اتمام المشروع ، ففي مثالنا هذا إذا رأت الشركة أو الهيئة الاسراع بالمشروع حتي يمكن تحقيق عائدا إضافيا سوف يضيع علي الشركة في حالة اتمام المشروع في الوقت س . فإنه يمكن مقارنة هذا العائد الإضافي إذا تم انجاز المشروع في الوقت ع مثلا مع الزيادة الاجمالية المتوقعة في التكاليف الكلية . وبناء علي هذه المقارنة يمكن اتخاذ القرار علي أساس اقتصادي .

تعرضنا حتي الآن للأساس النظري لعملة يتخفيض وقت النشاط والمشروع والآن ماهي الخطوات التي تتبع لتحقيق ذلك اجرائيا ؟ الاجابة تكمن في :

١ ـ عمل تقديرات للوقت العادي والمنخفض لكل نشاط .

٢ ـ عمل تقديرات للتكاليف العادية وتكلفة الوقت المخفض لكل نشاط .

٣ ـ تحديد المسار الحرج والأنشطة الحرجة .

٤ ـ ابدء في عملية التخفيض للأنشطة الحرجة مبتدأ بالنشاط الحرج والأقل تكلفة .علي أن يكون هذا التخفيض بوحدة زمنية واحده.

٥ ـ راجع أثر ذلك علي المسار الحرج والميزانية المتاحة .

٦ ـ استمر في الخطوات إلي أن تصل إلي التاريخ المرغوب أو إلي أن تستخدم كل الأموال المتاحة .

وسوف نوضح هذه الخطوات في المثال التالي :

مثال (٣ ـ ٢) :

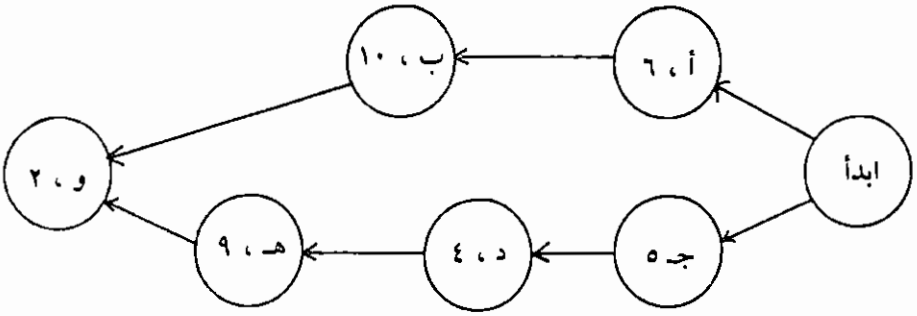
باستخدام البيانات التالية ، وبافتراض أن التكاليف الغير مباشرة لليوم الواحد بالنسبة للمشروع هي ١٠٠٠ جنيه ، ضع خطة مثلي لتخفيض وقت اتمام المشروع والأنشطة .

النشاط	النشاط السابق مباشرة	الوقت العادي	التكلفة العادية	الوقت المخفض	تكلفة الوقت المخفض
أ	—	٦	٢٠٠٠	٦	٢٠٠٠
ب	أ	١٠	٣٠٠٠	٨	٤٠٠٠
جـ	—	٥	٥٠٠	٤	٨٠٠
د	جـ	٤	٤٠٠	١	٢٥٠٠
هـ	د	٩	٣٠٠	٧	١٥٠٠
و	ب ، هـ	٢	٨٠٠	١	١٦٠٠

الحل

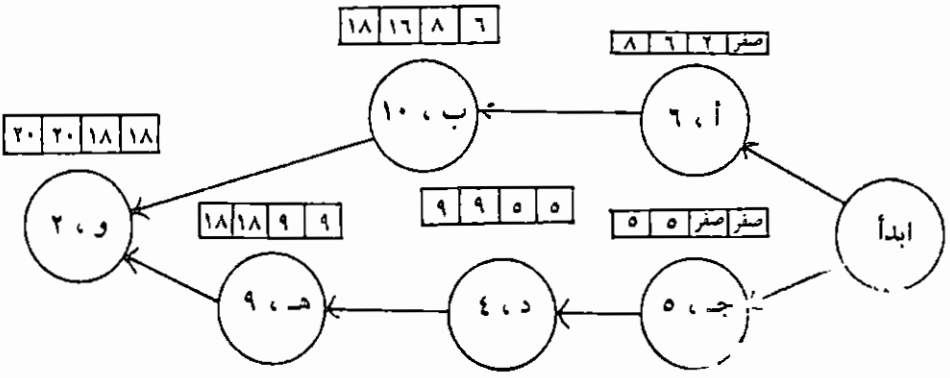
١ ـ تبدأ برسم الشبكة علي النحو التالي في شكل (٣ ـ ٥)

شكل (٣ ـ ٥)



٢ ـ نحدد الأنشطة الحرجة والمسار الحرج بتحديد أوقات البدء والاتمام المبكرة والمتأخرة كما في الشكل (٣ ـ ٦)

شكل (٣ ـ ٦)



يتضح من هذا الرسم أن الأنشطة الحرجة هي جـ ، د ، هـ ، و وأن المسار الحرج هو جـ ← د ← هـ ← و بطول قدره ٢٠ يوما .

٣ ـ لتحدد خطة تخفيض الوقت نبدأ بتحديد النشاط الواجب البدء بتخفيض وقت اداؤه ، ويجب أن يكون :

(أ) نشاطا حرجا :

(ب) أن تكون تكلفة التخفيض بيوم واحد أقل ما يمكن ، نظرا لأن تقليل وقت كل نشاط من الأنشطة الحرجة بيوم واحد يؤدي إلي تخفيض وقت اتمام المشروع بيوم واحد ، أى أن كلهم لهم نفس التأثير ، فيجب اختيار النشاط الأقل تكلفة.

