الفصل السادس
نظريـــة صفـــوف الانتظـــار

* المكونات الأساسية لمشكلة صفوف الأنتظار
* التوزيعات الاحصائية الخاصة بعملية الوصول لطلب الخدمة
* معدل أداء الخدمة
* النماذج الرياضية لصفوف الانتظار

الفصل السادس

نظرية صفوف الانتظار

Watting line Theory

يتنانل هذا الفصل نوعاً معيناً من الظواهر التي يسهل أن نجدها تحيط بنا في الحياة العملية . وهي علي وجه التحديد ظاهرة وجود صفوف انتظار Wating Lines أو طوابير Queues فهذه الظاهرة موجودة في محطات خدمة السيارات وفي مكاتب تقديم الخدمات الحكومية وفي عمليات السفر منها البرى أو الجوي أو البحري بل أيضا في المحلات التجارية وفي مطاعم والمستشفيات . ولا شك أن وجود هذه الظاهرة يستحق الدراسة نظراً لأنها غالبا ما تنطوي علي وجود نقاط أختناق Congestion عادة ما تؤدي إلي آثار غير مرغوبة سواء من قبل طالب الخدمة أو مقدمها . فعندما يكون هناك اختناق عادة ما يضطر طالب الخدمة إلي الانتظار لفترات أطول مما هو متوقع ويصاحب ذلك أن يبذل جهد غير عادي أيضا للحصول علي الخدمة . كذلك فإن وجود الاختناقات يمثل نوعاً من الضغط علي مقدم الخدمة لشكل قد يؤثر علي جودة أداء الخدمة ، وسمعة الجهة التي تقوم الخدمة . ولهذه الأسباب تأتي بعض الجهود في مجال بحوث العمليات لتقدم طريقة منهجية لدراسة هذه الظاهرة .

وقد يبادر البعض إلي القول بأن الأعتماد علي الفهم العام والخبرة الفردية يمكن أن يستخدمها في حل هذه المشاكل دون الحاجة إلي نماذج رياضية قد تبدوا معقدة . ولكن الاجابة علي ذلك تكمن في درجة الدقة في قياس الظاهرة . فلا يمكن الحديث عن ظاهرة

صفوفو الانتظاردون الحديث عن وجود نوع من عدم الاستقرار والتغير Variabitity في الظاهرة التى تقوم بدراستها . فلا يمكن القطع بأن عدد السيارات التي تمر من اشارة مرور معينة خلال فترة زمنية معينة يكون ثابتا بشكل يمكن من التنبؤ به أو افتراض ثباته . فواقع الحال أن هذا الرقم يتغير تبعاً لبعض المتغيرات الأخري . والأعتماد علي المتوسطات فقط في هذه الحالة يعد تجاهلاً ذلك التغير ولشكل تدفق السيارات وهو ما نطلق عليه شكل التوزيع الاحصائي لعملية تدفق السيارات. فمثل هذه الظواهر تعد ظاهرة لها شق عشوائي random Process وتنبني النماذج التي تعالج هذه الظاهرة علي دراسة دقيقة لأنواع التوزيعات الاحصائية التي تخضع لها ظاهرة الطلب علي الخدمة وعملية تقديم الخدمة بشكل يمكن من الفهم المتعمق والأكثر دقة لظاهرة الصفوف وبالتالي امكانية علاجها بشكل أكثر واقعية .

وتجدر الأشارة هنا إلي أن ظاهرة الانتظار قد لا تأخذ الشكل التقليدي الملموس للطابور . خذ علي سبيل المثال أحد الفنيين المسئول عن صيانة واصلاح مجموع من الآلات فعندما تتعطل الآلة فهي في وضع انتظار لحين وصول الفني وقيامة بالاصلاح وبالتالي إذا تعطل عدد من الآلات فيمكننا القول بأنهم في شكل طابور ينتظر قيام الفني بالأصلاح كذلك أيضا إذا كان هناك شبكة تليفونية مكونة من مجموعة من الخطوط تخدم العديد من النزلاء كما هو الحال في الفنادق والقرى السياحية) فإن محاولة أحد النزلاء طلب الخط عن طريق الضغط علي الرقم (٩) وعدم النجاح في الحصول علي الخط يمثل عملية انتظار . ويمكن أن نتخيل أن هناك طابور من النزلاء

يحاول الوصول إلي الخط . ومثال ذلك أيضا شبكات الكومبيوتر التي تستخدمها أكثر من فرد وكذلك الآلات الصناعية التى تستخدم في تشغيل العديد من الأوامر الانتاجية .

ففي المشروعات التي تقوم بانتاج سلع مختلفة المواصفات علي نفس الوحدة الانتاجية . ومثال ذلك صناعة الأثاث وورش الحدادة . وهناك أوامر ترد الي الورشة ولكل أمر أو طلبية Order مواصفات معينة من حيث التصميم والمقاسات والخامات والدهان وفي غالب الأحيان يتم استخدام نفس الآلة أو نفس القيم أو نفس العامل في انجاز أكثر من أمر . ويعني ذلك ببساطة أنه إذا لم تكن الآلة الخاصة بتقطيع الأخشاب (المنشار) متاحة بسبب استخدامها فى أوامر أخري فإن الأمر يجب أن ينتظر لحين انتهاء الآلة من الأمر الأول . فإذا كان لدينا أكثر من أمر فيجب أن ينتظروا جميعاً وكأنهم في شكل صفاً للانتظار أو طابور .

وينبني علي هذا التعميم لظاهرة صفوف الانتظار أن النماذج الرياضية لصفوف الانتظار تستخدم في الحياة العملية وفي البيئة الصناعية في عملية تخطيط الطاقة الانتاجية للوحدات التي تقدم الخدمة أو تصنع الأمر الانتاجي . فمن الأهمية بمكان تحديد عدد الموظفين علي الشباك اللازمين للتعامل مع الجمهور في أحد البنوك بشكل يضمن عدم الانتظار غير المقبول من قبل العميل وكذلك عدم ضياع موارد البنك ووجود عمالة عاطلة كذلك أيضا من المطلوب تحديد عدد الفنين اللازمين لصيانة عدد معين من الآلات بل وعدد ساعات العمل بالنسبة لهم . كما تستخدم نماذج صفوف الانتظار في تحديد العدد الملائم من الآلات وطاقة كل الة في حالة انتاج الأوامر .

نظرية صفوف الانتظار

تختص نظرية صفوف الانتظار بوضع الأساليب الرياضية اللازمة لحل المشاكل المتعلقة بتراكم صفوف الواحدات التى تنتظر دورها طلباً لخدمة معينة تؤدي لكل وحدة خلال فترة زمنية معينة . علي أن يكون وصول هذه الوحدات الي مكان أداء الخدمة عشوائيا تبعاً لتوزيع معين ، كما أن الزمن اللازم لأداء الخدمة لكل وحدة يمكن أن يكون العقبة عشوائية وتبقاً لتويزع معين وتقدم النظرية قياسا لقدرة مركز خدمة معين علي تحقيـق الغرض الذي انشأ من أجلة. ويكون ذلك عن طريق القياس الرياضى الدقيق لمتوسط وقت الانتظار للحصول علي الخدمة ،وكذلك متوسط عدد المنتظرين للحصول علي الخدمة ، وعلى ذلك يمكن القول أن تلك النظرية تقدم بطريقة رياضية أسلوباً لتقييم بدائل التصميم المختلفة لمركز تقديم الخدمـات .

وقد ظهرت بدايات دراسة هذه النظرية علي يد عالم الرياضة الدانمراكي A.K. Erlang وذلك في دراسته المنشورة عام ١٩١٣ والخاصة بدراسة وقت الانتظار في خدمة المكالمات التليفونية والذي يرجع إلي التباين في الطلب علي تلك الخدمة .

"Analysis of Telephone Service delays due to Varying demands"

وبذلك فإن نظرية صفوف الانتظار تعد من أقدم أساليب علم الادارة والتي اتسع استخدامها لحل العديد من المشاكل العملية منذ هذا التاريخ . فلم يعد استخدامها قاصراً علي تقديم الخدمات والعمليات الصناعية ولكن امتد وبشكل متعمق إلى الاستخدامات العسكرية منذ الحرب العالمية الثانية . ومن أهم الأمثلة على المجالات

العسكرية التى تستخدم بها نظرية صفوف الانتظار ما يلى: (*) .

١ ـ جميع المسائل المتعلقة بالتخطيط الأمثل لانشاء منظومات أداء الخدمات مثل : ورش الصيانة والاصلاح ، منظومات الشئون الادارية وامداد القوات ،منظومات الرعاية الطبية والصحية ، منظومات الأرصفة بالموانى .

٢ ـ المسائل المتعلقة بدفع القوات إلي ساحة القتال ، وهنا تظهر أهمية هذه النظرية في تقييم مدي جودة منظومات ارسال وتداول المعلومات عن الموقف ، خاصة عند استخدام المنظومات الآلية في هذا المجال .

٣ ـ المسائل المتعلقة بوضع الخطط لمراحل الأعمال القتالية المختلفة ، فعلي سبيل المثال عند تنظيم الدفاع الجوي يمكن النظر لمراحل الضرب علي الأهداف الجوية (الطائرات) على أنها مراحل لتقديم الخدمات . كما يمكن النظر لعملية ظهور النبضات التي تمثل الأهداف الجوية المعادية على شاشة الرادار علي أنها وحدات تصل طلباً لأداء الخدمات لها . عندئذ يمكن استخدام نظرية صفوف الانتظار لتحديد القدرات الفعلية لمنظومة الدفاع الجوي هذه ، وذلك باختيار معيار مناسب لقياس فاعليتها عند اجراء الحسابات مثل « النسبة المئوية لعدد الأهداف الجوية التى لن تتمكن المنظومة من تدميرها .

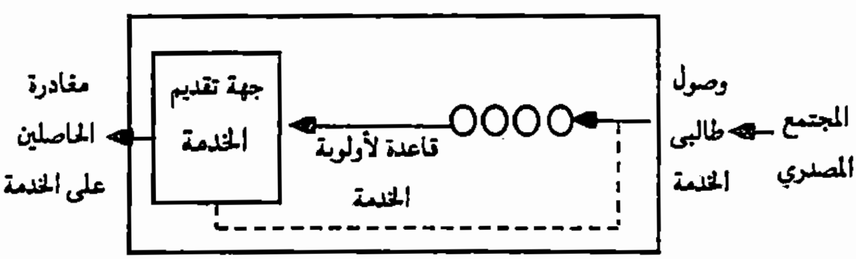
---

* من بحث مقدم فى الدراسة التمهيدية لماجستير ادارة الأعمال للطالب / لواء عادل محمود عزت عياد جامعة الاسكندرية ١٩٨٧ .

٤ ـ جميع المسائل المتعلقة بانشاءات الدفاعات المختلفة وتقييم مدي فاعليتها ، مثل المسائل المتعلقة بحساب العدد الأمثل لبطاريات الدفاع الجوي أو الدفاع الأرضى أو الدفاع الساحلي التي يجب انشاؤها للدفاع عن قطاع معين أؤ عن هدف حيوي معين ، بحيث تعطي الفعالية المطلوبة بأقل تكلفة ممكنة (التكلفة هنا تكون متمثلة في البطاريات الزائدة عن الحاجة) .

ويهمنا عن هذه المرحلة تقديم وصفاً للمكنات الأساسية للحالة التي تعالجها نظرية صفرف الانتظار وذلك بغرض الاتفاق على معنى محدد لكل مصطلح سوف يتم ذكره فيما بعد ، وكذلك حتي يمكن تصور حالات الاختلاف العديدة التى يمكن أن تكون عليها مشكلة صفوف الانتظار .

يوضح الشكل التالي المكونات الأساسية لمشكلة صفوف الانتظار ، والذي يتضح منه وجود ستة مكونات أساسية في هذا النظام وهي :



أولاً : المجتمع المصدري Calling Populatian : وهو عبارة عن كل الوحدات التي يمكن أن تتقدم طالبة الحصول علي الخدمة .

فبالنسبة لاحدي محطات البنزين يكون المجتمع المصدري هو كل السيارات التي تمر عن الطريق الموجودة به تلك المحطة ، وبالنسبة لعملية صيانة عدة آلات يكون كل عدد الآلات المسئول عنها اخصائي الصيانة هو المجتمع المصدري له وبالنسبة للإستاذ الذي يقوم باعطاء احدي المحاظرات لطلبته في احدي قاعات الدرس يكون كل عدد الطلاب الموجود بالقاعة هو المجتمع المصدري بالنسبة لعملية سؤال أحد الأسئلة اثناء المحاضرة .

يتضح من تلك الأمثلة أن هناك نوعان من المجتمع المصدري الذي يتكون من المفردات التي يمكن أن تطلب الحصول علي الخدمة وهما:

(أ) مجتمع مصدري حجمة كبير جداً إلي درجة غير محدودة ، ولذلك يطلق عليه مجتمع لانهائي الحجم infinite Population ومثال ذلك عدد السيارات المارة علي أحد محطات الخدمة .

(ب)مجتمع مصدري حجمة صغير ومحدد العدد. ولذلك يطلق عليه مجتمع محددو الحجم finite Population ومثال ذلك عدد الآلات المسئول عنها أحد عمال الصيانة وعدد الطلاب في قاعة الدرس .

ويعتبر هذا التمييز أساسي في أنه سوف يؤثر علي احتمال طلب الخدمة بعد أن تتقدم وحدة أو عدة وحدات بطلب الخدمة والحصول عليها فعلاً . ففي حالة المجتمع المصدري المحدود بمجرد أن تطلب أحد الوحدات الخدمة يتأثر احتمال طلب الخدمة من قبل أي وحدة في العدد الباقي من الوحدات . وذلك عكس حالة المجتمع المصدري اللانهائى نظراً لكبر حجم المجتمع وبالتالي يكون لذلك تأثيراً واضحاً علي

الاسلوب الرياضي الواجب اتباعه نظراً لاختلاف التوزيع الاحصائى الاحتمالي الواجب استخدامة .

(٢) وصول طالبى الخدمة Arrivals : وهو عبارة عن التقدم الفعلي لأي من هذا المجتمع المصدري طالبة الخدمة وقد تكون هذه الوحدة فرد ، آله ، سيارة ... الخ وهنا أيضا يمكن التمييز بين نوعين أساسيين من شكل وصول طالبى الخدمة :

(أ) معدل وصول بناءاً على معدل ثابت Canstant rate ، كأن يكون معدل فحص أحد الآلات كل ثلاثة أيام أو أن معدل وصول المادة الخام إلي أحد محطات .

ثانياً : وصول طالبي الخدمة Arrival : وهو عبارة عن التقدم الفعلي لأي وحدة من هذا المجتمع المصدري بقصد الحصول على الخدمة. وتختلف خاصة الوصول هذه من عدة جوانب أساسية هى : درجة التحكم فى عملية الوصول ، عدد الوحدات التي تتقدم طالبة للخدمة، والتوزيع الاحتمالي لعملية الوصول ، بالاضافة الى درجة قبول الوحدات لعملية الانتظار . وسوف نتناول كل منها بالايضاح .

(أ) درجة التحكم في عملية الوصول .. ويقصد بذلك مدي امكانية النظام على التحكم في حجم التدفق للوحدات (أو الأفراد) طالبة الخدمة فعندما يكون للمنشأة بعض السياسات التى تؤثر فى حجم هذا التدفق خلال فترات زمنية معينة تعتبر عملية التدفق يمكن التحكم فيها Controllable ومثال ذلك تخفيضات الأسعار خلال فترة الأوكازيون والتى من شأنها أن ترفع معدل التدفق . كذلك فإن تحديد ساعات معينة للعمل من شأنه أن يرفع التدفق خلال تلك

الساعات وعلي صعيد آخر فإن رفع الأتعاب التي يتقاضاها بعض الأطباء قد يكون الوسيلة لتخفيض تدفق الطالبين للخدمة لديهم .

إما الشكل الآخر من نظم تقديم الخدمات فهو النظام الذي لا يتحكم Uncantrollable في التدفق علي الخدمة التى يقدمها. ومن المعروف أن هذه هي الحالة الأكثر شيوعاً فى الحياة العملية.فمن المعروف أن عملية التدفق تخضع إلي العديد من العوامل التي غالباً لا يكون للنظام قدره علي التحكم فيها وأن كان يمكنة التأثير إلي حد ما عليها .