(جـ) أن يكون من الممكن فنيا تخفيض وقت هذاالنشاط ، ويعني ذلك أن يكون وقت التخفيض أقل من الوقت العادي وألا يكون قد تم تخفيض هذا النشاط بأقصي كمية من الوقت يمكن تخفيضه بها .

ولتطبيق هذه الشروط يتم تحديد الأنشطة الحرجة وبياناتها في هذه المرحلة كما في الجدول في الصفحة التالية حيث تعبر عن أنشطة حرجة في هذه المرحلة .

ويتضح من ذلك أننا أمام بدائل تخفيض أى من جـ، د ، هـ ، و بيوم واحد . وطالما أن النشاط جـ هو أقل الأنشطة تكلفة فيتم تخفيضه بيوم واحد ويرجع ذلك أساسا إلي أن التكلفة الإضافية وهي ٣٠٠ جنيه أقل من مقدار الوفر المحقق من التخفيض لوقت المشروع ككل وهو ٦٠٠ جنيه ، مقدار التكلفة الغيرمباشرة (الثابتة) لكل يوم تشغيل للمشروع .

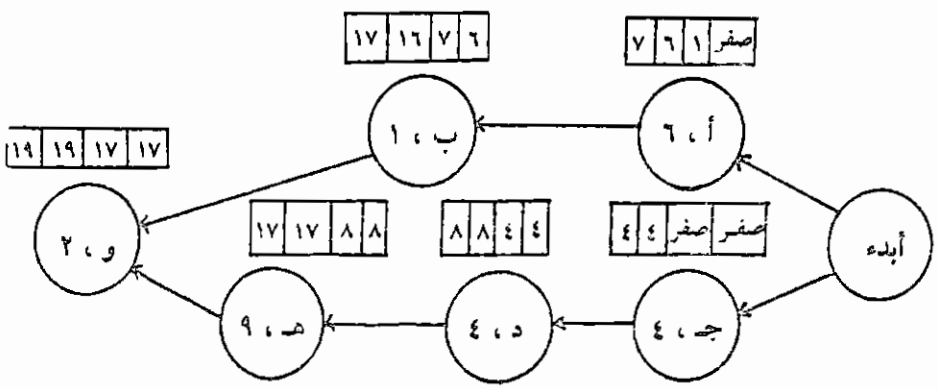
النشاط	الوقت العادي	الوقت المخفض	الفائض Slack	تكلفة التخفيض بيوم واحد (بالجنيه)
أ	٦	٦	٢	لا يمكن فنياً
ب	١٠	٨	٢	(٤٠٠٠ - ٣٠٠٠) ÷ (١٠ - ٨) = ٥٠٠
جـ*	٥	٤	صفر	(٨٠٠ - ٥٠٠) ÷ (٥ - ٤) = ٣٠٠
د*	٤	١	صفر	(٢٥٠٠ - ٤٠٠) ÷ (٤ - ١) = ٧٠٠
هـ*	٩	٧	صفر	(١٥٠٠ - ٣٠٠) ÷ (٩ - ٧) = ٦٠٠
و*	٢	١	صفر	(١٦٠٠ - ٨٠٠) ÷ (٢ - ١) = ٨٠٠

(*) أنشطة حرجة.

ويهمنا هنا أن نوضح أن التخفيض للنشاط الحرج المختار يجب أن يكون دائما بيوم واحد في الخطوة الواحدة ثم يتم بعدها معرفة آثر هذا التخفيض علي المسار الحرج الحالي . فقد يؤدي هذا التخفيض إلي تغيير الأنشطة الحرجة وبالتالي يجب أن يكون التخفيض التالي موجها إلي نشاط آخر .

٤ ـ تحديد أثر التخفيض بيوم علي المسار الحرج ، نعلم أنه بالتأكيد سوف يترتب عل يتخفيض جـ من ٥ إلي ٤. يوم إلي تخفيض وقت اتمام المشروع إلي ١٩ يوم . ويمكننا أيضا في هذا المثال أن نقول بأن المسار الحرج سوف يتبقي كما هو . ويرجع ذلك إلي أن الوقت الزائد الموجود في الأنشطة غير الحرجة Slck يزيد علي الواحد، فهو ٢ في كل من أ، ب. ويمكننا التأكد من ذلك بإعادة حل الشبكة علي النحوالتالي شكل (٣ ـ ٧) والتالي يظهر فيا أن المسار جـ ، د ، هـ ، و مازال هو أطول مسار علي الشبكة .

شكل (٣ ـ ٧)



٥ ـ نقوم بتكرار نفس الخطوات السابقة إلي أن نجد أن تكلفة التخفيض أعلي من التكلفة التي يتم توفيرها حينئذ نتوقف ويكون ذلك كما يلي :

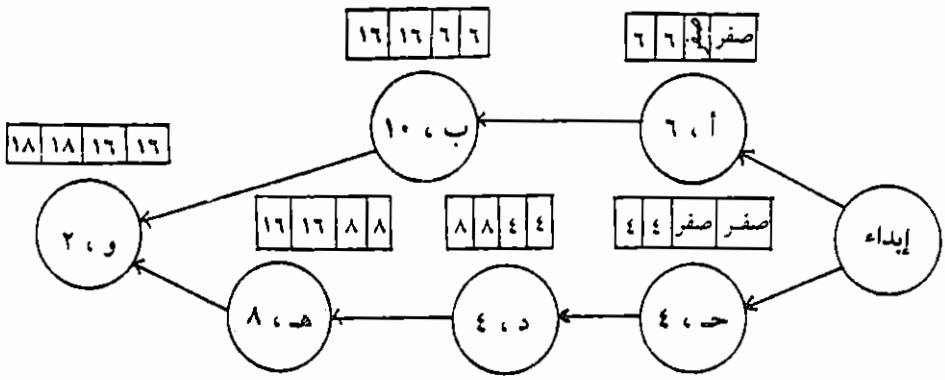
(أ) في هذه المرحلة الأنشطة الحرجة الممكن تخفيضها هي د ، هـ ، و . لاحظ أن جـ لا يمكن تخفيضها عن ٤ أيام . وتكلفة تخفيض د ، هـ ، و بيوم واحد هي ٧٠٠ ، ٦٠٠ ، ٨٠٠ علي التوالي . وطالما أن هـ هي أقل التكاليف فيتم اختيارها نظرا أن ٦٠٠ مازالت أقل من ١٠٠٠ جنيه . وبالتالي فإن القرار هو تخفيض هـ بيوم آخر .

(ب) معرفة آثر هذا التخفيض علي المسار الحرج . نظرا لأن الوقت الزائد Slck لكل من أ ، ب وهي الأنشطة غير الحرجة يساوي الواحد الصحيح فإن تخفيض هـ بيوم واحد سوف يؤدي إلي وجود مسارين حرجين هما :

أ ---> ب ---> و

جـ ---> د ---> هـ ---> و

ويمكن التأكد من ذلك برسم الشبكة مرة أخري .



(جـ) وفي حالة وجود أكثر من مسار حرج يكون أمامنا بدائل في عملية التخفيض وهي :

- تخفيض نشاط مشترك (يقع علي المسارين) بيوم واحد
- تخفيض توليفة مكونة من نشاطين الأول يقع علي المسار الأول والثاني علي المسار الثاني وبتطبيق ذلك تكون البدائل التي أمامناهي .
- تخفيض النشاط و بيوم واحد .. سوف يتكلف ذلك ٨٠٠ جنيه

- تخفيض النشاط أ بيوم واحد ، جـ بيوم واحد ... وذلك أمرا غير ممكنا لأن أ لا يمكن تخفيضه كما أن النشاط جـ قد تم تخفيضه بالحد الأقصي الممكن له وهو يوم واحد .

ـ تخفيض النشاط أ بيوم واحد ، د بيوم واحد ... وذلك أيضا أمرا غير ممكن .

ـ تخفيض النشاط ب بيوم واحد ، جـ بيوم واحد ... وذلك أيضا غير ممكن .

ـ تخفيض النشاط ب بيوم واحد ، د بيوم واحد ... وذلك أمرا ممكنا وسوف يتكلف ذلك ٥٠٠ + ٧٠٠ = ١٢٠٠ جنيه .

ـ تخفيض النشاط ب بيوم واحد ، هـ بيوم واحد ... وذلك أمرا ممكنا وتكلفته ٥٠٠ + ٦٠٠ = ١١٠٠ جنيه .

وباستعراض هذه البدائل يتضح أن تخفيض النشاط و بيوم واحد هو البديل الأفضل . حيث أن تكلفته أقل من البدائل الأخري الممكنة كما أنه يتكلف أقل من الوفر المحقق وهو ١٠٠٠ جنيه .

(د) لمعرفة أثر ذلك علي المسار الحرج ، نرجع إلي الشبكة فطالما أن النشاط الذي تم تخفيض وقته هو نشاطا مشتركا علي المسارين الحرجين ـ وهماكل الشبكة ـ فإن المسارين لن يتغيرا . وتكون البدائل الموجودة أمامنا الآن للتخفيض هي:

ـ تخفيض أ بيوم واحد ، جـ بيوم واحد ... وذلك أمرا غير ممكنا.

ـ تخفيض أ بيوم واحد ، د بيوم واحد ... وذلك أمرا غير ممكنا.

ـ تخفيض أ بيوم واحد ، هـ بيوم واحد ... وذلك أمرا غير ممكنا.

ـ تخفيض أ بيوم واحد ، جـ بيوم واحد ... وذلك أمرا غير ممكنا.

ـ تخفيض ب بيوم واحد، د بيوم واحد.. وذلك يتكلف ١٢٠٠ جنيه .

ـ تخفيض ب بيوم واحد، هـ بيوم واحد.. وذلك يتكلف ١١٠٠ جنيه .

وطالما أن البدائل المتاحة للتخفيض كلها تتكلف أكثر من ١٠٠٠ جنيه وهو مقدار الوفر في التكاليف المحقق من تخفيض وقت النشاط بيوم واحد فإن هذه تكون النقطة التي نتوقف عندها .

ويمكن تلخيص خطة التخفيض المثلي علي النحو التالي :

ـ خفض النشاط جـ بيوم واحد ،أى اجعل مدة التنفيذ ٤ بدلا من٥ يوم ثم ـ خفض النشاط هـ بيوم واحد ، أى اجعل مدة التنفيذ ٨ بدلا من ٩ يوم .

ثم ـ خفض النشاط و بيوم واحد ، أى اجعل مدة التنفيذ ١ بدلا من ٢ يوم .

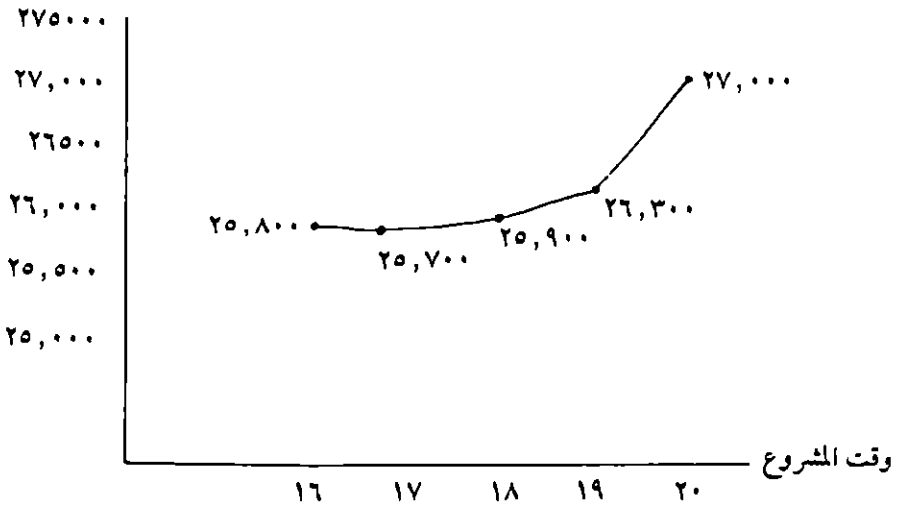
وتكون تكلفة التخفيض الإجمالية = ٣٠٠ + ٦٠٠ + ٨٠٠ = ١٧٠٠ جنيهاوالعائد المحقق من التخفيض هو توفير مامقداره ٣٠٠٠ جنيها .