(٢) عدد الوحدات التي تتقدم طالبة للخدمة ، ويقصد بذلك عدد الوحدات مجتمعة التي تتقدم للخدمة . فعندما يتقدم الطلبة لمكتب التسجيل في الجامعة فإنهم يتقدمون فرداً فرداً Single arrival. وقد تكون وحدة التعامل في بعض النظم مكونة من أكثر من وحدة . وفى هذه الحالة تعامل وحدة التعامل هذه علي أنها أيضا وصول فردي Single arrival. فعندما يتم التعامل في سوق الأوراق المالية غالبا ما يكون حجم التعامل هو عشرة أسهم مجتمعة .ومن ناحية أخري فإن طالبي الخدمة قد يكونوا في شكل مجموعة batch arrival كما هو الحال في مطاعم الأكلات السريعة التى عادة ما يذهب اليها مجموعة من الأفراد معاً،ثم بعد ذلك يكون مطلوب خدمة كل منهم على حدة

(٣) التوزيع الاحتمالي لعملية الوصول .. ويقصد بذلك معدل وصول الوحدات طالبة الخدمة وهنا يمكن التمييز بين نوعين أساسيين من شكل وصول طالبي الخدمة :

(أ) معدل وصول بنا ءاً على معدل ثابتConstant rate ويقصد

بذلك أن تكون الفترة التي تنقضي بين وصول وحدة طالبة للخدمة والوحدة التي تليها فترة ثابته ، وبالتالي فإن التباين Variance بين تلك الفترات يساوي صفر . ومثال ذلك أن معدل فحص أحد الألات كل ثلاثة أيام أو أن يكون معدل وصول المادة الخام الي محطات التشغيل في خط الانتاج كل فترة زمنية ثابته . وعلى الرغم من وجود هذه الأمثلة المحددة إلا أنه من الصعب وجود معدل ثابت لطلبة الخدمة فى الحياة العملية لصفة عامة .

(ب) معدل وصول بناء على معدل متغير Variable وباحتمال عشوائى random rate ومثال ذلك معدل وصول السيارات الى أحدي محطات الخدمة والذي عادة ما يكون فى شكل غير ثابت.فمن الممكن أن تكون الفترة بين وصول السيارات الأولي والثانية خمسة دقائق وفي نفس الوقت تكون الفترة بين وصول السيارة الثانية والثالثة دقيقتين فقط .وفي هذه الحالة يمكن دارسة الظاهرة والتوصل إلي شكل من أشكال التوزيعات الاحتمالية Probability distributions التي تمثل تقريبا وصفاً لظاهرة الوصول . وسوف نتناول فيما بعد بشئ من التفصيل ـ أهم التوزيعات الاحصائية التى يمكن أن تستخدم في هذا المجال .

(٤) درجة قبول طالبي الخدمة للانتظار . وهنا يمكن أن يكون أمامنا نوعان من الحالات . أما الحالة الأولي فهي الحالة التى يكون فيها طالب الخدمة مستعداً للإنتظار طويلاً للإنتظار طويلاً في الطابور حتي تصبح وحدة تقديم الخدمة جاهزة لتصريح الخدمة له . وعادة ما يوصف هذا الشخص بأنة صور Parient arrival.أما الحالة الثانية

فهي حالة عدم الرغبة في الانتظار ولكن بدرجات مختلفة Impatient arrivals وتضم هذه الحالة الأخيرة مجموعتين من العملاء أما المجموعة الأولى فهي تلك التى تأخذ قرارها بمجرد النظر الى طول صف الانتظار ووحدة تقديم الخدمة . ومن ناحية أخرى فإن المجموعة الثانية هي التي تنضم فعلا إلى الطابور ثم بعد فترة من الانتظار تغادر الطابور .

ثالثاً : الطابور (صف الانتظار Waiting line) :

حينما تتقدم الوحدة طالبة للخدمة وتكون جهة تقديم الخدمة غير مشغولة فإنه لا يحدث تشكيلا لما يسمى بالطابور أو صف الأنتظار (ويمثل ذلك الخط الغير متصل في الشكل) إما إذا كانت جهة تقديم الخدمة مشغولة بتقديم الخدمة لوحدة أخري وكان هناك أكثر من شخص طالبي الخدمة فى ذات الوقت فإنه لا بد من تشكيل طابور الانتظار . وعلى الرغم من أن وجود الطابور يعبر عن الاستخدام الفعال لجهة تقديم الخدمة إلا أنه عادة ما يكون غير مرغوب من وجهة نظر طالب الخدمة . كذلك فإنه أيضا كثيراً ما لا يكون مرغوباً من وجهة نظر المنشأة ذاتها . ففي كثير من الحـــالات (مثل محلات تقديم السندوتشات والوجبات السريعة) يكون تخفيض وقت انتظار العميل في الصف أحد العناصر التنافسية الأساسية للمشروع وتختلف صفوف الانتظار من حيث الطول والعدد.

(١) طول الصف : وهنا أيضاً يمكننا أن نميز بين نوعان من صفوف الانتظار :

(أ) الطابور ذو الطول المحدد Finite Waiting Iine Length :

وهو الذى يكون له حداً أقصى لا يمكن تجاوزة ، ويكون ذلك في غالبية الأحوال بسبب التسهيلات المتاحة لانتظار الوحدات طالبة الخدمة . ومثال ذلك عدد المقاعد المتاح للانتظار فى صالون الحلاقة وكذلك تلك المتاحة في عيادة أحد الأطباء ، أو المساحة المتاحة لانتظار السيارات فى أحد محطات تقديم الخدمة . كذلك فإن الطول لمحدد للطابور قد يرجع الي سلوك المستهلك ذاته . فإذا رأي المستهلك أن الطابور الذي يتكون من أربعة سيارات على الأكثر فى أحد المحطات لا يستحق الانضمام اليه ، أصبح النظام الذي أمامنا طابور ذو طول محدود .

(ب) الطابور غير محدد الطول Infinite Waiting Line Length : وهو الذي لا يكون له حداً أقصي ويمكن نظرياً أن يصل إلى مالا نهاية ومثال ذلك عدد العملاء الراغبين في دفع قيمة مشترواتهم فى أحد المحلات التجارية الكبري وخصوصاً فى فترة الأوكازيون .

وعلي الرغم من أنه المعالجة الرياضية لحالة الطابور غير المحدود تكون أسهل نسبياً إلا أنه من الناحية العملية تكون حالة الطابور المحدود هي الأكثر واقعية وتحتاج الي معالجة رياضية خاصة .

(٢) عدد الصفوف : وهنا يكن التمييز بين حالتين هما :

(أ) حالة الصف الواحد Sinle line : وهي الحالة التي يكون فيها تقديم الخدمة عن طريق منفذ واحد . ومثال ذلك أن يمر جميع الطلاب على أحد اساتذة المادة فى شكل امتحان شفهي ، أو انتظار جميع المرضى فى عيادة أحد الأطباء بقصد اتمام الفحص الطبى.

(ب) حالة الصفوف المتعددة Multiple lines : وهي إما الحالة التي يكون فيها تقديم نفس الخدمة عن طريق عدة منافذ ، كما هو الحال في التقدم لوحدات الجوازات عند السفر في المطارات ، أو الحالة التى يكون فيها صف واحد ويكن عند نقطة معينة يكون أمام طالب الخدمة أكثر من وحدة لتقديم الخدمة .

رابعاً : قاعدة لأولية الخدمة : ويقصد بذلك القاعدة (أو مجموعة القواعد) التى يتم على أساسها تقرير أولوية تقديم الخدمة للمنتظرين فى الصف ، ويطلق على ذلك قاعدة الأولوية queue disci-pline وسوف يتضح فيما بعد أن اختيار قاعدة معينة سوف يؤثر بشكل مباشرة على أداء النظام من جوانب متعددة .

وهناك العديد من القواعد التى يمكن أن تستخدم فى هذا الصدد ومنها :

(أ)الذي يصل أولاً في الطابور يخدم أولاً (وهي أكثر القواعد شيوعا

(ب) الذي يحتاج الى أقل وقت خدمة أولاً .

(جـ) الذي يقوم بالحجز أولاً يخدم أولاً .

(د) الحالات الطارئة أولاً .

(هـ) العملاء الذين يدرون ربحاً أكثر للمنشأة أولاً .

(و) العملاء الذين يطلبون أكثر أولاً .

(ح) العملاء الذين يقترب موعد تسليمهم أكثر أولاً .

وفي الحياة العملية قد يتم تخصيص منافذ معينة لمجموعة من العملاء وذلك لتحقيق اى من القواعد السابقة . ومثال ذلك وجود

منافذ لبيع تذاكر الدرجة الأولى في السكك الحديدية ، ومنافذ للجمهور الذي يتسوق عدد محدود من السلع في المتاجر الكبرى .

خامساً : وحدة تقديم الخدمة Service Facility : وهنا يمكن أن يختلف هيكل نظام تقديم الخدمة من حيث عدد منافذ Channels ومراحل Phases تقديم الخدمة . كما أنه قد يختلف من حيث معدل تقديم الخدمة ذاته . وسوف نتناول كل منهم بالايضاح .

(١) هيكل نظام تقديم الخدمة : وهنا يمكن أن يواجهها عدة بدائل :

(أ) منفذ واحد ومرحلة واحدة Single Channel, Single Phase

وهي الحالة التى يقوم بتقديم الخدمة فيها جهة واحدة ينتظرها جميع الموجودين في الصف وبعد اتمام تقديم الخدمة يغادر الفرد النظام بالكامل. ومثال ذلك زيارة أحد الأطباء أو صالونات الحلاقة الصغيرة التي يعمل فيها فرد واحد فقط . وتعد هذه أسهل حالات المعالجة الرياضية كما سنري .

(ب) منفذ واحد ومراحل متعددة Single Channel Muitiphase

وهي الحالة التى يتولى تقديم الخدمة فيها جهة واحدة ولكن يمر العميل على اكثر من مرحلة متتالية لاتمام الخدمة . ومثال ذلك عملية صرف مبلغ من المال من حساب التوفير فى أحد البنوك والتي عادة ما تبدأ بشباك معين واحد ثم يليها الصراف المسئول عن اعطاء النقدية . كذلك فإنه الحصول على أحد الوجبات فى كافتيريا المدينة الجامعية يعد مثالاً جيداً علي تلك الحالة . أما في مجال الصناعة فإن ترتيب التسهيلات الانتاجية فى شكل خط انتاج Assembly Line ، كما فى

صناعة السيارات ، يمثل حالة أخري من حالات المنفذ الواحد والمراحل المتعددة .

(جـ) منافذ متعددة ومرحلة واحدة Multichannel Singlphase .

وهي الحالة التي يكن هناك العديد من المنافذ التى تقدم نفس الخدمة والتي بمجرد أن يحصل عليها العميل يغادر النظام كلية بمعني أنه يسعي الي الحصول علي خدمة واحدة وليست مجموعة متتالية من الخدمات. وتعد حالة البنوك التي لها أكثر من شباك لتقديم نفس الخدمة (أو نوع الخدمات) مثالاً جيداً على ذلك . كذلك فإن وجود أكثر من صراف لتحصيل الرسوم الدراسية من الطلاب يعبر عن هذه الحالة أيضا . ومن الأمثلة الأخري الملموسة وجود أكثر من مضخة لتقديم البنزين في أحد محطات البنزين ووجود أكثر من موظفة حجز في مكتب شركة طيران .

وتعد المشكلة الاساسية في هذا النوع من النظم هو احتمال اختلاف وقت انتظار الأفراد في الصفوف المختلفة بشكل ملحوظ وعلاوة على أنه ذلك قد يعبر عن نوع من عدم العدل فإنه قد يدفع الأفراد إلي المحاولة الدائمة للتنقل بين الصفوف المختلفة .ولذلك فعادة ما يتم عمل صف واحد وعند نقطة معينة يتقدم طالب الخدمة لجهة تقديم الخدمة المتاحة أو أن يتم اعطاء ارقام للعملاء حسب وصولهم ويتم تخصيصهم بالترتيب علي مراكز الخدمة عندما تكون متاحة .

(د) منافذ متعدة ومراحل متعددة Multichannel Multiphase

وهي الحالة الأكثر تعقيداً عندما يكون هناك أكثر من وحدة لتقديم

نفس الخدمة ولكن طالب الخدمة يسعي إلى الحصول علي عدة خدمات متتالية . ففى بعض محطات تقديم الخدمة للسيارات عادة ما يكون هناك أكثر من مضخة لتقديم البنزين كما أن هناك أكثر من وحدة لضخ الهواء اللازم للإطارات فبالنسبة للعملاء الذين يرغبون في الحصول علي كل من الخدمتين يكون أمامهم أكثر من منفذ في مرحلتين متتاليتين ولذلك فإنه يمكن خدمة أكثر من سيارة من هذه المجموعة في ذات الوقت .

(هـ) التصميم المختلط Mixed وهو عبارة عن التصميم الذي يوجد به أي من الخصائص السابقة في مرحلة معينة ثم يتغير هذا الهيكل في المرحلة التالية من احتمال تغيره مرة أخريي وهكذا ومثال ذلك أن يكون هناك أكثر من منفذ تصب جميعها في منفذ واحد لتقديم خدمة واحدة (مثل اندماج أكثر من فرع من الطريق في مدخل أحد الكباري (أو أكثر من منفذ يصبون جميعاً في منفذ واحد لتقديم عدة خدمات متتالية (ومثال ذلك نقط عبور الحدود بين الدول أو التي عادة ما تتضمن أكثر من مرحلة متتالية) .

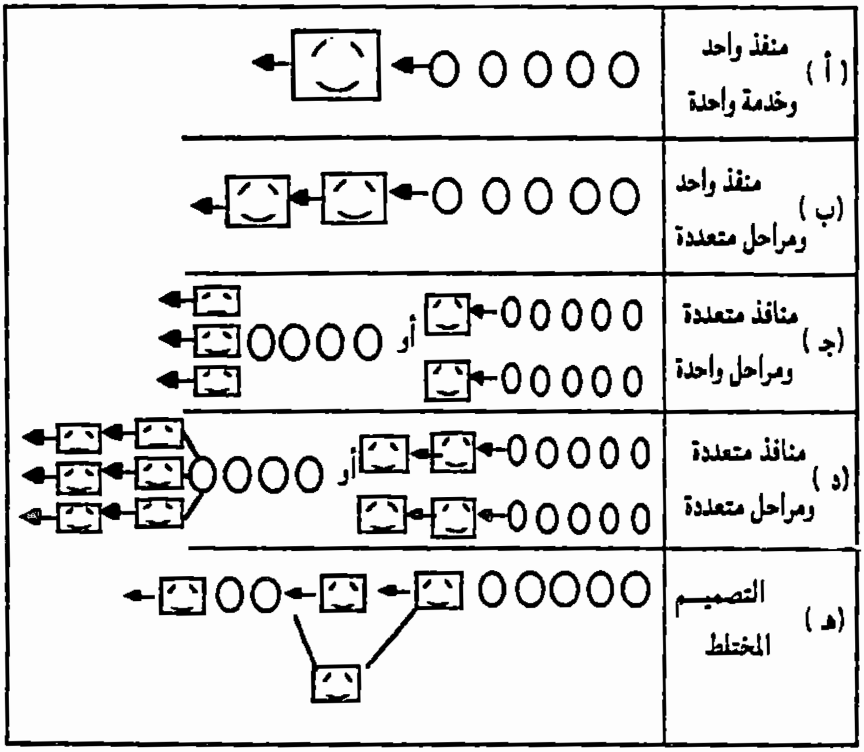
كذلك فإن حالة التصميم المختلط تتضمن حالة أن يكون هناك أكثر من منفذ وأكثر من خدمة متتالية على أن يتغير عدد المنافذ أو عدد الخدمات اللازمة (أو كليهما) عند كل نقطة ، أضف إلى ذلك الحالة الأكثر تعقيداً وهى ألا يكون هناك شكل معين للتدفق يربط بين تلك المراحل المختلفة (ومثال ذلك حالة انتاج الأوامر والطلبيات حيث يتوقف الأمر علي الخصائص الانتاجية لكل أمر انتاجى).