ويمكننا الآن ايضاح أثر هذا التخفيض تدريجياً علي التكاليف الكلية كما في الجدول التالى :

طول المشروع (بالأيام)	التكاليف المباشرة للأنشطة	التكاليف الغير مباشرة المرتبطة بطول المشروع	التكاليف الكلية
٢٠ قبل التخفيض	٧٠٠٠	٢٠٠٠٠ = ٢٠ × ١٠٠٠	٢٧٠٠٠
١٩ بعد التخفيض الأول (للنشاط حـ بيوم واحد)	٧٣٠٠ = ٣٠٠ + ٧٠٠٠	١٩٠٠٠ = ١٩ × ١٠٠٠	٢٦٣٠٠
١٨ بعد التخفيض الثاني (للنشاط هـ بيوم واحد)	٧٩٠٠ = ٦٠٠ + ٧٣٠٠	١٨٠٠٠ = ١٨ × ١٠٠٠	٢٥٩٠٠
١٧ بعد التخفيض الثالث (للنشاط و بيوم واحد)	٨٧٠٠ = ٨٠٠ + ٧٩٠٠	١٧٠٠٠ = ١٧ × ١٠٠٠	٢٥٧٠٠
١٦ (مضافة للإيضاح فقط)	٩٨٠٠ = ١١٠٠ + ٨٧٠٠	١٦٠٠٠ = ١٦ × ١٠٠٠	٢٥٨٠٠

جدول (٣ ـ ٣)

فإذا افترضنا على سبيل الإيضاح أن عملية التخفيض إلى ١٦ يوم عن طريق أفضل البدائل المتاحة الآن (مع تجاهل مقدار التكاليف الغير مباشرة لليوم الواحد) فإننا يجب أن نخفض الأنشطة ب ، هـ كل بيوم واحد وسوف يترتب على ذلك زيادة في التكاليف المباشرة قدرها ١١٠٠ جنيه ويكون البيان الخاص بهذه الحالة كما هو موضح في آخر الجدول السابق. والذي يتضح منه أن هذا القرار سوف لا يحقق أقل التكاليف الممكنة. فبعد القرار الذي توقفنا عنده وهو التخفيض حتى ١٧ يوم تبدأ التكاليف في الزيادة. ولذلك فإن أقل تكاليف ممكنة هي عند ١٧ يوم كما يتضح من ذلك الشكل البياني التالي :



مثال (٣ ـ ٢) : (حالة الميزانية المحددة للتخفيض)

فيما يلي البيانات الخاصة بوقت وتكلفة إنجاز الأنشطة اللازمة لأحد المشروعات:

النشاط	النشاط السابق مباشرة	الوقت العادي (يوم)	التكلفة العادية (جنيه)	الوقت المخفض (يوم)	ت. الوقت المخفض (جنيه)
أ	ــ	٢	٦	١	١٠
ب	أ	٥	٩	٢	١٨
جـ	أ	٤	٦	٣	٨
د	ب ، ج	٣	٥	١	٩

والمطلوب:

١ ــ تحديد أقل وقت يلزم لإتمام المشروع وتكلفة الإنجاز.

٢ ــ بفرض أن هناك ميزانية إضافية للمشروع قدرها ١١ جنيه. ضع خطة لتوزيع هذه الميزانية بين الأنشطة حتى تصل إلى أقل وقت انجاز بأقل تكلفة ممكنة.

الحل: نبدأ برسم الشبكة كما في الشكل (٣ ـ ٨)

١ ــ أقل وقت يلزم لإتمام المشروع هو ١٠ أيام.

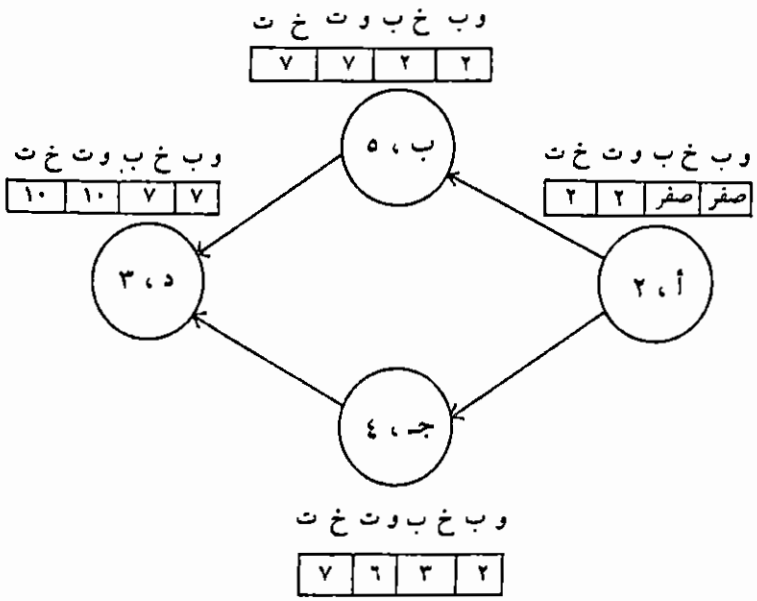
وتكلفة الإنجاز العادية هي ٦ + ٩ + ٦ + ٥ = ٢٦ يوماً.

٢ ــ لعمل خطة لتخفيض وقت الأنشطة، يجب تحديد الأنشطة الحرجة وتكلفة تخفيض كل نشاط بيوم واحد.

أ ــ الأنشطة الحرجة الآن هي أ ، ب ، د كما في الرسم.

ب ــ لتحديد تكلفة تخفيض كل نشاط بيوم واحد نقوم بتطبيق المعادلة

$$\text{تكلفة التخفيض بيوم} = \frac{\text{ت. الوقت المخفض} - \text{ت. الوقت العادي}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المخفض}}$$



شكل (٣ ـ ٨)

على كل نشاط كما في الجدول التالي:

النشاط	التخفيض الممكن	تكلفة التخفيض بيوم واحد
أ	١	(١٠ - ٦) ÷ (٢ - ١) = ٤ جنيه
ب	٣	(١٨ - ٩) ÷ (٥ - ٢) = ٣ جنيه
جـ	١	(٨ - ٦) ÷ (٤ - ٣) = ٢ جنيه
د	٢	(٩ - ٥) ÷ (٣ - ١) = ٢ جنيه

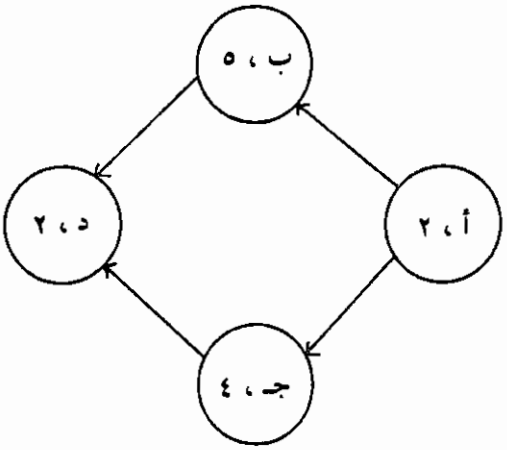
التخفيض الأول:

يمكننا الآن أن نختار النشاط الذي نبدأ بتخفيضه. ويجب أن يكون النشاط المختار:

- نشاطاً حرجاً . . وفي هذه الحالة إما أ أو ب أو جـ.
- أن يكون من الممكن تخفيضه . . وفي هذه الحالة يمكن تخفيض كل منهم حسب البيانات المتاحة . ولذلك فأمامنا البدائل أ أو ب أو جـ كما هي .
- أن تكون تكلفة التخفيض بيوم واحد للنشاط المختار هي أقل التكاليف من بين كل البدائل المتاحة . والآن بمقارنة تكلفة النشاط أ = ٤ ، ت. النشاط ب = ٣ ، ت. النشاط د = ٢ نلاحظ أن النشاط د هو الذي يمثل أقل تكلفة .
- إن تسمح الميزانية بعمل هذا التخفيض . . وطالما أننا في أول الميزانية وأن المتاح وهو ١١ جنيه أكبر من ٢ جنيه فإننا يمكن أن نقوم بالتخفيض .

والقرار الأول هو:

خفض وقت إنجاز النشاط د بوحدة زمنية واحدة . ولنرى الآن أثر ذلك على المسار الحرج الحالي كما في الشكل (٣ ـ ٩) .



شكل (٣ ـ ٩)

بمجرد النظر نجد أن المسار الحالي سوف يظل كما هو . ويرجع ذلك إلى أن النشاط المخفض هو نشاط مشترك يقع على كل المسارات المحتملة . ويعني ذلك أن

طول المسار أ ← ب ← د سوف يساوي ٩ بينما المسار أ ← جـ ← د سوف يصبح ٨. وبالتالي فإن المسار الحرج سوف لا يتغير.

وطالما أنه مازالت هناك ميزانية متاحة (١١ ـ ٢) = ٩ فإننا سوف نفكر في التخفيض التالي:

التخفيض الثاني:

المسار الحرج الحالي هو أ ← ب ← د

وبالتالي فإن الأنشطة الحرجة التي يمكن تخفيضها هي

أ بيوم واحد

ب بثلاثة أيام

د بيوم واحد آخر بعد تخفيضه بيوم واحد فيما سبق.

وبمقارنة التكلفة المترتبة على تخفيض كل منهم بيوم واحد نجد أن د مازال هو الأقل تكلفة ولذلك.

فالقرار الثاني هو:

تخفيض د بيوم واحد. ولنرى تأثير ذلك على المسار الحرج الحالي.

لنفس الأسباب التي تم ذكرها في التخفيض الأول نجد أن المسار الحرج سوف يظل كما هو والأنشطة الحرجة هي أ ← ب ← د وطول المسار الحرج الآن هو ٨ أيام.

وطالما أن هناك ميزانية متاحة (٩ ـ ٢) = ٧ فإننا سوف نفكر في التخفيض التالي:

التخفيض الثالث:

المسار الحرج الحالي هو أ ← ب ← د

وبالتالي فإن الأنشطة الحرجة التي يمكن تخفيضها الآن هي

أ بيوم واحد

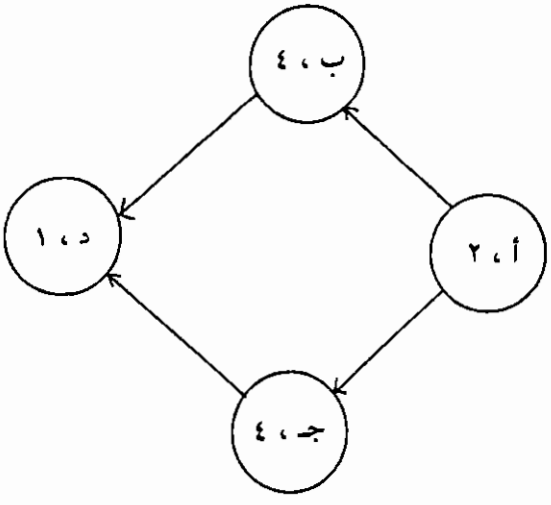
ب بثلاثة أيام

د لا يمكن تخفيضه أكثر مما سبق.