ويتضمن الشكل التالي ( ) تعبيراً عن تلك الحالات المختلفة

(٢) معدل تقديم الخدمة Service rate: ويقصد بذلك المعدل الذي يتم به تقديم الخدمة ودرجة التباين بين الوقت اللازم لتقديم الخدمة للعملاء وهنا ، كما هو الحال فى عملية الوصول ، يمكن التمييز بين نوعني أساسيين هما :

(أ) معدل ثابت Constant rate : لتقديم الخدمة ، ويقصد بذلك أن تكون الفترة الزمنية اللازمة لتقديم الخدمة لكل الوحدات متساوية تماما وبالتالي فإن التباين يعادل صفر ، وتعد هذه حالة نظرية إلى حد كبير ، ولكن يمكن الاعتماد عليها عند استخدام الآلية الكاملة والدقيقة في تقديم الخدمة .

(ب) معدل متغير Variable rate لتقديم الخدمة وهذه هي الحالة الأكثر واقعية نظراً لاختلاف مواصفات الخدمة ونوعية العميل ، بل وتغير كفاءة القائمين بتقديم الخدمة مع مرور الوقت . وفي هذه الحالة يتوقع أن يكون تباين الوقت قيمة موجبة ويمكن الاعتماد علي بعض أشكال التوزيعات الاحتمالية التي تمثل وصفاً تقريبياً لفترة تقديم الخدمة وسوف نتناول فيما بعد أهم هذه التوزيعات بشئ من الايضـــاح .



شكل (   )

سادساً : المغادرة للنظام Departures : من المفترض أنه عندما يتم حصول الوحدة علي الخدمة (أو مجموعة الخدمات) التي ترغبها فإنها سوف تترك النظام وتخرج منه . ولكن في بعض الحالات العملية قد تعود الوحدة مرة أخري إلي النظام طالبة للخدمة مرة أخري ومثال ذلك العودة إلي الأطباء مرة أخري أو اعادة الآلة نظراً لتوقفها مرة أخري بعد أصلاحها . وعلي الرغم من أنه من الممكن اعتبار هذه وحدات جديدة تنضم الي الطابور الموجود فعلاً وبشكل يخضع لنفس التوزيع الاحتمالي المفترض أصلا عن معدل الوصول لطلب الخدمة إلا

أن ذلك يعد صحيحاً فقط في حالة المجتمع المصدري اللانهائي والغير محدود . أما إذا كان المجتمع المصدري محدود فإن احتمال عودة وحدة من التى تم تقديم خدمة لها إلي النظام يجب أن يعامل بشكل خاص رياضياً نظراً لتأثيرها الكبير بالنبسة لحجم المجتمع المصدري .

سابعاً : التوزيعات الإحتمالية الخاصة بعملية الوصول لطلب الخدمة

أشرنا من قبل إلي أن عملية الوصول بهدف طلب الحصول علي الخدمة عادة ما تكون في شكل عشوائي يمكن الإعتماد علي بعض التوزيعات الإحتمالية في وصفه . ويمكن النظر إلي عملية الوصول هذه من زاويتين مختلفتين عند وصفها . أما الزاوية الأولي فهي الإهتمام بعدد الأشخاص (أو الأحداث) الذين يصلوا خلال وحدة زمنية طالبين الخدمة . ومثال ذلك عدد المرض الذين يصلون إلي المستشفي خلال الساعة ، أو عدد السيارات التي تصل إلي إشارة مرور معينة خلال الدقيقة . وتعني تلك الأمثلة أن المتغير العشوائي random variable الذي يتم دراسته هو العدد (الصحيح) خلال فترة ثابتة ، ولكن هذا العدد نفسه متغير . ومن أهم تلك التوزيعات الإحتمالية التي عادة ما تستخدم في وصف تلك الظاهرة التوزيع الإحتمالي البواسوني Poisson distribution . وترجع هذه التسمية إلي العالم الرياضي الفرنسي Simeon D. Poisson الذي قدم هذا التوزيع في العقد الرابع من القرن الثامن عشر .

(أ) توزيع بواسون Poisson distribution

حتي يمكن وضع تعريف دقيق لهذا النوع من التوزيع Poisson دعنا نفترض أن لدينا عملية تنطوي علي أحداث (تعطل آلة ، وصول سيارة ، إتصالات تليفونية) يتم حدوثها عشوائياً خلال فترة زمنية معينة (ولتكن دقيقة وذلك بوسط حسابي قدره λ ، وأن الشروط التالية صحيحة :

(١) عدد مرات ظهور هذا الحدث (تعطل آلة ، وصول سيارة ، إتصال تليفون) في خلال فترة زمنية معينة يعد مستقلاً (غير متأثراً) عن عدد مرات ظهور هذا الحدث في خلال أي فترة زمنية أخري .

(٢) أن إحتمال حدوث هذا الحدث (تعطل الة ، وصول سيارة، إتصال تليفوني) في خلال الجزء الصغير (ولتكن ثانية) من تلك الفترة الأكبر (ولتكن دقيقة) يكون صغيراً ، ويتناسب هذا الإحتمال مع نسبة ذلك الجزء الصغير إلي تلك الفترة الأكبر .

(٣) إن إحتمال حدوث هذا الحدث لمرتين أو أكثر خلال الجزء الصغير من الفترة الأكبر يكون قيمة محدودة جداً يمكن إهمالها تصل إلي الصفر .

فإذا تحققت هذه الشروط فإنه يمكن حساب إحتمال حدوث هذا الحدث لعدد X من المرات حيث

$$X = 0,1,2,\ldots,1,\infty$$

بإستخدام معادلة التوزيع البواسوني التالية :

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^{x}}{X!}$$

(وذلك علي أساس أن e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي للأعداد وقيمتها حوالي ٢.٧١٨)

دعنا الآن نقوم بتطبيق الفكرة الأساسية للتوزيع الأسي علي مثال واقعي وهو عدد المكالمات التليفونية التي تصل إلي أحد المحلات خلال فترة خمسة دقائق . فإذا إفترضنا أنها تحقق الشروط التالية :

(١) عدد المكالمات التي تصل إلي هذا المحل خلال أي ثانية خلال تلك الدقائق الخمس يعد مستقلاً عن عدد المكالمات التي تصل إلي المحل خلال أي ثانية أخري .

(٢) إحتمال حدوث مكالمة خلال ثانية واحدة صغير جداً ويتناسب مع علاقة الثانية بالخمسة دقائق .

(٣) إحتمال حدوث مكالمتين أو أكثر خلال ثانية واحدة يقترب من الصفر .

فإنه يمكن إستخدام التوزيع البواسوني لحساب إحتمال حدوث عدد صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . . ∞ من المكالمات .

مثـال :

بإفتراض أن متوسط عدد المكالمات المتوقعة خلال خمسة دقائق هو ٢ مكالمة وأن توزيع الكالمات خلال تلك الفترة يحقق شروط التوزيع الأسي أحسب (أ) إحتمال أن يكون عدد المكالمات خلال الخمسة دقائق التالية هو ثلاثة مكالمات .

$$P(x=3) = \frac{e^{-2}(2)^3}{3!}$$

$$= .1804$$

(ب) إحتمال أن يكون عدد المكالمات خلال الخمسة دقائق التالية هو مكالمة واحدة فقط .

$$P(x=1) = \frac{e^{-2}(2)^1}{1!} = .2707$$

(جـ) إحتمال ألا تحدث مكالمات خلال الخمسة دقائق التالية .

$$P(x=0) = \frac{e^{-2}(2)^0}{0!} = .1353$$

ويمكن إستخدام جدول التوزيع البواسوني في الملحق للوصول إلي نفس النتائج دون الإعتماد علي المعادلة .

والسؤال الأن هو ، كيف يمكن إستخدام التوزيع الأسي إذا كان المطلوب هو حساب الإحتمالات المختلفة خلال فترة زمن أخري غير خمسة دقائق . طالما أن الإحتمال في التوزيع الأسي يتناسب مع طول الفترة الزمنية فإنه يمكن إستخدام المعادلة التالية :

$$P_T(x) = \frac{(\lambda T)^x e^{-\lambda T}}{X!}$$

وذلك علي أساس أن

T الفترة الزمنية التي يتم قياس الإحتمال خلالها

X عدد المرات التي يحدث فيها الحدث الذي نقوم برصده

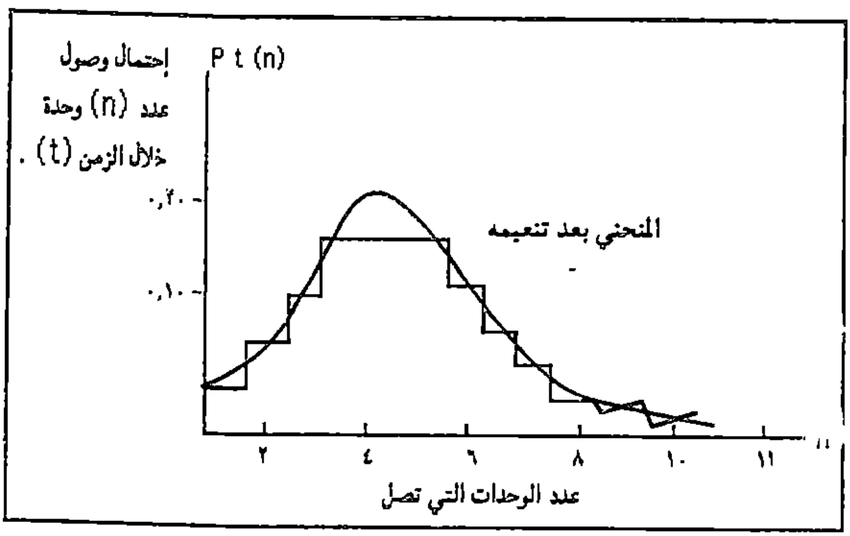
$P_T(x)$ إحتمال ظهور الحدث لعدد X من المرات خلال الفترة T

λ متوسط عدد المرات التي يظهر فيها الحدث خلال وحدة الزمن (يمكن النظر إلي الفترة الزمنية T علي أنها مكونة من عدة وحدات زمن)

e أساس اللوغاريتم الطبيعي للأعداد وقيمته ٢,٧١٨

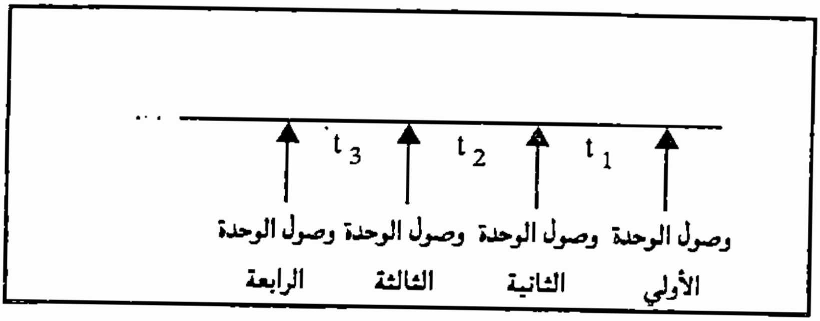
ويوضح الشكل اتالي التوزيع البواسوني عند حالة إفتراضية يكون فيها .

$\lambda T = 4$



توزيع بواسون لـ ($\lambda T = ٤$)

أما الزاوية الأخري التي يمكن النظر منها إلي عملية وصول طالبي الخدمة فهي إعتبار أن المتغير العشوائي هو الوقت المنقضي بين حدوث الحدث (تعطل آلة ، أو وصول سيارة) . ويوضح الشكل التالي الحالة التي يكون فيها الزمن t بين الوحدات المتتالية الوصول زمناً متغيراً .



ومن الشائع إستخدام عدة توزيعات إحتمالية متصلة Continuous Probability distributions في تقريب وتفهم الوقت الذي ينقضي بين وصول وحدة والوحدة التي تليها . ومن أهم هذه التوزيعات الإحتمالية : التوزيع الأسي المتناقص negative exponential distribution ، توزيع إيرلانج Erlang distribution وسوف نتناولهما بشيء من الإيضاح .

(ب) التوزيع الأسي المتناقص Negative Exponetial Distribution

يوضح الشكل التالي التوزيع الأسي المتناقص وذلك علي أساس أن معادلة تقدير الإحتمال هي :

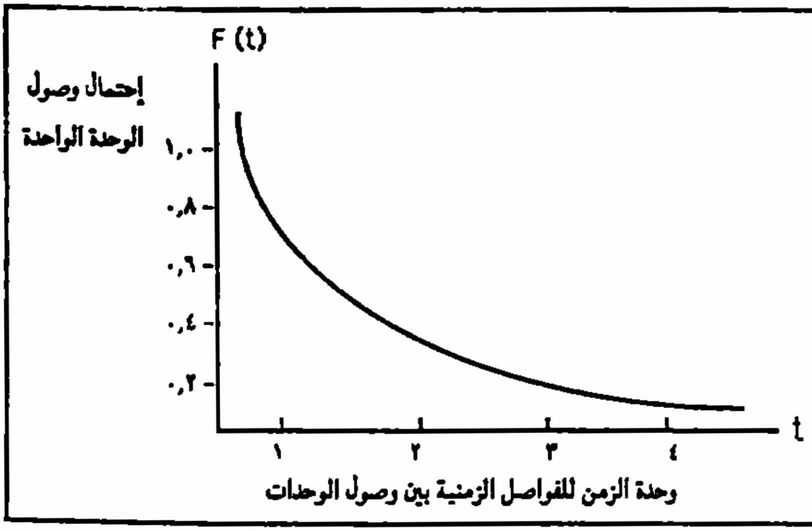
$$F(t) = ع e^{-عT}$$

حيث :

(t) إحتمال وصو الوحدة الواحدة خلال الزمن (T)

ع = كثافة وصول الوحدات (أي متوسط عدد الوحدات التي تصل طلباً للخدمة في وحدة الزمن) .

e = أساس اللوغاريتم الطبيعي ويساوي (٢,٧١٨)



التوزيع الأسي لـ ($\lambda e^{-\lambda T}$) حيث ($\lambda = 1$)

وغالباً ما يتم كتابة الإحتمال (F (t)) في الصورة (P_t) .
وهذه المعادلة للوحدات الفردية للوصول single arrivals توضح كما في الشكل أن الفواصل الزمنية الصغيرة بين الأصول أكثر إحتمالاً من الفواصل الزمنية الطويلة .

ويمكن إستخدام هذا المنحني بطريقتين :

(أ) لترضيح المباشر لإحتمال أنه سيمر علي الأقل عدد (t) وحدات زمنية إلي حين الوصول التالي .

(ب) لحساب إحتمال أن يحدث الوصول التالي بعد الزمن (t) أو أقل ، وذلك

(جـ) توزيع إيرلانج : Erlang distribution

يطبق هذا النوع من التوزيع علي نوع من دوال الكثافة dencity functions التي تفيد في تمثيل عدد مختلف من توزيعات الفواصل الزمنية لوصول الوحدات . والصورة العامة لمعادلة توزيع إيرلانج كالآتي :

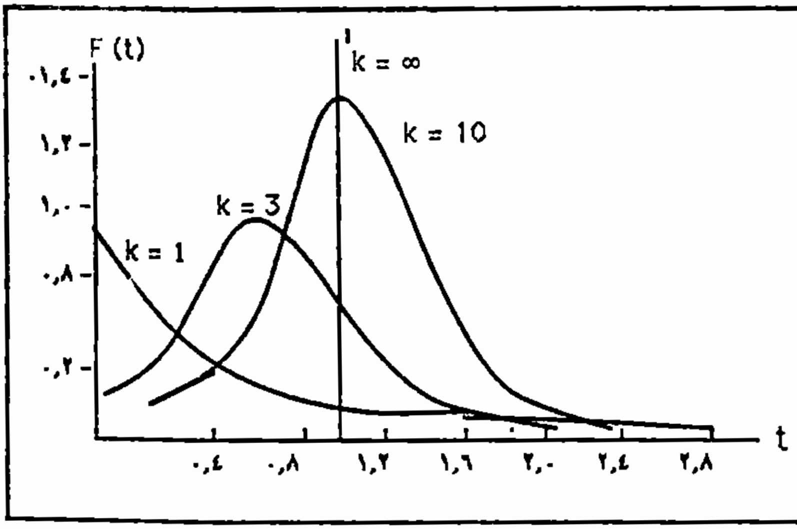
$$f(t) = \frac{k\lambda(k\lambda t)^{k-1} e^{-k\lambda t}}{(k-1)!}$$

كل هذه التوزيعات لها متوسط = $\frac{1}{\lambda}$ و تباين = $\frac{1}{\kappa h^2}$

ويلاحظ أن (k) في هذه المعادلة هي رقم صحيح موجب يستخدم لتميز بين التوزيعات المختلفة لإيرلانج . فإذا كان (k = 1) فتعبر عن توزيع إيرلانج من الدرجة الأولي ، وإذا كان (k = 2) فتعبر عن توزيع إيرلانج من الدرجة الثانية ، وهكذا .