وبمقارنة التكلفة المترتبة على تخفيض كل من أ ، ب بيوم واحد نجد أن أقل تكلفة من أ حسب الجدول السابق. ولذلك..

فالقرار الثالث هو:

تخفيض ب بيوم واحد ولنرى تأثير ذلك على المسار الحرج الحالي كما في الشكل (٣ ـ ١٠).



الشكل (٣ ـ ١٠)

بتأمل هذه الشبكة نجد أن لدينا الآن مساربن متساويين في الطول هما أ ← ب ← د و أ ← جـ ← د وطول كل منهم ٧ أيام. وهذه هي حالة وجود أكثر من مسار حرج.

وبتأمل الميزانية المتاحة الآن (٧ ـ ٣) = ٤ جنيهات فإننا سوف نفكر في التخفيض التالي:

التخفيض الرابع:

المسار الأول الحرج هو أ ← ب ← د

المسار الثاني الحرج هو أ ← جـ ← د

وطالما أن الحالة الآن هي وجود أكثر من مسار فأمامنا أكثر من بديل:

١ ــ تخفيض نشاط مشترك يقع على نفس المسارين. وبهذه الطريقة يمكن تقليل المسارين معاً عن طريق تخفيض نشاط واحد. وفي هذه الحالة لدينا بدائل:

ــ تخفيض النشاط أ بيوم واحد وتكلفة ذلك ٤ جنيهات.

ــ تخفيض النشاط د بيوم واحد وذلك أمر غير ممكن لأننا قد خفضنا د بيومين فيما سبق.

٢ ــ تخفيض نشاطين معاً بنفس القيمة بحيث يقع كل منهم على مساراً مختلفاً. وفي هذه الحالة يكون أمامنا بديل آخر وهو تخفيض ب بيوم واحد و جـ بيوم واحد. وسوف يتكلف ذلك ٣ + ٢ = ٥ جنيهات.

وبمقارنة هذه البدائل جميعها نجد أن البديل الممكن والأقل تكلفة هو تخفيض أ بيوم واحد وذلك يعني أننا سوف يكون لدينا مسارين حرجين هما:

أ ← ب ← د

أ ← جـ ← د

وطول كل منهم = ١ + ٤ + ١ = ٦ أيام

وحيث أن الميزانية المتبقية الآن = ٤ - ٤ = صفر فإن ذلك يعني أنه لا يمكن عمل أي تخفيض آخر. ويمكن تلخيص القرارات كما يلي:

١ ــ خفض د بيومين ، والتكلفة = ٤ جنيهات

٢ ــ خفض ب بيوم واحد ، والتكلفة = ٣ جنيهات

٣ ــ خفض أ بيوم واحد ، والتكلفة = ٤ جنيهات

وذلك بإجمالي تكلفة ١١ جنيهاً، ويكون وقت إتمام المشروع المخفض = ٦ أيام. وفي حدود الميزانية المتاحة لايمكن عمل تخفيض أكثر من ذلك.

استخدام البرمجة الخطية في حل مشكلة تخفيض وقت إتمام المشروع*

على الرغم من أنه من الممكن استخدام الأسلوب التقليدي الذي أوضحناه في الأجزاء السابقة في عملية التخفيض، إلا أنه من الواضح أن ذلك يستلزم جهداً حسابياً كبيراً في حالة كبر حجم الشبكة وتعدد المسارات المختلفة عليها. ولذلك قد يكون من المفيد في حالات كثيرة الإعتماد على أسلوب رياضي يضمن الوصول مباشرة إلى خطة التخفيض المثلى. وأحد هذه الأساليب أسلوب البرمجة الخطية. وكما أوضحنا في الفصل الثاني من هذا الكتاب أنه لصياغة مشكلة المسار الحرج في شكل برمجة خطية يجب أن يتم تحديد أحداث معينة يبدأ منها أو ينتهي عندها كل نشاط. أي أن النشاط يتم تمثيله على السهم وليس داخل الدائرة. وفي حالة التخفيض يجب أن نحدد المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها في نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:

ض$_{ل}$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط ل، حيث ل = أ، ب، جـ، . . . ، آخر الأنشطة.

ض$_{ل}$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط ل، حيث ل = أ، ب، جـ، . . . ، آخر الأنشطة.

---

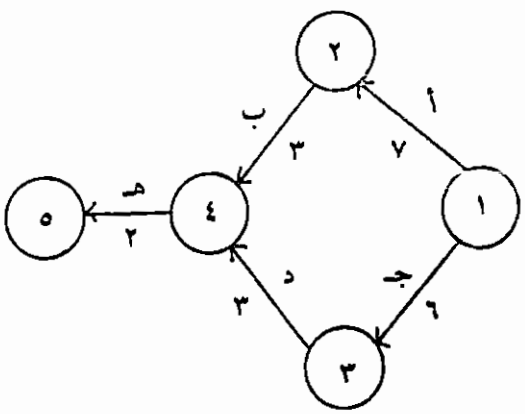
* Anderson, D.R; Dennis J. Sweeney and Thomas A. Williams, **An Introduction to Management Science, Quantitative Approaches to Decision Making, Second Edition**, N. Y., N.Y.: West Publishing company, 1979.