وإعتماداً علي القيمة المختارة لـ (k) يمكن تشكيل التوزيع للتمثيل التقريبي للبيانات الفعلية التي يتم ملاحظتها . فإذا أخذنا النهايات المتطرفة لهذه المعادلة ، فنجد أنه عند (k = 1) فسيختصر الزمن الازم لملاحظة وصول الوحدة الواحدة إلي ($\lambda e^{-\lambda t}$) والتي هي في الراقع تساوي التوزيع الأسي .

وعندما تكون (k) كبيرة جداً يصبح التباين صفراً وهذا يعني أن الفاصل الزمني للوصول يصبح ثابتاً . والشكل رقم (٧) يوضح ذلك :



شكل رقم (٧) توزيع إيرلانج عند ($\lambda = 1$)

(د) التوزيع الأسي الزائد : Hyperex Ponential distributon

أوضحنا من قبل أن للتوزيع الأسي متوسط يساوي ($\frac{1}{\lambda}$) وتباين يساوي ($\frac{1}{\lambda^2}$) . ولتوزيع بواسون المتوسط = التباين = (λ) ، ولكن كثيراً ما يتصادف عملياً توزيعات لها نفس المتوسط ونفس التباين الخاص بالتوزيع الأسي وتوزيع بواسون ولكن يكون لها تغاير variability أكبر . عندئذ يستخدم التعبير « زائد hyper » ليقترن بإسم التوزيع .

تباين التوزيع الأسي الزائد يساوي :

$$\frac{j}{\lambda^2}$$

وتباين توزيع بواسون الزائد يساوي : J λ

حيث (j > 1) لأن لو كانت (j = 1) فسيعود التباين ليساوي التباين البسيط لتوزيع الأسي أو توزيع بواسون .

وعادة ما يكون التطبيق الدارج للتوزيع الأسي الزائد يكون علي أنظمة الخدمة المتعددة القنوات بمعدلات أسية مختلفة للخدمة . ويكون التوزيع الأسي الزائد الذي ينتج هو المتوسط الموزون we ghted aver-age لتوزيع الخدمة لكل قناة وإحتمال أن يتم تخصيص الوحدة التي تصل إلي هذه القناة .

(هـ) التوزيعات الأخري : Other distributions

عندما تختلف معظم توزيعات وصول الوحدات في الحياة الواقعية عن المعادلات الرياضية المذكورة هنا فسوف تنعكس درجة إختلافها علي دقة النتائج عند إستخدام هذه التوزيعات الرياضية لتمثيل ما يحدث في الحياة الواقعية .

وعندما يكون الإختلاف كبيراً ، أو عندما يتطلب الأمر دقة عالية فالبديل المنطقي عندئذ هو إستخدام أساليب المحاكاة simulation.

بطرح القيمة التي نقرأها علي المنحني من واحد صحيح .

والجدول التالي يوضح ذلك :

قيمة (t) بالدقائق	إحتمال أن يكون الوصول التالي خلال الزمن (t) أو أكثر. (تقرأ مباشرة من المنحني)	إحتمال أن يكون الوصول التالي خلال الزمن(t) أو أقل. [1 - F (t)]
صفر	١,٠	١ - ١,٠ = صفر
١	٠,٣٥	١ - ٠,٣٥ = ٠,٦٥
٢	٠,١٥	١ - ٠,١٥ = ٠,٨٥
٤	صفر	١ - صفر = ١,٠

ثامناً : معدل أداء الخدمة : Service rate

إن التعامل مع هذا المعدل يشابه التوزيع الرياضي الذي أشرنا إليه عند عرض التوزيعات الخاصة بوصول العملاء . ويمكن هنا أيضاً أن نميز بين حالة زمن الخدمة الثابت والتي تنطبق فقط علي العمليات الآلية أما الحالة الأخري الأكثر واقعية فهي حالة زمن الخدمة المتغير والذي يمكن أن يستخدم معها التوزيع الأسي ، وتوزيع إيرلانج والتوزيع الأسي الزائد ، وذلك لتعبير عن زمن أداء الخدمة .

وغالباً ما يستخدم توزيع إيرلانج مع حالة « منفذ واحد ، خدمة متتابعة » ، ولكن يجب ملاحظة أن هناك قيود صارمة يجب توفرها لتطبيق هذا التوزيع . حيث يمكن تطبيق هذا التوزيع فقط عندما تكون كل خدمة من الخدمات المتتابعة لها توزيع أسي بنفس المتوسط ولا يسمح بوجود أي زمن تأخير بينها .

مثال : عند إعادة بناء ماكينة ، كان علي عامل الإصلاح القيام بـ (٥) عمليات متتابعة ، فإذا كان وقت الخدمة الذي يؤديه كل عملية له توزيع أسي ، وأن وقت إتمام كل عملية له نفس المتوسط . فيمكن عندئذ تطبيق معادلة إيرلانج (مع وضع k = عدد الخدمات = (٥) . وعموماً يندر توفر هذه القيود عملياً ويعد التوزيع الأسي هو الأكثر إستخداماً لتمثيل توزيع وقت أداء الخدمات . ولو أنه للتطبيق الصحيح لهذا التوزيع ، يجب أن تكون محطة الخدمة قادرة علي أداء الخدمات ذات الوقت القصير جداً بالنسبة لمتوسط زمن الخدمة .

مثال : إستخدام التليفونات (هي أساساً نشأة هذه النظرية) وأكثرها إنطباقاً عليها . حيث يتراوح زمن الخدمة من عدة ثواني (عندما يتردد العميل في إجراء المكالمة ويعيد الساعة) إلي ساعة أو أكثر (مكالمة طويلة) .

النماذج الرياضية لصفوف الإنتظار :

يمكن الآن إجمال الحالات التي يمكن أن نواجهها عند معالجة مشكلة صفوف الإنتظار ، وذلك عن طريق تلخيص الأشكال المختلفة التي يمكن أن يكون عليها كل عنصر من العناصر التي تم مناقشتها علي النحو التالي :

١ - المجتمع المصدري ← نهائي

← لا نهائي

٢ - خصائص وصول الوحدات طالبة الخدمة :

- النموذج
  - يمكن التحكم فيه
  - لا يمكن التحكم فيه

- حجم الوحدات التي تصل
  - فرادي
  - في مجموعات

- التوزيع الرياضي
  - ثابت
  - أسّي
  - بواسون
  - إيرلانج
  - أسي زائد
  - أفري

- درجة الصبر لإنتظار في الصف
  - صبور (يقف في الطابور)
  - غير صبور
    - يصل ، يلقي نظرة ، ثم ينصرف.
    - يصل ، ينتظر فترة ، ثم ينصرف.

٣ - المعالجة المادية لصفوف الإنتظار :

- الطـول
  - طول لا نهائي
  - طاقة محدودة

- عدد الطوابير (المنافذ)
  - منفردة
  - متعددة

٤ - الإختيار من صف الإنتظار :

قاعدة أولوية الخدمة .
- الذي يصل أولاً يتم خدمته أولاً.
- أقل وقت للمعالجة أولاً .
- الحاجة أولاً .
- الحالات الطارئة أولاً .
- الحاجات المحدودة أولاً .
- أخري .

٥ - أداء الخدمة :

الهيكل
- منفذ واحد
  - مرحلة واحدة .
  - خدمات متتابعة .
- منافذ متعددة
  - مرحلة واحدة .
  - مراحل متعددة.
- مزيج
  - الإندماج من قنوات متعددة إلي قناة واحدة
    - مرحلة واحدة
    - مراحل متعددة
  - المسار المتغير

معدل أداء الخدمة
- ثابت
- إيرلانج
- أسي زائد
- أسي
- أخري

٦ - المخرجات

- احتمال منخفض للعودة في طلب الخدمة
- العودة إلي مجتمع الموارد

ويتضح من هذا العرض أن هناك عدد لا نهائي من حالات صفوف الإنتظار التي يمكن أن تواجهنا في الحياة العملية . وقد قام المتخصصون بوضع بعض النماذج الخاصة ببعض الحالات والتي يمكن أن يكون لها حلاً رياضياً إعتماداً علي نظريات الإحتمالات . وتجدر الإشارة هنا أن ذلك يعدد عدداً محدوداً من الحالات ولذلك فإن الحالات الأكثر تنوعاً وصعوبة يتم معالجتها بإستخدام المحاكاة Simu-latian إعتماداً علي بعض البرامج الجاهزة أهمها Gpss والذي يعبر عن General Purpose Simulation System. وسوف نتناول فيما يلي خصائص هذه النماذج التي يمكن معالجتها رياضياً والمعادلات التي يمكن أن تستخدم في تحديد بعض المعالم الأساسية لتلك التوزيعات

خصائص بعض نماذج صفوف الإنتظار

رقم النموذج	عدد القنوات	عدد مراحل الخدمة	مجتمع الموارد	التوزيع الرياضي للوصول	الإختبار من الصف	التوزيع الرياضي لأداء الخدمات	الطول المسموح به للصف	أمثلة نمطية للنموذج
١	فردى	فردى	لانهائى	بواسون	FCFS	أسى	غير محدد	* شباك الاستعلامات بالبنك ، شباك دفع رسوم لصف فردى .
٢	فردى	فردى	لانهائى	بواسون	FCFS	ثابت	غيرمحدد	* غسيل آلي للسيارة ،آلة تسلية فى حديقة عامة
٣	فردى	فردى	لانهائى	بواسون	FCFS	أسى	محدد	* آلد أيس كريم،، خزينة الحساب فى مطعم
٤	فردى	فردى	لانهائى	بواسون	FCFS	أى توزيع	غير محدد	* توزيع رياضي تجريبي لزمن الرحلات الجوية بين الدول
٥	فردى	فردى	لانهائى	بواسون	FCFS	إيرلانج	غير محدد	* محل حلاقة لرجل واحد
٦	متعدد	فردى	لانهائى	بواسون	FCFS	أسى	غير محدد	* عداد القطع فى توكيل سيارات شباكين دفع رسوم لصفين .
٧	فردى	فردى	نهائى	بواسون	FCFS	أسى	غير محدد	* محطة إصلاح وصيانة آلات فى مصنع

معنى الرموز لمعادلات صفوف الإنتظار «اللانهائية»

الرمز	المعنى
σ	الإنحراف المعياري
λ	معدل الوصول
μ	معدل أداء الخدمة
$\frac{1}{\mu}$	متوسط زمن أداء الخدمة
$\frac{1}{\lambda}$	متوسط الفاصل الزمني بين وصول الوحدات
ρ	$=\frac{\lambda}{m}$: معدل إستخدام تسهيلات الخدمة .
n_e	متوسط عدد الوحدات المنتظرة فى الصف
n_s	متوسط عدد الوحدات فى النظام (بما فيها التى تلقى الخدمة) .
t_e	متوسطزمن الإنتظار فى الصف .
t_s	متوسط الزمن الإجمالى فى النظام (. بما فيها زمن أداء الخدمة)
k	التوزيع رقم(k) فى عائلة منحنيات إيرلانج
n	عدد الوحدات فى النظام
m	عدد قنوات الخدمة المتماثلة .
q	أقصى طول للصف. (مجموع طول الانتظار وطول الخدمة)
p_n	إحتمال وجود عدد (n) بالضبط وحدة فى النظام
p_w	إحتمال الإنتظار في الصف
p_o	إحتمال عدم الإنتظار

معنى الرموز لمعادلات صفوف الإنتظار «اللانهائيـة »

الرمـز	المعنـــــــــى
D	إحتمـال ضرورة إنتظارالوحدة التى تصل فى الصف .
F	معامل الفاعلية ، وهو مقياس لأثرضرورة الإنتظارفى الصف .
H	متوسط عدد الوحدات التى يتم خدمتها .
J	مجتمع الموارد مطروحا منه عدد الوحدات بالنظام (N – n)أى الوحدات التى تحتاج للخدمة
L	متوسط عدد الوحدات فى الصف .
M	عدد قنـوات الخـدمة
n	متوسط عدد الوحدات فى نظام الإنتظار(بما فيهاتلك التيتلقت الخدمة)
N	عدد الوحدات فى مجتمع الموارد
P_n	إحتمال وجود عدد ( )بالضبط من الوحدات فى النظام.
T	متوسط زمن أداء الخدمة .
U	متوسط الزمن بين متطلبات أداء الخدمة للعميل .
W	متوسط زمن الإنتظار فى الصف .
X	معامل أداء الخدمة ،أونسبة الزمن اللازم لاداء الخدمة .

معــادلات بعض نماذج صــفوف الأنتظــار

الرمــز	المعادلـــة
١	$l_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$ $\quad w_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$ $l_q = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ $\quad w_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$ $P_n = (1 - \frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^n \quad , p = \frac{\lambda}{\mu}$
	$l_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$ $\quad w_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$ $l_s = n_i + \frac{\lambda}{\mu}$ $\quad w_s = t_e + \frac{1}{M}$
	$l_q = (\frac{\lambda}{\mu})\left[\frac{1 - Q(\frac{\lambda}{m})^{Q-1} + (Q-1)(\frac{\lambda}{m})^Q}{(1 - \frac{\lambda}{\mu})(1 - (\frac{\lambda}{\mu})^Q)}\right]$ $l_s = (\frac{\lambda}{\mu})\left[\frac{1 - (1-Q)(\frac{\lambda}{\mu}) + Q(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}{(1 - \frac{\lambda}{\mu})(1 - (\frac{\lambda}{\mu})^Q)}\right]$ $\quad P_n = \left[\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - (\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}\right](\frac{\lambda}{\mu})^n$

المعـــادلـــة	الرمـــز
$\bar{n}. = \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \lambda^2\sigma^2}{2(1-\frac{\lambda}{\mu})}$ $t_i = \dfrac{\frac{\lambda}{\mu^2} + \lambda\sigma^2}{2(1-\frac{\lambda}{\mu})}$ $n_s = ne + \dfrac{\lambda}{\mu}$ $t_s = t_s + \dfrac{1}{\mu}$	١
$n_i = \dfrac{\kappa+1}{2K} \cdot \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$ $t_i = \dfrac{\kappa+1}{2K} \cdot \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ $n_s = n_e + \dfrac{\lambda}{\mu}$ $t_s = t_e + \dfrac{1}{\mu}$	
$n_e = \dfrac{\lambda\mu(\frac{\lambda}{\mu})^m}{(M-1)!(M\mu-\lambda)^2} p_0$ $t_s = \dfrac{p_0}{\mu M M!(1-\frac{\lambda}{\mu})^2}(\frac{\lambda}{\mu})^m$ $n_s = n_e + \dfrac{\lambda}{\mu}$ $t_s = t_e + \dfrac{1}{\mu}$ $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{M-1} \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \dfrac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!(1-\frac{\lambda}{\mu m})}}$, $P_\omega = (\frac{\lambda}{\mu})^m \dfrac{P_0}{m!(1-\frac{\lambda}{\mu m})}$	

رقم النموذج	المعـــادلـــة
١	هذا النموذج يعبر عن حالة نهائية لصفوف الإنتظار ، والتي يسهل حلها بإستخدام جداول الصفوف النهائية . وهذه الجداول تستخدم رموزاً مختلفة والتى يوضح الجدول (٣) بياناتها ومعانيها . $X = \frac{T}{T+U}$, $H = FNX$, $L = n(1-f)$ $P_n = \frac{N!}{(N+n)!} X \ Pon$, $J = NF(1-x)$ $W = \frac{L(T+u)}{N-L} = \frac{LT}{H}$, $F = \frac{T+U}{T+U+W}$ $n = L + H$

وفي كل النماذج السابقة تعد كافة العلاقات التالية صحيحة :

$$L = \lambda w$$

$$L_q = \lambda w_q$$

$$L = L_q +$$

$$W = w_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P = \quad \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\frac{\lambda}{m\mu}$$

مثـال (M/M/1)

وتفكر وزارة الداخلية في انشاء محطة لوزن سيارات النقل علي الطريق الزراعي وقد أثار ذلك حفيظة العديد من أصحاب شركات النقل والسائقين نظراً لأنهم يتوقعون أن تكون فترة انتظار وتعطل سياراتهم نتيجة لهذا القرار سبباً في أرتفاع تكلفة النقل وعدم قدرتهم علي الاستخدام الأفضل لسياراتهم ولذلك فقد قامت الرزرة بدراسة للموقف تبين منها في المتوسط يمر أمام تلك المحطة حوالي ١٠ سيارات نقل كل ساعة . كذلك فقد أثبتت الدراسات أن متوسط الوقت المستغرق في وزن الشاحنه هو حوالي ٤ دقائق. والمطلوب :

(١) تقدير درجة الانتفاع بالمحطة .

(٢) احتمال أن يكون هناك ثلاثة شاحنات في النظام ككل

(٣) متوسط عدد الشاحنات المنتظرين في الصف حتي يمكن البدء فى وزنهم

(٤) متوسط عدد الشاحنات المنتظرين في النظام ككل .

(٥) متوسط وقت الانتظار في الصف لكل شاحنة .

(٦) متوسط الوقت الذي تقضية الشاحنة في النظام ككل

(٧) وقت العطل المتوقع في المحطة

وذلك بافتراض أن معدل الوصول يخضع للتوزيع البواسرني ووقت الخدمة يخضع للتوزيع الأسي :

الحــل

λ = 10 Trucks Per hour

S = 4 Minutes Per Truck

μ = 1 Truck Per 4 minutes

15 Trucks Per hour

باستخدام معدلات النموذج الأول :

(١) درجة الانتفاع (درجة استغلال الطاقة بالمحطة)

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = .67 \quad \text{or} \quad 67\%$$

(٢) احتمال أن يكون هناك ثلاثة شاحنات في النظام ككل .

$$P_3 = (1 - \frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^3$$

$$= (1 - .67)(.647)^3 = .099, \text{ or } 10\ \%$$

(٣) متوسط عدد الشاحنات المنتظرين في الصف حتي يمكن البدء في وزنهم

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$Lq = \frac{(10)^2}{15(15 - 10)} = 1.33 \text{ Trucks in line}$$

(٤) متوسط عدد الشاحنات المنتظرين في النظام ككل :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{10}{15 - 10} = 2 \text{ trucks in the System}$$

(٥) متوسط وقت الانتظار في الصف لكل شاحنة

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{10}{15(15-10)} = .133 \text{ hours , or 8 minutes}$$

(٦) متوسط الوقت الذي تقضية الشاحنه في النظام ككل

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{15-10} = .20 \text{ hours, or 12 minytes}$$

(٧) وقت العطل المتوقع في المحطة

$$1 - P = 1 - .67 = .33, \text{ or } 33\ \%$$

مثـال (M/M/1)

توافرت لدي احدي المكتبات بأحد الكليات ماكينه للتصوير يستخدمها الطلاب لتصوير بعض المقالات والقراءات العلمية . وقد أوضحت الملاحظة أن الطلاب يصلون الي هذه الماكينه بمتوسط قدره ٤٠ طالب في الساعة موزعين حسب التوزيع البواسوني . كذلك فإن وقت التصوير موزعاً توزيعاً أسياً بمتوسط قدره دقيقة واحدة . احسب درجة الانتفاع وعدد الطلاب والوقت المتوقع في الصف وفي النظام ككل .

الحـــل :

١ ــ درجـة الأنتفـاء

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} = 67\%$$

٢ ـ متوسط عدد الطلاب في الصف

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{(40)2}{60\,(60 - 40)} = \frac{4}{3} \text{ Students}$$

٣ ـ متوسط عدد الطلاب في النظام ككل

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{40}{60 - 40} = 2 \text{ Students}$$

٤ ـ متوسط الوقت المنقضي في الصف

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu\,(\mu - \lambda)} = \frac{40}{60\,(60 - 40)} = .033 \text{ hours}$$

$$= 2 \text{ minutes}$$

٥ ـ متوسط الوقت المنقضي في النظام ككل

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60 - 40} = \frac{1}{20} \text{ houn}$$

$$= 3 \text{ minutes}$$

مثال (M/D/1)

تفكر احدي محطات البنزين فى شراء وحدة غسيل سيارات أتوماتيكية . وقد أوضحت الشركة الموردة لوحدة الغسيل أن وقت غسيل السيارة ثابت ويعادل ٣ دقائق. فإذا افترضنا أن السيارات سوف تصل الي وحدة الغسيل بمعدل سيارة كل ٤ دقائق فالمطلوب حساب نفس المقاييس السابقة التى تم حسابها في المثال السابق مباشرة (عدد الطلاب) .

الحـل :

يتضح من البيانات أن هذه هي الحالة التى يكون فيها معدل الوصول تبعاً للتوزيع الأسى ووقت الخدمة رقماً ثابتاً وعلي ذلك فأن:

(١) درجة الانتفاع بوحدة الفسيل :

$$? = \frac{\lambda}{\mu}$$

وحيث أن السيارات تصل بمتوسط قدرة سيارة كل أربعة دقائق فإن متوسط عدد السيارات الذي يصل في الساعة = ٦٠ ÷ ٤ = ١٥ سيارة / الساعة كذلك فأن : S = 3 minutes

ويعني ذلك أن $\mu = 20$ Cars / hour

فإذا كانت $l = 15$

فإن درجة الانتفاع بالوحدة

$$P = \frac{15}{20} = .75, \text{ or} \quad 75\%$$

(٢) متوسط عدد السيارات المنتظرين في الصف حتي تبدأ عملية الغسيل

$$Lq = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{(15)^2}{40\,(5)} = 1.125 \text{ Cars in line}$$

(٣) متوسط عدد السيارات المنتظرين في النظام ككل .

$$Ls = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1.125 + .75$$

= 1.875 Cars in The Syste

(٤) متوسط وقت الانتظار في الصف

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{1.125}{15}$$

= .075 hours, or 4.5 minutes

(٥) متوسط وقت الانتظار في النظـام ككل

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1.875}{15}$$

= .125 hours, or 705 minutes

مثـال (M/G/1)

قامت كلية الادارة والتكنولوچيا بادخال حاسباً آليا كبيراً يستخدم في التعليم الطلابى . وقد أوضحت الدراسة أن متوسط عدد الطلاب الذين يقدمون اعمالاً يجب انجازها لهذا النظام يبلغ ٢,١ طالباً في الدقيقة موزعة حسب توزيع بواسون . أما متوسط الوقت اللازم لاتمام الأمر علي النظام فيبلغ متوسط ٢٥ ثانية وذلك بانحرافاً معيارياً قدره ٩ ثوان . احسب كل من متوسط عدد الطلاب والوقت في الصف والنظام .

الحـل :

هذه هي حالة الوصول توزيع بواسون ولكن معدل الخدمة لا يتبع توزيع محدد علي أساس أن :

$\lambda = 2.1$ jpbs Per minute

$S = 25$ Seconds

$\mu = 2/4$ jobs per minute

$\sigma = q$ Second, or .15 minutes

وعلي ذلك فإن :

(١) متوسط عدد الطلاب في الصف :

$$L_q = \frac{(\lambda\sigma)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$= \frac{[(2.1)(.15)]^2 + \left(\frac{2.1}{2.4}\right)^2}{2(1-.875)}$$

$= 3.46$ jobs in line

(٢) متوسط عدد الطلاب في النظام .

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 3.46 + .875$$

(٣) متوسط الوقت المنقضي في الطابور

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3.46}{2.1}$$

$= 1.648$ minutes

(٤) متوسط الوقت المنقضي فى النظام

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{4.335}{2.1}$$

$= 2.06$ minutes

مثـال (M/M/s)

تفكر احد المكاتب الخاصة في تقديم خدمة تصوير المذكرات للطلاب . وكان من المقترح أن يكون لديها آلتين في نفس المكان . وقد اتضح أن معدل وصول الطلاب للمكتب موزعاً توزيعاً بمتوسط قدره ٤٠ طالب في الساعة أما عملية الخدمة نفسها فتحتاج في المتوسط إلي وقتاً قدره ٤٠ ثانية علي أي من الآلتين وكان الوقت هذا موزعاً توزيعاً أسياً . احسب درجة الانتفاع وعدد الطلاب والوقت المتوقع في الصف والنظام ككل .

الحـــل :

هذه هي حالة وجود أكثر من منفذ (عدد المنافذ = C)

ولكل المنافذ معاً $\lambda = 40$ Per hour

وكل مرة خدمة $S = 40$ Seconds

ويعني ذلك أن $\mu = 60 \div 40$

$= 1.5$ Per minute

$\lambda = 90$ Per hour

وعلي ذلك فأن

(١) درجة الانتفاع من النظام ككل (الآلتين معاً)

$$P = \frac{\lambda}{M\mu} = \frac{40}{2(60)} = \frac{1}{3} = 33\%$$

ويعنى ذلك أن كل آلة تكون مشغولة بمعدل ٣٣٪ في المتوسط

(٢) اعتماد علي الجداول ، متوسط عدد الطلاب في الصف علي أساس أنه

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}, \text{ or about } .68$$

$$Lq = .089 \text{ Students}$$

(٣) متوسط عدد الطلاب في النظام ككل

$$L = Lq + \frac{\lambda}{\mu} = -089 + .667$$

$$= .756 \quad \text{Studuts}$$

(٤) متوسط الوقت المنقضي في الصف

$$Wq + \frac{Lq}{\mu} = -089 \div 40$$

$$= .002 \text{ hour,or } .1215 \text{ minutes}$$

(5) متوسط الوقت المنقضي في النظام ككل :

$$Ws = Wq + \frac{1}{\mu} = .002 + \frac{1}{60} + .0187 \text{ hours}$$

$$= 1.12 \text{ minutes}$$

مثـال (M/M/s)

تفكر محلات « بلاش ماركت » في انشاء أحد فروعها الكبيرة في مدينة الاسكندرية . وقد أوضحت الدراسات أن الأسعار المنخفضة للسلع التي يقدمها المحل سوف تجعل متوسط عدد العملاء الذين يصلون من مكتب الدفع (كاشير) سوف يعادل ٤٢ عميل في الساعة

موزعة توزيعاً بواسونيا، وأن متوسط الوقت المستغرق مع العميل للمراجعة والدفع هو ٦ دقائق. احسب متوسط عدد العملاء المتوقع والوقت المستغرق فى كل من الصف والنظام وذلك على أساس أن المحل سوف يجعل هناك خمسة مخارج يتم فيا الدفع والمراجعة .

الحــل :

M = 5

λ = 42 Customecs per hour

S = 6 minutes

μ = 1 Customer Por 6 minutes

= 10 Customers Por hour

r = 42/10 = 4.2

(١) من الجدول حيث r = 4.2 , M= 5

Lq = 3.3269 People in line

(٢) متوسط عدد المنتظرين في الصف

$$Ls = Lq + \frac{1}{\mu} = 7.53 \text{ People in the System}$$

(٣) متوسط الوقت الذي يقضية العميل في الصف

$$Wq = \frac{\lambda q}{\mu} = \frac{3.33}{42} = .069 \text{ hours}$$

$$= 4.76 \text{ minutes}$$

(٤) متوسط الوقت الذي يقضية في النظام .

$$W = \frac{L}{\mu} = \frac{7.53}{42} = .179 \text{ houns}$$

$$= 10.76 \text{ minutes}$$

APPENDIX : QUEUEING TABLES

Appendix : $M/M/s$ Queue: Expected number of customers waiting in the system, L_q

Number of servers (channels)

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.020																				
0.040	0.002																			
0.060	0.004																			
0.080	0.007																			
0.100	0.011																			
0.120	0.016																			
0.140	0.023	0.001																		
0.160	0.030	0.001																		
0.180	0.040	0.001																		
0.200	0.050	0.002																		
0.220	0.062	0.003																		
0.240	0.076	0.004																		
0.260	0.091	0.004																		
0.280	0.109	0.006																		
0.300	0.129	0.007																		
0.320	0.151	0.008	0.001																	
0.340	0.175	0.010	0.001																	
0.360	0.202	0.012	0.001																	
0.380	0.233	0.014	0.001																	
0.400	0.267	0.017	0.001																	
0.420	0.304	0.019	0.002																	
0.440	0.346	0.022	0.002																	
0.460	0.392	0.026	0.002																	
0.480	0.443	0.029	0.003																	
0.500	0.500	0.033	0.003																	
0.520	0.563	0.038	0.004																	
0.540	0.634	0.042	0.004																	
0.560	0.713	0.048	0.005																	
0.580	0.801	0.053	0.005	0.001																
0.600	0.900	0.059	0.006	0.001																
0.620	1.012	0.066	0.007	0.001																
0.640	1.138	0.073	0.008	0.001																
0.660	1.281	0.081	0.009	0.001																
0.680	1.445	0.089	0.010	0.001																
0.700	1.633	0.098	0.011	0.001																
0.720	1.851	0.107	0.013	0.001																
0.740	2.106	0.117	0.014	0.002																
0.760	2.407	0.128	0.015	0.002																
0.780	2.765	0.140	0.017	0.002																
0.800	3.200	0.152	0.019	0.002																
0.820	3.736	0.166	0.021	0.003																
0.840	4.410	0.180	0.023	0.003																
0.860	5.283	0.195	0.025	0.003																
0.880	6.453	0.211	0.027	0.004																
0.900	8.100	0.229	0.030	0.004	0.001															
0.920	10.580	0.247	0.033	0.005	0.001															
0.940	14.727	0.267	0.036	0.005	0.001															
0.960	23.040	0.287	0.039	0.006	0.001															
0.980	48.020	0.310	0.042	0.006	0.001															
1.000		0.333	0.045	0.007	0.001															
1.200		0.675	0.094	0.016	0.003															

Appendix · Continued

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
										Number of servers (channels)										
1.400		1.345	0.177	0.032	0.006	0.001														
1.600		2.844	0.313	0.060	0.012	0.002														
1.800		7.674	0.532	0.105	0.023	0.005	0.001													
2.000			0.889	0.174	0.040	0.009	0.002													
2.200			1.491	0.277	0.066	0.016	0.004	0.001												
2.400			2.559	0.431	0.105	0.027	0.007	0.002												
2.600			4.933	0.658	0.161	0.043	0.011	0.003	0.001											
2.800			12.273	1.000	0.241	0.066	0.018	0.005	0.001											
3.000				1.528	0.354	0.099	0.028	0.008	0.002											
3.200				2.386	0.513	0.145	0.043	0.012	0.003	0.001										
3.400				3.906	0.737	0.209	0.063	0.019	0.005	0.001										
3.600				7.090	1.055	0.295	0.091	0.028	0.008	0.002	0.001									
3.800				16.937	1.519	0.412	0.129	0.041	0.013	0.004	0.001									
4.000					2.216	0.570	0.180	0.059	0.019	0.006	0.002									
4.200					3.327	0.784	0.248	0.083	0.027	0.009	0.003	0.001								
4.400					5.268	1.078	0.337	0.114	0.039	0.013	0.004	0.001								
4.600					9.289	1.487	0.453	0.156	0.054	0.018	0.006	0.002	0.001							
4.800					21.641	2.071	0.607	0.209	0.074	0.026	0.009	0.003	0.001							
5.000						2.938	0.810	0.279	0.101	0.036	0.013	0.004	0.001							
5.200						4.301	1.081	0.366	0.135	0.049	0.018	0.006	0.002	0.001						
5.400						6.661	1.444	0.483	0.178	0.066	0.024	0.009	0.003	0.001						
5.600						11.519	1.944	0.631	0.233	0.085	0.033	0.012	0.004	0.001						
5.800						26.373	2.648	0.823	0.303	0.116	0.044	0.017	0.006	0.002	0.001					
6.000							3.633	1.071	0.392	0.152	0.059	0.022	0.008	0.003	0.001					
6.200							5.298	1.397	0.504	0.197	0.078	0.030	0.011	0.004	0.001					
6.400							8.077	1.831	0.645	0.253	0.101	0.040	0.015	0.006	0.002	0.001				
6.600							13.770	2.420	0.825	0.322	0.130	0.052	0.021	0.008	0.003	0.001				
6.800							31.127	3.245	1.054	0.409	0.167	0.068	0.027	0.011	0.004	0.001				
7.000								4.447	1.347	0.517	0.212	0.088	0.036	0.014	0.005	0.002	0.001			
7.200								6.314	1.729	0.652	0.268	0.112	0.046	0.019	0.007	0.003	0.001			
7.400								9.511	2.233	0.820	0.337	0.142	0.060	0.025	0.010	0.004	0.001	0.001		
7.600								16.039	2.912	1.031	0.421	0.179	0.076	0.032	0.013	0.005	0.002	0.001		
7.800								35.898	3.856	1.298	0.535	0.224	0.097	0.041	0.017	0.007	0.003	0.001		
8.000									5.227	1.637	0.653	0.280	0.122	0.052	0.022	0.009	0.004	0.001		
8.200									7.344	2.074	0.811	0.347	0.152	0.066	0.028	0.012	0.005	0.002	0.001	
8.400									10.960	2.647	1.006	0.429	0.189	0.083	0.036	0.015	0.006	0.002	0.001	
8.600									18.323	3.417	1.249	0.529	0.234	0.104	0.046	0.020	0.008	0.003	0.001	
8.800									40.683	4.481	1.553	0.650	0.289	0.130	0.058	0.025	0.011	0.004	0.002	0.001
9.000										6.019	1.937	0.798	0.354	0.161	0.072	0.032	0.014	0.006	0.002	0.001
9.200										8.387	2.430	0.979	0.434	0.198	0.090	0.040	0.018	0.008	0.003	0.001
9.400										12.420	3.073	1.201	0.529	0.242	0.111	0.050	0.022	0.010	0.004	0.002
9.600										20.618	3.932	1.475	0.644	0.295	0.137	0.063	0.028	0.012	0.005	0.002
9.800										45.480	5.116	1.817	0.783	0.359	0.167	0.078	0.035	0.016	0.007	0.003