مثال (٣ - ٣)

إذا كانت لدينا البيانات التالية عن أحد المشروعات الواجب تنفيذها فإننا يمكننا ترجمة الأنشطة إلى أحداث بداية وإتمام وتصويرها على النحو التالي:

النشاط	النشاط السابق مباشرة	الوقت العادي (باليوم)	التكاليف العادية (بالجنيه)	الوقت المخفض (باليوم)	تكاليف الوقت المخفض (بالجنيه)
أ	—	٧	٥٠٠	٤	٨٠٠
ب	أ	٣	٢٠٠	٢	٣٥٠
جـ	—	٦	٥٠٠	٤	٩٠٠
د	جـ	٣	٢٠٠	١	٥٠٠
هـ	ب ، جـ	٢	٣٠٠	١	٥٥٠
			١٧٠٠		٣١٠٠

فإننا يمكننا ترجمة الأنشطة إلى الأحداث بداية وإتمام وتصويرها على النحو التالي :



شكل (٣ - ١١)

وعلى ذلك فإن المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها بالنسبة لهـذه الحالة هي :

س$_{ك}$ = اللحظة التي يحدث فيها الحدث ك

حيث أن ك = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

وعلى ذلك فإن :

س$_{١}$ = لحظة البدء للمشروع ككل

س$_{٢}$ = لحظة إتمام النشاط أ وبدء النشاط ب

س$_{٣}$ = لحظة إتمام النشاط جـ وبدء النشاط د

س$_{٤}$ = لحظة إتمام الأنشطة ب ، د وبدء النشاط هـ

س$_{٥}$ = لحظة إتمام المشروع ككل

ض$_{ل}$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط

حيث أن ل = أ، ب، جـ، د، هـ

وعلى ذلك فإن :

ض$_{أ}$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط أ

ض$_{ب}$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط ب

ض$_{حـ}$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط حـ

ض$_{د}$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط د

ض$_{هـ}$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط هـ

أما دالة الهدف فيكون التفكير فيها على أساس أن لدينا إجمالي تكلفة الوقت العادي للمشروع وهي ١٧٠٠ جنيه، وهي تكلفة إتمام المشروع قبل التخفيض، والتي سوف نطلق عليها التكلفة العادية. ونتيجة لعملية التخفيض فإننا سوف نتحمل تكلفة إضافية يطلق عليها تكلفة التخفيض. لذلك فإن تخفيض التكليف الكلية للمشروع (العادية + تكلفة التخفيض) إلى أقل حد ممكن يكون عن طريق تخفيض التكاليف الإضافية إلى أقل حد ممكن. ولذلك فإن دالة الهدف يمكن

صياغتها كما يلي:

قلل ت = مجـ ع‌د ض‌د

على أساس أن ع‌د = التكلفة الإضافية الناتجة عن تخفيض النشاط ل بوحدة زمنية واحدة.

ولتحديد ع‌د لكل الأنشطة نقوم بتطبيق المعادلة التي ذكرناها سابقاً لكل الأنشطة، وهي:

$$ع_د = \frac{\text{ت الوقت المخفض} - \text{ت الوقت العادي}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المخفض}}$$

والتي سوف تؤدي إلى الجدول التالي والذي يظهر أيضاً أقصى وقت ممكن تخفيض النشاط به.

النشاط	أقصى تخفيض ممكن (باليوم)	تكلفة التخفيض بيوم واحد (بالجنيه)
أ	٣	١٠٠
ب	١	١٥٠
جـ	٢	٢٠٠
د	٢	١٥٠
هـ	١	٢٥٠

ولذلك فإن دالة الهدف تكون :

قلل تكلفـة التخفـيض = ت = ١٠٠ ض$_{1}$ + ١٥٠ ض$_{2}$ + ٢٠٠ ض$_{3}$
+ ١٥٠ ض$_{4}$ + ٢٥٠ ض$_{5}$

أما القيود في هذا النموذج فتستلزم مراعاة الشبكة في التتابع، كذلك وضع قيـود تعبر عن أقـل وقت يمكن أن يخفض كل نشـاط إليه، ومـراعاة مـوعـد إتمـام المشروع إن وجـد. ومن بين هـذه القيـود نجـد أن أصعبهـا هي تلك القيـود التي تصف شكـل التتابـع في الشبكة. وهـذا النوع من القيـود يقوم عـلى شروط ثلاث أساسية كما أوضحنا من قبل:

١ ــ إن اللحـظة التي يحدث فيهـا الحدث ك يجب أن تكـون أكـبر من أو مسـاويـة للحظة إتمام كافة الأنشطة التي تؤدي إلى هذا الحدث.
٢ ــ إن وقت بدء النشاط يكـون مساويـاً للحظة التي يحـدث فيها الحـدث السابق عليه مباشرة.
٣ ــ إن الوقت المستغرق لإنجاز النشاط يكون مساوياً للوقت العادي مطروحاً منه وقت التخفيض.

فباستخدام صفر كلحظة بدء للمشروع ككل، وبالتالي للتعبـير عن اللحظة التي يحدث فيها الحدث (أ)، أي أن على أسـاس أن س$_{1}$ = صفر يمكننـا أن نخلق مجموعة من القيود على النحو التالي:

قيد الحدث ٢

س$_{2}$ ≤ (٧ – ض$_{1}$) + صفر

على أساس أن س$_{2}$ = لحظة حدوث الحدث ٢

، (٧ – ض$_{1}$) هي عبارة عن الوقت الفعـلي الذي يتم فيـه إنجاز النشـاط أ بعد تخفيضه بوقت قدره ض$_{1}$.

، صفر هي عبارة عن الوقت الذي يستغرقه الحدث س$_{1}$

ويمكن إعادة صياغة هذا القيد كما يلي

$$س_{٢} + ض_{ب} \leq ٧ \quad (١)$$

قيد الحدث ٣

$$س_{٣} \leq (٦ - ض_{ـ}) + صفر$$

ومنها

$$س_{٣} + ض_{ـ} \leq ٦ \quad (٢)$$

قيد الحدث ٤

طالما أن هناك نشاطين يدخلون إلى الحدث (٤) فإننا يكون لدينا قيدين هما

$$س_{٤} \leq (٣ - ض_{ب}) + س_{٢}$$

$$س_{٤} \leq (٣ - ض_{د}) + س_{٣}$$

وبإعادة الصياغة نجد أن لدينا القيدين

$$-س_{٢} + س_{٤} + ض_{ب} \leq ٣ \quad (٣)$$

$$-س_{٣} + س_{٤} + ض_{د} \leq ٣ \quad (٤)$$

قيد الحدث ٥

$$س_{٥} \leq (٢ - ض_{ـ}) + س_{٤}$$

ومنها

$$س_{٤} + س_{٥} + ض_{ـ} \leq ٢ \quad (٥)$$

ولذلك يكون لدينا القيود (١)، (٢)، (٣)، (٤)، (٥) لوصف قيود الشبكة.

أما النوع الثاني من القيود فهي القيود الخاصة بأقصى تخفيض ممكن في كل نشاط والتي يمكن صياغتها على النحو التالي:

ض١ ≥ ٣ (٦)

ض٢ ≥ ١ (٧)

ض٣ ≥ ٢ (٨)

ض٤ ≥ ٢ (٩)

ض٥ ≥ ١ (١٠)

أما النوع الثالث والأخير فهو قيد وقت إتمام المشروع المرغوب. فبتأمل الشبكة نجد أن أقل وقت يلزم لإتمام المشروع قبل القيام بعملية التخفيض (أي على أساس الوقت العادي) هو ١٢ يوم. ولذلك قد يكون من المطلوب تخفيض هذا الرقم إلى عشرة أيام. ويمكن التعبير عن ذلك في شكل القيد الأخير التالي

س٥ ≥ ١٠ (١١)

أما قيود عدم السالبية فهي

س١ ، س٢ ، س٣ ، س٤ ، س٥ ≥ صفر

ض١ ، ض٢ ، ض٣ ، ض٤ ، ض٥ ≥ صفر

ويمكن استخدام أسلوب السمبلكس في حل هذه المشكلة. وسوف يؤدي هذا الأسلوب إلى الحل الأمثل التالي:

س٢ = ٥ ض١ = ٢

س٣ = ٦ ض٢ = صفر

س٤ = ٨ ض٣ = صفر

س٥ = ١٠ ض٤ = ١

ض٥ = صفر

وذلك على أساس أن س١ = صفر

وسوف يؤدي هذا الحل الأمثل إلى تكلفة قدرها ٣٥٠ جنيه تعبر عن التكلفة الإضافية.

ويعني هذا الحل أن النشاط أ يجب أن يخفض بمقدار يومين وسوف يتكلف ذلك ٢٠٠ جنيه، كما أن النشاط د يجب أن يخفض بيوم واحد وسوف يتكلف ذلك ١٥٠ جنيه حتى يمكننا أن ننهي المشروع في موعده المرغوب وهو عشرة أيام. وبسبب هذا التخفيض سوف ينخفض وقت إتمام النشاط أ من ٧ إلى ٥ أيام كما أن وقت النشاط د سوف ينخفض من ٣ إلى ٢ يوم. وسوف تكون تكلفة إتمام المشروع الكلية بعد التخفيض = ١٧٠٠ + ٣٥٠ = ٢٠٥٠ جنيه.

وحتى يمكن التوصل إلى الجدول الجديد لتنفيذ الأنشطة نقوم بعمل تقديرات لوقت البدء ووقت الإتمام لكل نشاط بناءاً على الوقت المخفض الجديد لكل من الأنشطة أ، د. وسوف يؤدي ذلك إلى النتائج التالية:

النشاط	الوقت بعد التخفيض (بالأيام)	وقت البدء المبكر	وقت البدء المتأخر	وقت الإتمام البكر	وقت الإتمام المتأخر	وقت الفائض
أ	٥	صفر	صفر	٥	٥	صفر
ب	٣	٥	٥	٨	٨	صفر
حـ	٦	صفر	صفر	٦	٦	صفر
د	٢	٦	٦	٨	٨	صفر
هـ	٢	٨	٨	١٠	١٠	صفر

ويلاحظ هنا أن كل الأنشطة حسب هذا الجدول الأخير أنشطة حرجة. كذلك فإنه يجب أن ننوه هنا إلى أن إعادة حل ذات المشكلة في ظل تواريخ إتمام

مرغوبة مختلفة (حسب القيد ١١) يمكن أن يوضح للمدير ما إذا كان هذا الضغط ممكن أم لا Feasible. كذلك فإنه يوضح التكاليف المترتبة على كل تاريخ مرغوب. ونظراً لصعوبة القيام بعمل هذه الخطوات يدوياً في المشاكل الكبيرة نسبياً، فإن هناك برامج كومبيوتر جاهزة لعمل هذه الخطوات.

وأخيراً يجب أن نوضح أن هناك مداخل أخرى في استخدام البرمجة الخطية في حل مشكلة التخفيض. فقد لايكون الهدف هو تحقيق أفضل تخفيض عن طريق تخصيص موارد جديدة للأنشطة الحرجة بقصد تقليل وقتها. ولكن قد يكون عن طريق أخذ موارد من الأنشطة الغير حرجة وتخصيصها للأنشطة الحرجة، وذلك بشكل لا يجعل هذه الأنشطة الغير حرجة أنشطة حرجة. وعلى ذلك فإن أولويات الأخذ من الموارد يكون هو النشاط غير الحرج صاحب أكبر قيمة في خانة تكلفة ضغط النشاط بوحدة زمنية واحدة. فذلك يعني أن ذلك هو أفضل وفر ممكن. وبالطبع يترتب على هذا الإجراء تخفيض الوقت الذي يستغرقه أداء النشاط غير الحرج دون أن يأخر ذلك المشروع ككل ولقد قام كل من Kelley and Fulkerson[١٤] بتقديم نموذج للبرمجة الخطية يقضي بعملية التحويل هذه بين الموارد. ويهدف إلى تقليل تكاليف المشروع ككل إلى أقل حد ممكن. وكانت نتيجة هذا النموذج هو تحديد تاريخ بدء وإتمام بالنسبة لكل نشاط والوقت الأمثل (في حدود القيود) الذي يجب أن يستغرقه.