Appendix . M/M/1 Queue with a Limited Queue Size: Probability that the system is empty

Maximum system size, C

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.02	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980
0.04	0.962	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.961	0.960	0.960	0.960
0.06	0.943	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940
0.08	0.926	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920
0.10	0.909	0.901	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900
0.12	0.893	0.882	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880
0.14	0.877	0.862	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860	0.860
0.16	0.862	0.843	0.841	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840
0.18	0.847	0.825	0.821	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820
0.20	0.833	0.806	0.801	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800
0.22	0.820	0.788	0.782	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780
0.24	0.806	0.773	0.763	0.761	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760
0.26	0.794	0.753	0.743	0.741	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740
0.28	0.781	0.736	0.724	0.721	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720
0.30	0.769	0.719	0.706	0.702	0.701	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700
0.32	0.758	0.703	0.687	0.682	0.681	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680
0.34	0.746	0.687	0.669	0.663	0.661	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660
0.36	0.735	0.671	0.651	0.644	0.641	0.641	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640
0.38	0.725	0.656	0.633	0.625	0.622	0.621	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620
0.40	0.714	0.641	0.616	0.606	0.602	0.601	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600
0.42	0.704	0.626	0.599	0.588	0.583	0.581	0.581	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580
0.44	0.694	0.612	0.582	0.569	0.564	0.562	0.561	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560
0.46	0.685	0.598	0.565	0.551	0.545	0.542	0.541	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540
0.48	0.676	0.555	0.549	0.534	0.526	0.523	0.521	0.521	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520
0.50	0.667	0.571	0.533	0.516	0.508	0.504	0.502	0.501	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.52	0.658	0.559	0.515	0.499	0.490	0.485	0.483	0.481	0.481	0.480	0.480	0.480	0.480	0.480	0.480	0.480	0.480	0.480	0.480	0.480
0.54	0.649	0.546	0.503	0.482	0.472	0.466	0.463	0.462	0.461	0.461	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460
0.56	0.641	0.534	0.488	0.466	0.454	0.448	0.444	0.442	0.441	0.441	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440
0.58	0.633	0.522	0.474	0.450	0.437	0.429	0.425	0.423	0.422	0.421	0.421	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420
0.60	0.625	0.510	0.460	0.434	0.420	0.412	0.407	0.404	0.402	0.401	0.401	0.401	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400
0.62	0.617	0.499	0.446	0.418	0.403	0.394	0.388	0.385	0.383	0.382	0.381	0.381	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380
0.64	0.610	0.488	0.433	0.403	0.387	0.377	0.370	0.366	0.364	0.363	0.362	0.361	0.361	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360
0.66	0.602	0.477	0.420	0.389	0.371	0.360	0.353	0.348	0.345	0.344	0.342	0.342	0.341	0.341	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340
0.68	0.595	0.467	0.407	0.374	0.355	0.343	0.335	0.330	0.327	0.325	0.323	0.322	0.321	0.321	0.321	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320
0.70	0.588	0.457	0.395	0.361	0.340	0.327	0.318	0.313	0.309	0.306	0.304	0.303	0.302	0.301	0.301	0.301	0.300	0.300	0.300	0.300
0.72	0.581	0.447	0.383	0.347	0.325	0.311	0.302	0.295	0.291	0.288	0.286	0.284	0.283	0.282	0.281	0.281	0.281	0.281	0.280	0.280
0.74	0.575	0.437	0.371	0.334	0.311	0.296	0.286	0.279	0.273	0.270	0.267	0.265	0.264	0.263	0.262	0.262	0.261	0.261	0.261	0.260
0.76	0.568	0.428	0.360	0.322	0.297	0.281	0.270	0.262	0.256	0.252	0.249	0.247	0.245	0.244	0.243	0.242	0.242	0.241	0.241	0.241
0.78	0.562	0.419	0.349	0.309	0.284	0.267	0.255	0.246	0.240	0.235	0.232	0.229	0.227	0.225	0.224	0.223	0.223	0.222	0.222	0.221
0.80	0.556	0.410	0.339	0.297	0.271	0.253	0.240	0.231	0.224	0.219	0.215	0.212	0.209	0.207	0.206	0.205	0.204	0.203	0.202	0.202
0.82	0.549	0.401	0.329	0.286	0.259	0.240	0.226	0.216	0.209	0.203	0.198	0.195	0.192	0.190	0.188	0.186	0.185	0.184	0.183	0.183
0.84	0.543	0.393	0.319	0.275	0.247	0.227	0.213	0.202	0.194	0.188	0.183	0.179	0.175	0.173	0.171	0.169	0.167	0.166	0.165	0.164
0.86	0.538	0.385	0.309	0.264	0.235	0.215	0.200	0.189	0.180	0.173	0.167	0.163	0.159	0.156	0.154	0.152	0.150	0.148	0.147	0.146
0.88	0.532	0.377	0.300	0.254	0.224	0.203	0.187	0.176	0.166	0.159	0.153	0.148	0.144	0.141	0.138	0.135	0.133	0.132	0.130	0.129
0.90	0.526	0.369	0.291	0.244	0.213	0.192	0.176	0.163	0.154	0.146	0.139	0.134	0.130	0.126	0.123	0.120	0.118	0.116	0.114	0.112
0.92	0.521	0.361	0.282	0.235	0.203	0.181	0.164	0.152	0.141	0.133	0.127	0.121	0.116	0.112	0.109	0.106	0.103	0.101	0.099	0.097
0.94	0.515	0.354	0.274	0.225	0.193	0.171	0.154	0.141	0.130	0.122	0.114	0.109	0.104	0.099	0.095	0.092	0.089	0.087	0.085	0.083
0.96	0.510	0.347	0.266	0.217	0.184	0.161	0.144	0.130	0.119	0.111	0.103	0.097	0.092	0.087	0.083	0.080	0.077	0.074	0.072	0.069
0.98	0.505	0.340	0.258	0.208	0.175	0.152	0.134	0.120	0.109	0.100	0.093	0.086	0.081	0.076	0.072	0.069	0.066	0.063	0.060	0.058
1.00	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	0.125	0.111	0.100	0.091	0.083	0.077	0.071	0.067	0.063	0.059	0.056	0.053	0.050	0.048
1.20	0.455	0.275	0.186	0.134	0.101	0.077	0.061	0.048	0.039	0.031	0.025	0.021	0.017	0.014	0.011	0.009	0.008	0.006	0.005	0.004
1.40	0.417	0.229	0.141	0.091	0.061	0.042	0.029	0.020	0.014	0.010	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000

Maximum system size, C

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1.60	0.385	0.194	0.108	0.063	0.038	0.023	0.014	0.009	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.80	0.357	0.166	0.084	0.045	0.024	0.013	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.00	0.333	0.143	0.067	0.032	0.016	0.008	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.20	0.313	0.124	0.054	0.024	0.011	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.40	0.294	0.109	0.040	0.018	0.007	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.60	0.278	0.097	0.036	0.014	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.80	0.263	0.086	0.030	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.00	0.250	0.077	0.025	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.20	0.238	0.069	0.021	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.40	0.227	0.063	0.018	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.60	0.217	0.057	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.80	0.208	0.052	0.013	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.00	0.200	0.048	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.20	0.192	0.044	0.010	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.40	0.185	0.040	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.60	0.179	0.037	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.80	0.172	0.035	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.00	0.167	0.032	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.20	0.161	0.030	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.40	0.156	0.028	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.60	0.152	0.026	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.80	0.147	0.025	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.00	0.143	0.023	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.20	0.139	0.022	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.40	0.135	0.021	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.60	0.132	0.020	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.80	0.128	0.019	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.00	0.125	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.20	0.122	0.017	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.40	0.119	0.016	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.60	0.116	0.015	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.80	0.114	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.00	0.111	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.20	0.109	0.013	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.40	0.106	0.013	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.60	0.104	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.80	0.102	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.00	0.100	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.20	0.098	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.40	0.096	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.60	0.094	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.80	0.093	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10.00	0.091	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20.00	0.048	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
30.00	0.032	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
40.00	0.024	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
50.00	0.020	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
60.00	0.016	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
70.00	0.014	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
80.00	0.012	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
90.00	0.011	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
100.00	0.010	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Appendix C3: *M/M/1* Queue with a Limited Queue Size: Probability that the system is full

Maximum system size, C

$\frac{\lambda}{\mu}$		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.02	0.020	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.04	0.038	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.06	0.057	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.08	0.074	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.10	0.091	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.12	0.107	0.013	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.14	0.123	0.017	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.16	0.138	0.022	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.18	0.153	0.027	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.20	0.167	0.032	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.22	0.180	0.038	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.24	0.194	0.044	0.011	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.26	0.206	0.051	0.013	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.28	0.219	0.058	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.30	0.231	0.065	0.019	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.32	0.242	0.072	0.023	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.34	0.254	0.079	0.026	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.36	0.265	0.087	0.030	0.011	0.004	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.38	0.275	0.095	0.035	0.013	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.40	0.286	0.103	0.039	0.016	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.42	0.296	0.110	0.044	0.018	0.008	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.44	0.306	0.119	0.050	0.021	0.009	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.46	0.315	0.127	0.055	0.025	0.011	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.48	0.324	0.135	0.061	0.028	0.013	0.006	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.50	0.333	0.143	0.067	0.032	0.016	0.008	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.52	0.342	0.151	0.073	0.036	0.019	0.010	0.005	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.54	0.351	0.159	0.079	0.041	0.022	0.012	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.56	0.359	0.167	0.086	0.046	0.025	0.014	0.008	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.58	0.367	0.176	0.092	0.051	0.029	0.016	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.60	0.375	0.184	0.099	0.056	0.033	0.019	0.011	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.62	0.383	0.192	0.106	0.062	0.037	0.022	0.014	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.64	0.390	0.200	0.113	0.068	0.042	0.026	0.016	0.010	0.007	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.66	0.398	0.208	0.121	0.074	0.046	0.030	0.019	0.013	0.008	0.005	0.004	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.68	0.405	0.216	0.128	0.080	0.052	0.034	0.023	0.015	0.010	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.70	0.412	0.224	0.135	0.087	0.057	0.038	0.026	0.018	0.012	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
0.72	0.419	0.232	0.143	0.093	0.063	0.043	0.030	0.021	0.015	0.011	0.008	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000
0.74	0.425	0.239	0.150	0.100	0.069	0.049	0.035	0.025	0.018	0.013	0.010	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
0.76	0.432	0.247	0.158	0.107	0.075	0.054	0.040	0.029	0.022	0.016	0.012	0.009	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001
0.78	0.438	0.255	0.166	0.114	0.082	0.060	0.045	0.034	0.026	0.020	0.015	0.012	0.009	0.007	0.005	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002
0.80	0.444	0.262	0.173	0.122	0.089	0.066	0.050	0.039	0.030	0.023	0.018	0.015	0.012	0.009	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002
0.82	0.451	0.270	0.181	0.129	0.096	0.073	0.056	0.044	0.035	0.028	0.022	0.018	0.015	0.012	0.010	0.008	0.006	0.005	0.004	0.003
0.84	0.457	0.277	0.189	0.132	0.103	0.080	0.063	0.050	0.040	0.033	0.027	0.022	0.018	0.015	0.012	0.010	0.009	0.007	0.006	0.005
0.86	0.462	0.285	0.197	0.145	0.111	0.087	0.070	0.056	0.046	0.038	0.032	0.027	0.022	0.019	0.016	0.014	0.012	0.010	0.008	0.007
0.88	0.468	0.292	0.204	0.152	0.118	0.094	0.077	0.063	0.053	0.044	0.037	0.032	0.027	0.023	0.020	0.018	0.015	0.013	0.011	0.010
0.90	0.474	0.299	0.212	0.160	0.126	0.102	0.084	0.070	0.059	0.051	0.044	0.038	0.033	0.029	0.025	0.022	0.020	0.017	0.015	0.014
0.92	0.479	0.306	0.220	0.168	0.134	0.110	0.092	0.078	0.067	0.058	0.051	0.044	0.039	0.035	0.031	0.028	0.025	0.022	0.020	0.018
0.94	0.485	0.313	0.227	0.176	0.142	0.118	0.100	0.086	0.075	0.065	0.058	0.052	0.046	0.042	0.038	0.034	0.031	0.028	0.026	0.024
0.96	0.490	0.320	0.235	0.184	0.150	0.126	0.108	0.094	0.083	0.074	0.066	0.060	0.054	0.049	0.045	0.042	0.038	0.036	0.033	0.031
0.98	0.495	0.327	0.242	0.192	0.158	0.134	0.116	0.102	0.091	0.082	0.074	0.068	0.062	0.058	0.053	0.050	0.047	0.044	0.041	0.039
1.00	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	0.125	0.111	0.100	0.091	0.083	0.077	0.071	0.067	0.063	0.059	0.056	0.053	0.050	0.048
1.20	0.545	0.396	0.322	0.279	0.251	0.231	0.217	0.207	0.199	0.193	0.188	0.184	0.181	0.178	0.176	0.175	0.173	0.172	0.171	0.170
1.40	0.583	0.450	0.386	0.351	0.329	0.316	0.306	0.300	0.296	0.293	0.291	0.289	0.288	0.288	0.287	0.287	0.286	0.286	0.286	0.286

Appendix Continued

Maximum system size, C

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1.60	.615	0.478	0.443	0.415	0.399	0.390	[illegible]	[illegible]	0.378	0.377	0.376	0.376	0.376	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375
1.80	0.643	0.526	0.491	0.469	0.458	0.452	[illegible]	0.447	0.446	0.445	0.445	0.445	0.445	0.445	0.444	0.444	0.444	0.444	0.444	0.444
2.00	0.667	0.571	0.533	0.516	0.508	0.504	0.502	0.501	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
2.20	0.688	0.652	0.570	0.556	0.550	0.548	0.546	0.546	0.546	0.546	0.545	0.545	0.545	0.545	0.545	0.545	0.545	0.545	0.545	0.545
2.40	0.706	0.629	0.601	0.591	0.586	0.585	0.584	0.584	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583
2.60	0.722	0.663	[illegible]	0.621	0.617	0.616	0.616	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615
2.80	0.737	0.674	0.653	0.647	0.644	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643
3.00	0.750	0.692	0.675	0.669	0.668	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667
3.20	0.762	0.709	0.694	0.690	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688
3.40	0.773	0.724	0.711	0.707	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706
3.60	0.783	0.738	0.727	0.723	0.723	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722
3.80	0.792	0.751	0.740	0.738	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737
4.00	0.800	0.762	0.753	0.751	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750
4.20	0.808	0.772	0.764	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762
4.40	0.815	0.782	0.775	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773
4.60	0.821	0.791	0.784	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783
4.80	0.828	0.799	0.793	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792
5.00	0.833	0.805	0.801	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800
5.20	0.839	0.813	0.807	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806	0.806
5.40	0.844	0.820	0.816	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815
5.60	0.848	0.826	0.822	0.822	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821
5.80	0.853	0.832	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828
6.00	0.857	0.837	0.834	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833
6.20	0.861	0.842	0.829	0.839	0.839	0.829	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839
6.40	0.865	0.847	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844
6.60	0.869	0.851	0.849	0.849	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848
6.80	0.872	0.856	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853
7.00	0.875	0.860	0.858	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857
7.20	0.878	0.863	0.862	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861
7.40	0.881	0.867	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865
7.60	0.884	0.870	0.869	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868
7.80	0.886	0.874	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872
8.00	0.889	0.877	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875
8.20	0.891	0.880	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878
8.40	0.894	0.882	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881
8.60	0.896	0.885	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884
8.80	0.898	0.888	0.887	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886
9.00	0.900	0.890	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889
9.20	0.902	0.892	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891
9.40	0.904	0.895	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894
9.60	0.906	0.897	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896
9.80	0.907	0.899	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898
10.00	0.909	0.901	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900
20.00	0.952	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950
30.00	0.968	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967
40.00	0.976	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975
50.00	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980
60.00	0.984	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983
70.00	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986
80.00	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988
90.00	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989
100.00	0.970	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990

Appendix : *M/M/1* Queue with a Limited Queue Size: Average number of customers in the system, *L*

Maximum system size, *C*

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.02	[illegible]	0.04	0.06	0.08	0.11	0.13	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.30	0.33	0.36	0.40	0.44	0.47	0.52	0.56	0.60
0.04	[illegible]	0.08	0.12	0.17	0.22	0.28	0.34	0.41	0.48	0.56	0.65	0.74	0.85	0.96	1.09	1.24	1.40	1.57	1.77	2.00
0.06	0.05	0.12	0.19	0.27	0.35	0.45	0.56	0.68	0.83	0.99	1.17	1.38	1.63	1.91	2.23	2.60	3.02	3.50	4.04	4.64
0.08	[illegible]	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1.01	1.25	1.52	1.85	2.23	2.67	3.18	3.76	4.41	5.14	5.93	6.77	7.67
0.10	[illegible]	0.20	0.32	0.47	0.64	0.85	1.09	1.33	1.73	2.15	2.63	3.20	3.84	4.57	5.36	6.22	7.13	8.07	9.04	10.02
0.12	[illegible]	0.23	0.39	0.57	0.79	1.06	1.39	1.78	2.25	2.81	3.45	4.18	4.98	5.85	6.77	7.72	8.69	9.68	10.67	11.67
0.14	[illegible]	0.27	0.45	0.68	0.95	1.29	1.70	2.19	2.78	3.46	4.23	5.07	5.97	6.92	[illegible]	[illegible]	9.86	10.86	11.86	12.86
0.16	[illegible]	0.31	0.52	0.78	1.12	1.51	2.01	2.60	3.29	4.07	4.93	5.84	6.79	7.77	8.76	9.75	10.75	11.75	12.75	13.75
0.18	[illegible]	0.34	0.58	0.89	1.27	1.74	2.31	2.99	3.76	4.61	5.53	6.48	7.46	8.45	9.45	10.45	11.44	12.44	13.44	14.44
0.20	[illegible]	0.38	0.65	0.99	1.42	1.96	2.60	3.35	4.19	5.09	6.04	7.02	8.01	9.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00
0.22	[illegible]	0.41	0.71	1.09	1.54	2.17	2.88	3.68	4.57	5.50	6.48	7.46	8.46	9.46	10.45	11.45	12.45	13.45	14.45	15.45
0.24	[illegible]	0.45	0.77	1.19	1.72	2.37	3.13	3.98	4.90	5.86	6.84	7.84	8.83	9.83	10.83	11.83	12.83	13.83	14.83	15.83
0.26	[illegible]	0.48	0.83	1.29	1.87	2.55	3.37	4.25	5.20	6.17	7.16	8.16	9.15	10.15	11.15	12.15	13.15	44.15	15.15	16.15
0.28	[illegible]	0.51	0.89	1.38	2.05	2.74	3.58	4.50	5.45	6.44	7.43	8.43	9.43	10.43	11.43	12.43	13.43	14.45	15.43	16.43
0.30	[illegible]	0.54	0.95	1.48	2.13	2.91	3.78	4.71	5.68	6.67	7.67	8.67	9.67	10.67	11.67	12.67	13.67	14.67	15.67	16.67
0.32	[illegible]	0.57	1.00	1.56	2.25	3.06	3.96	4.91	5.89	6.88	7.88	8.88	9.88	10.88	11.88	12.88	13.88	14.87	15.87	16.87
0.34	[illegible]	0.60	1.06	1.65	2.37	3.20	4.12	5.08	6.07	7.06	8.06	9.06	10.06	11.06	12.06	13.06	14.06	15.06	16.06	17.06
0.36	[illegible]	0.63	1.11	1.73	2.48	3.34	4.27	5.24	6.23	7.22	8.22	9.22	10.22	11.22	12.22	13.22	14.22	15.22	16.22	17.22
0.38	[illegible]	0.65	1.16	1.80	2.58	3.46	4.40	5.38	6.37	7.37	8.37	9.37	10.37	11.37	12.37	13.37	14.37	15.37	16.37	17.37
0.40	[illegible]	0.68	1.21	1.87	2.67	3.57	4.52	5.51	6.50	7.50	8.50	9.50	10.50	11.50	12.50	13.50	14.50	15.50	16.50	17.50
0.42	[illegible]	0.70	1.25	1.94	2.76	3.68	4.64	5.62	6.62	7.62	8.62	9.62	10.62	11.62	12.62	13.62	14.62	15.62	16.62	17.62
0.44	[illegible]	0.73	1.30	2.01	2.85	3.77	4.74	5.73	6.73	7.73	8.73	9.73	10.73	11.73	12.73	13.73	14.73	15.73	16.73	17.73
0.46	[illegible]	0.75	1.34	2.07	2.93	3.86	4.84	5.83	6.83	7.83	8.83	9.83	10.83	11.83	12.83	13.83	14.83	15.83	16.83	17.83
0.48	0.32	0.78	1.38	2.13	3.00	3.95	4.93	5.92	6.92	7.92	8.92	9.93	10.92	11.92	12.92	13.92	14.92	15.92	16.92	17.92
0.50	0.33	0.80	1.42	2.19	3.07	4.02	5.01	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00
0.52	0.34	0.82	1.46	2.24	3.14	4.10	5.08	6.08	7.08	8.08	9.08	10.08	11.08	12.08	13.08	14.08	15.08	16.08	17.08	18.08
0.54	0.35	0.84	1.50	2.30	3.20	4.16	5.15	6.15	7.15	8.15	9.15	10.15	11.15	12.15	13.15	14.15	15.15	16.15	17.15	18.15
0.56	0.36	0.86	1.53	2.35	3.26	4.23	5.22	6.22	7.21	8.21	9.21	10.21	11.21	12.21	13.21	14.21	15.21	16.21	17.21	18.21
0.58	0.37	0.88	1.57	2.39	3.32	4.29	5.28	6.28	7.28	8.28	9.28	10.28	11.28	12.28	13.28	14.28	15.28	16.28	17.28	[illegible]
0.60	0.37	0.90	1.60	2.44	3.37	4.34	5.34	6.33	7.33	8.33	9.33	10.33	11.33	12.33	13.33	14.33	15.33	16.33	17.33	[illegible]
0.62	0.38	0.92	1.63	2.48	3.42	4.39	5.39	6.39	7.39	8.39	9.39	10.39	11.39	12.39	13.39	14.39	15.39	16.39	17.39	18.39
0.64	0.39	0.94	1.66	2.52	3.46	4.44	5.44	6.44	7.44	8.44	9.44	10.44	11.44	12.44	13.44	14.44	15.44	16.44	17.44	18.44
0.66	0.40	0.96	1.69	2.56	3.51	4.49	5.49	6.49	7.48	8.48	9.48	10.48	11.48	12.48	13.48	14.48	15.48	16.48	17.48	18.48
0.68	0.40	0.98	1.72	2.60	3.55	4.53	5.53	6.53	7.53	8.53	9.53	10.53	11.53	12.53	13.53	14.53	15.53	16.53	17.53	18.53
0.70	0.41	0.99	1.75	2.63	3.59	4.58	5.57	6.57	7.57	8.57	9.57	10.57	11.57	12.57	13.57	14.57	15.57	16.57	17.57	18.57
0.72	0.42	1.01	1.77	2.67	3.63	4.61	5.61	6.61	7.61	8.61	9.61	10.61	11.61	12.61	13.61	14.61	15.61	16.61	17.61	18.61
0.74	0.43	1.03	1.80	2.70	3.66	4.65	5.65	6.65	7.65	8.65	9.65	10.65	11.65	12.65	13.65	14.65	15.65	16.65	17.65	18.65
0.76	0.43	1.04	1.82	2.73	3.70	4.69	5.68	6.68	7.68	8.68	9.68	10.68	11.68	12.68	13.68	14.68	15.68	16.68	17.68	18.68
0.78	0.44	1.06	1.85	2.76	3.73	4.72	5.72	6.72	7.72	8.72	9.72	10.72	11.72	12.72	13.72	14.72	15.72	16.72	17.72	18.72
0.80	0.44	1.07	1.87	2.79	3.76	4.75	5.75	6.75	7.75	8.75	9.75	10.75	11.75	12.75	13.75	14.75	15.75	16.75	17.75	18.75
0.82	0.45	1.09	1.89	2.81	3.79	4.78	5.78	6.78	7.78	8.78	9.78	10.78	11.78	12.78	13.78	14.78	15.78	16.78	17.78	18.78
0.84	0.46	1.10	1.91	2.84	3.82	4.81	5.81	6.81	7.81	8.81	9.81	10.81	11.81	12.81	13.81	14.81	15.81	16.81	17.81	18.81
0.86	0.46	1.11	1.94	2.87	3.84	4.84	5.84	6.84	7.84	8.84	9.84	10.84	11.84	12.84	13.84	14.84	15.84	16.84	17.84	18.84
0.88	0.47	1.13	1.96	2.89	3.87	4.86	5.86	6.86	7.86	8.86	9.86	10.86	11.86	12.86	13.86	14.86	15.86	16.86	17.86	18.86
0.90	0.47	1.14	1.97	2.91	3.89	4.89	5.89	6.89	7.89	8.89	9.89	10.89	11.89	12.89	13.89	14.89	15.89	16.89	17.89	18.89
0.92	0.48	1.15	1.99	2.93	3.92	4.91	5.91	6.91	7.91	8.91	9.91	10.91	11.91	12.91	13.91	14.91	15.91	16.91	17.91	18.91
0.94	0.48	1.17	2.01	2.96	3.94	4.94	5.94	6.94	7.94	8.94	9.94	10.94	11.94	12.94	13.94	14.94	15.94	16.94	17.94	18.94
0.96	0.49	1.18	2.03	2.98	3.96	4.96	5.96	6.96	7.96	8.96	9.96	10.96	11.96	12.96	13.96	14.96	15.96	16.96	17.96	18.96
0.98	0.49	1.19	2.05	3.00	3.98	4.98	5.98	6.98	7.98	8.98	9.98	10.98	11.98	12.98	13.98	14.98	15.98	16.98	17.98	18.98
1.00	0.50	1.20	2.06	3.02	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00
1.20	0.55	1.30	2.20	3.17	4.17	5.17	6.17	7.17	8.17	9.17	10.17	11.17	12.17	13.17	14.17	15.17	16.17	17.17	18.17	19.17
1.40	0.58	1.38	2.31	3.29	4.29	5.29	6.29	7.29	8.29	9.29	10.29	11.29	12.29	13.29	14.29	15.29	16.29	17.29	18.29	19.29

Appendix Continued

Maximum system size, C

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1.60	0.62	1.44	2.39	3.38	4.38	5.38	6.38	7.38	8.38	9.38	10.38	11.38	12.38	13.38	14.38	15.38	16.38	17.38	18.38	19.38
1.80	0.64	1.49	2.45	3.45	4.44	5.44	6.44	7.44	8.44	9.44	10.44	11.44	12.44	13.44	14.44	15.44	16.44	17.44	18.44	19.44
2.00	0.67	1.54	2.51	3.50	4.50	5.50	6.50	7.50	8.50	9.50	10.50	11.50	12.50	13.50	14.50	15.50	16.50	17.50	18.50	19.50
2.20	0.69	1.58	2.55	3.55	4.55	5.55	6.55	7.55	8.55	9.55	10.55	11.55	12.55	13.55	14.55	15.55	16.55	17.55	18.55	19.55
2.40	0.71	1.61	2.59	3.58	4.58	5.58	6.58	7.58	8.58	9.58	10.58	11.58	12.58	13.58	14.58	15.58	16.58	17.58	18.58	19.58
2.60	0.72	1.63	2.63	3.62	4.62	5.62	6.62	7.62	8.62	9.62	10.62	11.62	12.62	13.62	14.62	15.62	16.62	17.62	18.62	19.62
2.80	0.74	1.66	2.64	3.64	4.64	5.64	6.64	7.64	8.64	9.64	10.64	11.64	12.64	13.64	14.64	15.64	16.64	17.64	18.64	19.64
3.00	0.75	1.68	2.67	3.67	4.67	5.67	6.67	7.67	8.67	9.67	10.67	11.67	12.67	13.67	14.67	15.67	16.67	17.67	18.67	19.67
3.20	0.76	1.70	2.69	3.69	4.69	5.69	6.69	7.69	8.69	9.69	10.69	11.69	12.69	13.69	14.69	15.69	16.69	17.69	18.69	19.69
3.40	0.77	1.72	2.71	3.71	4.71	5.71	6.71	7.71	8.71	9.71	10.71	11.71	12.71	13.71	14.71	15.71	16.71	17.71	18.71	19.71
3.60	0.78	1.73	2.72	3.72	4.72	5.72	6.72	7.72	8.72	9.72	10.72	11.72	12.72	13.72	14.72	15.72	16.72	17.72	18.72	19.72
3.80	0.79	1.74	2.74	3.74	4.74	5.74	6.74	7.74	8.74	9.74	10.74	11.74	12.74	13.74	14.74	15.74	16.74	17.74	18.74	19.74
4.00	0.80	1.76	2.75	3.75	4.75	5.75	6.75	7.75	8.75	9.75	10.75	11.75	12.75	13.75	14.75	15.75	16.75	17.75	18.75	19.75
4.20	0.81	1.77	2.76	3.76	4.76	5.76	6.76	7.76	8.76	9.76	10.76	11.76	12.76	13.76	14.76	15.76	16.76	17.76	18.76	19.76
4.40	0.81	1.78	2.77	3.77	4.77	5.77	6.77	7.77	8.77	9.77	10.77	11.77	12.77	13.77	14.77	15.77	16.77	17.77	18.77	19.77
4.60	0.82	1.79	2.78	3.78	4.78	5.78	6.78	7.78	8.78	9.78	10.78	11.78	12.78	13.78	14.78	15.78	16.78	17.78	18.78	19.78
4.80	0.83	1.80	2.79	3.79	4.79	5.79	6.79	7.79	8.79	9.79	10.79	11.79	12.79	13.79	14.79	15.79	16.79	17.79	18.79	19.79
5.00	0.83	1.80	2.80	3.80	4.80	5.80	6.80	7.80	8.80	9.80	10.80	11.80	12.80	13.80	14.80	15.80	16.80	17.80	18.80	19.80
5.20	0.84	1.81	2.81	3.81	4.81	5.81	6.81	7.81	8.81	9.81	10.81	11.81	12.81	13.81	14.81	15.81	16.81	17.81	18.81	19.81
5.40	0.84	1.82	2.81	3.81	4.81	5.81	6.81	7.81	8.81	9.81	10.81	11.81	12.81	13.81	14.81	15.81	16.81	17.81	18.81	19.81
5.60	0.85	1.82	2.82	3.82	4.82	5.82	6.82	7.82	8.82	9.82	10.82	11.82	12.82	13.82	14.82	15.82	16.82	17.82	18.82	19.82
5.80	0.85	1.83	2.83	3.83	4.83	5.83	6.83	7.83	8.83	9.83	10.83	11.83	12.83	13.83	14.83	15.83	16.83	17.83	18.83	19.83
6.00	0.86	1.84	2.83	3.83	4.83	5.83	6.83	7.83	8.83	9.83	10.83	11.83	12.83	13.83	14.83	15.83	16.83	17.83	18.83	19.83
6.20	0.86	1.84	2.84	3.84	4.84	5.84	6.84	7.84	8.84	9.84	10.84	11.84	12.84	13.84	14.84	15.84	16.84	17.84	18.84	19.84
6.40	0.86	1.85	2.84	3.84	4.84	5.84	6.84	7.84	8.84	9.84	10.84	11.84	12.84	13.84	14.84	15.84	16.84	17.84	18.84	19.84
6.60	0.87	1.85	2.85	3.85	4.85	5.85	6.85	7.85	8.85	9.85	10.85	11.85	12.85	13.85	14.85	15.85	16.85	17.85	18.85	19.85
6.80	0.87	1.85	2.85	3.85	4.85	5.85	6.85	7.85	8.85	9.85	10.85	11.85	12.85	13.85	14.85	15.85	16.85	17.85	18.85	19.85
7.00	0.88	1.86	2.86	3.86	4.86	5.86	6.86	7.86	8.86	9.86	10.86	11.86	12.86	13.86	14.86	15.86	16.86	17.86	18.86	19.86
7.20	0.88	1.86	2.86	3.86	4.86	5.86	6.86	7.86	8.86	9.86	10.86	11.86	12.86	13.86	14.86	15.86	16.86	17.86	18.86	19.86
7.40	0.88	1.87	2.86	3.86	4.86	5.86	6.86	7.86	8.86	9.86	10.86	11.86	12.86	13.86	14.86	15.86	16.86	17.86	18.86	19.86
7.60	0.88	1.87	2.87	3.87	4.87	5.87	6.87	7.87	8.87	9.87	10.87	11.87	12.87	13.87	14.87	15.87	16.87	17.87	18.87	19.87
7.80	0.89	1.87	2.87	3.87	4.87	5.87	6.87	7.87	8.87	9.87	10.87	11.87	12.87	13.87	14.87	15.87	16.87	17.87	18.87	19.87
8.00	0.89	1.88	2.88	3.88	4.88	5.88	6.88	7.88	8.88	9.88	10.88	11.88	12.88	13.88	14.88	15.88	16.88	17.88	18.88	19.88
8.20	0.89	1.88	2.88	3.88	4.88	5.88	6.88	7.88	8.88	9.88	10.88	11.88	12.88	13.88	14.88	15.88	16.88	17.88	18.88	19.88
8.40	0.89	1.88	2.88	3.88	4.88	5.88	6.88	7.88	8.88	9.88	10.88	11.88	12.88	13.88	14.88	15.88	16.88	17.88	18.88	19.88
8.60	0.90	1.88	2.88	3.88	4.88	5.88	6.88	7.88	8.88	9.88	10.88	11.88	12.88	13.88	14.88	15.88	16.88	17.88	18.88	19.88
8.80	0.90	1.89	2.89	3.89	4.89	5.89	6.89	7.89	8.89	9.89	10.89	11.89	12.89	13.89	14.89	15.89	16.89	17.89	18.89	19.89
9.00	0.90	1.89	2.89	3.89	4.89	5.89	6.89	7.89	8.89	9.89	10.89	11.89	12.89	13.89	14.89	15.89	16.89	17.89	18.89	19.89
9.20	0.90	1.89	2.89	3.89	4.89	5.89	6.89	7.89	8.89	9.89	10.89	11.89	12.89	13.89	14.89	15.89	16.89	17.89	18.89	19.89
9.40	0.90	1.89	2.89	3.89	4.89	5.89	6.89	7.89	8.89	9.89	10.89	11.89	12.89	13.89	14.89	15.89	16.89	17.89	18.89	19.89
9.60	0.91	1.90	2.90	3.90	4.90	5.90	6.90	7.90	8.90	9.90	10.90	11.90	12.90	13.90	14.90	15.90	16.90	17.90	18.90	19.90
9.80	0.91	1.90	2.90	3.90	4.90	5.90	6.90	7.90	8.90	9.90	10.90	11.90	12.90	13.90	14.90	15.90	16.90	17.90	18.90	19.90
10.00	0.91	1.90	2.90	3.90	4.90	5.90	6.90	7.90	8.90	9.90	10.90	11.90	12.90	13.90	14.90	15.90	16.90	17.90	18.90	19.90
20.00	0.95	1.95	2.95	3.95	4.95	5.95	6.95	7.95	8.95	9.95	10.95	11.95	12.95	13.95	14.95	15.95	16.95	17.95	18.95	19.95
30.00	0.97	1.97	2.97	3.97	4.97	5.97	6.97	7.97	8.97	9.97	10.97	11.97	12.97	13.97	14.97	15.97	16.97	17.97	18.97	19.97
40.00	0.98	1.98	2.98	3.98	4.98	5.98	6.98	7.98	8.98	9.98	10.98	11.98	12.98	13.98	14.98	15.98	16.98	17.98	18.98	19.98
50.00	0.98	1.98	2.98	3.98	4.98	5.98	6.98	7.98	8.98	9.98	10.98	11.98	12.98	13.98	14.98	15.98	16.98	17.98	18.98	19.98
60.00	0.98	1.98	2.98	3.98	4.98	5.98	6.98	7.98	8.98	9.98	10.98	11.98	12.98	13.98	14.98	15.98	16.98	17.98	18.98	19.98
70.00	0.99	1.99	2.99	3.99	4.99	5.99	6.99	7.99	8.99	9.99	10.99	11.99	12.99	13.99	14.99	15.99	16.99	17.99	18.99	19.99
80.00	0.99	1.99	2.99	3.99	4.99	5.99	6.99	7.99	8.99	9.99	10.99	11.99	12.99	13.99	14.99	15.99	16.99	17.99	18.99	19.99
90.00	0.99	1.99	2.99	3.99	4.99	5.99	6.99	7.99	8.99	9.99	10.99	11.99	12.99	13.99	14.99	15.99	16.99	17.99	18.99	19.99
100.00	0.99	1.99	2.99	3.99	4.99	5.99	6.99	7.99	8.99	9.99	10.99	11.99	12.99	13.99	14.99	15.99	16.99	17.99	18.99	19.99

Appendix *M/M/1* Queue with a finite population: Expected number of customers waiting in the system, *L*.

Population Size, *N*

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.038	0.041	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042
0.06	0.057	0.063	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064
0.08	0.074	0.085	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087
0.10	0.091	0.108	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111
0.12	0.107	0.131	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136
0.14	0.123	0.155	0.161	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163
0.16	0.138	0.178	0.185	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190
0.18	0.153	0.202	0.215	0.219	0.219	0.219	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.20	0.167	0.226	0.244	0.248	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
0.22	0.180	0.250	0.273	0.279	0.281	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282
0.24	0.194	0.274	0.302	0.312	0.315	0.315	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316
0.26	0.206	0.298	0.333	0.345	0.349	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351
0.28	0.219	0.322	0.364	0.380	0.386	0.388	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389
0.30	0.231	0.345	0.396	0.416	0.424	0.427	0.428	0.428	0.429	0.429	0.429	0.429	0.429	0.429	0.429	0.429	0.429
0.32	0.242	0.369	0.428	0.454	0.464	0.468	0.470	0.470	0.470	0.471	0.471	0.471	0.471	0.471	0.471	0.471	0.471
0.34	0.254	0.392	0.461	0.492	0.506	0.511	0.514	0.515	0.515	0.515	0.515	0.515	0.515	0.515	0.515	0.515	0.515
0.36	0.265	0.416	0.494	0.532	0.549	0.557	0.560	0.562	0.562	0.562	0.562	0.562	0.562	0.562	0.562	0.562	0.562
0.38	0.275	0.439	0.528	0.573	0.595	0.605	0.609	0.611	0.612	0.613	0.613	0.613	0.613	0.613	0.613	0.613	0.613
0.40	0.286	0.462	0.562	0.615	0.642	0.655	0.661	0.664	0.666	0.666	0.666	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667
0.42	0.296	0.484	0.596	0.658	0.691	0.708	0.716	0.720	0.722	0.723	0.724	0.724	0.724	0.724	0.724	0.724	0.724
0.44	0.306	0.506	0.630	0.702	0.742	0.763	0.774	0.780	0.783	0.784	0.785	0.785	0.786	0.786	0.786	0.786	0.786
0.46	0.315	0.528	0.664	0.747	0.794	0.821	0.836	0.844	0.848	0.850	0.851	0.851	0.852	0.852	0.852	0.852	0.852
0.48	0.324	0.550	0.699	0.792	0.849	0.882	0.900	0.911	0.917	0.920	0.921	0.922	0.923	0.923	0.923	0.923	0.923
0.50	0.333	0.571	0.733	0.839	0.905	0.945	0.969	0.982	0.990	0.995	0.997	0.998	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000
0.52	0.342	0.592	0.768	0.886	0.962	1.011	1.040	1.058	1.069	1.075	1.079	1.081	1.082	1.083	1.083	1.083	1.083
0.54	0.351	0.613	0.802	0.933	1.021	1.077	1.116	1.139	1.153	1.161	1.167	1.170	1.171	1.172	1.173	1.173	1.174
0.56	0.359	0.634	0.836	0.981	1.082	1.150	1.195	1.224	1.242	1.254	1.261	1.266	1.269	1.270	1.271	1.272	1.272
0.58	0.367	0.654	0.871	1.030	1.144	1.223	1.277	1.314	1.338	1.353	1.364	1.370	1.374	1.377	1.378	1.379	1.380
0.60	0.375	0.673	0.904	1.078	1.206	1.298	1.363	1.408	1.439	1.460	1.474	1.483	1.487	1.493	1.495	1.497	1.498
0.62	0.383	0.693	0.938	1.127	1.270	1.376	1.453	1.508	1.547	1.574	1.593	1.606	1.614	1.620	1.624	1.627	1.628
0.64	0.390	0.712	0.971	1.176	1.335	1.456	1.546	1.613	1.661	1.696	1.721	1.738	1.751	1.759	1.765	1.769	1.772
0.66	0.398	0.731	1.004	1.225	1.401	1.537	1.642	1.722	1.782	1.826	1.859	1.882	1.899	1.912	1.920	1.927	1.931
0.68	0.405	0.749	1.037	1.274	1.467	1.620	1.742	1.836	1.909	1.966	2.007	2.038	2.061	2.079	2.091	2.101	2.108
0.70	0.412	0.767	1.069	1.323	1.533	1.705	1.844	1.955	2.043	2.111	2.165	2.206	2.238	2.262	2.280	2.294	2.304
0.72	0.419	0.785	1.101	1.372	1.600	1.791	1.947	2.075	2.182	2.267	2.334	2.387	2.429	2.462	2.488	2.507	2.523
0.74	0.425	0.802	1.133	1.420	1.667	1.878	2.056	2.205	2.328	2.430	2.514	2.581	2.636	2.680	2.716	2.744	2.766
0.76	0.432	0.819	1.164	1.468	1.734	1.966	2.165	2.335	2.480	2.602	2.704	2.789	2.860	2.918	2.966	3.005	3.037
0.78	0.438	0.836	1.195	1.516	1.802	2.054	2.275	2.469	2.636	2.781	2.904	3.010	3.100	3.176	3.239	3.293	3.338
0.80	0.444	0.852	1.225	1.563	1.868	2.142	2.387	2.605	2.797	2.966	3.115	3.244	3.356	3.453	3.537	3.608	3.670
0.82	0.451	0.869	1.255	1.610	1.935	2.231	2.500	2.743	2.962	3.158	3.334	3.490	3.628	3.750	3.858	3.952	4.035
0.84	0.457	0.884	1.284	1.656	2.001	2.320	2.613	2.883	3.130	3.356	3.561	3.746	3.915	4.066	4.203	4.325	4.434
0.86	0.462	0.900	1.313	1.701	2.066	2.408	2.727	3.024	3.301	3.557	3.794	4.013	4.215	4.400	4.569	4.725	4.866
0.88	0.468	0.915	1.341	1.746	2.131	2.495	2.840	3.166	3.473	3.762	4.034	4.288	4.526	4.749	4.957	5.150	5.330
0.90	0.474	0.930	1.369	1.790	2.195	2.582	2.953	3.308	3.647	3.969	4.277	4.569	4.847	5.111	5.361	5.597	5.821
0.92	0.479	0.944	1.396	1.834	2.258	2.668	3.066	3.449	3.820	4.178	4.523	4.855	5.175	5.483	5.779	6.063	6.336
0.94	0.485	0.959	1.423	1.876	2.320	2.753	3.176	3.590	3.993	4.386	4.769	5.143	5.507	5.861	6.206	6.542	6.868
0.96	0.490	0.973	1.449	1.918	2.381	2.837	3.286	3.728	4.164	4.593	5.015	5.431	5.840	6.243	6.639	7.029	7.411
0.98	0.495	0.987	1.475	1.960	2.441	2.919	3.394	3.865	4.333	4.798	5.259	5.717	6.172	6.623	7.071	7.516	7.957
1.00	0.500	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	4.500	10.000	11.000	12.000	13.000	14.000	15.000	16.000	17.000
1.20	0.545	1.121	1.726	2.359	3.021	3.710	4.424	5.164	5.926	6.711	7.516	8.340	9.183	10.041	10.915	11.802	12.702
1.40	0.583	1.220	1.908	2.642	3.419	4.234	5.051	5.958	6.858	7.779	8.715	9.668	10.627	11.597	12.574	13.556	14.543

مراجع الكتاب

أولا المراجع العربية :

١ ـ الدكتور حسين عطا غنيم ، **مقدمة في بحوث العمليات** ، الطبعة الثانية ، القاهرة : دار الفكر العربي ، ١٩٨٤ .

٢ ـ الدكتور علي السلمي ، **بحوث العمليات واتخاذ القرارات الإدارية** ، القاهرة : دار المعارف ، ١٩٧. .

٣ ـ الدكتورة سونيا البكري ، **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الانتاجية** ، الاسكندرية : المكتب العربي الحديث ، ١٩٨٤ .

٤ ـ الدكتور محمد صالح الحناوي ، **إدارة الإنتاج مدخل كمي** ، الاسكندرية : المكتب العربي الحديث ، ١٩٨٣ .

٥ ـ الدكتور محمد صالح الحناوي ، **بحوث العمليات في مجال الانتاج** ، الاسكندرية : مؤسسة شباب الجامعة ، ١٩٧٩ .

ثانيا : المراجع الأجنبية :

(1) Anderson, D. R.; D. J. Sweeney, and T.A. William, An Introduction to Management Science, Quantitative Approach to Decision Making, 2nd edition, N. Y. : West Publishing Company, 1979 .

(2) Bierman, H, C. Bonini, and W. Hausman , Quantitative Analysis for Business Decisions, Sixth edition Homewood, Illinois: Richard D. Irwin, Inc., 1981 .

(3) Buffa Elwood S., Modern Production / Operations Management - 7th ed. New York, N. Y., : John Wiely & Sons, 1984 .

(4) Gass, S. I. Linear Programming Methods and Applications New York : McGraw-Hill Book Co., 1969 .

(5) Harvey, C. Operations Research, An Introduction to Linear Optimization and Decision Analysis. New York : North Holland . 1979 .

(6) Lee, Sang M., Introduction to Management Science, New York, The Dryden Press, 1983 .

(7) Lee Sang M., Moore, L.J. and Taylor, B. W. Management Science, Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown Company 1981 .

(8) Levin, I. Richard: C.A. Kirkpatrick, D.S. Rubbin, Quanitation Approaches to Management, Fifth edition, N. Y., N. Y. : McGraw - Hill Book Company, 1982 .

(9) Loomba, N.P., and Turban, E. Applied Programming for Management New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974 .

(10) Thierauf, R. J. and Grosse, R. Decision MakingTrough Operations Research. New York, N.Y., John Wiley & Sons, INC .

(11) Turban, E., and Meredith Jack R. Fundamentals of Management Science, Plano, Teras : Business Publications INC. 1981 .

(12) Wagner, H. M. Operation Research with Applications to Managerial Decisions. 2d ed. Englewood Cliffs. N. J. :